Семинар: Градиент поля физической величины

Профессор кафедры теоретической физики

Введение

Градиент — фундаментальное понятие векторного анализа, характеризующее скорость и направление наибольшего изменения скалярного поля. В физике градиент используется для описания:

- Градиента температуры в теории теплопроводности
- Градиента давления в гидродинамике
- Градиента потенциала в электродинамике
- Градиента концентрации в физической химии

1 Оператор "набла"

1.1 Определение и свойства

Оператор набла (оператор Гамильтона) — векторный дифференциальный оператор, обозначаемый символом ∇. В декартовой системе координат:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

1.2 Применение оператора набла

При действии на скалярное поле $\varphi(x, y, z)$ оператор набла дает градиент:

$$\nabla \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$$

2 Определение скалярного поля

Скалярное поле — это функция, которая каждой точке пространства ставит в соответствие некоторое числовое значение (скаляр). Формально, для трёхмерного пространства скалярное поле задаётся как:

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y, z) \mapsto \varphi(x, y, z)$$

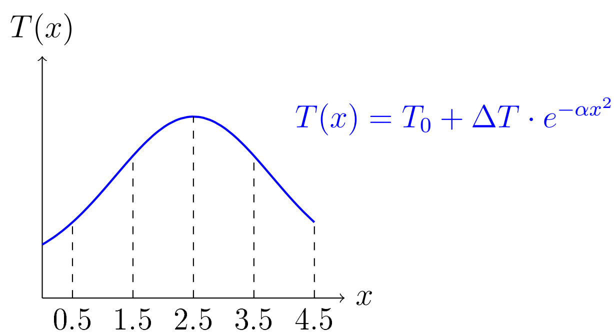
где $\varphi(x, y, z)$ — скалярная величина в точке с координатами (x, y, z).

3 Примеры скалярных полей в физике

3.1 Температурное поле

Распределение температуры в пространстве:

$$T(x, y, z) = T_0 + \Delta T \cdot e^{-\alpha(x^2+y^2+z^2)}$$



Одномерное температурное поле

Рис. 1: Пример одномерного скалярного поля — распределение температуры

3.2 Электростатический потенциал

Потенциал точечного заряда:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

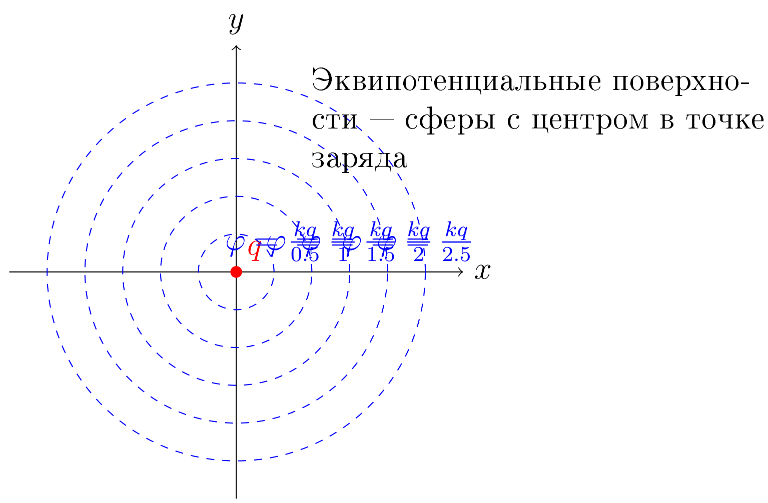


Рис. 2: Скалярное поле электростатического потенциала

3.3 Поле давления в жидкости

Распределение давления в несжимаемой жидкости:

$$P(x, y, z) = P_0 + \rho g z$$

4 Свойства скалярных полей

4.1 Поверхности уровня

Поверхностью уровня скалярного поля называется множество точек, в которых поле принимает постоянное значение:

$$S_c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \varphi(x, y, z) = c\}$$

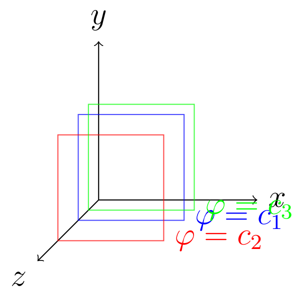


Рис. 3: Поверхности уровня скалярного поля

4.2 Непрерывность и дифференцируемость

Скалярное поле называется:

- **Непрерывным**, если малому изменению координат соответствует малое изменение значения поля
- **Дифференцируемым**, если существуют все частные производные $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$

