

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ
КАЗАХСТАН

Некоммерческое акционерное общество
Алматинский университет энергетики и связи

К.Х. Жунусов, Л.И. Сарженко

**ОСНОВЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ В
ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ**

Учебное пособие

Алматы 2014

УДК 004.383.3: 621.394/397(075.8)

ББК 32.885я73

Ж89 Жунусов К. Х., Сарженко Л. И. Основы цифровой обработки сигналов в телекоммуникационных системах. Учебное пособие. Алматы АУЭС, 2013. – 91 с., табл. 2, ил. 49, библиограф. назв. 19.

ISBN 978-601-7327-85-9

Рассмотрены основные вопросы, изучаемые по дисциплине «Основы цифровой обработка сигналов в телекоммуникационных системах», приведены примеры решения задач по каждому изучаемому разделу, в том числе и с использованием Mathcad. Учебное пособие дополняет лекционные курсы, а также поможет студентам при выполнении семестровых работ.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по программе 5В071900 – Радиотехника, электроника и телекоммуникации всех форм обучения.

ББК 32.885я73

Рецензенты: КазНТУ им. К. Сатпаева канд. физ. мат. наук А.К. Шайхип,
КазНУ им. Аль-Фараби канд. физ. мат. наук
Ф.Б. Белисарова,
АУЭС, каф. АЭС канд. техн. наук А.С. Байкенов

Рекомендовано к изданию Ученым советом Алматинского университета энергетики и связи (Протокол № 5 от 28 01 2014 г.)

ISBN 978-601-7327-85-9

© НАО «Алматинский университет энергетики и связи», 2014 г.

Содержание

Введение	4
1 Обобщенная схема ЦОС	4
2 Аналоговые и дискретные сигналы. Определение и математическое описание	8
2.1 Единичная импульсная функция (символ Кронекера)	10
2.2 Дискретный (цифровой) единичный скачок	10
2.3 Дискретная экспонента	11
2.4 Дискретная синусоида (косинусоида)	12
2.5 Затухающая косинусоида	13
3 Преобразование Фурье	14
3.1 Тригонометрическая и комплексная формы ряда Фурье, амплитудный спектр	14
3.2 Спектральная плотность непериодических сигналов (прямое и обратное преобразования Фурье)	15
3.3 Свойства преобразования Фурье	17
3.4 Спектральная плотность дискретного сигнала	19
3.5 Примеры преобразования Фурье	22
3.6 Дискретное преобразование Фурье (ДПФ)	30
3.7 Быстрое преобразование Фурье (БПФ)	35
3.8 Применение ДПФ	38
4 Прямое и обратное Z-преобразование	39
4.1 Преобразование Лапласа, прямое и обратное Z-преобразование временных функций	39
4.1.1 Свойства Z-преобразования	48
4.2 Методы обратного Z-преобразования	50
4.3 Вычисление интегральных преобразований	54
5 Линейные дискретные системы с постоянными параметрами	58
5.1 Алгоритмы и структурные схемы дискретных систем	58
5.2 Цифровые фильтры	59
5.3 Нерекурсивные ЦФ (фильтры с конечной импульсной характеристикой, КИХ-фильтры)	61
5.4 Рекурсивные цифровые фильтры (фильтры с бесконечным числом отсчетов импульсной характеристики) – БИХ-фильтры	67
5.5 Частотные характеристики цифровых фильтров; типовые звенья ЦФ	71
5.6 Эффекты квантования в цифровых системах	74
5.7 Изменение частоты дискретизации	79
5.8 Увеличение частоты дискретизации (интерполяция) цифрового сигнала	81
5.9 Уменьшение частоты дискретизации (децимация) цифрового сигнала	85
Заключение	90
Список литературы	91

Введение

Прогрессивное развитие различных областей телекоммуникации обеспечивается не менее прогрессивным развитием микропроцессорной, вычислительной техники и взаимосвязанных с ней методов цифровой обработки сигналов (ЦОС). В телефонии, телевизионном вещании и т.п. оцифрованные сигналы практически вытеснили традиционные аналоговые, а современные стандарты сотовой связи разрабатываются только для радиосигналов, представленных в цифровой форме.

В настоящее время отечественных учебников по цифровой обработке сигналов недостаточно, поэтому цель настоящего пособия – попытка восполнить имеющийся пробел, рассмотрев теоретические основы ЦОС и некоторые её базовые алгоритмы, их взаимосвязь и области применения.

Основополагающими дисциплинами при изучении дисциплины «Основы цифровой обработки сигналов в телекоммуникационных системах» являются математика, физика, основы радиотехники, электроники и телекоммуникаций, но наиболее тесно она связана с теорией электрической связи.

Изучение данной дисциплины поможет в дальнейшем глубже понимать многие вопросы таких дисциплин, как «Технология беспроводной связи», «Мобильные телекоммуникации и цифровые системы передачи» и т.п.

Пособие содержит основные теоретические вопросы по цифровой обработке сигналов в телекоммуникационных системах, а также примеры решения конкретных задач и предназначено для студентов, обучающихся по специальности 5В071900 – Радиотехника, электроника и телекоммуникации, а также может быть интересно для всех, кто хочет понять основные принципы современной цифровой обработки радиосигналов.

1 Обобщенная схема ЦОС

Задачи ЦОС сигнала обычно сводятся к трем действиям [1,2,3]:

1 – преобразование входного аналогового сигнала $x(t)$ в цифровую форму, т. е. в последовательность чисел $x(nt)$;

2 – обработка входной последовательности чисел $x(nt)$ по заданному алгоритму цифровым процессором обработки сигналов (ЦПОС) в новую выходную числовую последовательность $y(nt)$;

3 – вывод полученного результата, или обратное преобразование цифрового сигнала $y(nt)$ в аналоговую форму $y(t)$.

Обобщенная схема ЦОС, реализующая перечисленные преобразования, отображена на рисунке 1.1 и состоит из следующих элементов:

- аналоговый фильтр нижних частот (ФНЧ);
- аналогово-цифровой преобразователь (АЦП);
- цифровой процессор обработки сигналов (ЦПОС);
- цифроаналоговый преобразователь (ЦАП);
- сглаживающий фильтр нижних частот (СФНЧ).



Рисунок 1.1 – Обобщенная схема ЦОС

На вход системы поступает ограниченный по длительности аналоговый сигнал $x(t)$ (физический сигнал – напряжение или ток). В силу конечной длительности сигнала его спектр бесконечен. Для преобразования сигнала в цифровую форму на первом этапе сигнал необходимо дискретизовать с частотой дискретизации f_D , которую выбираем, используя теорему Котельникова, по формуле

$$f_D \geq 2f_B, \quad (1.1)$$

f_B – верхняя частота в спектре сигнала.

Реальные сигналы не удовлетворяют условиям теоремы Котельникова из-за бесконечности спектра, т. е. при $f_B \rightarrow \infty$ дискретизация невозможна.

Для ограничения спектра используется фильтр нижних частот ФНЧ, который ограничивает спектр сигнала верхней частотой f_B , называемой частотой Найквиста, как показано на рисунке 1.2.

$$f_B = f_N = f_D/2 = 1/2T. \quad (1.2)$$

Здесь T – шаг дискретизации.

$$T = \frac{1}{2f_B} = \frac{1}{f_D}. \quad (1.3)$$

Часто вместо тактовой частоты f_B используют круговую частоту.

$$\omega_B = 2\pi f_B. \quad (1.4)$$

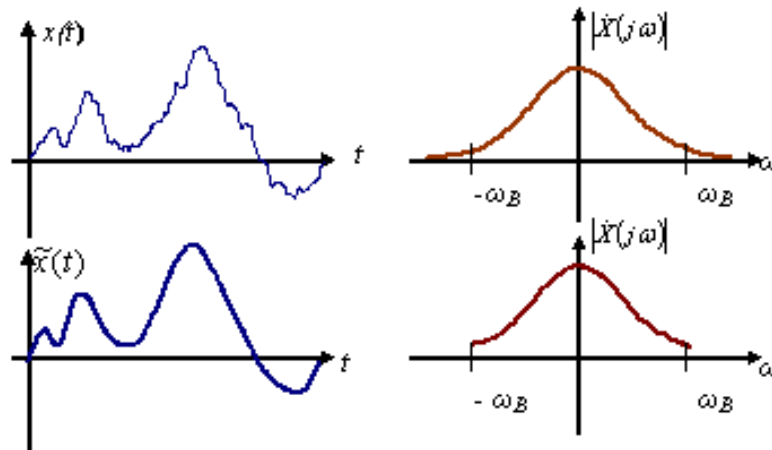
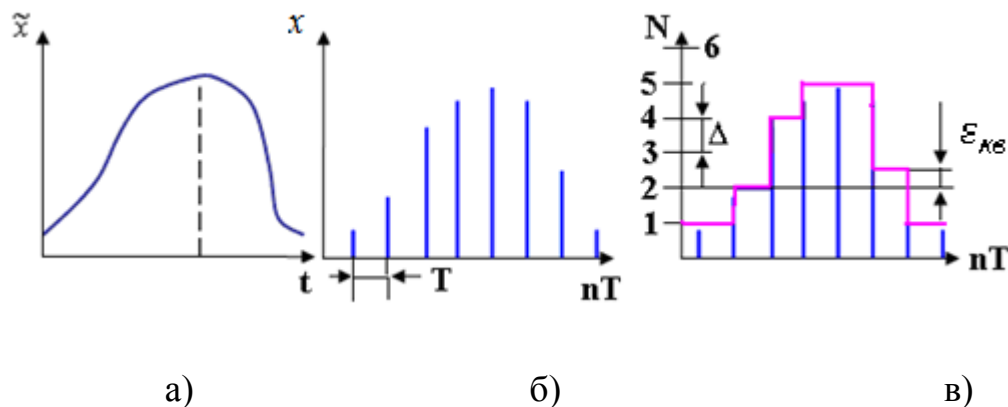


Рисунок 1.2 – Временные (слева) и спектральные (справа) диаграммы на входе и выходе ФНЧ, где $|X(j\omega)|$ – модуль спектральной плотности

Так как энергия сигналов существенно уменьшается с ростом частоты, то искажения, вносимые ФНЧ, незначительны.

С выхода ФНЧ сигнал $\tilde{x}(t)$ (см. рисунок 1.3, а) поступает на вход АЦП, в котором выполняются три операции: дискретизация, квантование и кодирование.

Дискретизация сигнала по времени – это процедура взятия мгновенных значений (выборки или отсчеты) $x(nT)$ аналогового сигнала $\tilde{x}(t)$ через равные промежутки времени: T – шаг дискретизации (см. рисунок 1.3, б).



а) аналоговый сигнал; б) дискретизованный сигнал с шагом дискретизации T ; в) квантованный сигнал (показана огибающая сигнала), с шагом квантования Δ и ошибкой квантования $\varepsilon_{кв}$.

Рисунок 1.3 – Преобразование аналогового сигнала в АЦП

Чем меньше T , тем точнее последовательность отсчетов $x(nT)$ будет отображать исходный сигнал

$$x(nT) = \tilde{x}(t)|_{t=nT}. \quad (1.5)$$

Но, чем выше f_D , тем труднее вычислительно выполнить большое количество операций над отсчетами в темпе их поступления на переработку, и тем сложнее должно быть его устройство. Таким образом, точность представления сигнала требует увеличить f_D а стремление сделать вычислитель как можно более простым приводит к желанию понизить f_D .

Значения f_B определяется конкретным типом сигнала и решаемой задачей. Например, для стандартного телефонного сигнала, у которого $f_B=3,4\text{кГц}$ – минимальная стандартная частота дискретизации $f_D=8\text{кГц}$.

Квантование отсчетов по уровням (или квантование) производится с целью представления дискретных отсчетов, как правило, чисел бесконечной разрядности, числами конечной разрядности. Весь диапазон изменения величины отсчетов разбивается на конечное количество дискретных уровней N (уровней квантования), и каждому отсчету $x(nT)$ по определенному правилу присваивается значение одного из двух ближайших уровней квантования N_i , между которыми оказался данный отсчет (см. рисунок 1.3в). При этом выполняется условие

$$N = 2^n, \quad (1.6)$$

где n показывает разрядность представления числа в двоичной форме.

Уровни квантования кодируются двоичными числами, поэтому каждому отсчету $x(nT)$ на выходе АЦП соответствует двоичное число $x_{Ц}(nT)$. Цифровой сигнал $x_{Ц}(nT)$ отличается от дискретного сигнала $x(nT)$ на величину ошибки квантования.

$$\varepsilon_{кв}(nT) = x_{Ц}(nT) - x(nT). \quad (1.7)$$

С увеличением количества уровней квантования ошибка квантования уменьшается, разрядность чисел увеличивается. Расстояние между соседними уровнями квантования называется шагом квантования Δ . Максимальная ошибка квантования равна половине шага квантования, т. е.

$$\max|\varepsilon_{кв}| = \frac{\Delta}{2}. \quad (1.8)$$

Отсюда следует, что чем больше разрядность АЦП, тем точнее представляется отсчет и тем сложнее и дороже оказывается АЦП. Современные АЦП имеют разрядность от 8 до 20.

Последовательность $x(nT)$ (физический сигнал, преобразованный в последовательность чисел) поступает на вычислитель ЦПОС, который по заданному алгоритму (в результате математических преобразований) каждому отсчету $x(nT)$ ставит в однозначное соответствие выходной отсчет $y(nT)$, который может существенно отличаться от $x(nT)$.

Количество операций (умножений, сложений, пересылок и т. д.) для получения одного отсчета исчисляется тысячами. Но какой бы сложности не был алгоритм обработки, максимальное время вычисления одного отсчета должно быть меньше периода дискретизации T , т. е. между частотой, с которой микропроцессор (вычислитель) производит вычисления f_m и частотой дискретизации f_D , должно выполняться условие: $f_m \gg f_D$. В этом случае работа происходит в режиме реального времени.

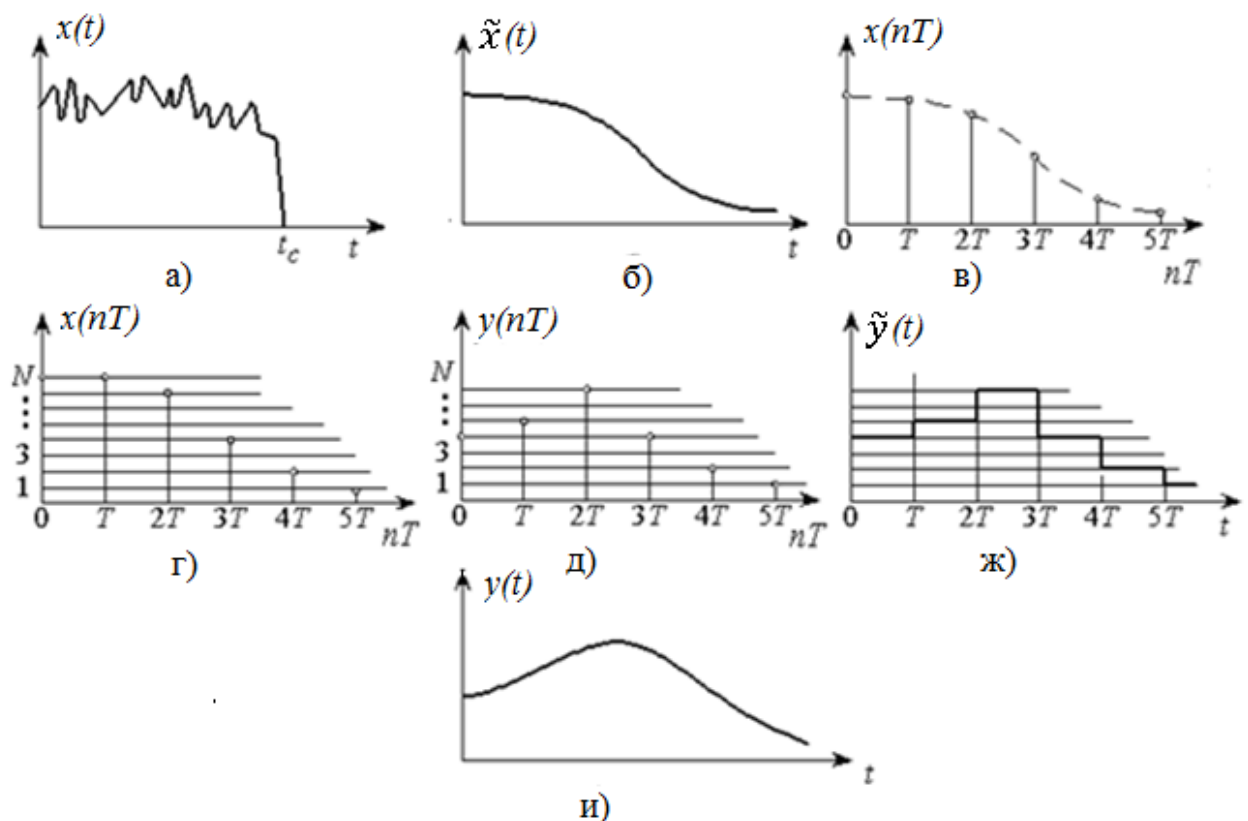
Например, при обработке стандартного телефонного сигнала с $f_D=8$ кГц для обеспечения работы вычислителя в реальном масштабе времени тактовая частота должна быть, по крайней мере, 6 МГц, как в процессорах первого поколения TMS320C10.

Полученные выходные отсчеты подаются на цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП), формирующий ступенчатый сигнал $\tilde{y}(t)$. С

помощью сглаживающего ФНЧ $\tilde{y}(t)$ преобразуется в аналоговый выходной сигнал $y(t)$.

Процесс прохождения сигнала через систему ЦОС показан на рисунке 1.4 [5].

Как видно из рисунка, после прохождения через систему ЦОС произошло преобразование сигнала, и сигнал на выходе $y(t)$ не равен сигналу на входе $x(t)$, т.е. в устройстве ЦПОС произошла обработка сигнала по алгоритму, заданному в процессоре.



а) сигнал на входе; б) сигнал после прохождения ФНЧ; в) дискретизованный сигнал; г) квантованный сигнал; д) дискретизованный и квантованный сигнал после обработки в ЦОС; ж) огибающая сигнала после прохождения ЦАП; и) аналоговый выходной сигнал.

Рисунок 1.4 – Временные диаграммы сигналов

Например, при прохождении процедуры аутентификации (установления подлинности абонента) в системах сотовой связи производится обработка цифрового сигнала, посылаемого базовой станцией, с помощью SIM-карты, содержащей алгоритм аутентификации (АЗ), и индивидуального ключа аутентификации (Ki).

2 Аналоговые и дискретные сигналы. Определение и математическое описание

Сигнал – это физический процесс или явление, несущее сообщение о каком-либо событии, состоянии объекта, команды управления, т.е. содержащее в себе некоторую информацию [4].

В телекоммуникационных системах используются электрические сигналы. Носителем информации является изменяющийся во времени ток или напряжение в электрической цепи, т.к. электрические сигналы легче обрабатывать, чем другие, они хорошо передаются на большие расстояния.

Сигналы делятся на аналоговые, дискретные и цифровые.

Аналоговые сигналы (АС).

Большинство сигналов имеют аналоговую природу, т.е. являются функциями времени, повторяющими закон изменения физической величины или электрическую модель физической величины (значение напряжения в каждый момент времени). АС задается на оси времени на бесконечном множестве точек и описывается некоторой математической функцией времени $x(t)$.

Пример АС: гармонический сигнал $s(t) = S \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ или экспоненциальный сигнал $s(t) = A e^{-at}, (t \geq 0)$.

АС используются в телефонии, радиовещании, телевидении, но ввести такие сигналы в компьютер и обработать невозможно, т.к. на любом интервале времени они имеют бесконечное множество значений, и для точного (без погрешности) представления их значений требуются числа бесконечной разрядности. Поэтому необходимо преобразовать аналоговый сигнал так, чтобы можно было представить его последовательностью чисел заданной разрядности.

Дискретный (дискретизованный) сигнал (ДС).

Дискретизация аналогового сигнала состоит в том, что сигнал представляется в виде последовательности значений, взятых в дискретные моменты времени $t = nT$. Эти значения называются отсчетами, а $T = \text{const}$ называется интервалом дискретизации. Дискретный сигнал характеризует не сам сигнал, а способ его задания. Отсчеты (выборки) ДС представляются числами бесконечной разрядности.

Конечную последовательность отсчетов записывают таким образом:

$$x(nT) = \{x(0), x(T), x(2T), \dots\}.$$

Например: $x(nT) = \{0, 1, -1, -2, 1, \dots\}$.

Здесь:

$$x(0) = 0; x(T) = 1; x(2T) = -1; x(3T) = -2; x(4T) = 1; \dots$$

Цифровые сигналы (ЦС).

Для того чтобы представить дискретный сигнал последовательностью чисел конечной разрядности, его необходимо квантовать. При этом вся область значений сигнала разбивается на уровни, количество которых должно быть представлено в числах заданной разрядности.

Расстояния между этими уровнями называется шагом квантования – Δ . Число этих уровней равно N (от 0 до $N-1$). Каждому уровню присваивается некоторое число: h_0, h_1, \dots, h_{N-1} . *Отсчеты сигнала сравниваются с уровнями квантования, и в качестве сигнала выбирается число, соответствующее некоторому уровню квантования.*

Каждый уровень квантования кодируется двоичным числом с n разрядами, например: $x_0 = 000$; $x_1 = 001$; $x_2 = 010$ и т.д. Число уровней квантования N и наименьшее число разрядов n двоичных чисел, кодирующих эти уровни, связаны соотношением:

$$n = \log_2 N. \quad (2.1)$$

Например, при $N=4, n=2$; $N=8, n=3$; $N=16, n=4$; $N=32, n=5$ и т. д.

Если кодируемая функция может принимать как отрицательные, так и положительные значения, то знак функции кодируется, как правило, с помощью специального знакового разряда. Пример цифровых сигналов – сигналы импульсно-кодовой модуляции, используемые в системах многоканальной связи.

Рассмотрим примеры некоторых дискретных сигналов, полученных дискретизацией типовых аналоговых, часто используемых в телекоммуникационных системах [3].

2.1 Единичная импульсная функция (символ Кронекера)

Аналоговая форма сигнала – это дельта-функция, или функция Дирака. Представляет собой бесконечно узкий импульс с бесконечной амплитудой, расположенный при нулевом значении аргумента функции. «Площадь» импульса равна единице:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ \infty, & t = 0, \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (2.2, 2.3)$$

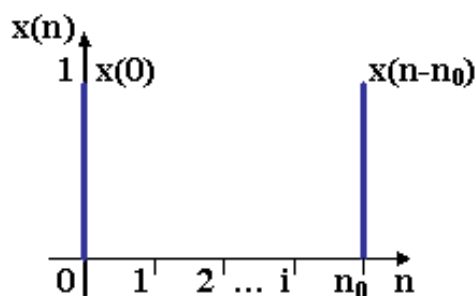
Обладает фильтрующим свойством:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0). \quad (2.4)$$

Дискретная форма сигнала (см. рисунок 2.1).

Единичная импульсная функция (цифровой единичный импульс) – аналог дельта-функции.

Представляет собой одиночный отсчет с единичным значением:



$$x(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}, \quad x(n - n_0) = \begin{cases} 1, & n = n_0 \\ 0, & n \neq n_0 \end{cases}, \quad (2.5, 2.6)$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Рисунок 2.1 – Цифровой единичный импульс при $n=0$ и задержанный на n_0

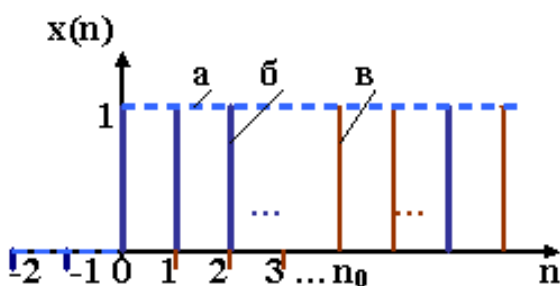
2.2 Дискретный (цифровой) единичный скачок

Аналоговая форма сигнала – это функция единичного скачка $\sigma(t)$, она же функция Хевисайда, она же функция включения. Равна нулю для отрицательных значений аргумента и единице – для положительных. При нулевом значении аргумента функцию считают либо неопределенной, либо равной $1/2$:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1/2, & t = 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Дискретный (цифровой) единичный скачок по смыслу полностью соответствует своему аналоговому прообразу.

Задержанный цифровой единичный скачок описывается соотношением:



$$x(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}, \quad x(n - n_0) = \begin{cases} 1, & n \geq n_0, \\ 0, & n < n_0. \end{cases}, \quad (2.8, 2.9)$$
$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

а – функция Хевисайда; б – цифровой единичный скачок при $n=0$; в – скачок, задержанный на n_0 .

Рисунок 2.2 – Дискретный скачок

2.3 Дискретная экспонента

В аналоговой форме экспоненциальная функция – это сигнал бесконечной длительности:

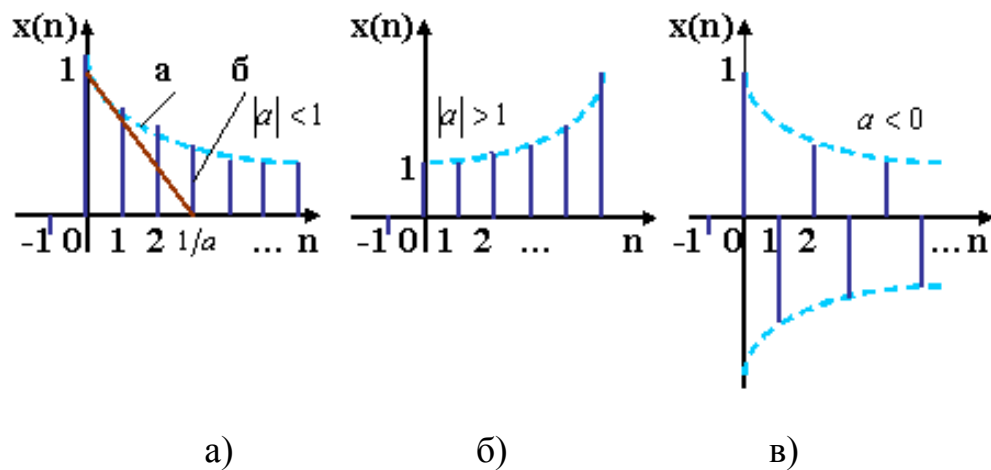
$$s(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Дискретная экспоненциальная функция определяется следующим образом (см. рисунок 2.3).

$$x(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

При $|a| < 1$ экспонента убывающая (см. рисунок 2.3, а), при $|a| > 1$ – возрастающая (см. рисунок 2.3, б), при $a < 0$ – знакопеременная (см. рисунок 2.3, в), при $a=1$ все значения отсчетов одинаковы и равны 1 при $n \geq 0$.



а – огибающая, соответствующая аналоговой форме экспоненциальной функции; б – отсчеты (выборки) дискретизованной экспоненциальной функции.

Рисунок 2.3 – Дискретная экспонента

2.4 Дискретная синусоида (косинусоида)

В аналоговой форме синусоида описывается функцией

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi), \quad (2.12)$$

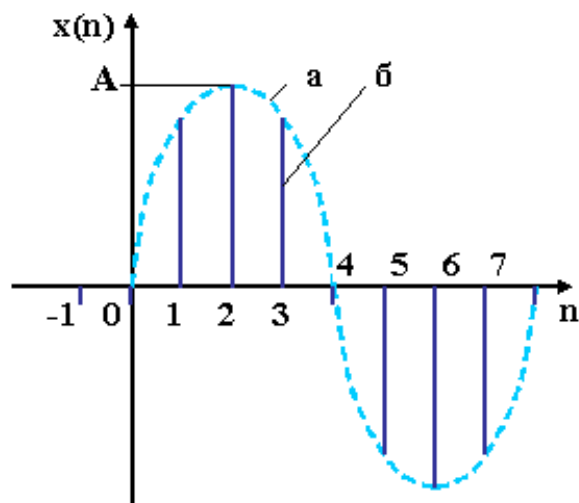
где ω – циклическая частота; φ – фаза; A – амплитуда.

В дискретной форме синусоида (см. рисунок 2.4) описывается соотношением

$$x(n) = A \sin(\omega T n), \quad (2.13)$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

где T – период дискретизации.



а – огибающая, соответствующая аналоговой форме синусоиды; б – отсчеты (выборки) дискретизованной синусоиды.

Рисунок 2.4 – Дискретная синусоида

2.5 Затухающая косинусоида

Затухающая косинусоида (синусоида) – сигнал с частотой ω , начальной фазой φ и амплитудой A , меняющейся по экспоненциальному закону:

$$s(t) = Aa^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (2.14)$$

T – период функции.

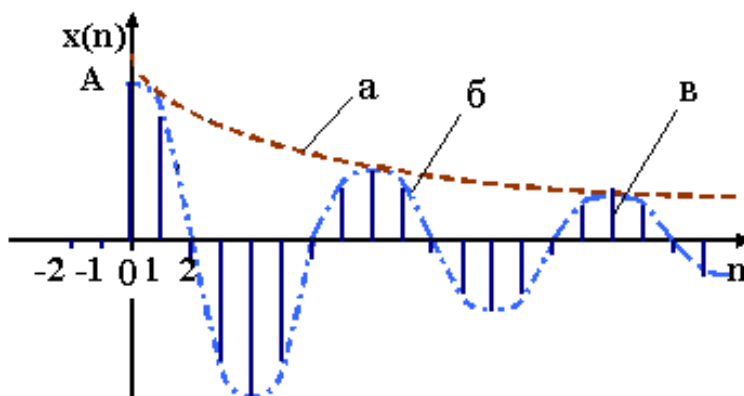
Дискретная затухающая синусоида представляет собой отсчеты синусоиды с произвольной частотой и начальной фазой и экспоненциально меняющейся амплитудой (см. рисунок 2.5):

$$x(n) = Aa^n \cos(\omega nT), \quad (2.15)$$

где T – период дискретизации;

A – амплитуда;

ω – круговая частота.



а – экспонента; б – косинусоида; в – отсчеты (выборки)
дискретизованной косинусоиды.

Рисунок 2.5 – Затухающая косинусоида с амплитудой, меняющейся по экспоненциальному закону

3 Преобразование Фурье

3.1 Тригонометрическая и комплексная формы ряда Фурье, амплитудный спектр

Для анализа периодических аналоговых сигналов используется их разложение в ряд Фурье. При этом они представляются в виде суммы гармонических функций либо комплексных экспонент с частотами, образующими арифметическую прогрессию. Ряд Фурье может быть применен для представления не только периодических сигналов, но и сигналов конечной длительности. При этом оговаривается временной интервал, для которого строится ряд Фурье, а в остальные моменты времени сигнал считается равным нулю. Для расчета коэффициентов ряда такой подход фактически означает периодическое продолжение сигнала за границами рассматриваемого интервала [4].

Синусно-косинусная форма ряда Фурье.

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)), \quad (3.1)$$

$\omega_1 = 2\pi/T$ – круговая частота,

$k\omega_1 = \omega_k$ – гармоники.

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(k\omega_1 t) dt,$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin(k\omega_1 t) dt, \quad (3.2)$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt.$$

Вещественная форма ряда Фурье.

Учитывая, что

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_k = b_k/a_k, \quad (3.3)$$

получим эквивалентную форму ряда Фурье:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t + \varphi_k). \quad (3.4)$$

Если $s(t)$ – четная функция, фазы φ_k могут принимать только значения 0 и π , а если $s(t)$ – нечетная функция, то возможные значения фазы равны $\pm\pi/2$.

Комплексная форма ряда Фурье.

Получается из вещественной формы представлением косинуса в виде полусуммы комплексных экспонент (вытекает из формулы Эйлера $e^{jx} = \cos x + j \sin x$):

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx}). \quad (3.5)$$

Применив данное преобразование к вещественной форме ряда Фурье, получим суммы комплексных экспонент с положительными и отрицательными показателями:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{2} (\exp(jk\omega_1 t + j\varphi_k) + \exp(-jk\omega_1 t - j\varphi_k)). \quad (3.6)$$

Будем трактовать экспоненты со знаком «минус» в показателе как члены ряда с отрицательными номерами, $a_0/2$ станет членом ряда нулевым номером. Получится комплексная форма записи ряда Фурье:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{jk\omega_1 t}. \quad (3.7)$$

Комплексные коэффициенты ряда связаны с амплитудами A_k и фазами φ_k , вещественной формы ряда Фурье следующими соотношениями:

$$\dot{C}_k = \frac{1}{2} A_k e^{j\varphi_k}, \quad A_k = 2|\dot{C}_k|, \quad \varphi_k = \operatorname{arg}(\dot{C}_k). \quad (3.8; 3.9; 3.10)$$

Формулы связи комплексных коэффициентов с коэффициентами a_k и b_k синусно-косинусной формы ряда Фурье имеют вид:

$$\dot{C}_k = \frac{a_k}{2} - j \frac{b_k}{2}, \quad a_k = 2\operatorname{Re}(\dot{C}_k), \quad b_k = -2\operatorname{Im}(\dot{C}_k). \quad (3.11; 3.12; 3.13)$$

Формула расчета коэффициентов ряда Фурье в комплексной форме имеет вид:

$$\dot{C}_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \exp(-jk\omega_1 t) dt. \quad (3.14)$$

Если $s(t)$ – четная функция, \dot{C}_k будут чисто вещественными, если $s(t)$ – нечетная функция, коэффициенты ряда окажутся чисто мнимыми.

Совокупность амплитуд гармоник ряда Фурье часто называют амплитудным спектром, а совокупность их фаз – фазовым спектром.

Если анализируемый сигнал оказывается вещественным, то его амплитудный и фазовый спектры обладают симметрией:

$$A_{-k} = A_k, \dot{C}_{-k} = \dot{C}_k^*, \varphi_{-k} = -\varphi_k. \quad (3.15)$$

3.2 Спектральная плотность непериодических сигналов (прямое и обратное преобразования Фурье)

Спектральная плотность одиночного аналогового импульса.

Преобразование Фурье является инструментом спектрального анализа непериодических сигналов. Его можно применять и к сигналам периодическим, используя аппарат обобщенных функций.

Проиллюстрируем переход от ряда Фурье к преобразованию Фурье [3,9].

Сформируем ряд Фурье для периодической последовательности импульсов произвольной формы (см. рисунок 3.1).

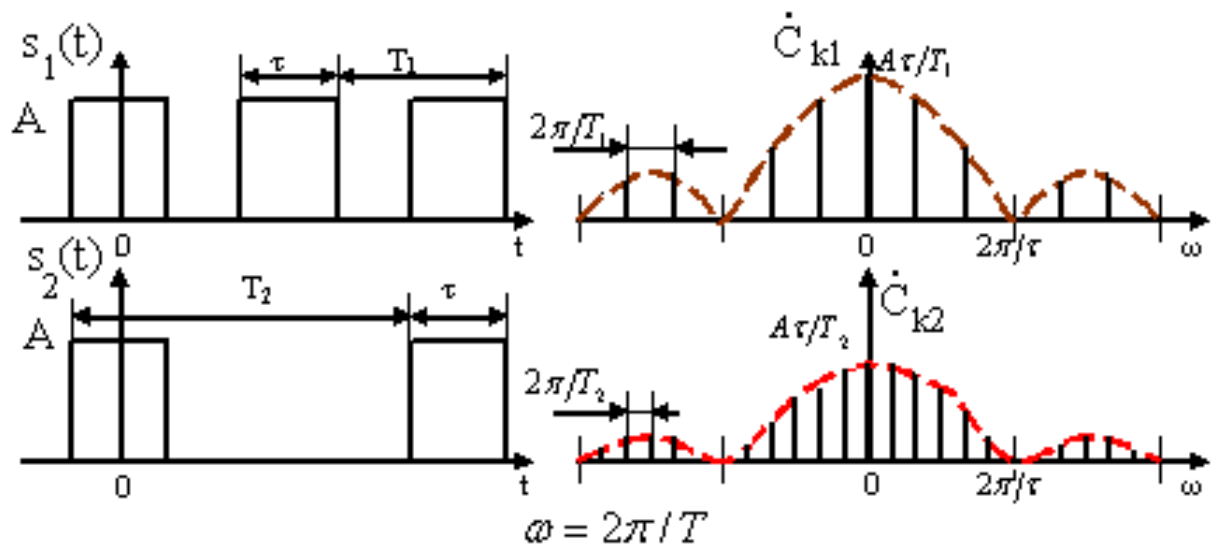


Рисунок 3.1 – Изменение спектра последовательности прямоугольных импульсов при двукратном увеличении периода их следования

Не меняя формы импульсов, увеличим период их повторения (заполнив промежутки нулевым значением) и снова рассчитаем коэффициенты ряда Фурье. Формула для расчета коэффициентов показывает, что придется вычислять тот же самый интеграл, но для более тесно расположенных частот $\omega_k = k\omega_1$ ($\omega = 2\pi/T$). Изменение пределов интегрирования не играет роли, так как, на добавившемся между импульсами пространстве, сигнал имеет нулевое значение. Но общий уровень гармоник снизится из-за деления результата интегрирования на увеличившийся период T .

Итак, с ростом периода следования импульсов, гармоники располагаются ближе друг к другу по частоте, а общий уровень спектральных составляющих становится все меньше. Но вид вычисляемого интеграла не меняется.

Если устремить период к бесконечности (превратив периодическую последовательность в одиночный импульс), гармоники спектра будут плотно занимать всю частотную ось, а их амплитуды упадут до нуля (станут бесконечно малы). Однако взаимное соотношение между уровнями гармоник не изменится, и будет определяться все тем же интегралом. Поэтому при спектральном анализе непериодических сигналов формула для расчета коэффициентов комплексного ряда Фурье преобразуется следующим образом:

- частота перестает быть дискретно меняющейся и становится непрерывным параметром преобразования (т. е. $k\omega_1$ заменяется на ω);
- удаляется множитель $1/T$;
- результатом вычислений вместо нумерованных коэффициентов ряда \dot{C}_k является функция частоты $\dot{S}(\omega)$ – спектральная функция (спектральная плотность) сигнала $s(t)$.

Формула прямого преобразования Фурье имеет вид:

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (3.16)$$

В формуле самого ряда Фурье суммирование заменяется интегрированием, перед интегралом появляется деление на 2π . Полученное выражение называется обратным преобразованием Фурье:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.17)$$

Итак:

- прямое преобразование Фурье позволяет найти спектральную плотность $\dot{S}(\omega)$ импульса $s(t)$;

- обратное преобразование Фурье позволяет вычислить мгновенное значение импульса $s(t)$, если задана его спектральная плотность $\dot{S}(\omega)$.

Если использовать не круговую частоту ω , а обычную (циклическую) $f = \omega/2\pi$, формулы прямого и обратного преобразования Фурье становятся более симметричными, отличаясь лишь знаком в показателе экспоненты:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt, \quad (3.18)$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(f) e^{j2\pi f t} df. \quad (3.19)$$

Если анализируемый сигнал $s(t)$ – вещественная функция, то $\dot{S}(\omega)$ – сопряжено-симметричная относительно нулевой частоты, т. е. значения спектральной функции на частотах ω и $-\omega$ являются комплексно-сопряженными по отношению друг к другу:

$$\dot{S}(-\omega) = \dot{S}^*(\omega). \quad (3.20)$$

Если $s(t)$ – четная функция, то спектр будет чисто вещественным (четным), если $s(t)$ – нечетная функция, то спектральная функция $\dot{S}(\omega)$ будет чисто мнимой и нечетной.

Модуль спектральной плотности называют амплитудным спектром, а ее аргумент – фазовым спектром. Для вещественного сигнала амплитудный спектр является четной, а фазовый – нечетной функцией частоты:

$$|\dot{S}(-\omega)| = |\dot{S}(\omega)|, \quad (3.21)$$

$$\varphi_S(-\omega) = -\varphi(\omega). \quad (3.22)$$

Вывод: непериодический сигнал бесконечной протяженности во времени имеет сплошной спектр, ограниченный по частоте.

Если сигнал $x(t)$ является периодическим с периодом T_c , равным его длительности, то его спектр будет дискретным.

3.3 Свойства преобразования Фурье

Под свойствами преобразования Фурье понимают взаимное соответствие трансформации сигналов и их спектров (на примере двух абстрактных сигналов $f(t)$ и $g(t)$, имеющих спектральные функции $\dot{F}(\omega)$ и $\dot{G}(\omega)$).

Линейность.

Преобразование Фурье – это линейное интегральное преобразование, т.е. *спектр суммы равен сумме спектров.*

Если

$$s(t) = \alpha f(t) + \beta g(t), \text{ то } \dot{S}(\omega) = \alpha \dot{F}(\omega) + \beta \dot{G}(\omega). \quad (3.23, 3.24)$$

Задержка.

Если τ – время задержки:

$$s(t) = f(t - \tau),$$

то спектральная функция изменится следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) e^{-j\omega(t-\tau)} d(t - \tau) e^{-j\omega\tau} = \\ &= \dot{F}(\omega) e^{-j\omega\tau}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Изменение масштаба оси времени.

Если изменить длительность сигнала, сохраняя его форму, то новый сигнал будет иметь вид:

$$s(t) = f(\alpha t). \quad (3.26)$$

При $|\alpha| > 1$ сигнал сжимается, при $|\alpha| < 1$ – растягивается.

Преобразование спектра сигнала будет иметь вид при $\alpha > 0$:

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha t) e^{-j\frac{\omega}{\alpha} \alpha t} d(\alpha t) = \frac{1}{\alpha} \dot{F}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right). \quad (3.27)$$

Видно, что изменение длительности сигнала приводит к изменению ширины спектра в противоположную сторону (аргумент t на α умножается, а ω делится). При $\alpha < 0$ производится перестановка пределов интегрирования.

Обобщая, можно утверждать, что *зеркальное отражение сигнала относительно начала отсчета времени приводят к зеркальному отражению спектра относительно нулевой частоты. Для вещественного сигнала это соответствует комплексному сопряжению спектра.*

$$\dot{S}(\omega) = \dot{F}(-\omega) = \dot{F}^*(\omega). \quad (3.28)$$

Спектр свертки сигналов.

Свертка сигналов (3.29) – интегральная операция, часто используемая в радиотехнике, т.к. она описывает прохождение сигнала через линейную систему с постоянными параметрами.

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t')g(t - t')dt'. \quad (3.29)$$

После преобразования Фурье (без доказательства) получим:

$$\dot{S}(\omega) = \dot{F}(\omega)\dot{G}(\omega). \quad (3.30)$$

Спектр свертки сигналов равен произведению спектров этих сигналов.

3.4 Спектральная плотность дискретного сигнала

Прямое преобразование Фурье осуществляет переход из временной области в частотную. Оно является взаимно-однозначным, поэтому представление сигнала в частотной области одержит столько же информации, сколько и исходный сигнал во временной области.

Преобразование Фурье позволяет вычислить спектральную плотность аналогового сигнала. Дискретный же сигнал является последовательностью чисел, поэтому для анализа его спектра обычными аналоговыми средствами необходимо сопоставить этой последовательности некоторую функцию.

Для этого, как правило, отсчеты представляют в виде дельта-функции с соответствующими множителями и задержками. Для последовательностей отсчетов дискретизованного сигнала $s_d(t)$, представленного отсчетами $\{x(nT)\}$ получится следующий сигнал:

$$s_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(t - n). \quad (3.31)$$

Преобразование Фурье линейно, спектр дельта-функции равен единице, а задержка сигнала во времени приводит к умножению спектра на комплексную экспоненту. Это позволит записать спектр дискретизованного сигнала:

$$\dot{S}_D(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}. \quad (3.32)$$

Свойство спектра любого дискретного сигнала: спектр является периодическим, в данном случае его период равен 2π (т.е. круговой частоте дискретизации, т.к. составляя сигнал из дельта-функций, мы выбрали единичный интервал между ними, что дает $\omega_D = 2\pi$:

$$\dot{S}_D(\omega \pm 2\pi) = \dot{S}_D(\omega). \quad (3.33)$$

Размерность спектральной функции совпадает с размерностью отсчетов, т.к. дельта-функции времени, из которых был составлен дискретный сигнал, имеет размерность частоты.

Формула (3.32) позволяет вычислить спектральную функцию по известным отсчетам. При конечном числе отсчетов этот расчет несложен.

Рассмотрим иную задачу. Даны $x(nt)$ – отсчеты аналогового сигнала $s(t)$, взятые с периодом T – интервалом дискретизации:

$$x(nt) = s(nt).$$

Как в этом случае спектр дискретного сигнала $\dot{S}_D(\omega)$ (1.15) связан со спектром аналогового сигнала $\dot{S}(\omega)$?

Рассматриваемый дискретизированный сигнал является последовательностью дельта-функций, «взвешенной» значениями отсчетов $s(nt)$ аналогового сигнала $s(t)$ (см. рисунок 3.2) [3,9].

$$S_D(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nt)\delta(t - nT). \quad (3.34)$$

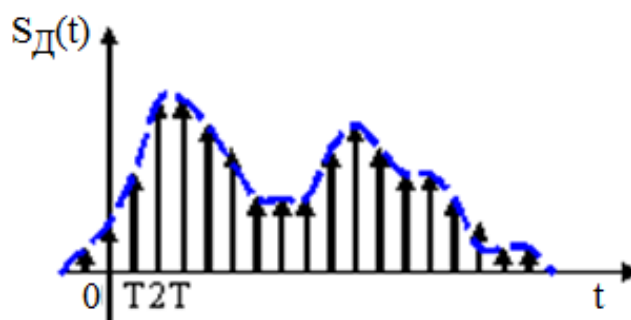


Рисунок 3.2 – Представление дискретизованного сигнала последовательностью дельта-функций, взвешенной значениями отсчетов

Например, последовательность отсчетов $s(nt) = \dots \{3, 2, 1, 0, -1\}$ может быть записана в виде:

$$s(nt) = 3\delta(t) + 2\delta(t - 1T) + 1\delta(t - 2T) + 0\delta(t - 3T) - 1\delta(t - 4T).$$

Как часто следует брать отсчеты?

Их следует брать так часто, чтобы успевать отследить все, даже самые быстрые изменения сигнала. Иначе при восстановлении этого сигнала по дискретизированным отсчетам часть информации будет потеряна, и форма восстановленного сигнала $s_B(t)$ будет отличаться от формы исходного сигнала $s(t)$ (частота отсчетов определяется теоремой Котельникова).

Так как функция $\delta(t - nT)$ равна нулю всюду, кроме момента $t = nT$, можно заменить в выражении (3.26) константы $s(nt)$ на исходный непрерывный сигнал $s(t)$:

$$s_D(t) = s(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (3.35)$$

Сумма, входящая в (3.35), является периодическим сигналом с периодом T и может быть представлена в виде ряда Фурье с коэффициентами:

$$\dot{C}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-j\omega_n t} dt. \quad (3.36)$$

При этом учтено, что в интервал интегрирования $(-T/2; T/2)$ попадает только одна дельта-функция, соответствующая $n = 0$.

Таким образом, периодическая последовательность дельта-функций может быть представлена в виде комплексного ряда Фурье:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_n t}, \quad (3.37)$$

где $\omega_n = 2\pi n/T$.

Подставив (3.37) в (3.35), получим

$$s_D(t) = \frac{s(t)}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_n t} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(t) e^{j\omega_n t}. \quad (3.38)$$

Умножение сигнала на $\exp(j\omega_n t)$ соответствует сдвигу спектральной функции на ω_n , поэтому спектр дискретизированного сигнала можно записать следующим образом:

$$\dot{S}_D(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{S}\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega - n\omega_1). \quad (3.39)$$

Таким образом, спектр дискретизированного сигнала представляет собой бесконечный ряд сдвинутых между собой на $\omega_1 = 2\pi/T$ копий спектра исходного непрерывного сигнала $s(t)$ – рисунок 3.3. Расстояние по частоте между соседними копиями спектра равно частоте дискретизации $\omega_D = 2\pi/T$.

Из-за наличия в формуле (3.39) множителя $1/T$ спектр дискретизированного сигнала имеет размерность, совпадающую с размерностью сигнала, т. к. $\delta(t)$ имеет размерность частоты.

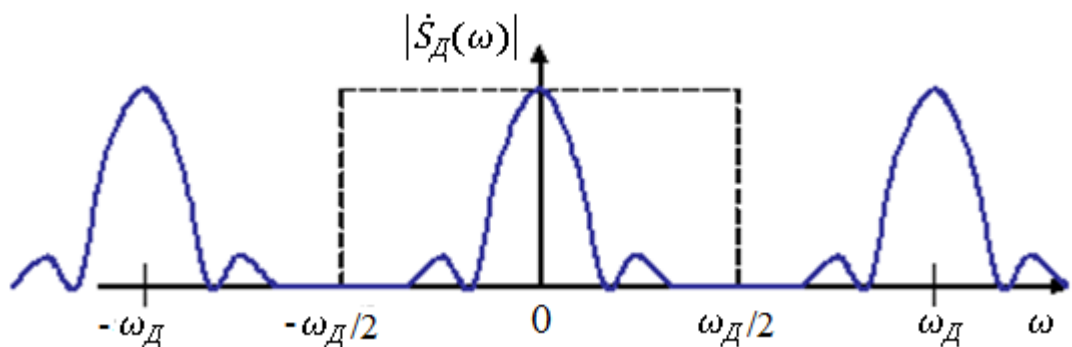


Рисунок 3.3 – Спектр дискретизованного сигнала

Характер спектра еще раз демонстрирует частотно-временную дуальность преобразования Фурье:

- периодический сигнал – дискретный спектр;
- периодический спектр – дискретный сигнал.

Формула (3.39) предполагает, что отсчеты $\{x(nT)\}$ получены путем дискретизации аналогового сигнала $s(t)$, и показывает связь между спектрами дискретизированного и аналогового сигналов.

Формулы:

$$\dot{S}_D(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \text{ и } \dot{S}_D(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{S}\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right)$$

дают одинаковый результат.

Рисунок наглядно демонстрирует и способ восстановления непрерывного сигнала по дискретным отсчетам. Для этого необходимо пропустить дискретный сигнал через идеальный ФНЧ с частотой среза, равной половине частоты дискретизации. АЧХ такого фильтра показана на рисунке 3.3 пунктиром.

Точное восстановление сигнала возможно, если сдвинутые копии спектра не перекрываются. Из рисунка видно, что для этого необходимо, чтобы частота дискретизации как минимум в два раза превышала верхнюю граничную частоту в спектре сигнала:

$$\omega_D > 2\omega_B. \quad (3.40)$$

3.5 Примеры преобразования Фурье

Пример 3.1. Прямоугольный импульс.

Прямоугольный импульс центрирован относительно начала координат, как это показано на рисунке 3.4 [3,4,6,9].

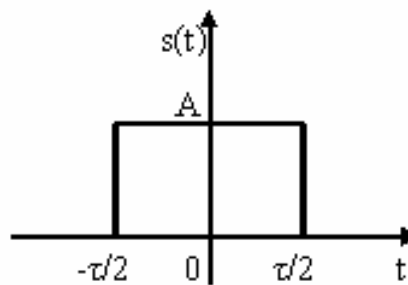


Рисунок 3.4 – Прямоугольный импульс

Его математическая модель имеет вид:

$$s(t) = \begin{cases} A, & |t| \leq \tau/2, \\ 0, & |t| > \tau/2. \end{cases} \quad (3.41)$$

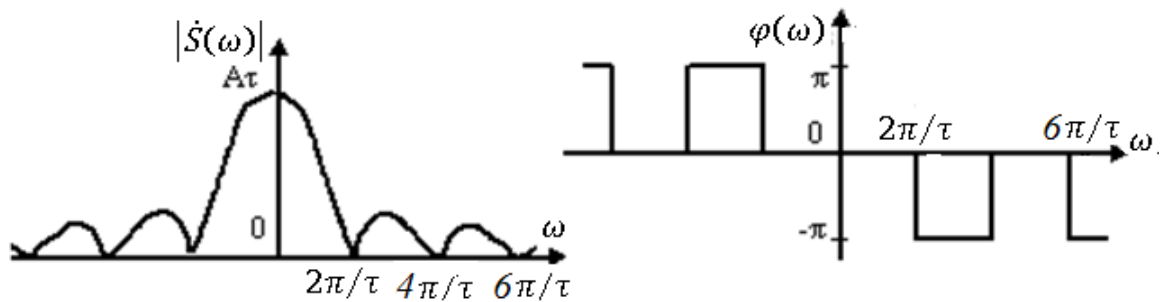
Определим спектральную функцию по формуле

$$\begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j\omega t} dt = -\frac{A}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{A}{j\omega} (e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}) = A\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}. \end{aligned}$$

формула Эйлера

Спектр представляет собой функцию вида $\frac{\sin x}{x}$. Амплитудный спектр имеет лепестковый характер с шириной лепестка $\frac{2\pi}{\tau}$, т. е. обратно пропорциональной длительности импульса. При $\omega=0$ спектральная функция равна площади импульса – $A\tau$. Спектральная функция является вещественной, поэтому фазовый спектр принимает лишь два значения 0 и π ,

в зависимости от знака функции $\frac{\sin x}{x}$. Значения фазы π и $-\pi$ неразличим. Разные знаки для фазового спектра при $\omega > 0$ и $\omega < 0$ используются лишь с целью представить его в виде нечетной функции (см. рисунок 3.5).



а) – амплитудный спектр; б) – фазовый спектр.

Рисунок 3.5 – Спектры прямоугольного импульса

Пример 3.2. Прямоугольный импульс с задержкой во времени.

Пусть импульс длиной τ начинается в нулевой момент времени – рисунок 3.6.

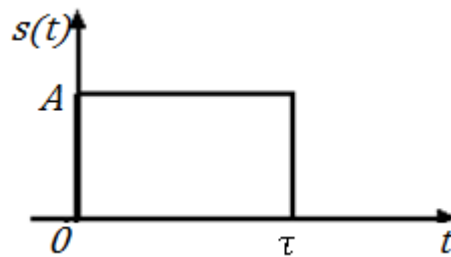


Рисунок 3.6 – Прямоугольный импульс, задержанный во времени

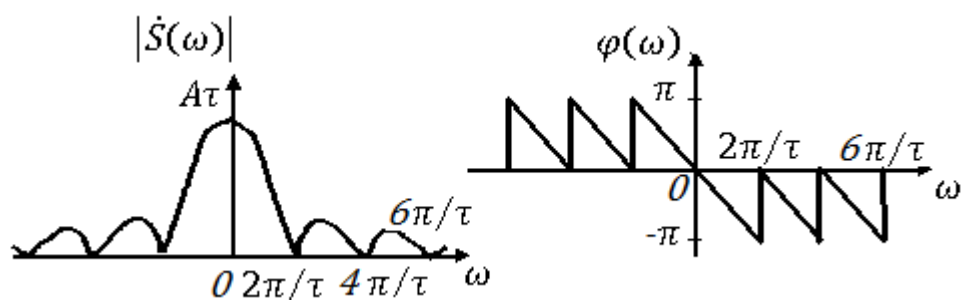
Его формула имеет вид:

$$S(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & t < 0, t > \tau. \end{cases} \quad (3.42)$$

Определим спектральную функцию (преобразование Фурье) по формуле:

$$\dot{S}(\omega) = \int_0^\tau A e^{-j\omega t} dt = \frac{A}{j\omega} (1 - e^{-j\omega\tau}) = A\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \exp\left(-j\frac{\omega\tau}{2}\right).$$

В результате решения видно, что после сдвига импульса во времени его амплитудный спектр остался прежним, а фазовый приобрел сдвиг, линейно зависящий от частоты – рисунок 3.7.



а) – амплитудный спектр; б) – фазовый спектр.

Рисунок 3.7 – Спектры прямоугольного импульса, задержанного во времени

Спектры прямоугольных импульсов имеют лепестковый характер и постираются до бесконечности, постепенно затухая. Поэтому вводят понятие эффективной ширины спектра, за которую принимают ширину главного лепестка, равную $2\pi/\tau$. Из формулы видно, что ширина главного лепестка обратно пропорциональна длительности импульса τ , т. е. чем короче сигнал, тем шире его спектр. Произведение эффективных значений длительности сигнала и ширины его спектра называется базой сигнала и остается равным некоторой константе, составляющей несколько единиц (в данном случае 2π).

Длительность сигнала и ширина его спектра подчиняются соотношению неопределенности, что означает, что произведение этих параметров (база сигнала) не может быть меньше единицы (по максимуму ограничений не существует). Следовательно, можно сформировать сигнал большой длительности, одновременно имеющий и широкий спектр (широкополосный или сложный, или сигнал с большой базой). А короткие сигналы с узким спектром существовать не могут.

Пример 3.3. Несимметричный треугольный импульс.

Несимметричный треугольный импульс представлен на рисунке 3.8.

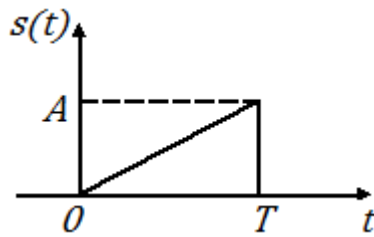


Рисунок 3.8 – Несимметричный треугольный импульс

Он описывается формулой:

$$s(t) = \begin{cases} A \frac{t}{T}, & 0 \leq t \leq T, \\ 0, & t < 0, t > T. \end{cases} \quad (3.43)$$

Определим спектральную плотность импульса и построим графики АЧХ и ФЧХ.

$$\begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= \int_0^T \frac{At}{T} e^{-j\omega t} dt = \frac{A}{T} \int_0^T t e^{-j\omega t} dt = \frac{A}{j\omega T} \int_0^T t e^{-j\omega t} d(-j\omega t) = \\ &= \frac{A}{(j\omega)^2 T} \int_0^T (-j\omega t) e^{-j\omega t} d(-j\omega t) = \left| \int x e^x dx = x e^x - e^x - \right. \\ &\quad \left. \text{интегрирование по частям} \right| = \frac{A}{(j\omega)^2 T} \left[(-j\omega t) e^{-j\omega t} \Big|_0^T - e^{-j\omega t} \Big|_0^T \right] = \frac{A}{(j\omega)^2 T} - \\ &= \frac{A}{(j\omega)^2 T} e^{-j\omega T} - \frac{A}{j\omega} e^{-j\omega T}. \end{aligned}$$

Амплитудный и фазовый спектры изображены на рисунке 3.9. Амплитудный спектр не содержит ярко выраженных лепестков, для определения его эффективной ширины необходим иной критерий. Определим его эффективную ширину по уровню 0,1 от максимума. Из графика видно, что эта ширина равна примерно $6\pi/T$. А база сигнала равна 6π .

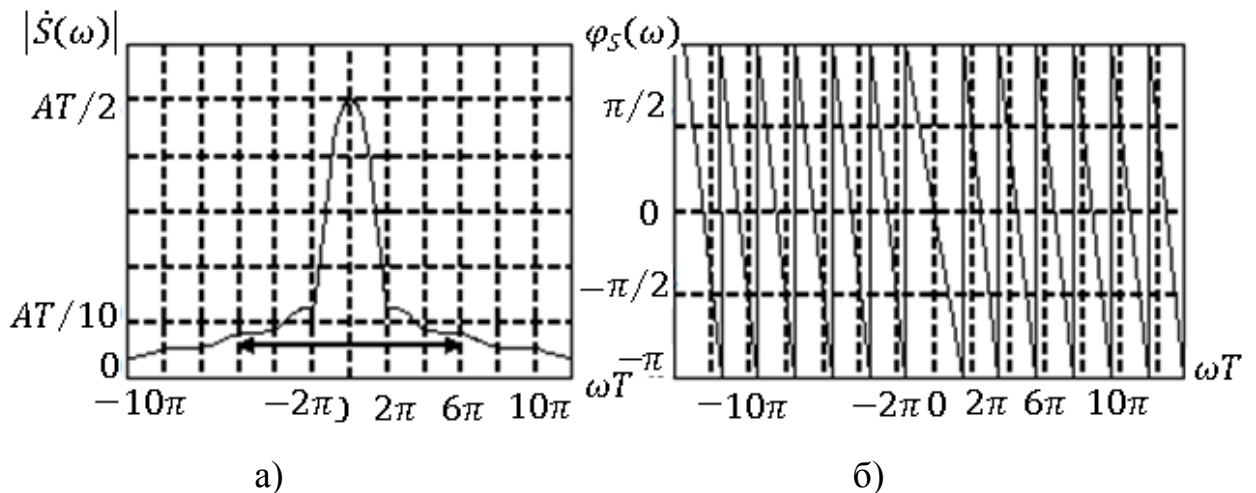


Рисунок 3.9 – Амплитудный (а)) и фазовый (б)) спектры несимметричного треугольного импульса

Спектральная плотность импульса при $\omega = 0$ численно равна его площади, т.е. $S(0) = A\tau_H$. Это положение справедливо для импульса $s(t)$ произвольной формы. Если в (3.16) $\omega = 0$, то

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j0 \cdot t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt,$$

т.е. площадь импульса $s(t)$.

Некоторые наиболее часто употребляющиеся в радиотехнике сигналы и их спектральные плотности приведены в таблице 3.1 [5].

3.6 Дискретное преобразование Фурье (ДПФ)

В настоящее время обработка сигналов чаще всего производится в частотной области, что диктуется значительным сокращением объема цифровой аппаратуры и времени обработки. При этом, как сигнал, так и его спектр необходимо перед вводом в вычислительное устройство представить в виде отсчетов, т. е. чисел. Как же представить спектр сигнала в виде отсчетов?

Рассмотрим спектр дискретизованного периодического сигнала.

Подвергнем дискретной обработке сигнал $s(t)$, имеющий спектр $\dot{S}(\omega)$ и длительность T_c (см. рисунок 3.10, а). В результате дискретизации сигнал заменим отсчетами $x(nT) = \{x(0), x(2T), x(2T), \dots, x(N-1)\}$, взятыми в моменты времени, соответствующие интервалам дискретизации [9].