5 Визуализация скалярных полей

5.1 Методы представления

Таблица 1: Методы визуализации скалярных полей

Метод	**Описание**
Поверхности уровня	Множество точек с одинаковым значением поля
Цветовые карты (heat maps)	Цветовое кодирование значений поля
Графики сечений	Графики поля вдоль определённых направлений
Объёмная визуализация	Трёхмерное представление с прозрачностью

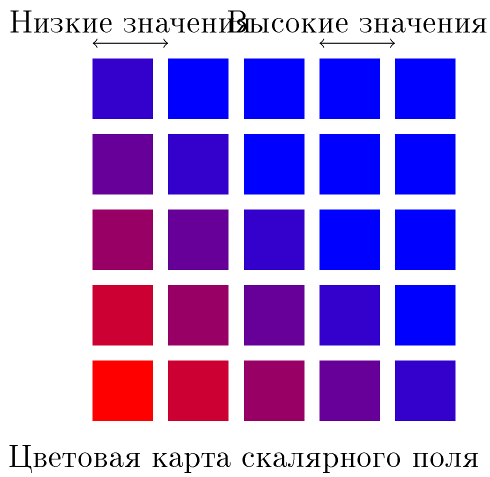


Рис. 4: Визуализация скалярного поля с помощью цветовой карты

6 Физический смысл и приложения

6.1 Физические величины, описываемые скалярными полями

- **Температура** $T(x, y, z)$ — распределение тепловой энергии
- **Давление** $P(x, y, z)$ — силовая характеристика в жидкостях и газах
- **Потенциал** $\varphi(x, y, z)$ — энергетическая характеристика поля
- **Концентрация** $C(x, y, z)$ — распределение вещества
- **Плотность** $\rho(x, y, z)$ — массовая характеристика

6.2 Важность в физике

Скалярные поля являются фундаментальным понятием в физике потому, что:

1. Они описывают **интенсивные свойства** систем
2. Позволяют анализировать **пространственные распределения**

3. Являются основой для определения **векторных полей** через градиент

4. Описывают **потенциальную энергию** в консервативных полях

7 Математический аппарат

7.1 Основные операции

Для скалярных полей определены следующие операции:

- **Градиент**: $\nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$
- **Производная по направлению**: $\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{l}} = \nabla\varphi \cdot \vec{l}_0$
- **Лапласиан**: $\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$

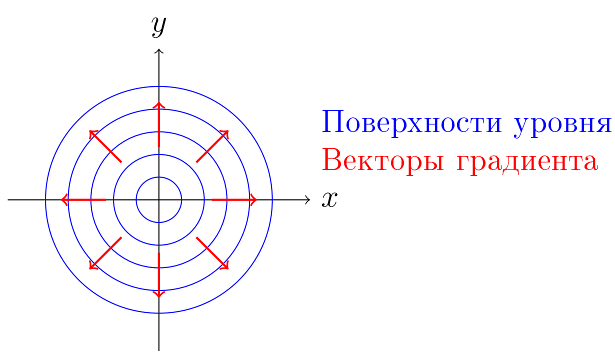


Рис. 5: Связь скалярного поля с его градиентом

Заключение

Скалярное поле — это фундаментальное понятие математической физики, позволяющее описывать пространственное распределение физических величин, имеющих только числовое значение. Понимание свойств скалярных полей необходимо для изучения более сложных векторных и тензорных полей, а также для решения практических задач в различных разделах физики и инженерии.

Ключевые особенности скалярных полей:

- Инвариантность относительно преобразований координат
- Возможность визуализации через поверхности уровня
- Связь с векторными полями через операцию градиента
- Широкое применение в описании физических явлений

8 Численные методы аппроксимации производных

8.1 Методы конечных разностей

Для численного вычисления градиентов используются методы конечных разностей:

- **Прямая разность**: $\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
- **Обратная разность**: $\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$
- **Центральная разность**: $\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$

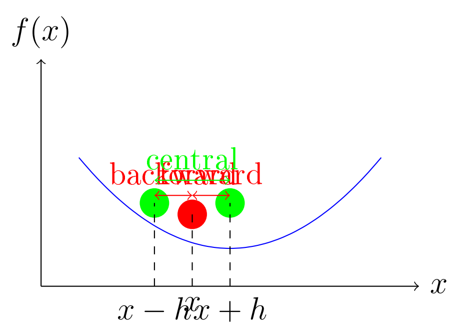


Рис. 6: Методы конечных разностей для аппроксимации производной

9 Одномерный случай

9.1 Введение и пример

В одномерном случае градиент сводится к обычной производной:

$$\nabla f(x) = \frac{df}{dx}$$

Пример: Распределение температуры вдоль стержня:

$$T(x) = 300 + 50 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad L = 10 \text{ м}$$