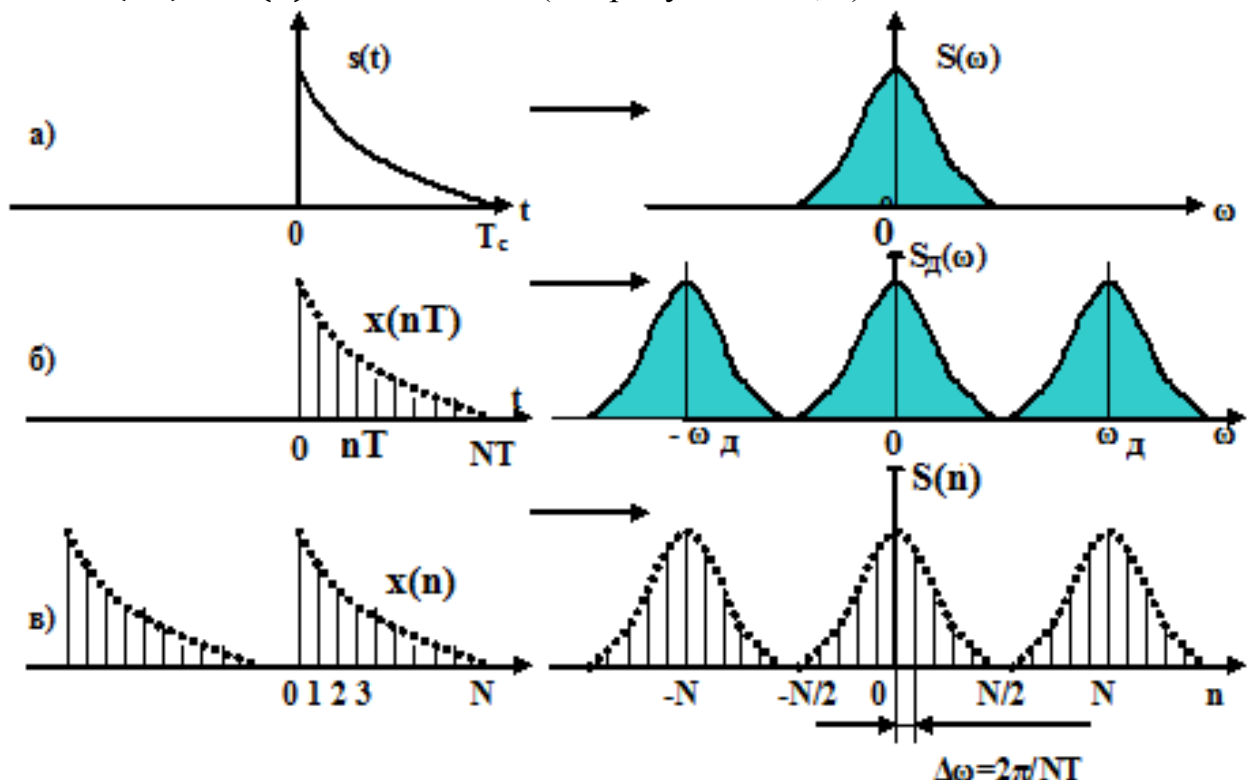
Полное число отсчетов этого сигнала будет равно:

$$N = \frac{T_c}{T}, \text{ где } T = \frac{1}{f_d} = \frac{1}{2F_B} - \text{интервал дискретизации.}$$

Спектр дискретизованного сигнала станет периодическим с периодом повторения ω_d (см.рисунок 3.10,б).

Пусть последовательность отсчетов $\{x(n)\}$ станет периодической с периодом N :

$x(nT) = x(n)$ для любого n (см. рисунок 3.10, в).



а) аналоговый сигнал $s(t)$ и его спектр $S(\omega)$; б) дискретизированный сигнал $s_d(t)$ его спектр $S_d(\omega)$ (сплошной); в) периодическая последовательность $\{s(n)\}$ с периодом N и дискретное преобразование Фурье (ДПФ) $\{S(n)\}$ – спектр дискретного периодического сигнала.

Рисунок 3.10 – Дискретизация сигнала по времени и спектру

И эта последовательность также полностью описывается конечным набором чисел, в качестве которого возьмем произвольный фрагмент длиной N , например $\{x(n); n = 0, 1, \dots, N - 1\} = \{x(0), x(1), x(2), \dots, x(N - 1)\}$.

Поставленный в соответствие этой последовательности импульсный сигнал из смещенных по времени дельта-функций имеет вид:

$$s_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(t - nT) \quad (3.44)$$

будет периодическим с минимальным периодом NT .

Так как сигнал (3.44) является дискретным, его спектр должен быть периодическим с периодом $2\pi/T$. Так как этот сигнал является также и периодическим, его спектр должен быть дискретным с расстоянием между гармониками, равным $\Delta\omega = 2\pi/T_c = 2\pi/(NT)$.

Итак, периодический дискретизованный сигнал имеет периодический дискретный спектр, который также описывается набором из N чисел (один период спектра содержит $\frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{NT} = N$ гармоник).

Рассмотрим, как вычисляется спектр периодического дискретного сигнала. Так как сигнал периодический, будем раскладывать его в ряд Фурье, определив коэффициенты $\dot{S}(n)$ этого ряда согласно общей формуле:

$$\dot{C}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \exp(-jn\omega_1 t) dt.$$

Получим

$$\begin{aligned} \dot{S}(n) &= \frac{1}{NT} \int_0^{NT} s(t) e^{-j\omega_n t} dt = \frac{1}{NT} \int_0^{NT} \left(\sum_{k=0}^{N-1} x(k) \delta(t - kT) \right) e^{-j\omega_n t} dt = \\ &= \frac{1}{NT} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \int_0^{NT} \delta(t - kT) e^{-j\omega_n t} dt = \frac{1}{NT} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j\omega_n t} = \\ &= \frac{1}{NT} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp\left(-j \frac{2\pi nk}{N}\right) \end{aligned} \quad (3.45)$$

Таким образом, формула (3.45) для вычисления комплексных амплитуд гармоник представляет собой линейную комбинацию отсчетов сигнала.

В (3.45) реальный масштаб времени фигурирует только в множителе $1/T$ перед оператором суммирования. При рассмотрении дискретных последовательностей обычно оперируют номерами отсчетов и спектральных гармоник без привязки к действительному масштабу времени и частоты. Поэтому множитель $1/T$ из (3.45) удаляют, т. е. считают частоту дискретизации равной единице. Удаляют и множитель $1/N$ (хотя по этому поводу нет единого мнения).

Полученное выражение называется дискретным преобразованием Фурье (ДПФ):

$$\dot{S}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp\left(-j \frac{2\pi nk}{N}\right). \quad (3.46)$$

Можно вывести формулу дискретного преобразования Фурье, исходя из следующих рассуждений:

- спектр дискретного сигнала имеет вид:

$$\dot{S}_d(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) e^{-j\omega k};$$

- подставим $\omega = n\Delta\omega$, получим:

$$S_{\text{ДП}}(n\Delta\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j\Delta\omega nkT} = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j\frac{2\pi nk}{N}},$$

$n = 0, \pm 1, \dots, \pm N/2$, если N – четное.

Аргументы $n\Delta\omega$ и kT обозначают просто n и k . Поэтому ДПФ можно записать в виде:

$$\dot{S}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp\left(-j\frac{2\pi nk}{N}\right), \quad n = 0, \pm 1, \dots, \pm N/2, \quad (3.47)$$

то же, что и (3.46).

Выражение (3.46) трактуем как алгоритм вычисления коэффициентов $\dot{S}(n)$ по заданным временным отсчетам $\{x(k)\}$.

При четном N и действительном $x(k)$:

$$\dot{S}\left(\frac{N}{2} + 1\right) = \dot{S}^*\left(\frac{N}{2} - 1\right), \quad l = 0, 1, \dots, N/2,$$

где $\dot{S}^*(n)$ – величина, комплексно-сопряженная $\dot{S}(n)$.

Действительно, подставляя $\dot{S}(n)$ ($n = (N/2) + 1$) и учитывая, что N является периодом, получим:

$$\dot{S}\left(\frac{N}{2} + l\right) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}(\frac{N}{2}+l)k} = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}(\frac{N}{2}-l)k} = \dot{S}^*\left(\frac{N}{2} - l\right), \quad (3.48)$$

$l = 0, 1, \dots, N/2$.

Что и требовалось доказать.

При $l = 0$ $\dot{S}(N/2) = \dot{S}^*(N/2)$, т. е. $S(N/2)$ – всегда действительное число. Это справедливо и для $S(0)$.

На основе доказанных свойств ДПФ картину образования периодической структуры спектра можно пояснить построением, показанным на рисунке 3.11 (для $N=8$) [3].

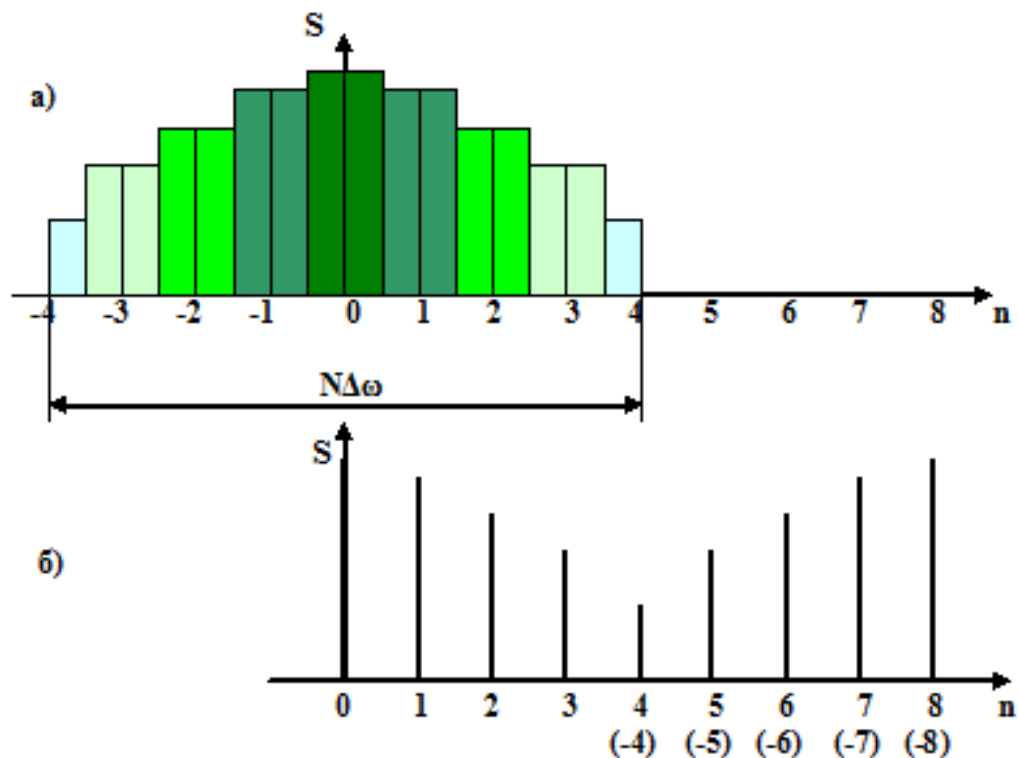


Рисунок 3.11 – Нумерация спектральных коэффициентов при четном N

Амплитудный спектр исходного непрерывного сигнала представлен на рисунке 3.11, а. Весь диапазон разбит на N равных интервалов $\Delta\omega$. Отсчетные точки на оси частот расположены в середине каждого интервала. На рисунке 3.11, б представлено периодическое продолжение спектра. В точке $n = N/2 = 4$ $\dot{S}(4) = \dot{S}(-4)$ – действительное число, в точке $n = 5 = (N/2) + 1$ спектральная плотность $\dot{S}(5) = \dot{S}^*(3)$ а по модулю $|\dot{S}(5)| = |\dot{S}^*(3)|$ и т.д. При $N=8$ начинается новый период последовательности $\dot{S}(n)$. В пределах одного периода выражение (3.46) можно записывать в виде:

$$\dot{S}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp\left(-j \frac{2\pi nk}{N}\right), n=0, 1, \dots, N \quad (3.49)$$

Именно в такой форме его и записывают.

Существует и обратное дискретное преобразование Фурье (ОДПФ). Переход от дискретного спектра к временным отсчетам сигнала выражается, используя дуальность преобразования Фурье, следующей формулой:

$$x(k) = C \sum_{n=0}^{N-1} \dot{S}(n) \exp\left(j \frac{2\pi nk}{N}\right), k=0, 1, \dots, N-1. \quad (3.50)$$

Это выражение отличается от формулы прямого ДПФ лишь знаком в показателе комплексной экспоненты и наличием коэффициента C перед оператором суммирования.

Для определения постоянного коэффициента C в выражение (3.50) $\dot{S}(n)$ из (3.49):

$$s(k) = C \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} s(m) e^{-j \frac{2\pi nm}{N}} \right] e^{j \frac{2\pi nk}{N}} = C \sum_{m=0}^{N-1} s(m) \sum_{n=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi n}{N}(k-m)}. \quad (3.51)$$

При $m = k$ внутренняя сумма обращается в N , а при любом другом значении m – в нуль (как сумма векторов, концы которых делят окружность единичного радиуса на равные дуги). Следовательно, в правой части останется одно слагаемое $Cs(k)N$ из чего вытекает $C = 1/N$. Таким образом, ОДПФ принимает следующую форму:

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{(N/2)-1} \dot{S}(n) \exp\left(j \frac{2\pi nk}{N}\right), k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.52)$$

Вне интервала $0 \leq k \leq N-1$ ОДПФ определяет периодическое продолжение исходной последовательности $s(k)$, показанное на рисунке 3.10, в (левая часть).

Итак, дискретизованному сигналу $s_d(t)=\{x(k)\}$, $k=0, 1, \dots, N-1$, соответствует сплошной спектр $S_d(\omega)$ с периодической структурой (см. рисунок 3.10, б).

Периодической последовательности дискретизованных сигналов $\{x(k)\}$, повторяемых с периодом N , соответствует дискретизованный спектр $S(n)$ с периодической структурой (см. рисунок 3.10, в).

Главный период спектра в (3.49) для циклических частот от $-0,5$ до $0,5$, для угловых частот от $-\pi$ до π . При нечетном значении N границы главного периода по частоте (значения $\pm f_N$) находятся на половину шага по частоте за отсчетами $\pm N/2$, и, соответственно, верхний предел суммирования в (3.52) устанавливается равным $N/2$.

В вычислительных операциях на ЭВМ для исключения отрицательных частотных аргументов (отрицательных значений номеров n) и использования идентичных алгоритмов прямого и обратного преобразования Фурье главный период спектра обычно принимается в интервале от 0 до $2f_N$ ($0 \leq n \leq N$), а суммирование в (3.52) производится соответственно от 0 до $N-1$. При этом следует учитывать, что комплексно сопряженным отсчетам S_n^* интервала $(-N, 0)$ двустороннего спектра в интервале $0 - 2f_N$ соответствуют отсчеты S_{N+1-n} (т.е. сопряженными отсчетами в интервале $0 - 2f_N$ являются отсчеты S_n и S_{N+1-n}).

Пример. На интервале $T = [0, 99]$, $N=100$ задан дискретный сигнал $s(k) = \sum_{i=3}^8 \delta(k-i)$ – прямоугольный импульс с единичными значениями на точках k от 3 до 8. Форма сигнала и модуль его спектра в главном частотном диапазоне, вычисленного по формуле $\dot{S}(n) = \sum_{k=0}^{99} s(k) \cdot \exp(-\frac{j2\pi kn}{100})$ с нумерацией по n от -50 до +50 с шагом по частоте, соответственно, $\Delta\omega = \frac{2\pi}{100}$, приведены на рисунке 3.12 [19].

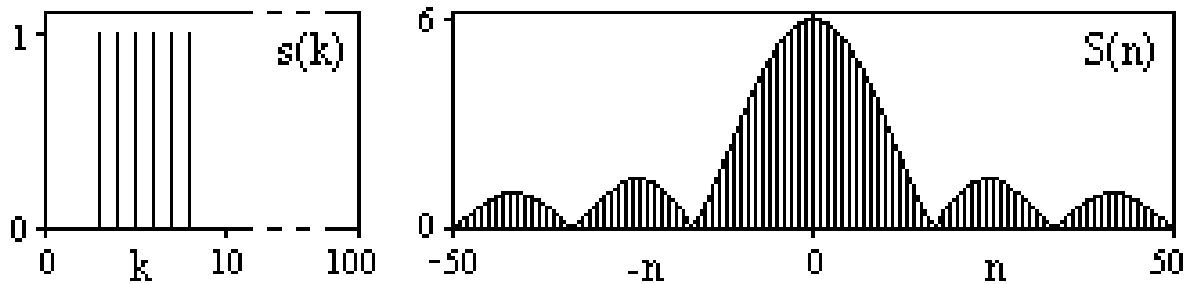
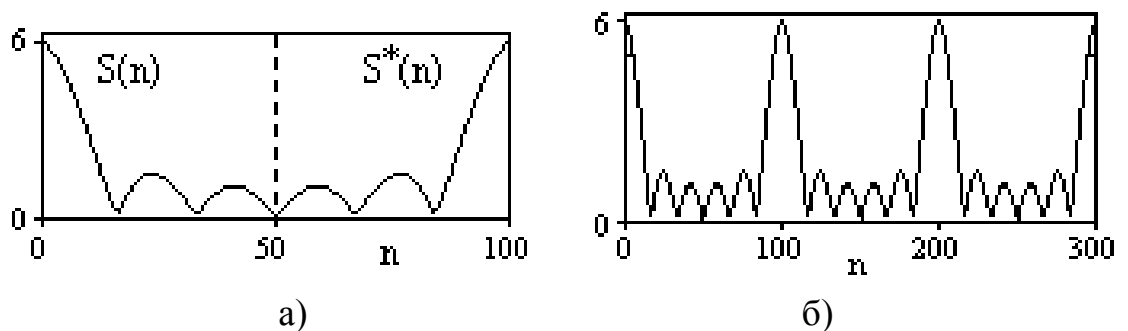


Рисунок 3.12 – Дискретный сигнал и модуль его спектра

На рисунке 3.13, а) приведена огибающая значений другой формы представления главного диапазона спектра. Независимо от формы представления спектр периодичен, в чем нетрудно убедиться, если вычислить значения спектра для большего интервала аргумента n с сохранением того же шага по частоте, как это показано на рисунке 3.1, б) для огибающей значений спектра.



а) – для 100 отсчетов; б) – для 300 отсчетов.

Рисунок 3.13 – Модуль спектра

На рисунке 3.14 показано обратное преобразование Фурье для дискретного спектра, выполненное по формуле $s'(k) = (1/100)S(n)\exp(j2\pi kn/100)$, которое показывает периодизацию

исходной функции $s(k)$, но главный период $k = \{0, 99\}$ этой функции полностью совпадает с исходным сигналом $s(k)$.

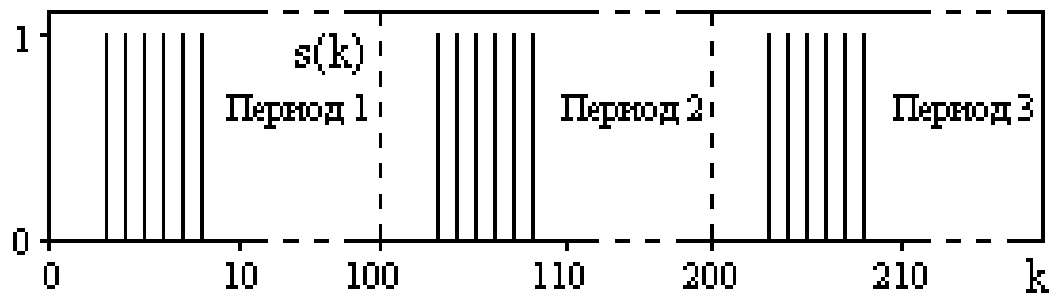


Рисунок 3.14 – Обратное преобразование Фурье

Свойства дискретного преобразования Фурье:

1) Линейность преобразования. Спектр суммы (разности) дискретных сигналов равен сумме (разности) их спектров.

2) Сдвиг дискретного сигнала во времени. Если сигналу $s(t)$, представленному совокупностью отсчетов $x(k), k = 0, 1, \dots, N - 1$, соответствует ДПФ $\dot{S}(n\Delta\omega)$, то сигналу $s(t - mt)$, где m – целое число, соответствует ДПФ

$$e^{-j\frac{2\pi}{N}nm} \dot{S}(n\Delta\omega), \quad (3.53)$$

т. е. сдвиг последовательности отсчетов на m интервалов приводит лишь к изменению фазо-частотной характеристики ДПФ на величину $\frac{2\pi}{N}nm$ (теорема запаздывания).

3) Теорема свертки. Если ДПФ $\dot{S}(n\Delta\omega)$ соответствует дискретному сигналу $s_d(t) = \sum_{k=0}^{N_s-1} x(k)\delta(t - kT)$, а ДПФ $\dot{G}(n\Delta\omega)$ – сигналу $g_d(t) = \sum_{k=0}^{N_g-1} g(k)\delta(t - kT)$, то произведению $\dot{S}(n\Delta\omega)\dot{G}(n\Delta\omega)$ соответствует сигнал (линейная свертка)

$$y(mT) = \sum_{k=0}^{N-1} x(m - k)g(k), \quad N \geq N_s + N_g. \quad (3.54)$$

При $N < N_s + N_g$ получается так называемая круговая свертка.

3.7 Быстрое преобразование Фурье (БПФ)

Из выражений ДПФ можно видеть, что для вычисления каждой гармоники нужно N операций комплексного умножения и сложения и соответственно N^2 операций на полное выполнение ДПФ. При больших объемах массивов данных это может приводить к существенным временным затратам. Ускорение вычислений достигается при использовании быстрого преобразования Фурье (БПФ, fast Fourier transform – FFT).

Оно базируется на том, что при вычислениях среди множителей (синусов и косинусов) есть много периодически повторяющихся значений (в силу периодичности функций). Алгоритм БПФ группирует слагаемые с одинаковыми множителями в пирамидальный алгоритм, значительно

сокращая число умножений за счет исключения повторных вычислений. В результате быстроедействие БПФ в зависимости от N может в сотни раз превосходить быстроедействие стандартного алгоритма. При этом следует подчеркнуть, что алгоритм БПФ даже точнее стандартного, т.к. сокращая число операций, он приводит к меньшим ошибкам округления.

Допустим, что массив чисел s_k содержит $N = 2^r$ отсчетов (r – целое). Разделим исходный массив на два первых промежуточных массива с четными и нечетными отсчетами:

$$s_{k'} = s_{2k}, s_{k''} = s_{2k+1}, 0 \leq k(N/2) - 1.$$

Выполним ДПФ каждого массива с учетом того, что шаг функций равен 2 (при $\Delta t = 1$), а период промежуточных спектров будет соответственно равен $N/2$:

$$s_{k'} \rightarrow S_{n'}, s_{k''} \rightarrow S_{n''}, 0 \leq n(N/2) - 1.$$

Для получения одной половины искомого спектра S_n сложим полученные спектры с учетом теоремы запаздывания, т.к. отсчеты функции $s_{k''}$ сдвинуты относительно $s_{k'}$ на один шаг дискретизации:

$$S_n = S_{n'} + S_{n''} \exp(-j2\pi n/N). \quad (3.55)$$

Вторая половина спектра, комплексно сопряженная с первой, с учетом периода повторения $N/2$ промежуточных спектров определяется выражением:

$$S_{n+N/2} = S_{n'} + S_{n''} \exp(-j2\pi(n + N/2)/N) = S_{n'} - S_{n''} \exp(-j2\pi n/N). \quad (3.56)$$

Нетрудно видеть, что для вычисления полного спектра в данном случае потребуется $N^2/4$ операций для вычисления промежуточных спектров плюс еще N операций комплексного умножения и сложения, что создает ощутимый эффект по сравнению с ДПФ.

Но деление массивов на две части может быть применено и к первым промежуточным массивам, и ко вторым, и т.д. до тех пор, пока в массивах не останется по одному отсчету, Фурье-преобразование которых равно самому отсчету. Тем самым, алгоритм преобразования превращается в пирамидальный алгоритм перестановок со сложением/вычитанием и с единичным умножением на значение $\exp(-j2\pi n/N)$ соответствующего уровня пирамиды. Первый алгоритм БПФ на данном принципе (из множества модификаций, существующих в настоящее время) был разработан Кули-Тьюки в 1965 г. и позволил повысить скорость вычислений в N/r раз по сравнению с ДПФ. Чем больше N , тем больше эффект БПФ. Так, при $N = 1024$ имеем $r = 10$ и соответственно $N/r \approx 100$. Что касается условия по количеству точек $N = 2^r$, то оно рассматривается в варианте $N_k \leq 2^r$, где r – минимальное целое. Массивы с $N_k < 2^r$ дополняются до 2^r нулями, что не изменяет форму спектра. Изменяется только шаг $\Delta\omega$ по представлению спектра ($\Delta\omega = 2\pi/2^r < 2\pi/N$), который несколько избыточен по адекватному представлению сигнала в частотной области. В настоящее время существуют и алгоритмы БПФ с другими основаниями и их комбинациями, при которых не требуется дополнения сигналов нулями до 2^r .

Заметим, что в соответствии с (3.56) отсчеты, сопряженные с правой половиной главного частотного диапазона $(0, \pi)$, относятся не к диапазону $(-\pi, 0)$, а к диапазону $(\pi, 2\pi)$, что, учитывая периодичность спектра дискретных данных, значения не имеет, т.е. выходной частотный диапазон БПФ равен $(0, 2\pi)$. Общее количество отсчетов комплексного спектра в этом условно главном диапазоне равно количеству точек исходного сигнала (с учетом нулевых точек при дополнении сигнала до $N = 2^r$). Алгоритм быстрого обратного преобразования (ОБПФ) тождественен алгоритму прямого БПФ.

Структурная схема процесса вычисления 8-точечного ДПФ путем разбиения его на два 4-точечных ДПФ (см. рисунок 3.15) [8].

Алгоритмы прямого и обратного БПФ широко используются в современном программном обеспечении для анализа и обработки цифровых данных. Пример выполнения БПФ приведен на рисунках 3.16, 3.17 [19].

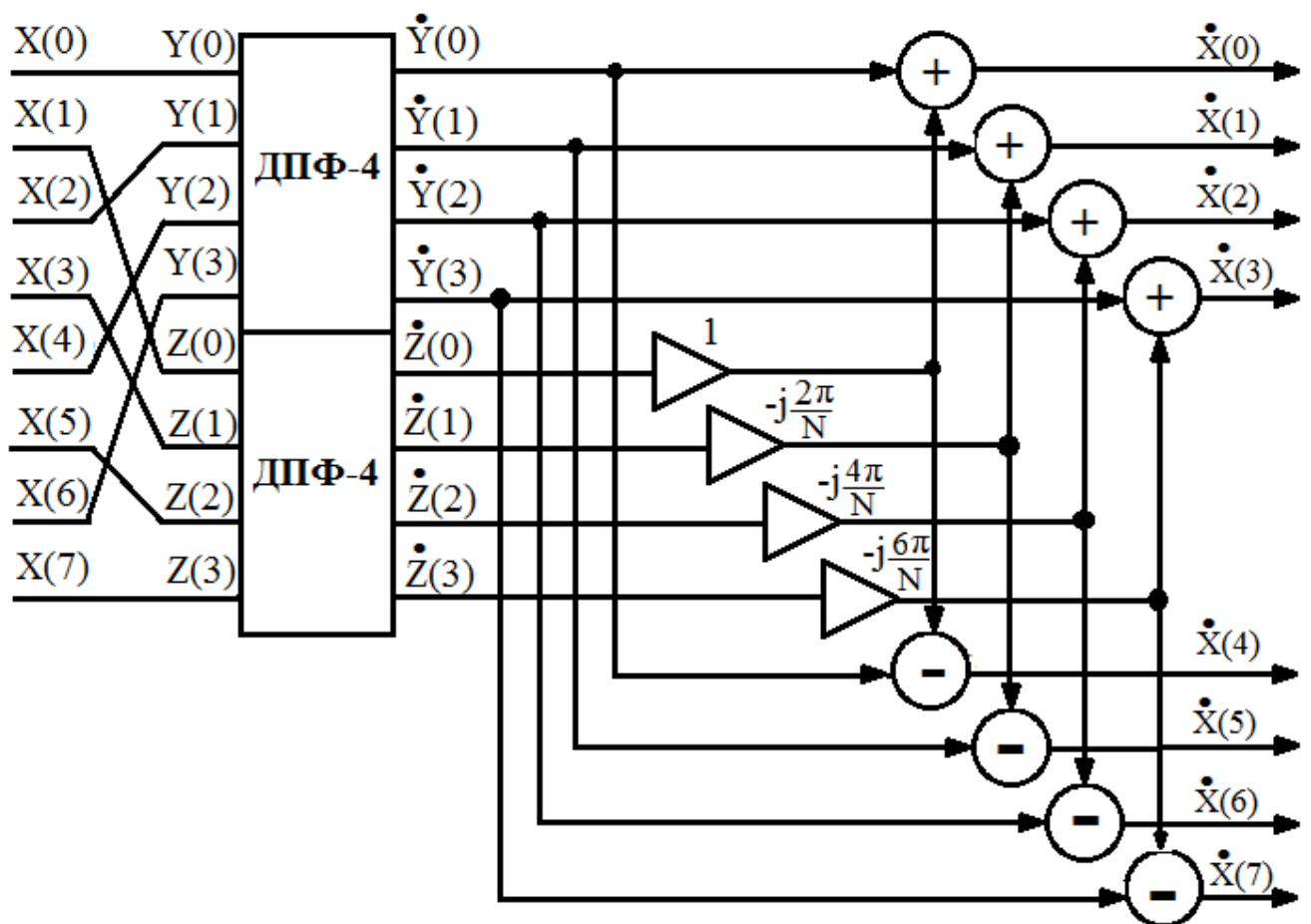
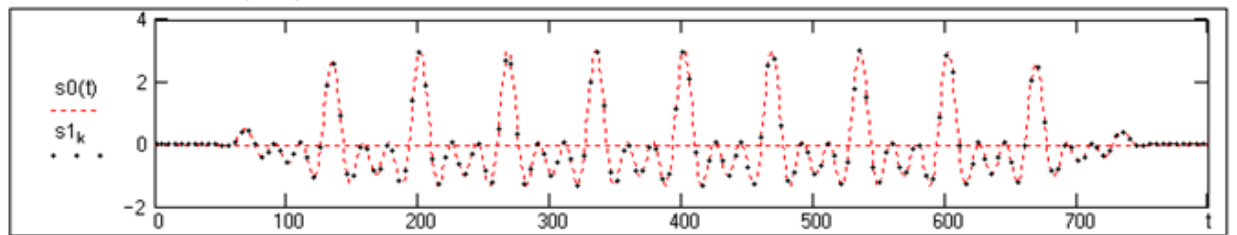


Рисунок 3.15 – Структурная схема вычисления 8-точечного ДПФ путем разбиения его на два 4-точечных ДПФ

MATHCAD**Быстрое преобразование Фурье**

$T := 800$ $t := 0..T$ $u1(t) := \exp[-1 \cdot 10^{-30} \cdot (t - 400)^{12}]$ $v1(t) := \sum_{k=1}^3 \cos(0.094 \cdot t \cdot k)$ $s0(t) := u1(t) \cdot v1(t)$ <= модель
 $\Delta t := 5$ $K := 2 \cdot \text{floor}\left(\frac{T}{\Delta t \cdot 2}\right)$ $K = 160$ $N := K + 1$ $N = 161$ $k := 0..K$ $s1_k := s0(k \cdot \Delta t)$ <= Дискретизация



$S1 := \text{CFFT}(s1)$ $s2 := \text{ICFFT}(S1)$ $\Delta \omega := \frac{2\pi}{N}$ <= Прямое быстрое преобразование Фурье

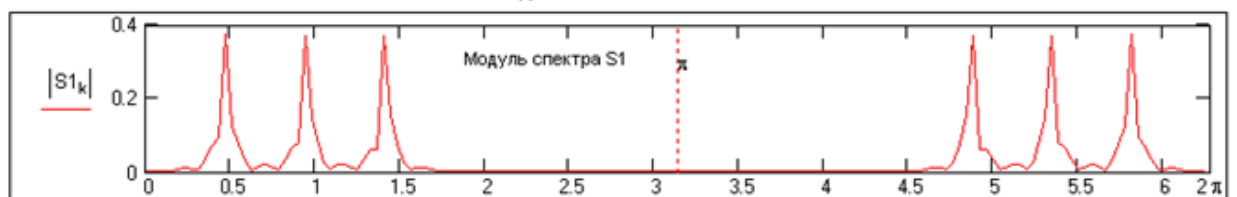


Рисунок 3.16 – Пример БПФ в Mathcad

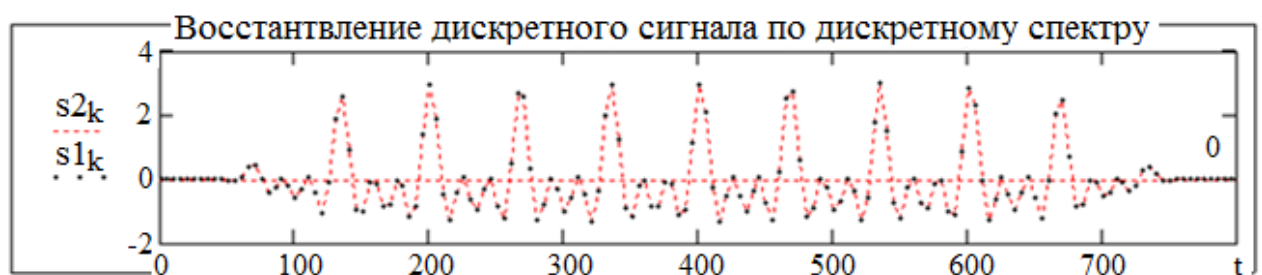


Рисунок 3.17 – Восстановление дискретизованного сигнала по дискретному спектру

3.8 Применение ДПФ

Основная область использования ДПФ – спектральный анализ физических данных. При этом интерес обычно представляют только амплитуды отдельных гармоник, а не их фазы, и спектр отображается в виде графика зависимости амплитуды (модуля спектра) от частоты. Часто шкала амплитуд градуируется в децибелах. *Децибелы* – логарифмы отношения амплитудных значений. Например, разница на 10 дБ означает различие амплитуд в 10 раз, разница на 20 дБ – 100 раз. Различию амплитуд в 2 раза отвечает разница примерно на 3 дБ. Шкала частот также часто градуируется в логарифмическом масштабе.

Перед вычислением спектра из сигнала, как правило, вырезается отрезок сигнала. Число последовательных отсчетов отрезка для использования БПФ должно быть степенью двойки, если в программном обеспечении вычислительной системы не оговорена ее способность выполнять БПФ по произвольным числовым рядам. В противном случае

числовой ряд дополняется нулями до необходимого размера, что не изменяет формы спектра и сказывается только на увеличении частотного разрешения по спектру.

При вычислении спектра возможен следующий нежелательный эффект. При разложении участка сигнала в ряд Фурье мы тем самым принимаем этот участок за один период T , который периодически повторяется за пределами участка с фундаментальной частотой $1/T$. При ДПФ, а равно и при БПФ, вычисляется спектр именно такого периодического сигнала. При этом на границах периодов такая функция, наверняка, будет иметь разрывы или скачки, тем самым существенно искажая спектр. Для устранения этого эффекта применяются так называемые *весовые окна*, похожие на гауссиан, размер которых равен размеру участка. Анализируемый участок умножается на весовое окно, что плавно сводит сигнал на нет вблизи краев анализируемого участка и в значительной степени устраняют рассмотренные искажения спектра.

4 Прямое и обратное Z-преобразование

4.1 Преобразование Лапласа, прямое и обратное Z-преобразование временных функций

Для аналоговых сигналов $s(t)$ известно преобразование Лапласа, позволяющее упростить вычисления. В прямом преобразовании Лапласа вводится понятие комплексной частоты [3]

$$p = \sigma + j\omega. \quad (4.1)$$

При $\sigma = 0$, получим для сигнала $s(t)$, прямое преобразование Фурье которого имеет вид: $\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt$, преобразование Лапласа записывается в виде

$$\dot{S}(p) = \int_0^{\infty} s(t) e^{-pt} dt. \quad (4.2)$$

Сигнал $s(t)$ называется оригиналом, а функция $\dot{S}(p)$ – его изображением по Лапласу (изображением), p – комплексное число.

Изображение по Лапласу дискретизованного сигнала имеет вид

$$S_D(p) = \sum_{k=0}^{\infty} s(kT) e^{-pkT} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-pkT}, \quad (4.3)$$

а формулы обратного преобразования Лапласа, т.е. оригинал для непрерывного и дискретизованного сигналов, соответственно, записываются в виде выражений:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{C-j\infty}^{C+j\infty} \dot{S}(p) e^{pt} dp \text{ и } s_D(t) = x(kT) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1-j\infty}^{\sigma_1+j\infty} S_D(p) e^{pt} dp.$$

Все свойства и теоремы преобразований Фурье имеют соответствующие аналоги и для преобразований Лапласа.

Пример сопоставления преобразований Фурье и Лапласа приведен на рисунке 4.1 [19].

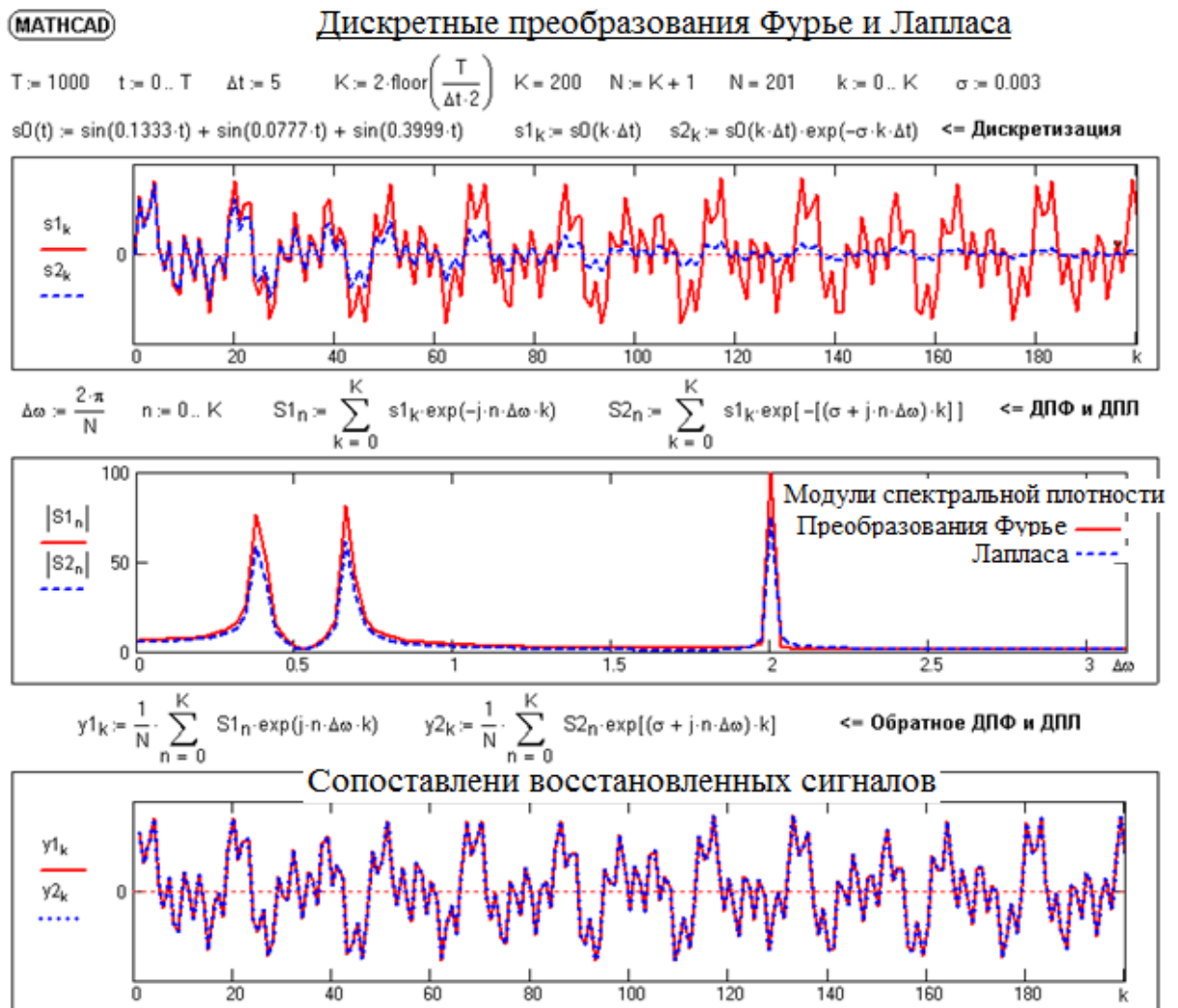


Рисунок 4.1 – Сопоставление преобразований Фурье и Лапласа

Изображения по Лапласу временных процессов, а также передаточные функции цепей, в которые входит e^{pt} , оказываются трансцендентными (комплексными, не являющимися алгебраическими) функциями p , что затрудняет анализ. Его можно упростить при переходе к новой переменной Z , связанной с p соотношением

$$Z = e^{pt}, \quad p = \frac{1}{T} \ln Z. \quad (4.4)$$

При такой замене указанные функции от p преобразуются в рациональные функции от Z , благодаря чему упрощается их представление на плоскости Z .

Так, для дискретизованной функции, изображение по Лапласу которой записывается через (4.3), получим выражение

$$S(Z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) Z^{-k}, \quad (4.5)$$

называемое прямым -преобразованием.

Впервые -преобразование введено в употребление П.Лапласом в 1779 и повторно «открыто» В.Гуревичем в 1947 году с изменением символики на Z^{-1} . В настоящее время в технической литературе имеют место оба вида символики. На практическое использование преобразования это не влияет, т.к. смена знака только зеркально изменяет нумерацию членов полинома (относительно Z^0), числовое пространство которых в общем случае от $-\infty$ до $+\infty$. В дальнейшем в качестве основной будем использовать символику отрицательных степеней Z , не исключая и символику положительных степеней.

Z -преобразования с положительными степенями Z соответствуют каузальным (физически реализуемым) процессам и системам, которые работают в реальном масштабе времени с текущими и «прошлыми» значениями сигналов. При обработке информации на ЭВМ каузальность сигналов не относится к числу ограничений и возможно использование отрицательных степеней Z , соответствующих отсчетам сигналов «вперед». Последнее применяется, например, при синтезе симметричных операторов фильтров, что позволяет производить обработку информации без внесения в сигнал фазовых искажений. При использовании символики Z^{-1} «прошлым» значениям соответствуют значения с отрицательными степенями Z , «будущим» – с положительными.

Из теории комплексных переменных известно, что искусственное изменение независимой переменной посредством ее замены некоторой функцией от новой переменной дает преобразование одной области комплексной переменной в другую.

Следовательно, некоторый контур одной области переходит в другой.

Преобразование плоскости $p = \sigma + j\omega$ в плоскость $Z = x + jy$ можно осуществить с помощью следующих соотношений, связывающих координаты σ_1 , ω_1 какой-либо точки p_1 на плоскости p с координатами x_1 , y_1 соответствующей точки z_1 на плоскости Z (см. рисунок 4.2).

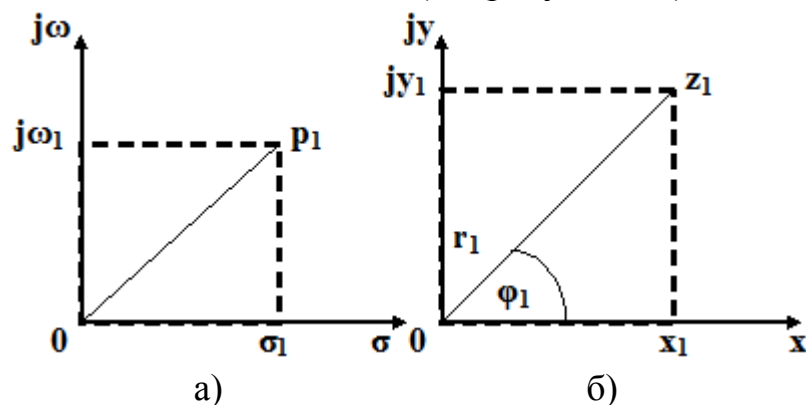


Рисунок 4.2 – Соотношение между координатами точки на p – плоскости (а) и Z – плоскости (б)

$$p_1 = \sigma_1 + j\omega_1, z_1 = x_1 + jy_1 = e^{(\sigma_1 + j\omega_1)T}, x_1 = e^{\sigma_1 T} \cos \omega_1 T, y_1 = e^{\sigma_1 T} \sin \omega_1 T. \quad (4.6)$$

В полярных координатах на плоскости Z

$$r_1 = |z_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = e^{\sigma_1 T}, \phi_1 = \arg z_1 = \omega_1 T + m2\pi, \quad (4.7)$$

где m – любое целое число.

На рисунке 4.3 представлены отображения некоторых характерных точек и областей из p -плоскости на Z -плоскость [3].

Для значений, соответствующих мнимой оси ($\sigma=0$), вместо « p » необходимо подставить « $j\omega$ » ($p = j\omega$), тогда $Z = e^{j\omega T} \Rightarrow$ – многозначная функция от « ω » с единичной амплитудой и фазовым углом, равным « ωT ».

Для $p = 0$, $Z = 1$, т.к. $p = \frac{1}{T} \ln Z$;

Если « ω » увеличивается от 0 до $\omega_D/4$, то Z изменяется от $Z = 1$ до $Z = +jy_1$ вдоль единичной окружности и в первом квадранте плоскости Z , где T – период дискретизации и « ω_D » = $2\pi/T$.

$\omega \Rightarrow \frac{\omega_D}{4}$ до $\frac{\omega_D}{2} \Rightarrow Z$ – изменяется от $Z = +jy_1$ до $Z = -1$ вдоль единичной окружности во втором квадранте;

$\omega \Rightarrow \frac{\omega_D}{2}$ до $\frac{3\omega_D}{4} \Rightarrow Z$ – изменяется от $Z = -1$ до $Z = -jy_1$ вдоль единичной окружности в III квадранте;

$\omega \Rightarrow \frac{3\omega_D}{4}$ до $\omega_D \Rightarrow Z$ – изменяется от $Z = -jy_1$ до $Z = 1$ вдоль единичной окружности в IV квадранте.

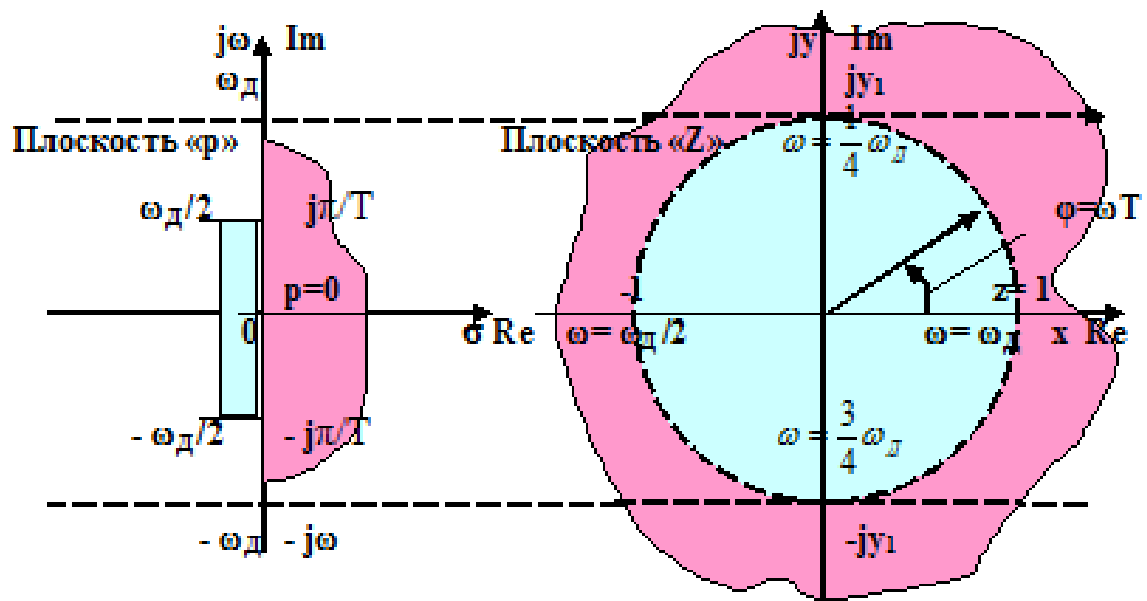


Рисунок 4.3 – Отображение мнимой оси в плоскости « p » в единичную окружность в плоскости « Z »

Итак, при движении точки p -плоскости вдоль оси $j\omega$ (т. е. при $\sigma = 0$) соответствующая ей точка Z -плоскости описывает окружность единичного радиуса. При переходе в Z -плоскость точки мнимой оси $j\omega$ будут располагаться на единичной окружности $Z = 1 \cdot e^{j\omega T}$. Причем точка $j\omega = 0$ на плоскости p переходит в точку $+1$ на плоскости Z , а точки $\pm j0,5\omega_D$ в точку $Z = -1$. Это означает, что точки отрезка $\pm j0,5\omega_D$ p -плоскости проецируются в точки на единичной окружности Z -плоскости.

Так как функция $e^{\pm j\omega T}$ периодична, то последующие отрезки на оси $j\omega$ плоскости p такой же длины вновь будут проецироваться на единичную окружность плоскости Z . Один полный оборот радиуса-вектора соответствует изменению частоты ω в интервале $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_1 \pm 2\pi/T$.

При движении точки p_1 вдоль оси $j\omega$ в пределах от $-j\infty$ до $j\infty$ точка z_1 описывает бесконечно большое число окружностей. Таким образом, взаимно-однозначное отображение p на Z существует только для полосы -плоскости, расположенной между $\pm\pi/T$. Внутри этой полосы левая полуплоскость отображается внутрь единичного круга. Правая полуплоскость p преобразуется во всю -плоскость, исключая единичный круг.

Или точки левой полуплоскости $p = -\sigma \pm j\omega$ соответствуют точкам внутри единичной окружности Z , а точки правой полуплоскости $p = -\sigma \pm j\omega$ – точкам вне этой окружности.

Повторим введенное понятие -преобразования последовательно и более кратко. Как известно, дискретный сигнал и его спектр описываются соотношениями

$$\begin{cases} \dot{S}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp\left(-j \frac{2\pi nk}{N}\right) \\ x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \dot{S}(n) \exp\left(j \frac{2\pi nk}{N}\right) \end{cases} \text{ПДПФ и ОДПФ.}$$

Произведем в первой формуле замену:

$$\exp\left(j \frac{2\pi nk}{N}\right) = e^{j \frac{2\pi nk}{N}} = \left|\frac{1}{N} = \frac{T}{2\pi}\right| = e^{Jkt} = e^{pt} = \left|p = \frac{1}{T} \ln Z\right| = Z \quad (4.8)$$

Тогда формула прямого преобразования Фурье дискретного сигнала примет вид:

$$\dot{S}(Z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) Z^{-k}, \quad (4.9)$$

совпадающее с (4.5) – прямое -преобразование или Z -изображение дискретного сигнала $x(k)$. Если считать, что $x(k) = 0$, для $k < 0$, то получим прямое одностороннее Z -преобразование:

$$\dot{S}(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) Z^{-k}. \quad (4.10)$$

Комплексная функция $\dot{S}(Z)$ определяется только для области Z , в которой степенной ряд (4.5, 4.9) сходится.

В общем случае, -преобразование – это степенной ряд с бесконечным количеством членов, поэтому он может сходиться не для всего пространства значений Z . Область Z , в которой Z -преобразование сходится и значения $\dot{S}(Z)$ конечны, называют областью сходимости.

Значения Z , для которых $\dot{S}(Z) = \infty$, называются *полюсами*, а для которых $\dot{S}(Z) = 0$, называются *нулями* функции $\dot{S}(Z)$.

Условие сходимости: $|x(k)| < cr_0^k$ при любых $k \geq 0$, где $c > 0$ – постоянное действительное число, а $r_0 > 0$ также действительное число, являющееся радиусом сходимости, зависящим от свойств

последовательности $\{x(k)\}$, $k = 0, 1, \dots, \infty$. Поскольку (4.5) определяет ряд по отрицательным степеням Z , область сходимости включает в себя всю - плоскость, за исключением круга радиуса r_0 , т.е. данный ряд сходится при $r_0 < |Z| < \infty$.

В случае ограниченной последовательности $\{x(k)\}$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$, в которой только конечное число членов отлично от нуля, для сходимости ряда требуется, чтобы $|Z(k)| < \infty$, $0 \leq k \leq N - 1$. При этом Z может принимать все значения за исключением $Z = 0$.

Отыскание оригинала, т. е. функции $s_d(t)$ или $x(k)$, по заданному изображению $\dot{S}(Z)$ производится с помощью обратного -преобразования, которое получается подстановкой $e^{pt} = Z$ в обратное преобразование Лапласа $s(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{C-j\omega}^{C+j\omega} \dot{S}(p) e^{pt} dp$, которое для одного отсчета имеет вид

$$s(kT) = x(kT) = T \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - j\pi/T}^{\sigma_1 + j\pi/T} \dot{S}_d(p) e^{pkT} dp.$$

Подставив в последнее выражение $\dot{S}_d(p) = \dot{S}(Z)$, $e^{pkT} = Z^k$, $dp = dZ/TZ$, получим

$$s(kT) = T \frac{1}{2\pi j} \oint_{|Z|=e^{CT}} \dot{S}(Z) Z^k \frac{dZ}{TZ} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|Z|=e^{CT}} \dot{S}(Z) Z^{k-1} dZ. \quad (4.11)$$

Интегрирование ведется по окружности радиуса $r = e^{CT}$, в которую преобразуется прямая $\sigma = C$ из плоскости $p = \sigma + j\omega$. Постоянная C определяется из условия, что все полюсы подынтегральной функции находятся внутри круга радиуса $r = e^{CT}$. Обход контура – в положительном направлении (против часовой стрелки). Изменению частоты от $-\pi/T$ до π/T соответствует один оборот окружности.

В рассмотренных выше примерах функций $\dot{S}(Z)$, обладающих полюсами на окружности единичного радиуса [при $s(kT) = 1, \cos \omega_0 kT, \sin \omega_0 kT$], постоянная $C > 0$ может быть сколь угодно малой. Поэтому контур интегрирования можно свести к окружности радиуса $r = 1$ с обходом полюсов вне круга, подобно тому, как на плоскости $p = \sigma + j\omega$ интегрирование ведется по оси $j\omega$ с обходом полюсов, лежащих на этой оси справа.

С учетом этого условия выражение (4.11) можно записать в форме

$$s(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|Z|=1} \dot{S}(e^{j\omega T}) e^{j\omega kT} d(\omega T). \quad (4.12)$$

Сопоставим -преобразование с ДПФ для последовательности $s(kT)$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$. Для этого воспользуемся формулой (4.5) для значений функции $\dot{S}(Z)$ в точках $Z = e^{jn\Delta\omega T} = e^{j\frac{2\pi n}{N}}$:

$$S\left(e^{j\frac{2\pi}{N}nk}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} s(kT) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (4.13)$$

Видно, что спектральные коэффициенты $\dot{S}(Z)$, т. е. ДПФ последовательности $\{s(k)\}$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$, равны значениям -

преобразования этой последовательности в N точках, равномерно распределенных по единичной окружности.

Найдем функцию $\dot{S}(Z)$ и радиус сходимости для некоторых простых временных функций $s_d(t)$.

1 Последовательность отсчетов сигнала $s(t) = 1, t \geq 0$.

Отсчеты сигнала $x(k) = 1, k = 0, 1, 2, \dots, \infty$. В соответствии с (4.5)

$$S(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)Z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} Z^{-k} = \frac{1}{1-Z^{-1}} = \frac{Z}{Z-1}. \quad (4.14)$$

Ряд (4.14) является суммой бесконечной геометрической прогрессии $a + aq + aq^{-1} + aq^{-2} + \dots + aq^{k-1} + \dots$ с первым членом $a = 1 \cdot Z^{-0} = 1$ и знаменателем $q = Z^{-1}$. Сумма k первых членов прогрессии равна

$$s_k = a \frac{q^k - 1}{q - 1}. \quad (4.15)$$

Если $|q| < 1$ то $\lim_{k \rightarrow \infty} q^k = 0$ и поэтому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = a \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{q^k - 1}{q - 1} = \frac{a}{1 - q}.$$

При $|q| < 1$ бесконечная геометрическая прогрессия образует сходящийся ряд, сумма которого равна

$$S = \frac{a}{1 - q}. \quad (4.16)$$

Если $q > 1$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \infty$ т. е. ряд расходится. При $q = 1$, ряды $q = -1$ расходятся.

Таким образом, бесконечная геометрическая прогрессия представляет ряд, который сходится при $|q| < 1$ и расходится при $q \geq 1$.

Ноль функции $\dot{S}(Z)$ в точке $Z_0 = 0$, полюс в точке $Z_n = 1$. Радиус сходимости $r_0 = 1$. Функция сходится при $|Z| > 1$.

2 Последовательность отсчетов из сигнала $s(t) = a^{-\alpha t}, t \geq 0$.

В этом случае $x(kT) = e^{-\alpha kT}$ и

$$\dot{S}(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha kT} Z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-\alpha T} Z^{-1})^k = \frac{1}{1 - e^{-\alpha T} Z^{-1}} = \frac{Z}{Z - e^{-\alpha T}}. \quad (4.17)$$

Ноль функции $\dot{S}(Z)$ в точке $Z_0 = 0$, полюс в точке $Z_{\Pi} = e^{-\alpha T}$; $r_0 = e^{-\alpha T}; |Z| > e^{-\alpha T}$.

3 Последовательность отсчетов сигнала $s(t) = a^{\alpha t}, t \geq 0, a < 1$.

$x(k) = a^{\alpha kT}$, тогда

$$\dot{S}(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^{\alpha kT} Z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (a^{\alpha T} Z^{-1})^k = \frac{1}{1 - a^{\alpha T} Z^{-1}} = \frac{1}{Z - a^{\alpha T}}. \quad (4.18)$$

Ноль функции $\dot{S}(Z)$ в точке $Z_0 = 0$, полюс в точке $Z_{\Pi} = a^{\alpha T}, r_0 = a^{\alpha T}, |Z| > e^{-\alpha T}$.

4 Последовательность отсчетов из сигнала $s(t) = \cos \omega_0 t, t \geq 0$.

$$x(k) = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 kT} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 kT}.$$

Получим

$$\begin{aligned} \dot{S}(Z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \cos \omega_0 kT \cdot Z^{-k} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (e^{j\omega_0 T} Z^{-1})^{-k} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-j\omega_0 T} Z^{-1})^{-k} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - e^{j\omega_0 T} Z^{-1}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - e^{-j\omega_0 T} Z^{-1}} = \frac{Z^2}{2} \cdot \frac{(1 - e^{-j\omega_0 T} Z^{-1}) + (1 - e^{j\omega_0 T} Z^{-1})}{Z^2 + 2Z \cos \omega_0 T + 1} = \\ &= \frac{Z(Z - \cos \omega_0 T)}{Z^2 + 2Z \cos \omega_0 T + 1}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Нули $Z_{01} = 0$, $Z_{02} = \cos \omega_0 T$, полюсы $Z_{\Pi 1,2} = \cos \omega_0 T + j \sin \omega_0 T$, $|Z_{\Pi}| = 1$, $r_0 = 1$, $|Z| > 1$.

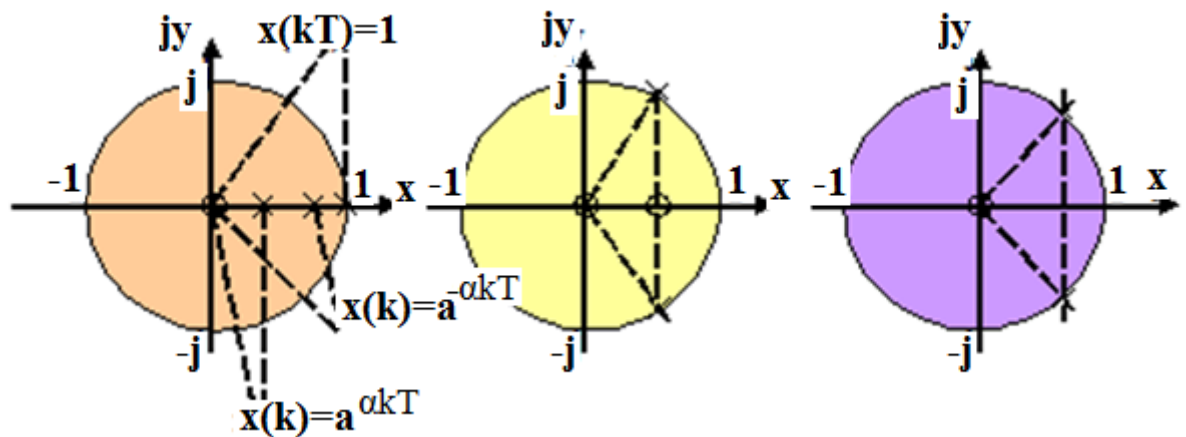
5 Последовательность отсчетов сигнала $s(t) = \sin \omega_0 t$, $t \geq 0$.

$$x(k) = \frac{1}{2j} e^{j\omega_0 kT} - \frac{1}{2j} e^{-j\omega_0 kT}.$$

$$\begin{aligned} \dot{S}(Z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sin \omega_0 kT \cdot Z^{-k} = \frac{1}{2j} \sum_{k=0}^{\infty} (e^{j\omega_0 T} \cdot Z^{-1})^k - \frac{1}{2j} \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-j\omega_0 T} \cdot Z^{-1})^k = \\ &= \frac{Z \sin \omega_0 T}{Z^2 - 2Z \cos \omega_0 T + 1}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Ноль $Z_0 = 0$, полюсы $Z_{\Pi 1,2} = \cos \omega_0 T \pm j \sin \omega_0 T$; $|Z_{\Pi}| = 1$; $r_0 = 1$, $|Z| > 1$.

На рисунке 4.4 показаны положения нулей и полюсов приведенных выше пяти сигналов.



а) $x(kT)=1$, $x(k)=e^{-\alpha kT}$, $x(kT)=a^{\alpha kT}$; б) $s(kT)=\cos \omega_0 kT$; в) $s(kT)=\sin \omega_0 kT$.

Рисунок 4.4 – Положение нулей и полюсов на Z-плоскости

6 Сигнал конечной длины (последовательность не причинная):

$$s_{-k} = \{1, 2, 3, 2, 1\}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Решение:

$$S(Z) = 1Z^0 + 2Z^{-1} + 3Z^{-2} + 2Z^{-3} + 1Z^{-4} = 1 + 2/Z + 3/Z^2 + 2/Z^3 + 1/Z^4.$$

$Z = 0$ при $S(Z) = \infty$. Область сходимости – все значения Z , кроме $Z = 0$.

7 Сигнал конечной длины (последовательность причинная, как импульсный отклик каузальной системы): $s_k = \{1, 2, 3, 2, 1\}, k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Решение:

$$S(Z) = 1 + 2Z + 3Z^2 + 2Z^3 + Z^4.$$

$S(Z) = \infty$ при $S(Z) = \infty$. Область сходимости – все значения Z , кроме $Z = \infty$.

8 Последовательность конечной длины, двусторонняя (как импульсный отклик симметричного фильтра): $s_k = \{1, 2, 3, 2, 1\}, k = -2, -1, 0, 1, 2$.