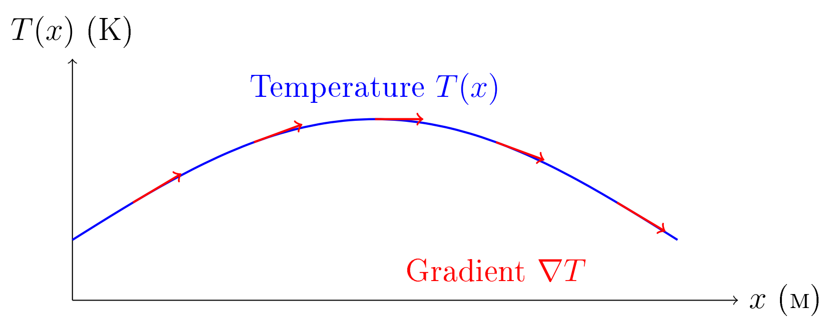


Рис. 7: Градиент температуры вдоль стержня

9.2 Таблица расчетных значений

Таблица 2: Значения температуры и градиента вдоль стержня

x (м)	$T(x)$ (K)	∇T (K/м)	Направление
0.0	300.0	15.71	RT
2.0	340.5	9.70	RT
4.0	350.0	0.00	→R
6.0	340.5	-9.70	LD
8.0	320.2	-15.71	LD
10.0	300.0	-15.71	LD

9.3 Программа на Python для аналитической функции

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def gradient_1d_analytic(f, x, h=1e-6):
"""Compute gradient using central difference method"""
return (f(x + h) - f(x - h)) / (2 * h)

def temperature(x, L=10):
"""Temperature distribution along a rod"""
return 300 + 50 * np.sin(np.pi * x / L)

# Compute gradient at specific points
x_points = np.array([0.0, 2.0, 4.0, 6.0, 8.0, 10.0])
temperatures = temperature(x_points)
gradients = [gradient_1d_analytic(temperature, x) for x in x_points]

# Display results in table format
print("Temperature Gradient Analysis")
print("=" * 50)
print(f"{'x (m)':<8} {'T(x) (K)':<12} {'Nabla T (K/m)':<12} {'Direction':<10}")
print("-" * 50)

for i, x in enumerate(x_points):
T = temperatures[i]
grad = gradients[i]
direction = "RT" if grad > 0.1 else "LD" if grad < -0.1 else "R"
print(f"{x:<8.1f} {T:<12.1f} {grad:<12.2f} {direction:<10}")

# Visualization
x_plot = np.linspace(0, 10, 100)
T_plot = temperature(x_plot)
grad_plot = [gradient_1d_analytic(temperature, x) for x in x_plot]

plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.subplot(2, 1, 1)
plt.plot(x_plot, T_plot, 'b-', linewidth=2)
plt.ylabel('Temperature (K)')
```

```
    plt.title('Temperature Distribution Along Rod')
    plt.grid(True)

    plt.subplot(2, 1, 2)
    plt.plot(x_plot, grad_plot, 'r-', linewidth=2)
    plt.xlabel('Position x (m)')
    plt.ylabel('Gradient nabla T (K/m)')
    plt.title('Temperature Gradient')
    plt.grid(True)

    plt.tight_layout()
    plt.show()

```

Листинг 1: Gradient computation in 1D (Python)

10 Двумерный случай

10.1 Введение и пример

В двумерном случае градиент — вектор, показывающий направление наибольшего роста:

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Пример: Температурное поле на пластине:

$$T(x,y) = 300 + 20e^{-0.1(x^2+y^2)}$$

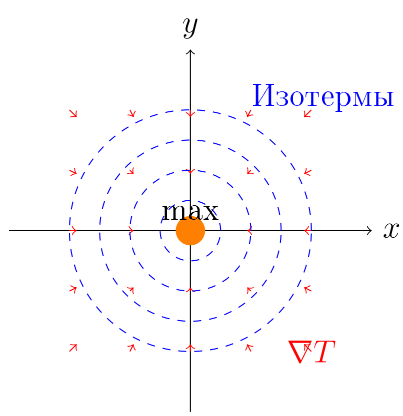


Рис. 8: Градиент температурного поля и изотермы

10.2 Таблица расчетных значений

Таблица 3: Градиент температуры на пластине

(x, y)	$T(x, y)$ (K)	$\frac{\partial T}{\partial x}$	$\frac{\partial T}{\partial y}$	$\lvert\nabla T\rvert$
(0,0)	320.0	0.00	0.00	0.00
(1,0)	318.1	-3.98	0.00	3.98
(0,1)	318.1	0.00	-3.98	3.98
(1,1)	316.2	-3.16	-3.16	4.47
(2,0)	312.7	-6.27	0.00	6.27

10.3 Программа на Python для данных на сетке

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def gradient_2d_grid(f_grid, dx, dy):
"""Compute 2D gradient from grid data using central differences"""
n, m = f_grid.shape
grad_x = np.zeros((n, m))
grad_y = np.zeros((n, m))

# Interior points - central difference
for i in range(1, n-1):
for j in range(1, m-1):
grad_x[i,j] = (f_grid[i, j+1] - f_grid[i, j-1]) / (2 * dx)
grad_y[i,j] = (f_grid[i+1, j] - f_grid[i-1, j]) / (2 * dy)

return grad_x, grad_y

def temperature_2d(x, y):
"""2D temperature field"""
return 300 + 20 * np.exp(-0.1 * (x**2 + y**2))

# Create computational grid
n, m = 20, 20
x = np.linspace(-3, 3, m)
y = np.linspace(-3, 3, n)
```

```
X, Y = np.meshgrid(x, y)

# Compute temperature field
T = temperature_2d(X, Y)

dx = x[1] - x[0]
dy = y[1] - y[0]

# Compute gradients
dT_dx, dT_dy = gradient_2d_grid(T, dx, dy)
grad_magnitude = np.sqrt(dT_dx**2 + dT_dy**2)

# Display results table
print("2D Temperature Gradient Analysis")
print("=" * 70)
print(f"{'Position':<12} {'T (K)':<10} {'dT/dx':<10} {'dT/dy':<10} {'|nabla T|':<10}")
print("-" * 70)

positions = [(0,0), (1,0), (0,1), (1,1), (2,0)]
for pos in positions:
i = np.argmin(np.abs(y - pos[1]))
j = np.argmin(np.abs(x - pos[0]))

print(f"({pos[0]},{pos[1]})     {T[i,j]:<10.1f} {dT_dx[i,j]:<10.2f} "
f"{dT_dy[i,j]:<10.2f} {grad_magnitude[i,j]:<10.2f}")

# Visualization
plt.figure(figsize=(15, 5))

plt.subplot(1, 3, 1)
plt.contourf(X, Y, T, levels=20, cmap='hot')
plt.colorbar(label='Temperature (K)')
plt.title('Temperature Field')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')

plt.subplot(1, 3, 2)
plt.quiver(X[::2, ::2], Y[::2, ::2],
dT_dx[::2, ::2], dT_dy[::2, ::2],
scale=30, color='blue')
plt.title('Temperature Gradient Vectors')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
```

```
    plt.subplot(1, 3, 3)
    plt.contourf(X, Y, grad_magnitude, levels=20, cmap='
   viridis')
    plt.colorbar(label='|Nabla T| (K/m)')
    plt.title('Gradient Magnitude')
    plt.xlabel('x')
    plt.ylabel('y')

    plt.tight_layout()
    plt.show()
```

Листинг 2: 2D gradient from grid data (Python)

11 Трёхмерный случай

11.1 Введение и пример

В трёхмерном пространстве градиент имеет три компоненты:

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Пример: Электростатический потенциал точечного заряда:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{kQ}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad k = 9 \times 10^9, Q = 10^{-9}$$

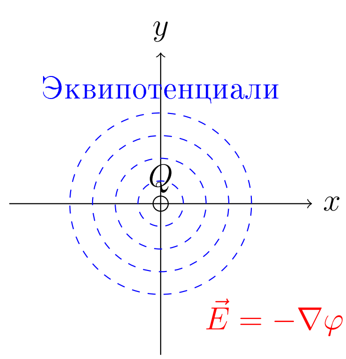


Рис. 9: Градиент потенциала и электрическое поле точечного заряда

11.2 Таблица расчетных значений

Таблица 4: Градиент электрического потенциала

(x, y, z)	φ (В)	E_x (В/м)	E_y (В/м)	E_z (В/м)	$\lvert\vec{E}\rvert$ (В/м)
(1,0,0)	9.00	-9.00	0.00	0.00	9.00
(0,1,0)	9.00	0.00	-9.00	0.00	9.00
(0,0,1)	9.00	0.00	0.00	-9.00	9.00
(1,1,0)	6.36	-3.18	-3.18	0.00	4.50
(1,1,1)	5.20	-1.73	-1.73	-1.73	3.00