Решение:

$$S(Z) = 1Z^{-2} + 2Z^{-1} + 3Z^0 + 2Z^1 + 1Z^2 = 1/Z^2 + 2/Z + 3 + 2Z + Z^2.$$

$S(Z) = \infty$ при $Z = 0$ и $Z = \infty$. Область сходимости не включает точки $Z = 0$ и $Z = \infty$.

Наиболее часто используемые Z -преобразования приведены в таблице 4.1.

Таблица 4.1 – Z -преобразования

Дискретная последовательность $x(k)$, ($k = 0, 1, 2, \dots$)	Z -преобразование $\dot{S}(Z)$
$x(k) = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$ – дискретный аналог $\delta(t)$	1
$x(k) = \begin{cases} 1, & k \geq 0, \\ 0, & k < 0. \end{cases}$ – дискретный единичный скачок [$x(k) = 1$]	$\frac{1}{1 - Z^{-1}} = \frac{Z}{Z - 1}$
K	$\frac{Z^{-1}}{(1 - Z^{-1})^2} = \frac{Z}{(Z - 1)^2}$
k^2	$\frac{Z^{-1}(1 + Z^{-1})}{(1 - Z^{-1})^3} = \frac{Z(Z + 1)}{(Z - 1)^3}$
a^k	$\frac{1}{(1 - aZ^{-1})} = \frac{Z}{Z - a}$
ka^k	$\frac{aZ^{-1}}{(1 - aZ^{-1})^2} = \frac{aZ}{(Z - a)^2}$

$\binom{k}{n} = \frac{n!}{(k-n)!k!}, (k = 0, 1, \dots), n \leq k$ Число сочетаний из k элементов по n ,	$\frac{Z^{-n}}{Z^{-1}(1 - Z^{-1})^{n+1}} = \frac{Z}{(Z - 1)^{n+1}}$
$\sum_{m=1}^n m^{-1}$	$\frac{1}{1 - Z^{-1}} \ln \frac{1}{1 - Z^{-1}}$
$e^{j\omega nT}$	$\frac{1}{1 - e^{j\omega T} Z^{-1}}$
$\sin \omega kT$	$\frac{Z^{-1} \sin \omega T}{1 - 2Z^{-1} \cos \omega T + Z^{-2}} = \frac{Z \sin \omega T}{1 - 2Z \cos \omega T + Z^2}$
$\cos \omega kT$	$\frac{1 - \cos \omega T}{1 - 2Z^{-1} \cos \omega T + Z^{-2}} = \frac{Z - (Z - \cos \omega T)}{1 - 2Z \cos \omega T + Z^2}$
$a^k \cos(\omega k + \varphi)$	$\frac{\cos \varphi - a \cos(\omega - \varphi) Z^{-1}}{1 - 2aZ^{-1} \cos \omega + Z^{-2}} = \frac{Z(\cos \varphi - a \cos(\omega - \varphi))}{1 - 2aZ \cos \omega + Z^2}$

4.1.1 Свойства Z-преобразования.

Важнейшим свойством Z-преобразования является свойство его единственности. Любая последовательность $s(k)$ однозначно определяется изображением в области его сходимости, и наоборот, однозначно восстанавливается по Z-изображению.

Так же, как и для преобразований Лапласа и Фурье, существуют теоремы для Z-преобразования. Приведем наиболее важные.

1 Теорема линейности (суперпозиции).

Сумме дискретных сигналов соответствует сумма их изображений:

Если

$$x(n) \Leftrightarrow X(Z), y(n) \Leftrightarrow Y(Z),$$

то

$$ax(n) + by(n) \Leftrightarrow aX(Z) + bY(Z), \quad (4.21)$$

где a и b – const.

Теорема задержки.

Если дискретный сигнал задержан на N отсчетов, то его Z-преобразование имеет вид

$$x(nT - NT) \Leftrightarrow X(Z)Z^{-N}. \quad (4.22)$$

3 Теорема умножения на a^n .

$$a^n x(nT) \Leftrightarrow X(a^{-1}Z). \quad (4.23)$$

4 Теорема умножения на n .

$$nx(nT) \Leftrightarrow -Z \frac{dX(Z)}{dZ}. \quad (4.24)$$

5 Теорема свертки.

Z -преобразованию свертки дискретных сигналов отвечает произведение Z -преобразований этих сигналов.

Свертке дискретных сигналов $x(nT)$ и $h(nT)$ соответствует произведение их Z -преобразований:

Теорема дискретной свертки.

Известно, что сигнал на выходе аналоговой цепи связан с сигналом на входе цепи интегралом наложения (интегралом свертки):

$$y(t) = \int_0^t x(t)h(t - \tau)d\tau = \int_0^t x(t - \tau)h(\tau)d\tau, \quad (4.25)$$

где $h(t)$ – импульсная характеристика цепи.

При переходе к дискретным сигналам используется выражение для дискретной свертки.

Чтобы не вносить путаницы, время t заменим дискретным значением nT , а время τ дискретным значением mT . Вместо непрерывного сигнала $x(t)$ мы будем иметь дело с дискретным сигналом $x(nT)$, вместо непрерывной импульсной характеристики $h(t - \tau)$ – с дискретной импульсной характеристикой $h[(n - m)T]$.

Тогда интеграл (4.25) запишется в виде:

$$y(nT) = \sum_{m=0}^n x(mT)h[(n - m)T] = \sum_{m=0}^n x[(n - m)T]h(mT). \quad (4.26)$$

Обозначая в этом выражении $y(nT) = y(n)$, $x(mT) = x(m)$,

$h[(n - m)T] = h(n - m)$, окончательно получим, что n -ый отсчет дискретной выходной последовательности рассчитывается как

$$y(n) = \sum_{m=0}^n x(m)h(n - m) = \sum_{m=0}^n x(n - m)h(m). \quad (4.27)$$

Поскольку любой отсчет сигнала – это число, то формулу (4.27) можно запрограммировать на ЭВМ. Остается лишь ввести в ЭВМ числа, соответствующие всем дискретным значениям отсчетов входного сигнала $x(mT)$ и дискретным значениям отсчетов импульсной характеристики $h[(n - m)T]$ и она вычислит отсчеты выходного сигнала $y(nT)$. Выражение (4.27) на языке вычислительной техники называется алгоритмом вычисления выходного сигнала.

Выполнив Z -преобразование входного сигнала и импульсной характеристики линейной цепи, получим Z -преобразование свертки сигналов, равного Z -преобразованию выходного сигнала.

$$y(n) = \sum_{m=0}^n x(m)h(n - m) \Leftrightarrow X(Z)H(Z) = Y(Z). \quad (4.28)$$

4.2 Методы обратного Z -преобразования

На практике $\hat{S}(Z)$, которое можно обозначать через $\hat{X}(Z)$, в процессе расчетов обычно выражается через отношение двух многочленов от Z (знак комплексности опускаем для удобства):

$$X(Z) = (a_0 + a_1Z + a_2Z^2 + \dots + a_NZ^N) / (b_0 + b_1Z + b_2Z^2 + \dots + b_MZ^M) = \quad (4.29)$$

$$= x(0) + x(1)Z + x(2)Z^2 + \dots \quad (4.29')$$

Самые распространенные методы обратного преобразования из формы $\hat{X}(Z)$ или $\hat{S}(Z)$:

- 1) Преобразование интегрированием по контуру (метод вычетов).
- 2) Интегрированием по контуру (с использованием положения, вытекающего из теоремы Коши).
- 3) Метод разложения в степенной ряд.
- 4) Метод разложения на рациональные простые (элементарные) дроби.

Методы 1) и 3) позволяют получить в результате аналитическое выражение для нахождения отсчетов. Но они достаточно сложны, т.к. требуют или нахождения полюсов порядка выше 3-го или сложного (многократного) дифференцирования.

Методы 2) и 4) проще, но они не позволяют получить аналитического выражения для нахождения отсчетных значений.

1 Преобразование интегрированием по контуру.

Относится к числу математически строгих методов. Оно выполняется интегрированием по произвольному замкнутому контуру C , расположенному в области сходимости и окружающему все особые точки (нули и полюсы) - образа. Интегрирование удобнее выполнять над полюсами, расположенными внутри контура, включающего центр системы координат, т.е. в символике Z^{-1} .

Согласно теореме Коши о вычетах, интеграл (4.11) равен сумме вычетов (Res) подынтегральной функции относительно всех полюсов этой функции, лежащих внутри контура интегрирования. Каждый вычет связан с определенным полюсом p_k :

$$Res[F(Z), p_k] = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \frac{d^{m-1}}{dZ^{m-1}} [(Z - p_k)^m F(Z)] \quad (4.30)$$

при $z = p_k$,

где $F(Z) = Z^{k-1}S(Z)$, m – порядок полюса в точке p_k .

Для простого полюса:

$$Res[F(z), p_k] = (Z - p_k)F(Z) = (Z - p_k)Z^{k-1}S(Z) \quad (4.31)$$

при $z = p_k$.

Пример 1.

Z – образ функции: $S(Z) = Z^2/(Z - 0,5)(Z - 1)^2$. Определить $x(kT) = x(k)$.

Решение:

Функция имеет простой полюс $p_1 = 0,5$ и полюс второго порядка $p_2 = 1$.

$$Res[F(Z), 0,5] = (Z - 0,5) Z^{k+1}/(Z - 0,5)(Z - 1)^2 \Big|_{Z=0,5} = Z^{k+1}/(Z - 1)^2 \Big|_{Z=0,5} = \frac{0,5(0,5)^k}{(0,5)^2} = 2(0,5)^k.$$

$$Res[F(Z), 1] = \frac{d}{dZ} [(Z - 1)^2 Z^{k+1}/(Z - 0,5)(Z - 1)^2] = [(Z - 0,5)(k + 1)Z^k - Z^{k+1}]/(Z - 0,5)^2 \Big|_{Z=1} = 2(k - 1).$$

Ответ: $x(k) = 2[(k - 1) + (0,5)^k] \cdot 1$

2 Интегрированием по контуру (с использованием положения, вытекающего из теоремы Коши).

Является частным случаем контурного интеграла (4.11):

$$\oint Z^k dZ = \begin{cases} 2\pi j, & \text{если } k = -1; \\ 0, & \text{если } k \neq -1. \end{cases} \quad (4.32)$$

Пример 2.

Задано: -преобразование вида $X(Z) = Z^{-2}$. Определить $x(k)$.

Решение:

$$k = 0, \quad x_0 = \frac{1}{2\pi j} \oint Z^{-1} \cdot Z^{-2} dZ = \frac{1}{2\pi j} \oint Z^{-3} dZ = 0;$$

$$k = 1, \quad x_1 = \frac{1}{2\pi j} \oint Z^0 \cdot Z^{-2} dZ = 0;$$

$$k = 2, \quad x_2 = \frac{1}{2\pi j} \oint Z \cdot Z^{-2} dZ = 1;$$

$$k = 3, \quad x_{31} = \frac{1}{2\pi j} \oint Z^2 \cdot Z^{-2} dZ = 0.$$

Ответ: $\{x(k)\} = \{0, 0, 1, 0, \dots\}$.

3 Метод разложения в степенной ряд.

Выражение (4.29) можно разложить непосредственно в степенной ряд (4.29') путем деления в столбик, для чего числитель и знаменатель функции выражаются предварительно через нарастающий или уменьшающийся показатель степени Z . Обратное -преобразование степенного ряда очевидно.

Пример 3

Z -образ функции $X(Z)$ задан с положительными показателями при Z и с нарастающей степенью: $X(Z) = (1 + 2Z + Z^2)/(1 - Z + 0,4Z^2)$. Определить $x(k)$.

Решение:

$$\begin{array}{r} 1 + 2Z + Z^2 \\ \underline{1 - Z + 0,4Z^2} \\ 3Z + 0,6Z^2 \\ \underline{3Z - 3Z^2 + 1,2Z^3} \\ 3,6Z^2 - 1,2Z^3 \\ \underline{3,6Z^2 - 3,6Z^3 + 1,44Z^4} \\ 2,4Z^3 - 1,44Z^4 \\ \underline{2,4Z^3 - 2,4Z^4 + 0,96Z^5} \\ 0,96Z^4 - 0,96Z^5 \\ \underline{0,96Z^4 - 0,96Z^5 + 0,384Z^6}, \text{ и т.д.} \end{array}$$

Обратное преобразование выполняется путем идентификации коэффициентов степеней при Z^k с -отсчетами функции.

Ответ: $x(k) = \{1; 3; 3,6; 2,4; 0,96; \dots\}$.

Если этот же пример записать с отрицательными показателями при Z (при этом с уменьшающимися показателями номеров степени Z), то получим:

$$X(Z) = (1 + 2Z + Z^2)/(1 - Z + 0,4Z^2) \rightarrow (Z^{-2} + 2Z^{-1} + 1)/Z^{-2} - Z^{-1} + 0,4.$$

Решение:

$$\begin{array}{r} Z^{-2} + 2Z^{-1} + 1 \\ \underline{Z^{-2} - Z^{-1} + 0,4} \end{array} \quad \begin{array}{r} | Z^{-2} - Z^{-1} + 0,4 \\ 1 + 3Z + 3,6Z^2 + 2,4Z^3 + 0,96Z^4 + \dots \end{array}$$

до

$$3Z^{-1} + 0,6$$

бесконечности

$$\underline{3Z^{-1} - 3 + 1,2Z}$$

$$3,6 - 1,2Z$$

$$\underline{3,6 - 3,6Z + 1,44Z^2}$$

$$2,4Z - 1,44Z^2$$

$$\underline{2,4Z - 2,4Z^2 + 0,96Z^3}$$

$$0,96Z^2 - 0,96Z^3$$

$$\underline{0,96Z^2 - 0,96Z^3 + 0,384Z^4} \text{ и т.д.}$$

Ответ: $x(k) = \{1; 3; 3,6; 2,4; 0,96; \dots\}$.

Результаты решений совпадают.

Рекомендуется самостоятельно убедиться в том, что -образы функций

$$X_1(Z) = (1 + 2Z + Z^2)/(1 - Z + 0,4Z^2) \quad \text{и}$$

$$X_2(Z) = (1 + 2Z^{-1} + Z^{-2})/(1 - Z^{-1} + 0,4Z^{-2})$$

имеют зеркально отраженные оригиналы (отсчеты).

4 Метод разложения на рациональные простые дроби.

При этом методе -образ (4.29) раскладывается на рациональные простые дроби с последующим почленным обратным преобразованием с помощью таблицы. Наиболее просто это выполняется, если функция $X(Z)$ может быть разложена по степеням Z в символике Z^{-1} , т.е. представлена в следующем виде:

$$S(Z) = s(0) + s(1)Z^{-1} + s(2)Z^{-2} + \dots$$

Соответственно, в выражении (4.29) отношение многочленов также должно быть в символике Z^{-1} . Если полюсы $S(Z)$ первого порядка и $N = M$, то (4.29) можно разложить на следующую сумму:

$$\begin{aligned} S(Z) &= B_0 + \frac{C_1}{1 - p_1Z^{-1}} + \frac{C_2}{1 - p_2Z^{-2}} + \dots + \frac{C_M}{1 - p_MZ^{-M}} = \\ &= B_0 + \frac{C_1Z}{(Z-p_1)} + \frac{C_2Z}{(Z-p_2)} + \dots + \frac{C_MZ}{(Z-p_M)} = B_0 + \sum_{k=1}^M \frac{C_kZ}{(Z-p_k)}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$B_0 = \frac{a_N}{b_N},$$

где C_k – коэффициенты элементарных дробей, которые являются вычетами функции $S(Z)$.

Для вычисления коэффициентов C_k умножим левую и правую стороны выражения (4.33) на $(Z - p_k)/Z$ и положим $Z = p_k$, при этом в правой части за счет множителя $(Z - p_k) = 0$ при $Z = p_k$ обнуляются все члены суммы кроме члена с C_k данного полюса, а в левой остается произведение $S(z)(z - p_k)/z$, что позволяет вычислить значения C_k :

$$C_k = S(Z)(Z - p_k)/Z | Z = p_k|. \quad (4.34)$$

Если в (4.28) $N < M$, то значение B_0 равно нулю. Если функция $S(Z)$ в точке $Z = p_k$ имеет полюс m -ного порядка, то коэффициент C_k заменяется суммой коэффициентов:

$$\sum_{i=1}^m D_i / (Z - p_k)^i, \quad (4.35)$$

$$D_i = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \frac{d^{m-i}}{dZ^{m-i}} [X(Z) (Z - p_k)^m / Z], \text{ при } Z = p_k. \quad (4.36)$$

Пример 4.

Повторим пример преобразования данным способом -образа, использованного в примере 1: $X(Z) = Z^2 / (Z - 0,5)(Z - 1)^2$.

Решение:

Функция имеет простой полюс $p_1 = 0,5$ и полюс второго прядка $p_2 = 1$.

$$X(Z) = CZ / (Z - 0,5) + D_1 Z / (Z - 1) + D_2 Z / (Z - 1)^2.$$

$$C = Z / (Z - 1)^2|_{Z=0,5} = 0,5 / (0,5 - 1)^2 = 2.$$

$$D_1 = \frac{d}{dz} [(Z - 1)^2 X(Z) / Z] = \frac{d}{dz} [Z / (Z - 0,5)] \Big|_{Z=1} = -2.$$

$$D_2 = (Z - 1)^2 X(Z) / Z = Z / (Z - 0,5)|_{Z=1} = 2.$$

$$X(Z) = 2Z / (Z - 0,5) - 2Z / (Z - 1) + 2Z / (Z - 1)^2.$$

Обратное -преобразование каждой простой дроби выполним по таблице 4.1.

$$\text{Ответ: } x(k) = 2(0,5)^k - 2 + 2k = 2[(k - 1) + (0,5)^k].$$

Результат аналогичен методу вычетов.

Если -изображение имеет вид дробно-рациональной функции, то разложение на простые дроби с последующим применением таблицы соответствий обычно труда не представляет. Так, например:

$$S(Z) = (b_0 + b_1 Z^{-1} + b_2 Z^{-2}) / (1 - aZ^{-1}) = b_0 / (1 - aZ^{-1}) + b_1 Z^{-1} / (1 - aZ^{-1}) + b_2 Z^{-2} / (1 - aZ^{-1}).$$

По таблице соответствия:

$$X(Z) = 1 / (1 - aZ^{-1}) \rightarrow x(k) = a^k.$$

Отсюда, с учетом линейности преобразования и свойства задержки:

$$x(k) = b_0 a^k + b_1 a^{k-1} + b_2 a^{k-2}.$$

При преобразовании функций со знаменателями более высоких порядков предварительно следует найти полюса функции. Например, для многочлена второго порядка с полюсами p_1 и p_2 :

$$S(Z) = 1 / (1 - a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2}) = 1 / [(1 - p_1 Z^{-1})(1 - p_2 Z^{-1})].$$

Представим $S(Z)$ в виде суммы дробей с неизвестными коэффициентами b_1 и b_2 :

$$S(Z) = \frac{b_1 / (1 - p_1 Z^{-1}) + b_2}{(1 - p_2 Z^{-1})} = \frac{(b_1 - b_1 p_2 Z^{-1} + b_2 - b_2 p_1 Z^{-1})}{[(1 - p_1 Z^{-1})(1 - p_2 Z^{-1})]}.$$

При равенстве знаменателей в этих двух выражениях должны быть равны и числители:

$$(b_1 + b_2) - (b_1 p_2 + b_2 p_1) Z^{-1} = 1,$$

а это обеспечивается равенством коэффициентов при одинаковых степенях Z .

Отсюда получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 &= 1; \\ b_1 \cdot p_2 + b_2 \cdot p_1 &= 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений, находим значения коэффициентов b_1 и b_2 , подставляем коэффициенты в $S(Z)$, выраженное в виде суммы дробей, и по таблице соответствия переводим дроби во временные функции.

4.3 Вычисление интегральных преобразований

В Mathcad PLUS можно в символьном виде выполнять некоторые интегральные преобразования. Если выбрать *Преобразования* из меню *Символика*, можно увидеть шесть дополнительных команд на раскрывающемся подменю. В этом разделе описывается, как использовать эти команды, чтобы выполнить преобразования Фурье, Лапласа, - преобразование (это преобразование называется также нахождением производящей функции) и их обращения.

Рисунок 4.5 показывает некоторые примеры того, как использовать в Mathcad символьные преобразования. Обратите внимание, что результат может содержать функции, которые распознаются символьным процессором Mathcad, но не численным процессором. Пример – функция *Dirac* в нижней части рисунка 4.5 [19].

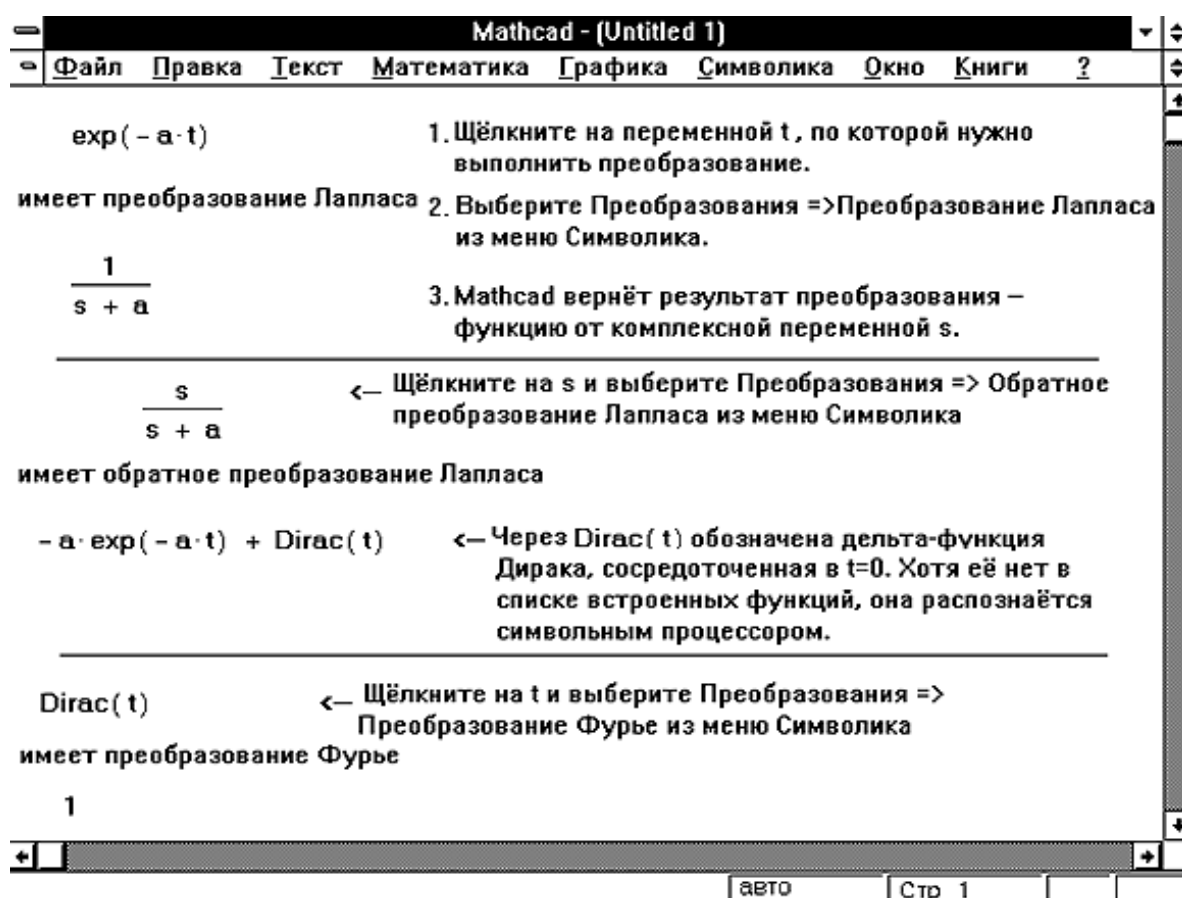


Рисунок 4.5 – Выполнение символьных преобразований

Прямое и обратное преобразования Фурье.

Чтобы получить преобразование Фурье, необходимо:

- 1) Ввести выражение, которое нужно преобразовать.
- 2) Щёлкнуть мышью на переменной преобразования.
- 3) Выбрать *Преобразования* \Rightarrow *Преобразование Фурье* из меню

Символика.

Mathcad возвращает функцию от ω , определяемую формулой:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt,$$

где $f(t)$ – выражение, которое нужно преобразовать.

Mathcad возвращает функцию переменной ω при выполнении преобразования Фурье, так как это имя переменной обычно используется в данном контексте. Если преобразуемое выражение уже содержит ω , Mathcad избегает неоднозначности, возвращая функцию от переменной $\omega\omega$.

Можно заменить ω другой переменной или выражением, поместив переменную или выражение в буфере обмена, щёлкнув мышью на ω и выбирая *Заменить переменную* из меню *Символика*.

Чтобы вычислить обратное преобразование Фурье, необходимо:

- 1) Ввести выражение, которое нужно преобразовать.
- 2) Щёлкнуть мышью на переменной преобразования.
- 3) Выбрать *Преобразования* \Rightarrow *Обратное преобразование Фурье* меню

Символика.

Mathcad возвращает функцию от t , задаваемую выражением:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)e^{j\omega t} d\omega,$$

где $f(\omega)$ – выражение, которое нужно преобразовать.

Mathcad возвращает функцию от переменной t при выполнении обратного преобразования Фурье, так как это имя переменной обычно используется в данном контексте. Если преобразуемое выражение уже содержит t , Mathcad избегает неоднозначности, возвращая взамен функцию от переменной tt .

Можно заменить t другой переменной или выражением, поместив переменную или выражение в буфере обмена, щёлкнув мышью на t и выбирая *Заменить переменную* из меню *Символика*.

Прямое и обратное преобразования Лапласа.

Чтобы выполнить преобразование Лапласа, необходимо:

- 1) Ввести выражение, которое нужно преобразовать.
- 2) Щёлкнуть мышью на переменной преобразования.
- 3) Выбрать *Преобразования* \Rightarrow *Преобразование Лапласа* из меню

Символика.

Mathcad возвращает функцию от p , определяемую формулой:

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt,$$

где $f(t)$ – выражение, которое нужно преобразовать.

Mathcad возвращает функцию от переменной p при выполнении преобразования Лапласа, так как это имя переменной обычно используется в

данном контексте. Если преобразуемое выражение уже содержит p , Mathcad избегает неоднозначности, возвращая взамен функцию переменной pp .

Можно заменить p другой переменной или выражением, поместив переменную или выражение в буфере обмена, щёлкнув мышью на p и выбирая *Заменить переменную* из меню *Символика*.

Чтобы получить обратное преобразование Лапласа, необходимо:

- 1) Ввести выражение, которое нужно преобразовать.
- 2) Щёлкнуть мышью на переменной преобразования.

3) Выбрать *Преобразования* \Rightarrow *Обратное преобразование Лапласа* из меню *Символика*.

Mathcad возвращает функцию от t , задаваемую выражением:

$$\frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(p)e^{pt} dp,$$

где $F(p)$ – выражение, которое нужно преобразовать, и все особенности $F(p)$ находятся слева от линии $Re(s) = \sigma$.

Mathcad возвращает при выполнении обратного преобразования Лапласа функцию переменной t , так как это имя переменной обычно используется в данном контексте. Если преобразуемое выражение уже содержит t , Mathcad избегает неоднозначности, возвращая взамен функцию от переменной tt .

Замену переменной t можно выполнить аналогично замене p .

Прямое и обратное -преобразования.

Чтобы найти $-$ преобразование (называемое иначе производящей функцией), необходимо:

- 1) Ввести выражение, которое нужно преобразовать.
- 2) Щёлкнуть мышью на переменной преобразования.
- 3) Выбрать *Преобразования* \Rightarrow $-$ преобразование из меню *Символика*.

Mathcad возвращает функцию от Z , определяемую формулой:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)Z^{-n},$$

где $f(n)$ – выражение, которое нужно преобразовать.

Mathcad при выполнении $-$ преобразования возвращает функцию от переменной Z , так как это имя переменной обычно используется в данном контексте. Если преобразуемое выражение уже содержит Z , Mathcad избегает неоднозначности, возвращая функцию переменной ZZ .

Можно заменить Z другой переменной или выражением, поместив переменную или выражение в буфере обмена, щёлкнув мышью на Z , и выбирая *Заменить переменную* из меню *Символика*.

Чтобы найти обратное $-$ преобразование функции, необходимо::

- 1) Ввести выражение, которое нужно преобразовать.
- 2) Щёлкнуть мышью на переменной преобразования.
- 3) Выбрать *Преобразования* \Rightarrow *Обратное -преобразование* из меню *Символика*.

Mathcad возвращает функцию от n , задаваемую контурным интегралом вокруг начала координат:

$$\frac{1}{j2\pi} \oint_C F(Z) Z^{n-1} dZ,$$

где $F(Z)$ – выражение, которое нужно преобразовать, и C — контур, включающий все особенности подынтегрального выражения.

Mathcad возвращает функцию от переменной n при выполнении обратного z -преобразования, так как это имя переменной обычно используется в данном контексте. Если преобразуемое выражение уже содержит n , Mathcad избегает неоднозначности, возвращая взамен функцию от переменной nn .

Замену переменной n можно выполнить аналогично замене Z .

5 Линейные дискретные системы с постоянными параметрами

5.1 Алгоритмы и структурные схемы дискретных систем

Анализ формул (4.26; 4.27) показывает, что в них выполняется три действия: умножение, сложение и задержка. Эти действия можно представить в виде элементов структурной схемы (рисунок 5.1) [9].

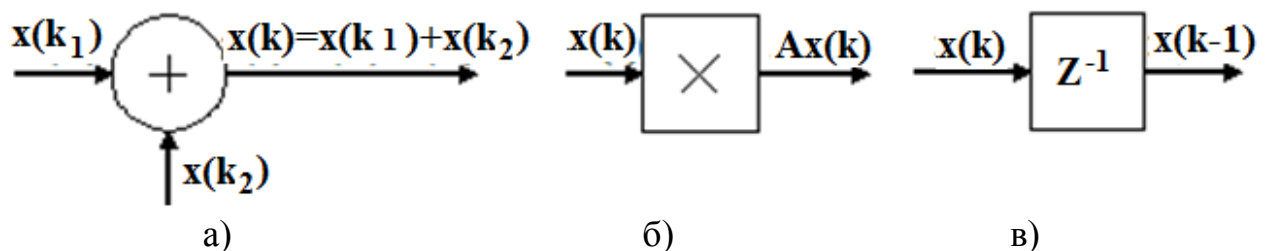


Рисунок 5.1 – Элементы структурной схемы (а – сумматор; б – умножитель; в – элемент задержки)

В отличие от аналоговых цепей, которые представляют собой соединение элементов R, L, C , дискретная цепь – это структурная схема вычислений выходной последовательности $y(n)$ по входной последовательности $x(n)$. Она состоит из элементов задержки, сумматоров и усилителей (умножителей).

Приведенные на рисунке 5.1 операции можно осуществить с помощью элементов цифровой или вычислительной техники. Первые представляют собой выпускаемые промышленностью интегральные микросхемы, позволяющие задерживать, складывать, умножать сигналы. Последние – это серийные макро, микро-ЭВМ, либо микропроцессорные устройства. Характерно, что и те и другие работают с цифровыми сигналами, т.е. с отсчетами, представленными в двоичном коде (0; 1). В этом случае любая конкретная цепь может быть реализована с помощью устройства, собранного на ИМС, либо в виде программы для ЭВМ или микропроцессорного устройства.

Заметим, что представление чисел в двоичном коде из-за ограниченности разрядности цифровых устройств выполняется неточно. Операция умножения отсчетов сигнала на число тоже выполняется неточно

из-за округления или усечения результата. Это приводит к ошибкам при восстановлении сигнала. Существует только один путь уменьшения этих ошибок – увеличение разрядности устройств обработки.

Вывод: дискретная цепь – это структурная схема алгоритма вычислений, а цифровая цепь – это воплощение данного алгоритма в виде программных и аппаратных средств.

Рассмотрим один из элементов дискретной цепи – элемента задержки. Элемент задержки (см. рисунок 5.1,в) осуществляет задержку цифрового сигнала на один интервал дискретизации. Сигнал на его входе $x(n)$, а на выходе $y(n) = x(n - 1)$.

Применим -преобразование к этим сигналам:

$$x(n) \Leftrightarrow X(Z); x(n - 1) \Leftrightarrow X(Z)Z^{-1} \text{ – согласно теореме задержки, т.о.,} \\ Y(Z) = X(Z)Z^{-1}. \quad (5.1)$$

Передаточная функция дискретной цепи.

Передаточной (системной) функцией дискретной цепи $H(Z)$ называют отношение -преобразований выходного и входного дискретных сигналов

$$H(Z) = Y(Z)/X(Z). \quad (5.2)$$

Обратимся к теореме свертки, согласно которой свертке дискретных функций $x(n)$ и $h(n)$ соответствует произведение их -преобразований (4.28).

Из (5.2) и (4.28) видно, что -преобразование импульсной характеристики цепи $h(n)$ и есть передаточная функция дискретной цепи $H(Z)$:

$$H(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)Z^{-n}. \quad (5.3)$$

Пример 5.1.

Найти системную функцию дискретной цепи, имеющей импульсную характеристику $h(N) = \{-1; 1; 2\}$.

Решение:

$$H(Z) = -1Z^0 + 1Z^{-1} + 2Z^{-2} = -1 + 1/Z + 2/Z^2.$$

Пример 5.2.

Найти импульсную характеристику и передачную функцию дискретной цепи, описываемой уравнением $y(n) = 4x(n) - 1,5(n - 1)$.

Решение:

Выражение для выходного сигнала $y(n)$ сравниваем с выражением, полученным согласно теореме дискретной свертки:

$$y(n) = h(0)x(n) + h(1)x(n - 1),$$

$$\text{Ответ: } h(0) = 4; h(1) = -1,5.$$

Согласно (5.3), передачная функция

$$H(Z) = h(0)Z^0 + h(1)Z^{-1} = 4 + (-1,5)Z^{-1} = 4 - 1,5Z^{-1}..$$

Другой способ нахождения $H(Z)$ состоит в том, чтобы найти -изображение выходного сигнала $y(n)$, а затем найти $H(Z)$:

$$Y(Z) = 4X(Z) - 1,5X(Z)Z^{-1}; H(Z) = 4 - 1,5Z^{-1}.$$

5.2 Цифровые фильтры

Важнейшим примером линейных дискретных систем является линейный цифровой фильтр (ЦФ).

ЦФ называется некоторый алгоритм (дискретная система – физическое устройство или программа для компьютера), который производит определенные операции обработки во временной или частотной области последовательности $\{x(k)\}$ числовых отсчетов входного дискретного сигнала и формирует выходной дискретный сигнал – последовательность $\{y(k)\}$:

$$(x_0, x_1, x_2, \dots) \Rightarrow (y_0, y_1, y_2, \dots) \text{ или } \{x(k)\} \Rightarrow \{y(k)\}.$$

Аналогичные действия, но только с непрерывным сигналом, выполняют аналоговые фильтры. При этом ЦФ имеют ряд преимуществ по сравнению с аналоговыми:

- высокая стабильность параметров, возможность получать самые разнообразные формы АЧХ и ФЧХ;
- простота реализации и удобство использования (используются одни и те же алгоритмы для проектирования фильтров с различными импульсными характеристиками);
- лучшие качественные характеристики (можно получить практически любую заданную точность обработки сигналов);
- возможность спроектировать фильтр любой сложности;
- для перестройки на другую импульсную характеристику следует лишь задать новое ядро для фильтра;
- ЦФ не требуют настройки и легко реализуются на ЭВМ программными методами.

Однако цифровые фильтры имеют и ряд недостатков:

- невозможность обработки сигналов на сверхвысоких частотах – это определяется частотой дискретизации современных АЦП, которая в настоящее время не превышает нескольких сотен мегагерц. Например, для спектрального анализа света такой частоты дискретизации явно недостаточно, так как частота электромагнитных колебаний света лежит в терагерцовом диапазоне;
- при использовании сложных цифровых фильтров скорость обработки сигнала может существенно замедлиться, вплоть до того, что будет невозможна обработка сигнала в реальном масштабе времени (в микропроцессорных системах для цифровой обработки сигналов и дискретного управления применяют двоичные числа с количеством разрядов от 4 до 16);
- для большой точности и высокой скорости обработки сигналов требуется не только мощный процессор, но и дополнительное, возможно дорогостоящее, аппаратное обеспечение в виде высокоточных и быстрых ЦАП и АЦП.

Тем не менее, эти недостатки не препятствуют все более широкому использованию цифровых фильтров в компьютерных приложениях. В настоящее время цифровые фильтры используются в следующих приложениях:

- обработка звукового сигнала: различные звуковые эффекты (например, эхо), эмуляция объемного звука, восстановление и редактирование звукозаписей, синтезирование звучания музыкальных инструментов, синтез и распознавание речи;

- обработка изображений – различные эффекты (например, размытие или повышение резкости), сжатие изображений (формат JPEG, фрактальная компрессия);

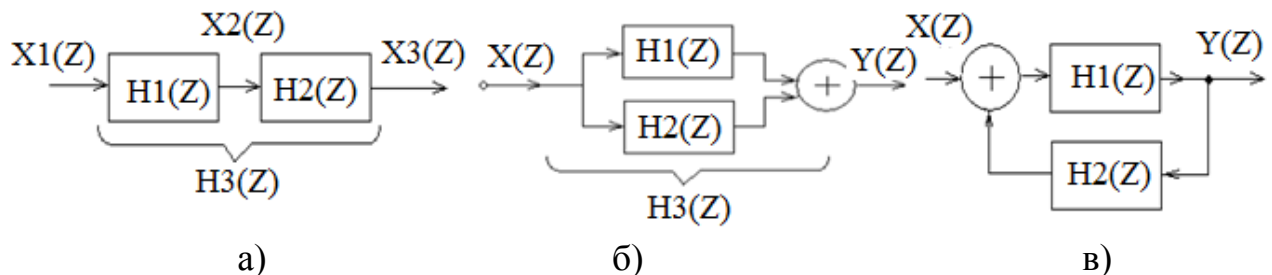
- исследование и обработка каких-либо экспериментальных данных, например, ультразвуковое исследование в медицине, обработка сигналов, отраженных от цели и т. д.;

- искусственный интеллект – синтезирование нейронных сетей.

Цифровые фильтры являются прогрессивной технологией обработки сигналов, сочетая в себе более высокую точность обработки сигнала, простоту, невысокую стоимость и удобство использования.

В основном, все цифровые фильтры делятся на две большие группы: фильтры с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтры) или нерекурсивные и фильтры с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ-фильтры) или рекурсивные фильтры.

На рисунке 5.2 представлены наиболее распространенные формы соединений цифровых фильтров каскадами.



последовательное (а), параллельное (б), соединение обратной связи (в).

Рисунок 5.2 – Формы соединения дискретных фильтров

5.3 Нерекурсивные ЦФ (фильтры с конечной импульсной характеристикой, КИХ-фильтры)

Как известно, любая дискретная линейная система обладает некоторой импульсной характеристикой, т.е. реакцией цепи на единичный дискретный импульс (единичную дискретизованную δ -функцию – $\delta(k\Delta t)$, а в цифровом представлении это $1, 0, 0, 0, \dots$). При подаче на вход линейной дискретной цепи единичной импульсной функции на выходе будет образовываться некоторая последовательность импульсов различной амплитуды. Для фильтров с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтров) количество этих импульсов конечно (см. рисунок 5.3).

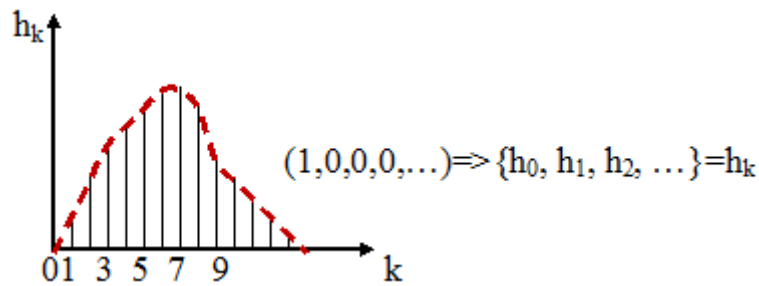


Рисунок 5.3 – Импульсная характеристика фильтра с конечным числом отсчетов

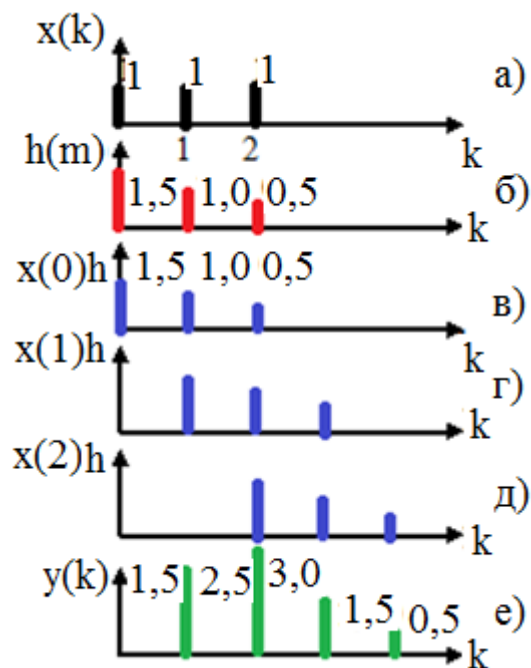
КИХ-фильтры реализуются на основе свертки двух функций. Первая функция является входным сигналом $x(k)$ а вторая a_m называется ядром фильтра и определяет его импульсную характеристику:

$$y(k) = \sum_{m=1}^{N-1} a_m x(k - m). \quad (5.4)$$

Как видно из выражения (5.5), значение выходного сигнала $y(k)$ в момент времени $t = kT$ определяется взвешенным значением входного сигнала в моменты времени:

$$kT, (kT - T), (kT - 2T), (kT - (N - 1)T).$$

Рассмотрим принцип действия цифрового фильтра с простейшим алгоритмом фильтрации импульсной характеристикой с ограниченным числом отсчетов – см. рисунок 5.4.



а – входной сигнал; б – импульсная характеристика; в, г, д – отклики на нулевой, первый и второй входные отсчеты; е – выходной сигнал.

Рисунок 5.4 – Графическое представление цифровой фильтрации

В зависимости от размера ядра фильтра, т. е. от количества содержащихся в ядре отсчетов, точность обработки сигнала фильтром

варьируется. При малом количестве отсчетов в ядре точность обработки невысока. При увеличении числа отсчетов точность повышается. Однако при увеличении числа отсчетов в ядре скорость обработки снижается пропорционально.

Применяя к (5.4) Z-преобразование, получим

$$Y(Z) = \sum_{m=0}^{N-1} a_m X(Z) Z^{-m} . \quad (5.5)$$

Передаточная функция КИХ-фильтра (нерекурсивного фильтра).

Передаточная функция $H(Z)$ КИХ-фильтра определяется (5.2), (5.3).

Устройство, реализующее ЦФ, выполняет последовательное умножение входной выборки сигнала на коэффициенты фильтра a_m и сложение полученных произведений. Наиболее простым способом является так называемая прямая форма реализации ЦФ. Структурная схема, реализующая алгоритм (5.5) приведена на рисунке 5.5.

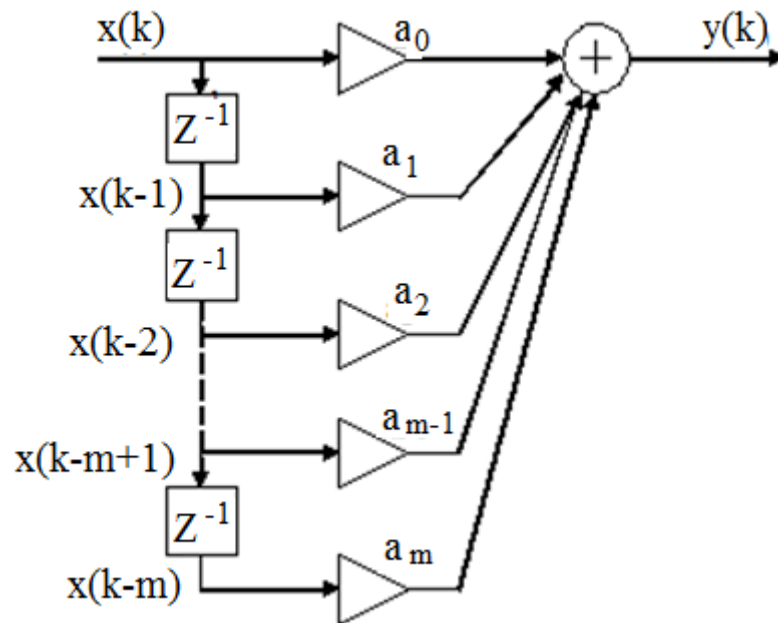


Рисунок 5.5 – Структурная схема нерекурсивного цифрового фильтра

Алгоритм (5.4) можно представить в виде:

$$y(k) = a_0 x(k) + a_1 x(k-1) + a_2 x(k-2) + \dots + a_m x(k-m), \quad (5.6)$$

где a_0, a_1, \dots, a_m действительные постоянные («весовые») коэффициенты;

m – порядок нерекурсивного фильтра, т. е. максимальное число запоминаемых чисел.

Формулы (5.5) и (5.6) тождественны, а коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_m совпадают с соответствующими отсчетами импульсной характеристики фильтра h_0, h_1, \dots, h_m .

Системную функцию нерекурсивного фильтра определим, применив Z-преобразование к обеим частям (5.6):

$$Y(Z) = (a_0 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2} + \dots + a_m Z^{-m}) X(Z). \quad (5.7)$$

Отсюда находим, что системная функция имеет вид:

$$H(Z) = a_0 + a_1 Z^{-1} + \dots + a_m Z^{-m} = a_0 Z^m + a_1 Z^{m-1} + \dots + a_m / Z^m \quad (5.8)$$

и является дробно-рациональной функцией переменной Z .

Транспонированная форма цифровых фильтров.

Рассмотрим на примере нерекурсивного фильтра, поменяв последовательность операций умножения и задержки, используя в каждой ветви отдельную линию задержки (см. рисунок 5.6).

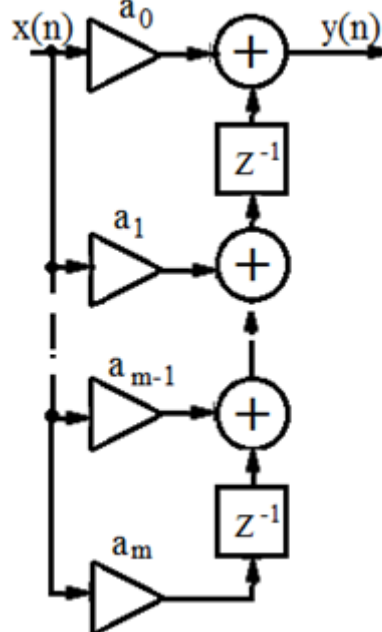


Рисунок 5.6 – Транспонированная реализация нерекурсивного фильтра

Транспонированная реализация позволяет эффективно распараллеливать вычисления и применяется в виде специализированных интегральных схем [3,8,9].

ЦФ высоких порядков.

ЦФ более высоких порядков можно реализовать несколькими способами. Для получения системы с достаточно сложной импульсной характеристикой можно использовать каскадное (последовательное и/или параллельное) соединение ЦФ. Рассмотрим последовательность следующих друг за другом звеньев ЦФ 1-го или 2-го порядка (см. рисунок 5.7).

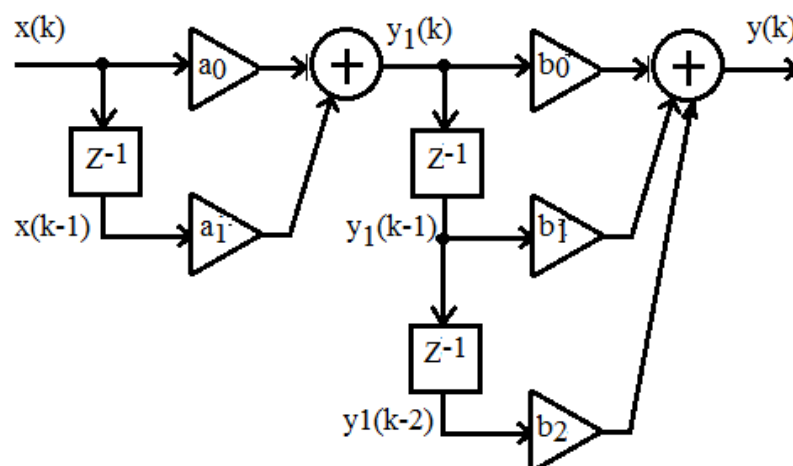


Рисунок 5.7 – Последовательное соединение ЦФ первого и второго порядков

В этом случае ЦФ реализуется в соответствии с формулой (для M звеньев).

$$H(Z) = \prod_{m=1}^M H_m(Z) = H_1(Z) \times H_2(Z) \times \dots \times H_M(Z). \quad (5.9)$$

При параллельной форме реализации (см. рисунок 5.8) входная последовательность в составляющих звеньях одна и та же, а выходная последовательность системы равна сумме выходных последовательностей отдельных звеньев.

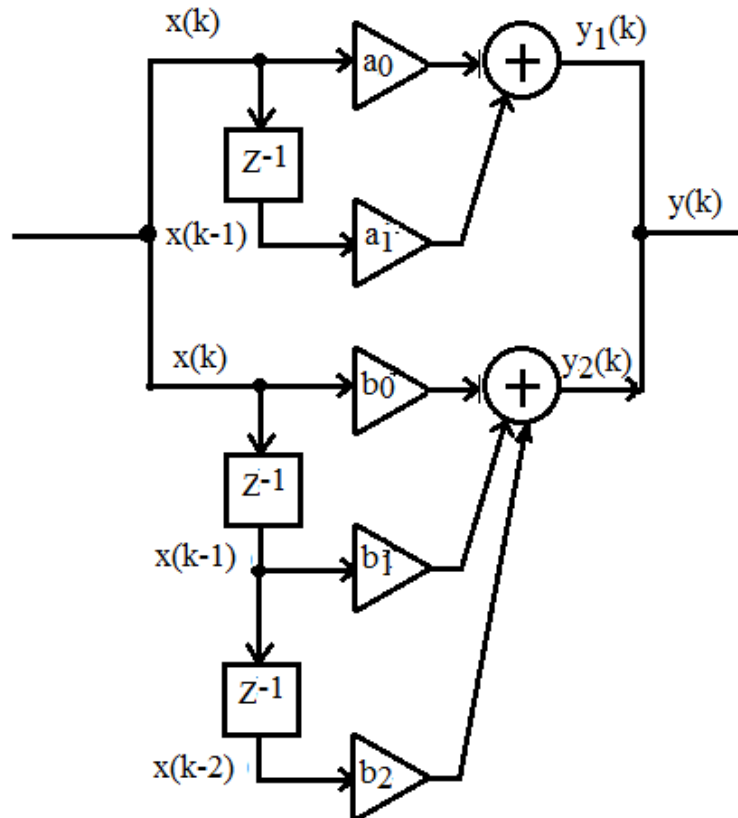


Рисунок 5.8 – Параллельное соединение ЦФ первого и второго порядков

Передаточная функция ЦФ рассматривается как (для M звеньев):

$$H(Z) = \sum_{m=1}^M H_m(Z) = H_1(Z) + H_2(Z) + \dots + H_M(Z). \quad (5.10)$$

Нерекурсивный ЦФ (КИХ-фильтр) может быть практически осуществлен, если заданная импульсная характеристика содержит ограниченное число отсчетов. Для получения же импульсной характеристики с большим числом членов требуется много ячеек памяти, что затрудняет их реализацию. Вместе с тем, нерекурсивные ЦФ имеют целый ряд важнейших достоинств. Они всегда устойчивы, позволяют строить фильтры с точно-линейной фазочастотной характеристикой и минимально-фазовые фильтры, а также отличаются малыми собственными шумами и простотой настройки.

Рассмотрим примеры на вычисление некоторых параметров КИХ-фильтров.

Пример 5.3.

Вычисление дискретной свертки сигналов.

Дискретный сигнал $x(k)$ и импульсная характеристика дискретной системы $h(m)$ заданы отсчетами: $\{x(k)\} = \{1, 3, 2, 4\}$, $\{h(m)\} = \{3, 2, 1, 1\}$.

Вычислить выходную последовательность отсчетов.

Решение:

Воспользуемся алгоритмом дискретной свертки (4.27) и осуществим непосредственное вычисление ее отсчетов. Для этого запишем отсчеты импульсной характеристики системы, а отсчеты сигнала расположим зеркально.

Для того чтобы определить нулевой отсчет свертки, совместим первые позиции импульсной характеристики и сигнала, перемножим отсчеты, находящиеся друг под другом, как показано ниже, а затем, смещая отсчеты сигнала слева направо, продолжим операции в соответствии с (4.27):

1: m=0	3 2 1 1	
x(0)	4 2 3 1	
	3	y(0)=1×3=3
2: m=1	3 2 1 1	
x(1)	4 2 3 1	
	9 2	y(1)= 3×3+1×2 =11
3: m=2	3 2 1 1	
x(2)	4 2 3 1	
	6 6 1	y(2)= 3×2+2×3+1×1=13
4: m=3	3 2 1 1	
x(3)	4 2 3 1	
	12 4 3 1	y(3)= 4×3+2×2+3×1+1×1=20
5: m=4	3 2 1 1	
x(4)	4 2 3 1	
	8 2 3	y(4)= 4×2+3×1+1×1=13
6: m=5	3 2 1 1	
x(5)	4 2 3 1	
	4 2	y(5)= 4×1+ 2×1=6
7: m=6	3 2 1 1	
x(6)	4 2 1 1	y(6)=4×1=4.

Операции необходимо проделать до тех пор, пока отсчеты не перестанут накладываться. Получим значение свертки:

$$\{y(k)\} = \{3, 11, 13, 20, 13, 6, 4\}.$$

Пример 5.4.

Определение алгоритма работы нерекурсивного фильтра

Импульсная характеристика нерекурсивного цифрового фильтра представлена формулой:

$$h_k = \begin{cases} 1, & k = 0; \\ 1, & k = 1; \\ 1, & k = 2; \\ 0, & k > 2. \end{cases}$$

Определить алгоритм работы фильтра.

Решение:

Подставив в формулу (5.6) соответствующие отсчеты $h(k)$, получим искомый алгоритм:

$$y(k) = x(k) \times 1 + x(k-1) \times 1 + x(k-2) \times 1 + x(k-3) \times 0 = x(k) + x(k-1) + x(k-2).$$

Пример 5.5.

Определение системной функции нерекурсивного фильтра

Определить системную функцию фильтра $H(Z)$, алгоритм которого рассчитан в примере 5.4.

Решение:

Системную функцию определим как -преобразование импульсной характеристики фильтра:

$$H(Z) = 1 \times Z^0 + 1 \times Z^{-1} + 1 \times Z^{-2}.$$

5.4 Рекурсивные цифровые фильтры (фильтры с бесконечным числом отсчетов импульсной характеристики) – БИХ-фильтры

Известно, что фильтр при вычислении очередного отсчета может оперировать только прошлыми значениями входного сигнала и ничего не знать о будущих.

Возможности ЦФ существенно расширяются при введении в его схему обратных связей, которые позволяют формировать n -й выходной отсчет путем использования предыдущих значений как входного, так и выходного дискретных сигналов, т. е. алгоритм цифровой фильтрации имеет вид:

$$y(k) = a_0x(k) + a_1x(k-1) + \dots + a_mx(k-m) + b_1y(k-1) + \dots + b_ny(k-n), \quad (5.11)$$

где a_j и b_i – вещественные коэффициенты.

Или

$$y(k) = \sum_{m=0}^{M-1} a_m x(k-m) + \sum_{n=1}^N b_n y(k-n). \quad (5.12)$$

Перегруппировав входные и выходные отсчеты по разные стороны знака равенства, получим традиционную форму записи разностного уравнения:

$$y(k) - b_1y(k-1) - b_2y(k-2) - \dots - b_ny(k-n) = a_0x(k) + a_1x(k-1) + \dots + a_mx(k-m) \quad (5.13)$$

Для реализации такого фильтра в схему необходимо добавить вторую линию задержки – для хранения выходных отсчетов. Полученная при этом структура показана на рисунке 5.9. Такие фильтры называются рекурсивными.

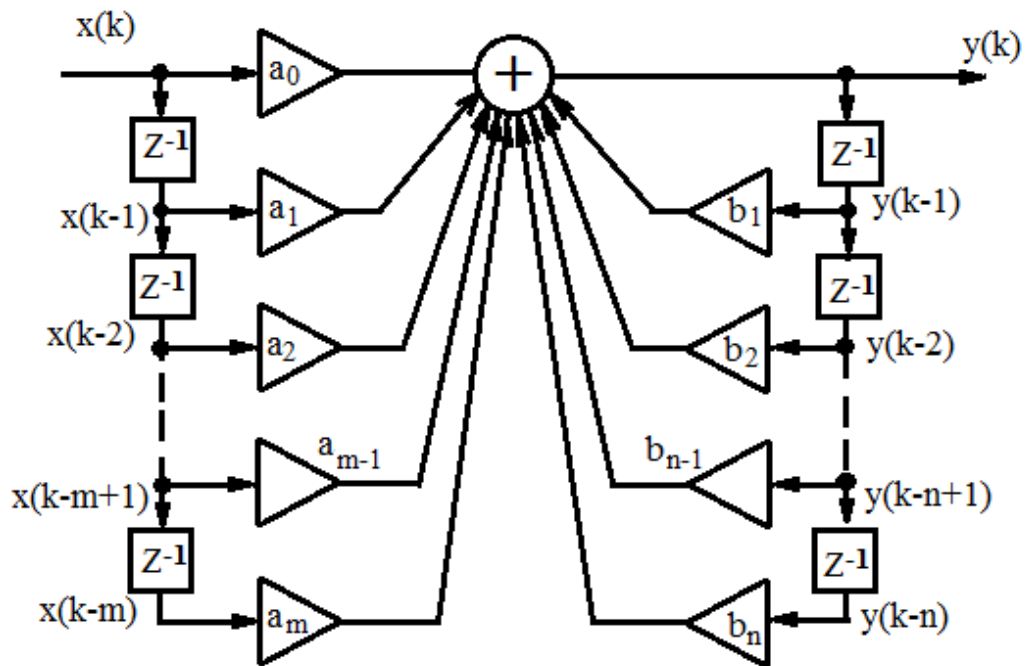


Рисунок 5.9 – Структурная схема рекурсивного цифрового фильтра (РЦФ) – прямая реализация (m – порядок фильтра)

Импульсная характеристика рекурсивного фильтра рассчитывается значительно сложнее, чем нерекурсивного. Рассмотрим формирование нескольких первых ее отсчетов:

1) На вход поступает единичный импульс, умножается на a_0 и проходит на выход. Получим

$$h(0) = a_0.$$

2) Далее входной единичный импульс попадает на входную линию задержки, а выходной отсчет a_0 – в выходную линию задержки. В результате второй отсчет импульсной характеристики будет формироваться как

$$h(1) = a_1 + b_1 h(0).$$

3) Если продолжить рассмотрение перемещения входного единичного импульса вдоль входной линии задержки и заполнения выходными отсчетами выходной линии задержки, можно получить

$$h(2) = a_2 + b_2 h(0) + b_1 h(1) = a_2 + a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_0 b_1^2 \text{ и т.д.}$$

Видно, что по мере того, как входная линия задержки заполняется отсчетами импульсной характеристики, сложность аналитических формул быстро нарастает.

Если бы не погрешность представления чисел в ЭВМ, такой фильтр имел бы бесконечное количество затухающих по амплитуде выходных отсчетов при одном единственном входном отсчете, т.е. фильтр имел бы бесконечную импульсную характеристику (БИХ-фильтр) – по этой же причине рекурсивные фильтры могут быть неустойчивыми. На практике размер импульсной характеристики определяется точностью представления чисел.

Применив z -преобразование к (5.12; 5.13) и решив его относительно $Y(Z)$, найдем передаточную (системную) функцию рекурсивного ЦФ

$$H(Z) = \frac{a_0 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2} + \dots + a_m Z^{-m}}{1 - b_1 Z^{-1} - b_2 Z^{-2} - \dots - b_n Z^{-n}} = \frac{\sum_{m=0}^{M-1} a_m Z^{-m}}{1 - \sum_{n=0}^{N-1} b_n Z^{-n}}. \quad (5.14)$$

Рассмотрим некоторые, наиболее часто используемые структурные схемы рекурсивных ЦФ:

1) *Прямая форма рекурсивного фильтра «биквадратный блок»* (см. рисунок 5.10).

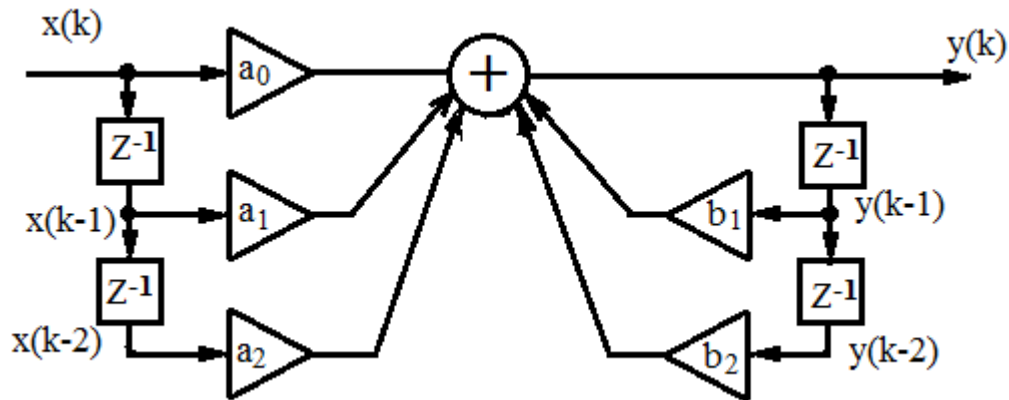


Рисунок 5.10 – РЦФ биквадратный блок, прямая форма

Прямая форма рекурсивных фильтров реализуется непосредственно по его разностному уравнению (5.12; 5.13) или по передаточной функции (5.14). Она содержит один сумматор, умножители и $M + N - 2$ элементов задержки (для создания цепей, соответствующих числителю и знаменателю передаточной функции $H(Z)$ используются отдельные элементы задержки). Порядок фильтра определяется высшим порядком полиномов числителя – нерекурсивной части фильтра.

Недостаток такого способа реализации – сравнительно большое число ячеек памяти, применяемой для рекурсивной и нерекурсивной частей. Уменьшить число этих ячеек позволяют каноническая (в смысле оптимального решения) схема, в которой каждый элемент задержки используется для цепей как нерекурсивной, так и рекурсивной частей схемы.