11.3 Программа на Python для 3D сетки

```
import numpy as np

def gradient_3d_grid(f_grid, dx, dy, dz):
"""Compute 3D gradient from volumetric data"""
nz, ny, nx = f_grid.shape
grad_x = np.zeros_like(f_grid)
grad_y = np.zeros_like(f_grid)
grad_z = np.zeros_like(f_grid)

# Interior points - central differences
for i in range(1, nz-1):
for j in range(1, ny-1):
for k in range(1, nx-1):
grad_x[i,j,k] = (f_grid[i,j,k+1] - f_grid[i,j,k-1]) / (2 * dx)
grad_y[i,j,k] = (f_grid[i,j+1,k] - f_grid[i,j-1,k]) / (2 * dy)
grad_z[i,j,k] = (f_grid[i+1,j,k] - f_grid[i-1,j,k]) / (2 * dz)

return grad_x, grad_y, grad_z

def electric_potential(x, y, z, Q=1e-9, k=9e9):
"""Electric potential of point charge"""
r = np.sqrt(x**2 + y**2 + z**2)
return k * Q / r if r > 0 else 0

# Create 3D grid
```

```python
    nx, ny, nz = 15, 15, 15
    x = np.linspace(-2, 2, nx)
    y = np.linspace(-2, 2, ny)
    z = np.linspace(-2, 2, nz)
    X, Y, Z = np.meshgrid(x, y, z, indexing='ij')

    # Compute potential
    R = np.sqrt(X**2 + Y**2 + Z**2)
    phi = 9e9 * 1e-9 / np.where(R > 0, R, 1e-10)

    dx = x[1] - x[0]
    dy = y[1] - y[0]
    dz = z[1] - z[0]

    # Compute gradient (electric field)
    dphi_dx, dphi_dy, dphi_dz = gradient_3d_grid(phi, dx, dy, dz)
    E_x, E_y, E_z = -dphi_dx, -dphi_dy, -dphi_dz
    E_magnitude = np.sqrt(E_x**2 + E_y**2 + E_z**2)

    # Display results table
    print("3D Electric Field from Potential Gradient")
    print("=" * 85)
    print(f"{'Position':<12} {'phi (V)':<10} {'Ex (V/m)':<12} {'Ey (V/m)':<12} {'Ez (V/m)':<12} {'|E| (V/m)':<12}")
    print("-" * 85)

    positions = [(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,0), (1,1,1)]
    for pos in positions:
    i = np.argmin(np.abs(x - pos[0]))
    j = np.argmin(np.abs(y - pos[1]))
    k = np.argmin(np.abs(z - pos[2]))

    print(f"({pos[0]},{pos[1]},{pos[2]})  {phi[i,j,k]:<10.2f} {E_x[i,j,k]:<12.2f} "
    f"{E_y[i,j,k]:<12.2f} {E_z[i,j,k]:<12.2f} {E_magnitude[i,j,k]:<12.2f}")

    # Verify theoretical values
    print("\nTheoretical verification:")
    print("At (1,0,0): E = kQ/(r*r) =", 9e9 * 1e-9 / 1**2, "V/m")
```

Листинг 3: 3D gradient from grid data (Python)

Заключение

Градиент является мощным математическим инструментом для анализа скалярных полей в физике. Ключевые выводы:

- Оператор набла ∇ — универсальный инструмент для описания пространственных изменений
- Методы конечных разностей позволяют численно вычислять градиенты для экспериментальных данных
- Градиент всегда направлен в сторону наибольшего роста функции
- Модуль градиента характеризует скорость изменения поля

Физические приложения оператора набла:

- **Градиент**: $\nabla\varphi$ — наибольшая скорость изменения
- **Дивергенция**: $\nabla \cdot \vec{A}$ — плотность источников поля
- **Ротор**: $\nabla \times \vec{A}$ — вихревая характеристика поля
- **Лапласиан**: $\nabla^2\varphi$ — divergence of gradient

$$\boxed{\text{Градиент } \nabla\varphi} \xrightarrow{\text{Векторное поле}} \boxed{\text{Дивергенция } \nabla \cdot \vec{A}} \xrightarrow{\text{Скалярное поле}} \boxed{\text{Ротор } \nabla \times \vec{A}}$$

Рис. 10: Основные операции векторного анализа с оператором набла