2) *Прямая каноническая форма.*

Канонической называют структурную схему фильтра, содержащую минимальное число элементов задержки. Домножив числитель и знаменатель (5.2) на некоторую функцию $V(Z)$, передаточную функцию рекурсивного ЦФ (5.2) можно представить в виде

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} \times \frac{V(Z)}{V(Z)} = H_1(Z) \times H_2(Z),$$

где $H_1(Z) = \frac{V(Z)}{X(Z)} = \frac{1}{1 + \sum_{m=1}^{M-1} b_m Z^{-m}}$ и $H_2(Z) = \frac{Y(Z)}{V(Z)} = \sum_{l=1}^{N-1} a_l Z^{-l}$.

Передаточным функциям $H_1(Z)$ и $H_2(Z)$ соответствуют разностные уравнения

$$H_1(Z) \Rightarrow V(nT) = x(nT) - \sum_{m=1}^{M-1} b_m V(nT - mT), \quad (5.15)$$

$$H_2(Z) \Rightarrow y(nT) = \sum_{l=0}^{N-1} a_l V(nT - lT). \quad (5.16)$$

Алгоритм (5.16) определяет структуру построения нерекурсивного ЦФ, у которого входным сигналом является сигнал $V(nT)$, а (5.15) рекурсивного ЦФ, у которого входным сигналом является сигнал $x(nT)$. Таким образом, общая схема рекурсивного ЦФ включает в свою структуру 2 части – рекурсивную и нерекурсивную. Так как в фильтрах, реализующих $H_1(Z)$ и $H_2(Z)$, имеет место задержка только сигнала $V(nT)$, то дублирующие элементы задержки можно объединить и использовать только один набор элементов задержки.

Прямая каноническая схема содержит минимальное число L элементов задержки: $L = \max(M - 1, N - 1)$ и два сумматора.

В качестве примера приведем прямую каноническую форму структурной схемы биквадратного блока (ББ) с передаточной функцией вида

$$H(Z) = \frac{1 - Z^{-1} + Z^{-2}}{1 - 0,5Z^{-1} + 0,5Z^{-2}},$$

здесь $a_0 = 1$; $a_1 = -1$; $a_2 = 1$; $b_1 = 0,5$; $b_2 = -0,5$.

Структурная схема канонической формы рекурсивного ЦФ 2-го порядка (биквадратного блока) показана на рисунке 5.11 б (порядком цифрового фильтра называется количество элементов задержки в схеме фильтра), а на рисунке 5.11 а показан способ получения канонической реализации из прямой (см. рисунок 5.10), где переставляются местами нерекурсивная и рекурсивная части, затем объединяются элементы задержки [7,8,10,11,12,17,18].

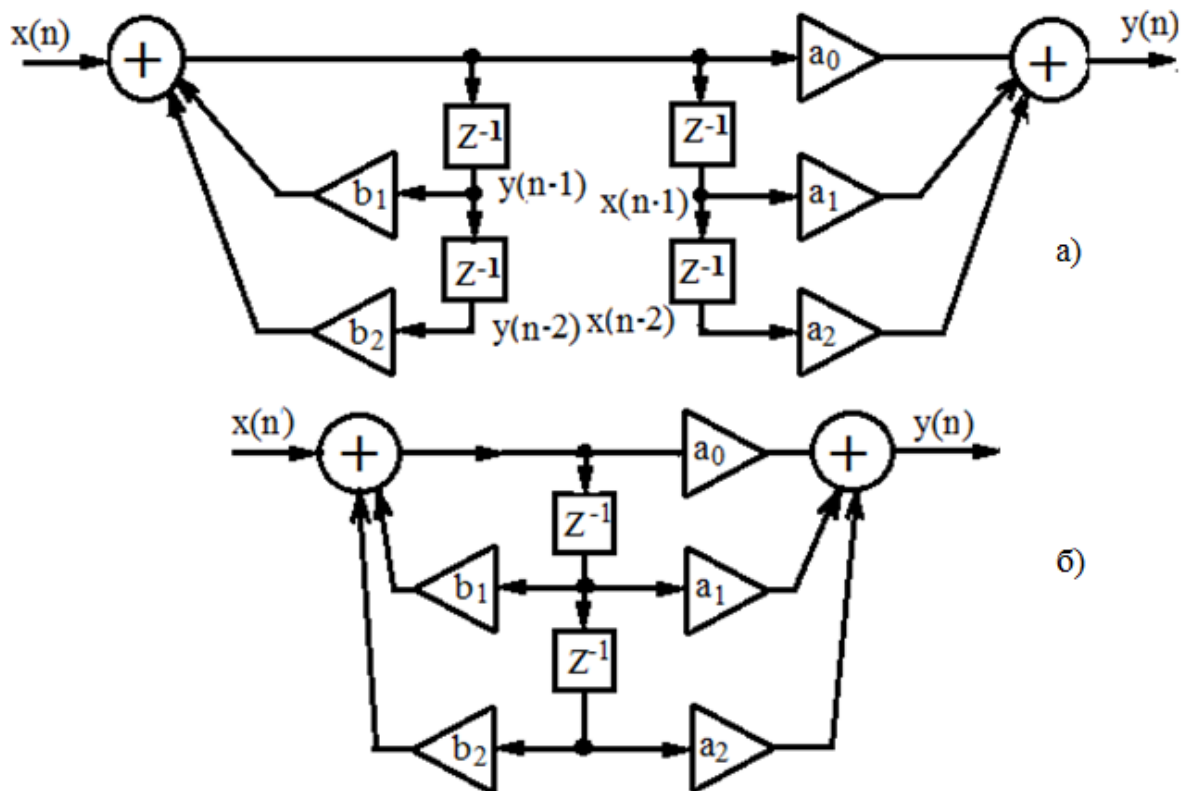


Рисунок 5.11 – Биквадратный блок – каноническая форма
3) Каскадная (последовательная) форма.

Является одной из наиболее часто применяемых схем реализации ЦФ высоких порядков и соответствует представлению передаточной функции $H(Z)$ в виде произведения, аналогично (5.9):

$$H(Z) = \prod_{l=1}^L H_l(Z), \quad (5.17)$$

где $H_l(Z)$ – передаточная функция, например, биквадратного блока:

$$H_l(Z) = \frac{a_0 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2}}{1 - b_1 Z^{-1} - b_2 Z^{-2}}. \quad (5.18)$$

Причем возможно, что в некоторых сомножителях $H_l(Z)$ некоторые коэффициенты равны нулю и, следовательно, реализуются более простой структурной схемой.

4) Параллельная форма реализации.

Соответствует представлению передаточной функции РЦФ в виде суммы, аналогично (5.10):

$$H(Z) = \sum_{l=1}^L H_l(Z), \quad (5.19)$$

где слагаемые представлены (5.18) и могут быть также реализованы в виде упрощенных структур биквадратных блоков.

Основное достоинство рекурсивных фильтров – существенное сокращение числа элементов по сравнению с их числом в нерекурсивных фильтрах, выполняющих те же операции. Это позволяет реализовать цифровые фильтры с импульсными характеристиками, имеющими теоретически бесконечное число отсчетов.

5.5 Частотные характеристики цифровых фильтров; типовые звенья ЦФ

Одним из важных показателей, характеризующих линейные дискретные системы (ЛДС), является частотная характеристика или частотный коэффициент передачи, определяемый как частотная зависимость отношения реакции к гармоническому воздействию в установившемся режиме

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{y(nT)}{x(nT)}. \quad (5.20)$$

Перейдя к цифровым фильтрам, определим частотный коэффициент передачи, если условно входной сигнал представим в виде дискретной гармоники единичной амплитуды (см. рисунок 5.12).

Выборки непрерывного гармонического сигнала $u(t) = \cos \omega t$, взятые с интервалом дискретизации T , описываются дискретной последовательностью

$$x(k) = \cos(\omega k \Delta t) = e^{j\omega k T}. \quad (5.21)$$

На вход линейного цифрового фильтра подается дискретная гармоническая последовательность вида (5.21), бесконечная во времени ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

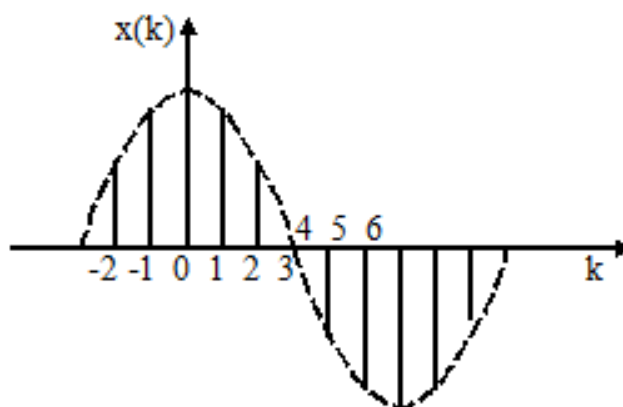


Рисунок 5.12 – Дискретная гармоника

Используя формулу дискретной свертки, запишем m -й отсчет выходного сигнала цифрового фильтра в виде:

$$y(m) = \sum_{k=-\infty}^m e^{j\omega kT} h(m-k) = e^{j\omega mT} \sum_{k=-\infty}^m e^{j\omega (m-k)T} h(m-k). \quad (5.22)$$

Введем $n = m - k$.

$$y(n) = e^{j\omega nT} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j\omega nT} h(n). \quad (5.23)$$

Из (5.23) видно, что выходной сигнал цифрового фильтра имеет структуру дискретной гармонической последовательности с частотой колебаний, равной частоте входного сигнала ω .

В соответствии с (5.20) частотный коэффициент передачи цифрового фильтра, имеет вид

$$H(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) e^{-j\omega nT}. \quad (5.24)$$

Эта формула позволяет сделать два важных вывода:

1) Частотный коэффициент передачи цифрового фильтра, как и спектр дискретного сигнала, имеет периодическую структуру с периодом по оси частот, равным частоте дискретизации $\omega_1 = 2\pi/T$. Это фундаментальное положение для цифровых фильтров. Периодическая структура частотного коэффициента передачи ЦФ позволяет либо выделить, либо подавить отдельные составляющие спектра дискретного входного сигнала.

2) Функция $H(e^{j\omega T})$ является дискретным преобразованием Фурье импульсной характеристики цифрового фильтра, аналитически представленной в виде последовательности дельта-функций:

$$h(\delta(t)) = h(0)\delta(t) + h(1)\delta(t-T) + h(2)\delta(t-2T) + \dots$$

Как всякую комплексную функцию, $H(e^{j\omega T})$ можно представить через модуль и аргумент

$$H(e^{j\omega T}) = |H(e^{j\omega T})| e^{j \arg(H(e^{j\omega T}))} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}. \quad (5.25)$$

Модуль коэффициента передачи называют амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ)

$$A(\omega) = |H(e^{j\omega T})|, \quad (5.26)$$

а аргумент

$$\varphi(\omega) = \arg(H(e^{j\omega T})) \quad (5.27)$$

$\varphi(\omega)$ – фазочастотной характеристикой (ФЧХ) линейной системы.

АЧХ и ФЧХ непрерывны по определению.

АЧХ имеет, как правило, один максимум, а ФЧХ изменяется монотонно в зависимости от частоты.

Если коэффициенты фильтра вещественны, то АЧХ четная, ФЧХ – нечетная функция частоты.

Сравнивая передаточную функцию $H(Z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)Z^{-n}$ с частотной характеристикой, легко видеть их взаимосвязь

$$H(e^{j\omega T}) = H(Z)|_{Z=e^{j\omega T}} = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n T}. \quad (5.28)$$

Итак, для получения частотной характеристики $H(e^{j\omega T})$ достаточно в $H(Z)$ заменить Z на $e^{j\omega T}$.

Тогда для нерекурсивных цифровых фильтров

$$H(Z) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k Z^{-k} = a_0 + a_1 Z^{-1} + \dots + a_{N-1} Z^{N-1},$$

Частотная характеристика будет иметь вид:

$$H(e^{j\omega T}) = a_0 + a_1 e^{-j\omega T} + \dots + a_{N-1} e^{-(N-1)j\omega T}.$$

Поскольку все частотные характеристики зависят при постоянном T от произведения ωT , то вместо ωT можно ввести новую переменную – нормированную частоту. Как правило, используют два способа нормирования частоты. При первом способе полагают

$$\hat{f} = \frac{f}{f_d} = fT, \quad (5.29)$$

или

$$\hat{\omega} = \frac{\omega}{f_d} = \omega T. \quad (5.30)$$

Дискретный сигнал рассматривают в областях $\hat{f} \in [0; 0,5]$ или $\omega \in [0; \pi]$.

Будем считать, что нормированной частотой является частота (5.30).

Тогда

$$H(e^{j2\pi\hat{\omega}}) = a_0 + a_1 e^{-j\hat{\omega}} + \dots + a_{N-1} e^{-(N-1)j\hat{\omega}} = a_0 + a_1 \cos \hat{\omega} + \dots + a_{N-1} \cos(N-1)\hat{\omega} - j(a_1 \sin \hat{\omega} + \dots + a_{N-1} \sin(N-1)\hat{\omega}). \quad (5.31)$$

Из (5.31) легко получить АЧХ и ФЧХ цифрового фильтра.

Для рекурсивного ЦФ с учетом (5.14) получим

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{\sum_{m=0}^{M-1} a_m e^{-jm\hat{\omega}}}{1 - \sum_{n=0}^{N-1} b_n e^{-jn\hat{\omega}}}. \quad (5.32)$$

Из выражений (5.31) и (5.32) следует ряд важных свойств:

- все частотные характеристики ЦФ являются непрерывными функциями частоты;

- все частотные характеристики являются периодическими функциями частоты периодом повторения частоты дискретизации $f_d = 1/T$ или в масштабе нормированных частот $\hat{\omega}$.

Из этих свойств следует, что требования к частотным характеристикам следует задавать лишь на интервале в половину периода.

Типовые звенья дискретной цепи.

В литературе [3,4,7,9] типовыми звеньями дискретной цепи считаются звенья 1-го и 2-го порядков. Они получаются из общей структуры (канонической схемы), если оставить в ней один или два элемента задержки.

Типовое звено первого порядка с передаточной функцией $H(Z) = \frac{a_0 + a_1 Z^{-1}}{1 + b_1 Z^{-1}}$ имеет частотную характеристику (с учетом формулы Эйлера), АЧХ, и ФЧХ равные соответственно:

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{a_0 + a_1 e^{-j\hat{\omega}}}{1 + b_1 e^{-j\hat{\omega}}} = \frac{[a_0 + a_1 \cos(\hat{\omega})] - j a_1 \sin(\hat{\omega})}{[1 + b_1 \cos(\hat{\omega})] - j b_1 \sin(\hat{\omega})}, \quad (5.33)$$

$$A(\hat{\omega}) = \sqrt{\frac{[a_0 + a_1 \cos(\hat{\omega})]^2 + [a_1 \sin(\hat{\omega})]^2}{[1 + b_1 \cos(\hat{\omega})]^2 + b_1^2 \sin^2(\hat{\omega})}}, \quad (5.34)$$

$$\varphi(\hat{\omega}) = \arctg \frac{b_1 \sin(\hat{\omega})}{1 + b_1 \cos(\hat{\omega})} - \arctg \frac{a_1 \sin(\hat{\omega})}{a_0 + a_1 \cos(\hat{\omega})}. \quad (5.35)$$

Типовое звено 2-го порядка с передаточной функцией $H(Z) = \frac{a_0 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2}}{1 + b_1 Z^{-1} + b_2 Z^{-2}}$ имеет частотную характеристику, АЧХ, и ФЧХ, равные соответственно:

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{a_0 + a_1 e^{-j\hat{\omega}} + a_2 e^{-j2\hat{\omega}}}{1 + b_1 e^{-j\hat{\omega}} + b_2 e^{-j2\hat{\omega}}} = \frac{[a_0 + a_1 \cos(\hat{\omega}) + a_2 \cos(2\hat{\omega})] - j[a_1 \sin(\hat{\omega}) + a_2 \sin(2\hat{\omega})]}{[1 + b_1 \cos(\hat{\omega}) + a_2 \cos(2\hat{\omega})] - j[b_1 \sin(\hat{\omega}) + b_2 \sin(2\hat{\omega})]}, \quad (5.36)$$

$$A(\hat{\omega}) = \sqrt{\frac{[a_0 + a_1 \cos(\hat{\omega}) + a_2 \cos(2\hat{\omega})]^2 + [a_1 \sin(\hat{\omega}) + a_2 \sin(2\hat{\omega})]^2}{[1 + b_1 \cos(\hat{\omega}) + b_2 \cos(2\hat{\omega})]^2 + [b_1 \sin(\hat{\omega}) + b_2 \sin(2\hat{\omega})]^2}}, \quad (5.37)$$

$$\varphi(\hat{\omega}) = \arctg \frac{b_1 \sin(\hat{\omega}) + b_2 \sin(2\hat{\omega})}{1 + b_1 \cos(\hat{\omega}) + b_2 \cos(2\hat{\omega})} - \arctg \frac{a_1 \sin(\hat{\omega}) + a_2 \sin(2\hat{\omega})}{a_0 + a_1 \cos(\hat{\omega}) + a_2 \cos(2\hat{\omega})}. \quad (5.38)$$

5.6 Эффекты квантования в цифровых системах

В предыдущих разделах при описании дискретных сигналов и систем отсчеты сигналов и коэффициенты фильтров считались представленными точно (без погрешностей). Рассмотрим эффекты, возникающие вследствие конечной точности представления отсчетов сигналов и параметров систем в вычислительных устройствах, а также основные источники погрешностей в алгоритмах цифровой обработки сигналов [3,9].

Ошибки цифровой фильтрации обусловлены следующими факторами:

- 1) ошибки квантования входных и выходных сигналов;
- 2) квантованием коэффициентов фильтра a_m и b_n в (5.12);
- 3) конечной разрядностью операционных устройств;
- 4) округлением промежуточных результатов вычислений.

Поэтому при реализации ЦФ следует учитывать поведение упомянутых ошибок, которые часто называют ошибками квантования. На выходе цифровой системы ошибки квантования воспринимаются в виде шума, который называют шумом квантования. Это значит, что выбранная структура ЦФ, разрядность входных и выходных сигналов, длина регистров арифметических устройств должны быть определены так, чтобы ошибки квантования не превышали допустимой величины.

Для представления коэффициентов системы и отсчетов обрабатываемого сигнала в цифровой системе используются элементы памяти (регистры, ячейки запоминающего устройства), разрядность которых конечна. Операционные устройства (сумматоры, умножители) также имеют ограниченную разрядность. Следовательно, коэффициенты системы и отсчеты обрабатываемого сигнала представляются с ограниченной точностью. Ограничение разрядности элементов памяти и операционных устройств системы приводит к операции квантования. Введение этой операции вызывает появление ошибок квантования, таких, как:

Шум АЦП.

Если $x(n)$ – входной квантованный (цифровой) сигнал; $Q_A = 2^{-b_A}$ – шаг квантования; $e_A(n)$ – ошибка квантования; b_A – количество числовых разрядов АЦП, то:

- 1) математическое ожидание шума АЦП при округлении чисел равно

$$\mu_A = \frac{1}{Q_A} \frac{e_A^2(n)}{2} \Big|_{-Q_A/2}^{Q_A/2} = 0; \quad (5.39)$$

- 2) дисперсия шума АЦП при округлении чисел равна

$$\sigma_A^2 = \frac{Q_A^2}{12}. \quad (5.40)$$

В логарифмическом масштабе дисперсия шума АЦП равна

$$\tilde{\sigma}_\Phi^2 \approx -(6,02b_A + 10,79) \text{ дБ}; \quad (5.41)$$

- 3) детерминированная оценка шума квантования $E_{A,\text{вх}}$ входного сигнала (абсолютная граница ошибки квантования) имеет вид:

$$E_{A,\text{вх}} \leq \begin{cases} Q_A/2 = 2^{-b_A-1}, & \text{при округлении;} \\ Q_A = 2^{-b_A}, & \text{при усечении.} \end{cases} \quad (5.42)$$

Если система имеет импульсную характеристику $h(m)$, то

- 1) математическое ожидание выходного шума

$$\mu_{A,\text{вых}} = \sum_{m=0}^{\infty} h(m) \underbrace{E[e_A(n-m)]}_{E_A} = 0; \quad (5.43)$$

- 2) дисперсия выходного шума

$$\sigma_{A,\text{вых}}^2 = \frac{Q_A^2}{12} \sum_{m=0}^{\infty} h^2(m). \quad (5.44)$$

В логарифмическом масштабе дисперсия выходного шума

$$\tilde{\sigma}_{A,\text{вых}}^2 = 10 \lg(\sigma_A^2) + 10 \lg(\sum_{m=0}^{\infty} h^2(m)); \quad (5.45)$$

- 3) детерминированная оценка шума квантования $E_{A,\text{вых}}$ выходного сигнала определяется выражением

$$E_{A,\text{вых}} = \frac{Q_A}{2} \sum_{m=0}^{\infty} |h(m)|, \quad (5.46)$$

т.е. зависит от импульсной характеристики системы и не зависит от статистических характеристик входного сигнала.

Собственный шум цифровой системы.

Этот шум обусловлен квантованием результатов умножения, выполняемых в системе. Анализ собственных шумов умножителей гораздо сложнее, чем анализ эффектов квантования входного сигнала.

Для линейной модели умножителя с b_y числовыми разрядами оценки шума квантования на выходе умножителя:

1) математическое ожидание

$$\mu_y = 0; \quad (5.47)$$

2) дисперсия

$$\sigma_y^2 = Q_y^2/12, \quad (5.48)$$

где $Q_y = 2^{-b_y}$ – шаг квантования;

3) абсолютная граница

$$E_y = Q_y/2 = 2^{-b_y-1}. \quad (5.49)$$

Составляющие собственного шума – это реакция цифровой системы на шумы от каждого источника шума. На основе свойства линейности цифровой системы ошибка квантования на выходе системы (собственный шум) определяется как суперпозиция ошибок $e_{y_{i, \text{ВЫХ}}}(n)$, $i = 1, 2, \dots, L$, обусловленных всеми L источниками шума квантования

$$e_{y_{\text{ВЫХ}}}(n) = \sum_{m=1}^L e_{y_{i, \text{ВЫХ}}}(n). \quad (5.50)$$

Если $(g_i(m))$ – импульсная характеристика части системы, то

1) математическое ожидание (среднее значение)

$$\mu_{y_{i, \text{ВЫХ}}} = \sum_{m=0}^{\infty} g_i(m) \underbrace{\mu_{y_i}}_0 = 0, \quad (5.51)$$

где $\mu_{y_i} = 0$, согласно (5.47);

2) дисперсия

$$\sigma_{y_{i, \text{ВЫХ}}}^2 = \frac{Q_y^2}{12} \sum_{m=0}^{\infty} g_i^2(m); \quad (5.52)$$

3) абсолютная граница

$$E_{y_{i, \text{ВЫХ}}} = \frac{Q_y}{2} \sum_{m=0}^{\infty} |g_i(m)|. \quad (5.53)$$

Собственный шум как сумма всех шумовых составляющих определяется следующим образом:

1) математическое ожидание

$$\mu_{y, \text{ВЫХ}} = \sum_{i=1}^L \mu_{y_{i, \text{ВЫХ}}} = 0; \quad (5.54)$$

2) дисперсия

$$\sigma_{y, \text{ВЫХ}}^2 = \frac{Q_y^2}{12} \sum_{i=1}^L \sum_{m=0}^{\infty} g_i^2(m); \quad (5.55)$$

3) абсолютная граница

$$E_{y, \text{ВЫХ}} \leq \frac{Q_y}{2} \sum_{i=1}^L \sum_{m=0}^{\infty} |g_i(m)|. \quad (5.56)$$

Полный выходной шум системы.

Обусловлен квантованием входного сигнала и квантованием результатов арифметических операций:

$$e_{\text{ВЫХ}}(n) = e_{A, \text{ВЫХ}}(n) + e_{y, \text{ВЫХ}}(n), \quad (5.57)$$

где $e_{\text{ВЫХ}}(n)$ – полный выходной шум системы;

$e_{A, \text{ВЫХ}}(n)$ – шум квантования входного сигнала;

$e_{у,вых}(n)$ – собственный шум системы.

По аналогии определяются математическое ожидание, дисперсия и детерминированная оценка полного выходного шума системы.

Масштабирующие коэффициенты.

При суммировании чисел с фиксированной запятой ошибки квантования не возникает, если регистры сумматора имеют разрядность не меньше разрядности слагаемых. Но при переполнении разрядной сетки результат суммирования существенно искажается.

Для устранения переполнения в сумматорах вводится масштабирование сигналов различными способами с использованием коэффициентов масштабирования.

Автоматическое масштабирование.

Осуществляется сдвиг двоичных кодов слагаемых каждого сумматора вправо на один разряд (или более при сложении больше, чем двух чисел). Масштабирующий коэффициент входных сигналов равен $y_i = 2^{-k}$, где i – номер сумматора; k – необходимое число сдвигов.

Ошибка масштабирования при представлении чисел в прямом и обратном кодах

$$e_M = 2^{-b}, \quad (5.58)$$

где b – количество числовых разрядов слагаемых.

Вероятностные оценки, математическое ожидание и дисперсия равны соответственно

$$\mu_M = 0, \sigma_M^2 = 2^{-2b}/2. \quad (5.59)$$

При представлении чисел в дополнительном коде ошибка масштабирования, математическое ожидание и дисперсия этой ошибки равны соответственно

$$e_M = -2^{-b}, \mu_M = -2^{-b}/2, \sigma_M^2 = 2^{-2b}/2. \quad (5.60)$$

Масштабирование сигналов с использованием импульсной характеристики.

Если $x(n)$, $h_i(n)$, $y_i(n)$ – входной сигнал, импульсная характеристика системы или ее части, выходной сигнал системы или ее части соответственно, то при $\max_n |x(n)| \leq 1$ необходимым условием отсутствия переполнения (когда $\max_n |y_i(n)| \leq 1$) является

$$\sum_{m=0}^{\infty} |h_i(m)| \leq 1. \quad (5.61)$$

Это условие выполняется, если ввести коэффициент масштабирования γ_i с условием $\tilde{h}_i(m) = \gamma_i h_i(m)$. Тогда (5.61) имеет вид:

$$\gamma_{ш} \sum_{m=0}^{\infty} |h_i(m)| \leq 1. \quad (5.62)$$

Следовательно,

$$\gamma_{ш} \leq \frac{1}{\sum_{m=0}^{\infty} |h_i(m)|}. \quad (5.63)$$

Коэффициенты масштабирования выбирают равными степеням 2.

Масштабирующие множители включают на входах системы или на выходах умножителей.

Масштабирование сигналов с использованием амплитудно-частотной характеристики.

Применяется для системы (или ее части) невысокого (не выше четвертого или пятого) порядка. Масштабируется входной сигнал, коэффициенты масштабирования определяются по формуле:

$$\gamma_i = \frac{1}{\max_{\omega} |H_i(e^{j\omega T})|}. \quad (5.64)$$

Эффекты квантования коэффициентов цифровой системы.

При реализации цифровой системы значения ее коэффициентов (коэффициенты разностного уравнения или передаточной функции) квантуются, т.к. они представляются ограниченным количеством разрядов, определяемым разрядностью элементов памяти цифровой системы.

Изменение коэффициентов приводит к большему или меньшему изменению нулей и полюсов передаточной функции, и, следовательно к изменению частотных характеристик систем [3,15,16].

Условием устойчивости системы является нахождение полюсов системы внутри единичного круга. После квантования коэффициентов (т.е. округления их значений), если хотя бы один из них не будет лежать внутри единичного круга, система потеряет устойчивость.

Квантование коэффициентов не влияет на линейность системы, а лишь изменяет ее частотные и временные характеристики. При этом появляется ошибка АЧХ

$$\Delta A(\omega) = A(\omega) - \tilde{A}(\omega), \quad (5.65)$$

где $A(\omega) = |H(e^{j\omega T})|$ – АЧХ системы с неквантованными коэффициентами, $\tilde{A}(\omega)$ – АЧХ системы с квантованными коэффициентами.

Существуют разные способы расчета разрядности коэффициентов по допускам на характеристики фильтров. Самый простой способ – метод проб. Расчет минимального значения разрядности по методу проб начинается с выбора разрядности ориентировочно, субъективно. Затем следует расчет АЧХ с новыми – приближенными значениями коэффициентов, оценка искажений характеристики и соответствующая коррекция разрядности коэффициентов в ту или иную сторону.

Имеет место общая закономерность: параметры любого фильтра с резким изменением частотной характеристики в переходной полосе, реализованного в прямой форме, крайне чувствительны к значениям коэффициентов фильтра.

Предельные циклы.

В рекурсивных фильтрах могут возникать специфические эффекты, называемые предельными циклами.

Предельные циклы низкого уровня, связанные с квантованием отсчетов обрабатываемого сигнала, это незатухающие колебания, возникающие в БИХ-фильтрах при отсутствии или малом уровне воздействия и ненулевых начальных условий в системе. Появление этих колебаний обусловлено квантованием сигналов на выходе умножителей.

Предельные циклы высокого уровня связаны с переполнением регистров сумматоров (переполнением разрядной сетки). Система становится существенно нелинейной, в выходном сигнале появляются значительные ошибки, т.е. система фактически неработоспособна.

В ряде случаев после переполнения регистра сумматора выходной сигнал может принимать вид периодического колебания с предельным значением амплитуды, равным единице.

Для устранения эффекта переполнения выполняют масштабирование сигналов.

5.7 Изменение частоты дискретизации

До сих пор рассматривались алгоритмы и устройства обработки цифровых сигналов при определенной (фиксированной) частоте дискретизации f_d и соответствующем интервале дискретизации $T = 1/f_d$.

Вместе с тем в системах современных телекоммуникаций часто используются устройства и каналы связи с различными частотами дискретизации, что оказывается более эффективным, а в ряде случаев – необходимым. Так, на разных участках канала в современном цифровом оборудовании радиодомов и телецентров приняты следующие стандарты на частоту дискретизации звуковых сигналов:

48 кГц – для обработки сигналов;

32 кГц – для передачи по каналу связи;

44,1 кГц – для лазерного проигрывателя.

Для TV-сигналов – 13,5 МГц – для формирования и обработки сигналов, а в различных системах компрессии частота дискретизации может понижаться в 40 раз.

Аналогичная задача возникает в технике многоканальной связи (преобразование стандартной частоты дискретизации 60-канальной группы с частотным разделением каналов, равной 576 кГц, в частоту 512 кГц для передачи по каналу связи).

Таким образом, для обеспечения совместной работы различных источников сигнала необходимо осуществить сопряжение частот дискретизации, т.е. перейти к многочастотным системам, известным как многоскоростные системы.

Процесс преобразования цифрового сигнала от более низкой частоты к более высокой (повышение частоты дискретизации в целое число раз) называют интерполяцией цифрового сигнала.

Процесс преобразования от более высокой частоты к более низкой (понижение частоты дискретизации в целое число раз) называется децимацией ЦС.

Эти преобразования реализуются системами интерполяции и децимации.

В системе интерполяции отношение частоты дискретизации сигнала на выходе к частоте дискретизации на входе, равное

$$L = \frac{f_D^y}{f_D}. \quad (5.66)$$

Называют коэффициентом интерполяции (целочисленным).

В системе децимации отношение частоты дискретизации сигнала на входе к частоте дискретизации сигнала на выходе, равное

$$M = \frac{f_D}{f_D^y}, \quad (5.67)$$

называют коэффициентом децимации (целочисленным).

При этом принимаются следующие обозначения:

f_D, T – частота и период дискретизации входного сигнала системы интерполяции (децимации);

$x(nT), x(n)$ – входной сигнал системы интерполяции (децимации) в реальном и нормированном ($T=1$) времени;

f_D^y, T_y – частота и период дискретизации выходного сигнала системы интерполяции (децимации);

$y(n_y T_y), y(n_y)$ – выходной сигнал системы интерполяции (децимации) в реальном и нормированном ($T_y = 1$) времени.

Системы, в которых увеличение (уменьшение) частоты дискретизации реализуется в один прием называют однократными.

Многократными называют системы, образованные последовательным соединением однократных систем.

Для получения систем с преобразованием частоты с рациональным коэффициентом L/M строят последовательные системы выполнения интерполяции и децимации.

В системах ЦОС преобразование частоты определяется как цифровая обработка с помощью операции линейной фильтрации, при которой формируется выходной сигнал с новой частотой дискретизации; при этом на временные и спектральные изменения выходного сигнала накладываются определенные ограничения, если сравнивать его с сигналом, который был бы получен путем непосредственной дискретизации исходного аналогового сигнала.

5.8 Увеличение частоты дискретизации (интерполяция) цифрового сигнала

В результате интерполяции входной сигнал $x(nT)$ обрабатывается с помощью операции линейной фильтрации, в результате которой формируется выходной сигнал $y(n_y T_y)$, с повышенной в L раз частотой дискретизации.

Интерполяция выполняется в два этапа:

– из входного сигнала $x(nT)$ формируется промежуточный сигнал $w(n_y T_y)$ с частотой дискретизации f_D^y выходного сигнала и периодом

$$T_y = \frac{T}{L}; \quad (5.68)$$

– из промежуточного сигнала $w(n_y T_y)$ формируется искомый сигнал $y(n_y T_y)$ той же частоты в результате операции линейной цифровой фильтрации.

Первый этап.

Повышение частоты дискретизации осуществляется экспандером частоты (см. рисунок 5.13) (блок L). Входной сигнал (см. рисунок 5.14) заполняется $(L - 1)$ нулевыми отсчетами между каждой парой отсчетов входного сигнала на его периоде дискретизации.

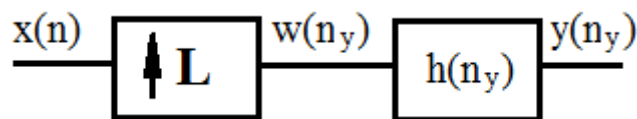


Рисунок 5.13 – Система однократной интерполяции

Местоположение отсчетов в шкале нормированного времени n ($T = 1$) и n_y ($T_y = 1$) определяется из пропорции (см. рисунок 5.14).

$$\begin{cases} n_y - L; \\ n - 1, \end{cases}$$

тогда

$$n = \frac{n_y}{L}, n_y = 0, L, 2L, \dots, n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.69)$$

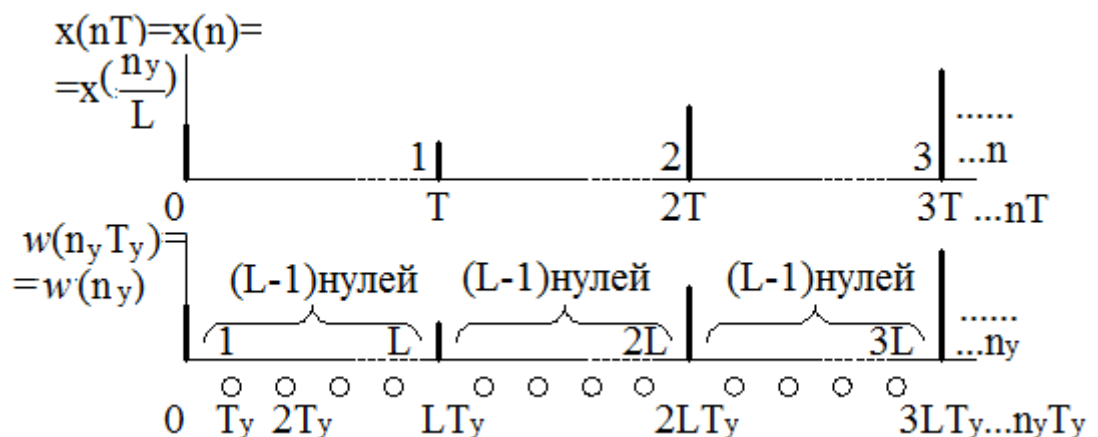


Рисунок 5.14 – Входной и промежуточный сигналы в системе интерполяции

С учетом (5.69) соотношение «вход-выход» экспандера имеет вид (см. рисунок 5.14):

$$w(n_y) = \begin{cases} x\left(\frac{n_y}{L}\right), & n_y = 0, L, 2L, \dots; \\ 0 & \text{при других } n_y. \end{cases} \quad (5.70)$$

Определим Z -изображение и спектр входного и промежуточного сигнала соответственно:

$$X(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)Z^{-n}, \quad (5.71)$$

$$W(Z) = \sum_{n_y=0}^{\infty} w(n_y)Z^{-n_y}. \quad (5.72)$$

С учетом (5.70) получим Z -изображение промежуточного сигнала

$$W(Z) = \sum_{n_y=0, L, 2L, \dots}^{\infty} x\left(\frac{n_y}{L}\right)Z^{n_y}, \quad (5.73)$$

а с учетом (5.69)

$$W(Z) = \sum_{L_n=0, L, 2L, \dots}^{\infty} x(n)Z^{-Ln} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)Z^{-Ln}. \quad (5.74)$$

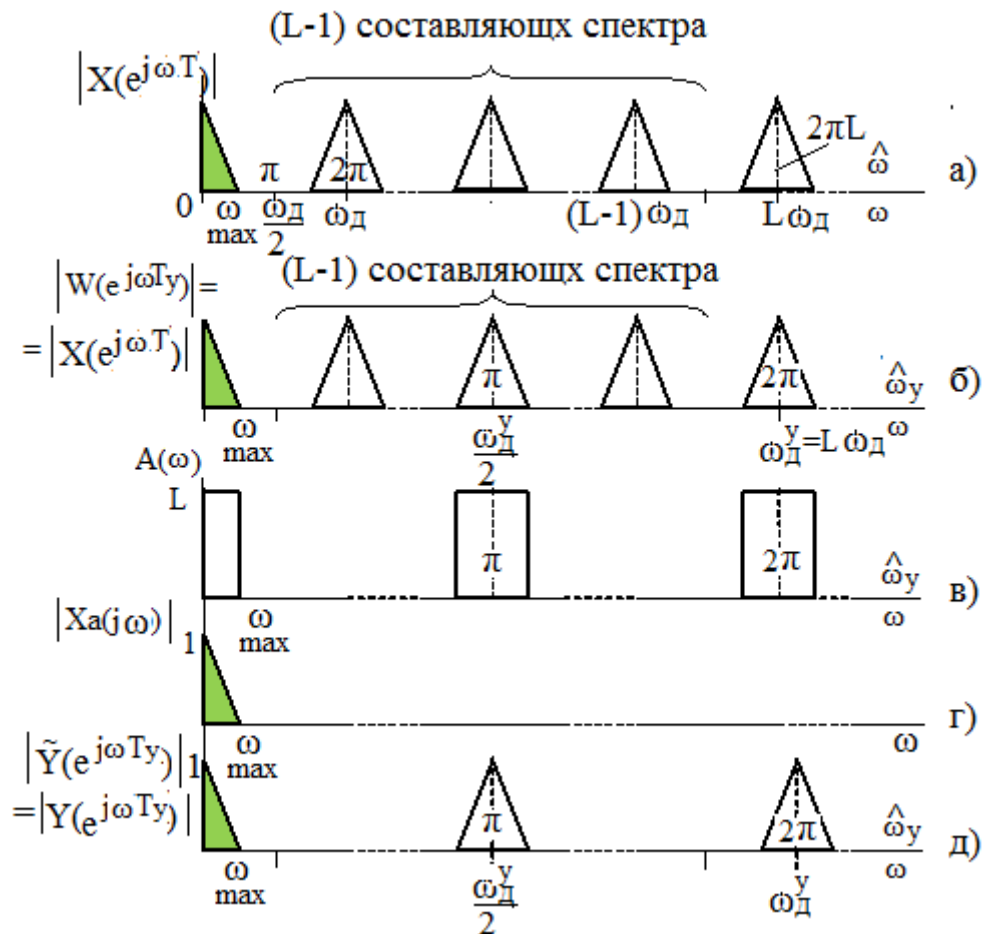


Рисунок 5.15 – Спектры сигналов при интерполяции цифрового сигнала

Взаимосвязь Z -изображений входного и промежуточного сигналов имеет вид

$$W(Z) = X(Z^L). \quad (5.75)$$

Выполнив замену

$$Z = e^{j\omega T_y} = e^{j\hat{\omega}_y},$$

получим спектры входного и промежуточного сигналов и получим их взаимосвязь

$$W(e^{j\hat{\omega}_y}) = X(e^{jL\hat{\omega}_y}). \quad (5.76)$$

С учетом соотношения между периодами дискретизации определим связь между нормированными частотами

$$\hat{\omega} = \omega T = \omega L T = L \hat{\omega}_y, \quad (5.77)$$

тогда (5.76) будет иметь вид

$$W(e^{j\hat{\omega}_y}) = X(e^{j\hat{\omega}}), \quad (5.78)$$

что говорит о тождественности спектров входного и промежуточного сигналов.

Второй этап.

Заключается в формировании из промежуточного сигнала $w(n_y T_y)$ выходного сигнала $y(n_y T_y)$.

На рисунке 5.15, г, д изображены модули спектров $|X_a(j\omega)|$ и $|\tilde{Y}(e^{j\omega T_y})|$ соответственно аналогового сигнала $x_a(t)$ и дискретного сигнала $y(n_y T_y)$, которые были бы получены в результате непосредственной дискретизации аналогового сигнала $x_a(t)$ с частотой f_D^y . Соотношение между спектрами этих сигналов в соответствии с (3.39) имело бы вид:

$$\tilde{Y}(e^{j\omega T_y}) = \frac{1}{T_y} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a[j(\omega + m\omega_D^y)],$$

или в основной полосе частот $[0; \omega_D^y/2]$ при $m = 0$

$$\tilde{Y}(e^{j\omega T_y}) = \frac{1}{T_y} X_a(j\omega). \quad (5.79)$$

Ограничение: в результате операции линейной фильтрации должен быть сформирован сигнал $y(n_y T_y)$, модуль спектра $|Y(e^{j\omega T_y})|$ которого должен совпадать с модулем спектра $|\tilde{Y}(e^{j\omega T_y})|$ сигнала $\tilde{y}(n_y T_y)$ (см. рисунок 5.15, д).

Сопоставление модулей спектров входного и промежуточного сигналов (рисунок 5.15, б) и требуемый модуль спектра выходного (см. рисунок 5.15, д) сигнала показывает, что операция цифровой фильтрации должна заключаться в подавлении $(L-1)$ «лишних» составляющих спектра $W(e^{j\hat{\omega}_y})$ с помощью фильтра нижних частот (ФНЧ) – блок с импульсной характеристикой $h(n_y)$ на рисунке 5.13.

ФНЧ в z -области соответствует передаточная функция $H(Z)$, а в частотной области – частотная характеристика $H(e^{j\omega T_y})$. Идеальная АЧХ $A(\omega)$ ФНЧ в основной полосе частот должна удовлетворять требованиям (см. рисунок 5.15, в).

$$A(\omega) = \begin{cases} L & \text{в полосе пропускания } 0 \leq \omega \leq \omega_{max}; \\ 0 & \text{при других значениях} \end{cases} \quad (5.80)$$

или в шкале нормированных частот $\hat{\omega}_y$

$$A(\hat{\omega}_y) = \begin{cases} L & \text{в полосе пропускания } 0 \leq \hat{\omega}_y \leq \frac{2\pi\omega_{max}}{\omega_d^y}; \\ 0 & \text{при других значениях.} \end{cases} \quad (5.81)$$

При этом коэффициент усиления ФНЧ в полосе пропускания должен быть равен L .

Уравнение, описывающее соотношение вход-выход ФНЧ в Z -области с учетом (5.75), имеет вид:

$$Y(Z) = H(Z)W(Z) = H(Z)X(Z^L). \quad (5.82)$$

Или при $Z = e^{j\omega T_y}$ получим для частотной области

$$Y(e^{j\omega T_y}) = H(e^{j\omega T_y})W(e^{j\omega T_y}) = H(e^{j\omega T_y})X(e^{jL\omega T_y}), \quad (5.83)$$

а при замене частот в (5.83) на основании (5.77)

$$Y(e^{j\omega T_y}) = H(e^{j\omega T_y})X(e^{j\omega T}). \quad (5.84)$$

В шкале нормированных частот это уравнение имеет вид:

$$Y(e^{j\hat{\omega}_y}) = H(e^{j\hat{\omega}_y})X(e^{j\hat{\omega}}). \quad (5.85)$$

Соотношение «вход-выход» (5.84) в частотной области устанавливает связь между спектрами входного и выходного сигналов.

На основании доказательства, приведенного в [3] рекомендуется убедиться, что алгоритм вычисления соотношения «вход-выход» системы интерполяции имеет вид:

$$y(n_y) = \sum_{n=0}^{\infty} h(Ln + n_y \oplus L)x\left(\left[\frac{n_y}{L}\right] - n\right), \quad (5.86)$$

где n_y, n – номера отсчетов входного и выходного сигналов соответственно, взаимосвязь между которыми устанавливается в (5.69);

$n_y \oplus L$ – величина, n_y , взятая по модулю L ;

$\left[\frac{n_y}{L}\right]$ – целая часть величины $\frac{n_y}{L}$.

Для сохранения формы исходного сигнала рекомендуется проектировать ФНЧ на базе КИХ-фильтра с линейной АЧХ.

5.9 Уменьшение частоты дискретизации (децимация) цифрового сигнала

Децимация – это цифровая обработка входного сигнала $x(nT)$ с помощью операции линейной фильтрации, в результате которой формируется выходной сигнал $y(n_y T_y)$ с пониженной в M раз частотой дискретизации; при этом на временные и спектральные изменения сигнала накладываются определенные ограничения, если сравнивать его с сигналом, получаемым непосредственной дискретизацией аналогового сигнала [3].

Процедура децимации выполняется в два этапа:

- из входного сигнала $x(nT)$ формируется промежуточный сигнал $w(nT)$ той же частоты в результате операции линейной фильтрации;
- из промежуточного сигнала $w(nT)$ формируется искомым выходной сигнал $y(n_y T_y)$, период которого связан в соответствии с (5.67) с периодом выходного и промежуточного сигналов соотношением:

$$T_y = MT. \quad (5.87)$$

Первый этап.

На первом этапе процедуры децимации выполняется операция линейной фильтрации с помощью ФНЧ с импульсной характеристикой $h(n)$ – блок на рисунке 5.16.

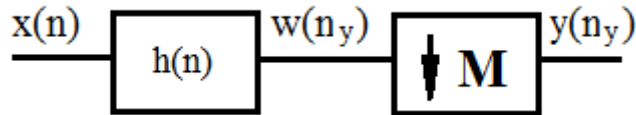


Рисунок 5.16 – Схема однократной децимации

На рисунке 5.17 представлен модуль спектра $|X(e^{j\omega T})|$ входного сигнала, занимающий всю основную полосу частот за исключением, возможно, конечного числа точек.

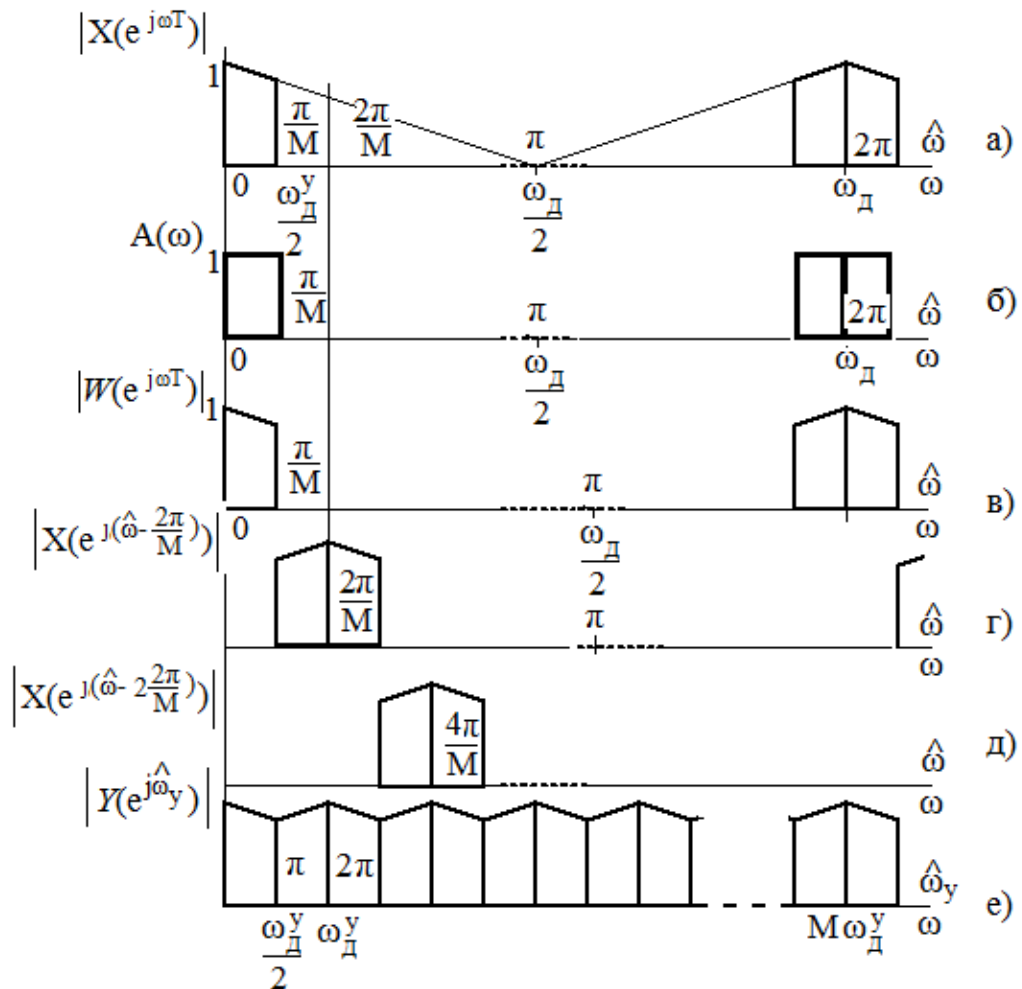


Рисунок 5.17 – Частотна интерпретация процедуры децимации

При этом, в соответствии с теоремой Котельникова, при понижении частоты дискретизации в M раз произойдет наложение спектров. Чтобы этого избежать, спектр сигнала $x(nT)$ верхней частотой $f_D/2$ следует дополнительно ограничить частотой $f_D^y/2 = f_D/2M$.

Идеальная АЧХ $A(\omega)$ ФНЧ в основной полосе частот должна удовлетворять требованиям (см. рисунок 5.17, б).

$$A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{в полосе пропускания } 0 \leq \omega \leq \frac{\omega_D}{M}; \\ 0 & \text{при других значениях} \end{cases} \quad (5.88)$$

или в шкале нормированных частот $\hat{\omega}$

$$A(\hat{\omega}) = \begin{cases} 1 & \text{в полосе пропускания } 0 \leq \hat{\omega} \leq \frac{2\pi}{M}; \\ 0 & \text{при других значениях.} \end{cases} \quad (5.89)$$

Модуль спектра $|W(e^{j\omega T})|$ промежуточного сигнала $w(nT)$ показан на рисунке 5.17, в.

Соотношение «вход-выход» ФНЧ описывается формулой свертки:

$$w(nT) = \sum_{m=0}^{\infty} h(mT)x(nT - mT). \quad (5.90)$$

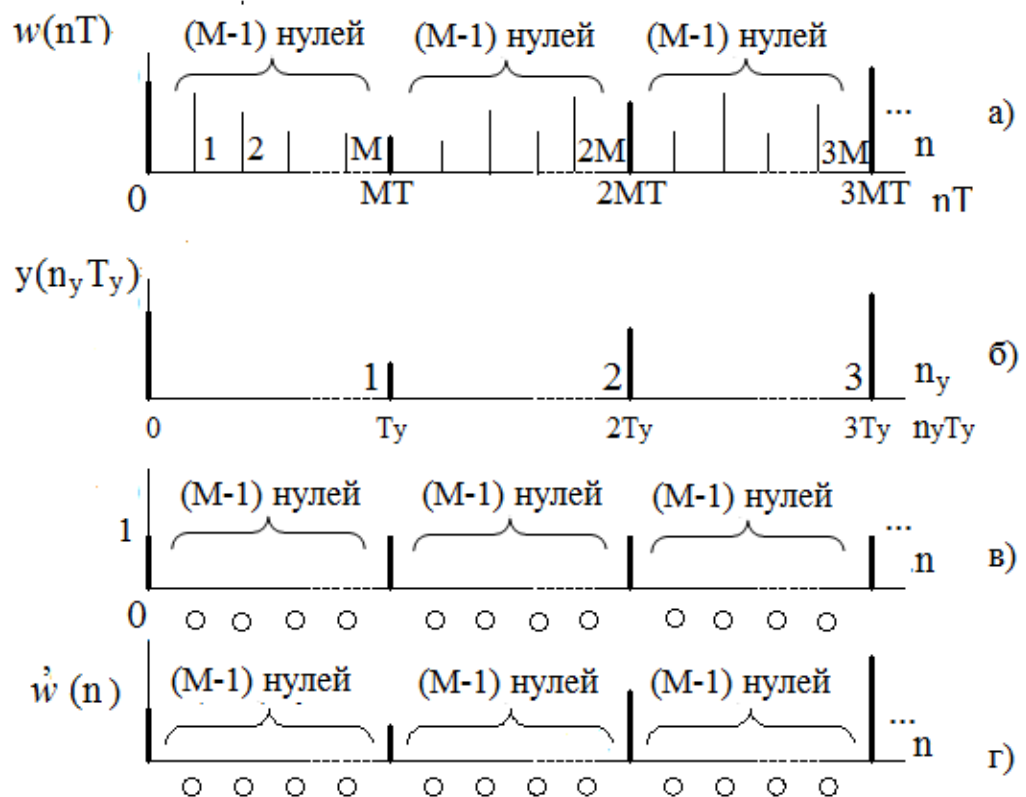


Рисунок 5.18 – Промежуточный и выходной сигналы в системе децимации

В шкале нормированного времени (5.90) будет иметь вид

$$w(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n - m). \quad (5.91)$$

Второй этап.

Из промежуточного сигнала $w(nT)$ формируется выходной сигнал $y(n_y T_y)$ путем прореживания отсчетов промежуточного сигнала: из последовательности отсчетов $w(nT)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, берется каждый M -й отсчет, $n = 0, 2M, \dots$ (см. рисунок 5.18). Понижение частоты дискретизации

осуществляется компрессором частоты дискретизации – компрессором (блок с коэффициентом децимации M) (см. рисунок 5.16).

Местоположение отсчетов в шкале нормированного времени n ($T = 1$) и n_y ($T_y = 1$) определяется из пропорции

$$\begin{cases} n_y - 1; \\ n - M, \end{cases}$$

откуда

$$n = Mn_y, n_y = 0, 1, 2, \dots, n = 0, M, 2M, \dots \quad (5.92)$$

Соотношение «вход-выход» компрессора имеет вид:

$$y(n_y T_y) = w(nT), \quad n = 0, M, 2M, \dots \quad (5.93)$$

Или, учитывая (5.92),

$$y(n_y) = w(Mn_y), \quad n_y = 0, 1, 2, \dots \quad (5.94)$$

Объединив (5.98) и (5.91), получим

$$y(n_y) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(Mn_y - m). \quad (5.96)$$

Для получения соотношения «вход-выход» системы в частотной области, вводим вспомогательный сигнал, совпадающий с сигналом $w(n)$ в моменты взятия отсчетов выходного сигнала

$$\dot{w}(n) = \begin{cases} w(n), & n = 0, M, 2M, \dots; \\ 0 & \text{при других } n. \end{cases} \quad (5.97)$$

Для него справедливы соотношения (5.93), (5.94), поэтому

$$y(n_y T_y) = \dot{w}(nT), \quad n = 0, M, 2M, \dots; \quad (5.98)$$

$$y(n_y) = \dot{w}(Mn_y), \quad n_y = 0, 1, 2, \dots \quad (5.99)$$

Считая сигнал $\dot{w}(n)$ произведением сигнала $w(n)$ и последовательности единичных отсчетов, между которыми расположено $(M - 1)$ нулей на периоде, равном M (см. рисунок 5.18, г).

Такая последовательность описывается суммой

$$\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{j\frac{2\pi}{M}nk} = \begin{cases} 1 & n = pM, \quad p = 0, 1, 2, \dots; \\ 0 & \text{при других } n, \end{cases}$$

т.к. при $n = pM, p = 0, 1, \dots$ $e^{j\frac{2\pi}{M}pMk} \equiv 1$, и $\sum_{k=0}^{M-1} e^{j\frac{2\pi}{M}nk} = 0$, то

$$\dot{w}(n) = w(n) \left\{ \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{j\frac{2\pi}{M}nk} \right\}. \quad (5.100)$$

Тогда Z-изображение выходного сигнала $y(n_y)$ с учетом (5.99)

$$Y(Z) = \sum_{n_y=0}^{\infty} \dot{w}(Mn_y) Z^{-n_y}. \quad (5.101)$$

После ряда преобразований [3] получим

$$Y(Z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} W \left(e^{-j\frac{2\pi}{M}k} Z^{\frac{1}{M}} \right).$$

На основании соотношения «вход-выход» ФНЧ в -области (см. рисунок 5.16):

$$W(Z) = H(Z)X(Z).$$

Получим соотношение «вход-выход» системы децимации в -области

$$Y(Z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H \left(e^{-j\frac{2\pi}{M}k} Z^{\frac{1}{M}} \right) X \left(e^{-j\frac{2\pi}{M}k} Z^{\frac{1}{M}} \right). \quad (5.102)$$

«Вход-выход» системы для частотной области, учитывая, что

$$\hat{\omega}_y = \omega T_y = \omega MT = M\hat{\omega}, \quad (5.103)$$

$$Y(e^{j\hat{\omega}_y}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H\left(e^{-j(\hat{\omega} - \frac{2\pi}{M}k)}\right) X\left(e^{-j(\hat{\omega} - \frac{2\pi}{M}k)}\right).$$

После ряда преобразований [3] получим соотношение между спектрами входного и выходного сигналов в основной полосе частот $[0; \omega_D^y/2]$, $\varphi\left(\hat{\omega} - \frac{2\pi}{M}k\right)$ – ФЧХ ФНЧ

$$Y(e^{j\hat{\omega}_y}) = \frac{1}{M} X(e^{j\hat{\omega}}) e^{j\varphi(\hat{\omega})}. \quad (5.104)$$

На рисунке 5.17, а, г, д показаны модули спектров входного сигнала при $k = 0, 1, 2$, а на рисунке 5.17, е – модуль спектра выходного сигнала, совпадающего в основной полосе частот с модулем спектра выходного сигнала при $k=0$ и повторяющийся с периодом ω_D^y .

В [3] доказывается, что модули спектров сигналов; дискретизованного на выходе системы децимации и аналогового, полученного путем непосредственной дискретизации с частотой f_D^y , совпадают.

Заключение

Представленное Вашему вниманию Учебное пособие содержит основной материал в соответствии с рабочей программой по дисциплине «Основы цифровой обработки сигналов в телекоммуникационных системах». Рассмотрены структурная схема ЦОС и процессы, происходящие в основных функциональных узлах.

Приведены примеры дискретного преобразования основных тестовых сигналов.

Достаточно подробно рассмотрено спектральное преобразование дискретизованного сигнала. Приведены примеры по вычислению спектральных плотностей некоторых сигналов. Приведены графики, формулы, АЧХ и ФЧХ сигналов, наиболее часто используемых в телекоммуникационных системах.

В разделы по методам прямого и обратного -преобразования включены многочисленные примеры, позволяющие понять и более глубоко изучить данные темы.

Приведены основные схемы нерекурсивных и рекурсивных цифровых фильтров, а также способы каскадного их соединения.

В разделе по переходу от одной частоты обработки дискретизованных сигналов к другой приведены все основные характеристики сигналов, получающиеся в результате интерполяции, либо децимации.

Сделаны ссылки на литературу, если необходимо еще более глубоко изучить соответствующую тему.

Список литературы

1. Голд Б., Рэйдер Ч. Цифровая обработка сигналов/Пер. с англ.: –М.: Сов. радио, 1973.
2. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов/Пер. с англ. –М.: Мир, 1978.
3. Основы цифровой обработки сигналов: Курс лекций/Авторы: А.И. Солонина, Д.А. Улахович, С.М. Арбузов, Е.Б., Соловьева, И.И. Гук. –СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 608 с.: ил.
4. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. Учебник для вузов. – М.: Советское радио, 1977. – 608 с.
5. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебное пособие для вузов/д.в. Васильев, М.Р. Витоль, Ю.Н. Горшенков и др.; под ред. К.А. Самойло. – М.: Радио и связь, 1982. – 528 с., ил.
6. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов по спец. «Радиотехника» –М.: Высшая школа, 2000.
7. Адаптивные фильтры/Пер. с англ.; Под. ред. К.Ф. Козупа и П.М. Гранта. – М.: Мир, 1988.
8. Иванов М.Т., Серженко А.Б., Ушаков В.П. Теоретические основы радиотехники. Учебное пособие. –М.: Высшая школа, 2002.
9. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов – СПб.: Питер, 2003
10. Христиан Э., Эйзман Е. Таблицы и графики по расчету фильтров. – М.: Связь, 1975.
11. Шелухин О.И., Лукьянцев Р.Ф. Цифровая обработка и передача речи. – Москва: Радио и связь, 2000 – 454 с.
12. Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н. Цифровая обработка сигналов. Учебное пособие. – М.: Радио и связь, Москва, 1990. – 256 с.
13. Цикин И.А. Дискретно-аналоговая обработка сигналов. – М.: Радио и связь ,1982.-161с.
14. Калабеков Б.А. Микропроцессоры и их применение в системах передачи и обработки сигналов. – М.: Радио и связь , 1988. – 368 с.
15. Аппаратные и программные средства цифровой обработки сигналов // ТИИЭР, 1987.-Т.75, №9-С.8 – 30 с.
16. Крошьер Р.К., Рабинер Л. Интерполяция и децимация цифровых сигналов: Методический обзор//ТИИЭР,1981.-Т.69,№3-С.14 – 49.
17. Горбунова Н.Г. Цифровые фильтры. Методические указания к курсовому и дипломному проектированию. – Хабаровск, 2003.
18. Хемминг Р.В. Цифровые фильтры: Пер. с англ./Под ред. А.М.Трахтмана. М.: Сов.радио, 1980.
19. <http://bourabai.kz/signals/ts06.htm>

Жунусов Канат Хафизович
Сарженко Людмила Ивановна

ОСНОВЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ В
ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ

Учебное пособие

Редактор Л. Т. Сластихина
Св. тем. план 2013 г., поз. 20

Сдано в набор
Формат 60×84 1/16
Бумага типографская №2
Уч.-изд.лист. – 5,8 Тираж 100 экз. Заказ №____ Цена 2900 тенге
Подписано в печать

Копировально-множительное бюро
Некоммерческого акционерного общества
«Алматинский университет энергетики и связи»
050013, Алматы, ул. Байтурсынова, 126