

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ «САМАРСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

**А. С. Капустин, Д. В. Корнилин,
И. А. Кудрявцев**

**Методы цифровой обработки сигналов в
радиотехнических системах**

Электронное учебное пособие

САМАРА

2012

**Авторы: Капустин Александр Степанович,
Корнилин Дмитрий Владимирович,
Кудрявцев Илья Александрович**

Капустин, А. С. Методы цифровой обработки сигналов в радиотехнических системах
[Электронный ресурс] : электрон. учеб. пособие / А. С. Капустин, Д. В. Корнилин, И. А. Кудрявцев; Минобрнауки России, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева (нац. исслед. ун-т). - Электрон. текстовые и граф. дан. (5.1 Мбайт). - Самара, 2012. - 1 эл. опт. диск (CD-ROM).

С помощью пособия магистрантам предоставляется возможность изучения теоретических основ построения устройств дискретных систем, используемых в радиотехнических системах, а также методов линейной и нелинейной цифровой обработки сигналов.

Учебное пособие обеспечивает подготовку по дисциплине «Методы цифровой обработки сигналов в радиотехнических системах» образовательных программ подготовки магистров по специальности 210400.68 "Радиотехника", реализуемых на радиотехническом факультете. Курс 5, 6, семестр А, В.

Учебное пособие разработано на кафедре радиотехнических устройств.

Содержание

Введение	4
1 Дискретное преобразование Фурье.....	5
1.1 Алгоритм прореживания по времени.....	7
1.2 Алгоритм прореживания по частоте	10
1.3 Определение ОДПФ	12
1.4 Определение сигнала на выходе цифровой системы с помощью ДПФ.....	12
2 Z – преобразование.....	13
3 Дискретные системы	14
3.1 Алгоритмы и структурные схемы дискретных систем	14
3.2 Временные характеристики дискретных систем.....	17
3.3 Частотные характеристики линейных дискретных систем	19
3.4 Свойства частотных характеристик дискретных систем	20
4 Цифровые фильтры	22
4.1 Проектирование цифровых фильтров	22
4.2 Однородные фильтры.....	23
4.3 Проектирование КИХ-фильтров с линейной ФЧХ	26
4.3.1 Метод временных окон (для проектирования фильтров).....	27
4.3.2 Метод частотной выборки.....	30
4.3.3 Метод наименьших квадратов.....	31
4.3.4 Минимаксный метод (метод наилучшей равномерной аппроксимации или Чебышевский метод).....	32
4.4 Проектирование БИХ фильтров	35
Билинейное преобразование импульсных характеристик	41
5 Цифровые методы операций над спектрами	43
5.1 Перенос спектра.....	43
5.2 Получение сигнала с одной боковой полосой	44
6 Преобразование частоты дискретизации	46
Простейшая система интерполяции	49
6.1 Интерполяция	52
Перенос спектра при интерполяции.....	55
6.2 Системы с децимацией	57
Перенос спектра при децимации	61
Перенос спектра при децимации с использованием низкочастотных фильтров	62
7 Устройства цифровой обработки сигналов.....	63
7.1 Фазорасщепители	63
7.2 Цифровой фильтр с подавлением импульсной помехи (медианные фильтры)	67
Заключение	69
Список литературы.....	70

Введение

В пособии рассматриваются вопросы, обеспечивающие студентами изучение основ применения методов цифровой обработки сигналов в радиотехнических системах:

- теоретических основ построения устройств дискретных систем, используемых в радиотехнических системах;
- методов линейной и нелинейной цифровой обработки сигналов;
- способов и алгоритмов обработки цифровых сигналов;
- методы и алгоритмы проектирования цифровых устройств, используемых в различных радиотехнических устройствах;

Изучение рассматриваемых вопросов позволяет обосновано выбрать вид цифрового устройства, разработать его структуру и алгоритм функционирования, рассчитать параметры его элементов, получить его частотные и временные характеристики, предложить форму реализации.

Полученные студентом знания и умения при изучении дисциплины “Методы цифровой обработки сигналов в радиотехнических системах” используются при подготовке магистерской диссертации, при разработке и проектировании радиоэлектронной аппаратуры и радиотехнических систем различного назначения.

1 Дискретное преобразование Фурье

Для аналогового сигнала $x_a(t)$ известно:

$$x_a(t) \rightarrow \begin{cases} X(e^{j\omega t}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \\ x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(e^{j\omega t}) \cdot e^{+j\omega t} d\omega \end{cases}$$

Для дискретного сигнала:

$$\begin{aligned} X(nT) &= X(n) = X_n \\ X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) \cdot e^{-j\cdot k \cdot n \cdot \Omega \cdot T} \\ x(nT) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(k) \cdot e^{+j\cdot k \cdot n \cdot \Omega \cdot T} \end{aligned}$$

где: N – количество выборок в сигнале, $\Omega = \frac{2\pi}{NT}$ – называется основной частотой

преобразования, $W_N = e^{-j\cdot \Omega \cdot T} = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ – поворачивающий множитель.

Тогда, получим:

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) \cdot W_N^{nk} & n = 0, 1, 2 \dots N-1 \\ x(nT) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(k) \cdot W_N^{-nk} & n = 0, 1, 2 \dots N-1 \end{aligned}$$

В данном случае суммирование производится по k изменения n . Т.к. поворачивающий множитель периодичен по частоте, то:

$$\begin{aligned} W_N^{nk} &= W_N^{n(k+mN)}, \text{ то:} \\ x(nT) &= x(nT + mNT) \end{aligned}$$

Последнее выражение является условием периодичности дискретного сигнала. Следовательно, дискретное преобразование Фурье тоже периодично с частотой дискретизации.

Свойства ДПФ

1. Свойство линейности:

Если последовательность $x_1(nT)$ и $x_2(nT)$ имеют длину N , а коэффициенты a_1 и a_2 постоянны и $x_3(nT) = a_1 \cdot x_1(nT) + a_2 \cdot x_2(nT)$, то:

$$X_3(k) = a_1 \cdot X_1(k) + a_2 \cdot X_2(k)$$

Если длины последовательностей разные, т.е. $N_1 \neq N_2$, то в этом случае:

$$N_3 = \max\{N_1, N_2\}$$

Там, где $N_1 > N_2$, происходит добавление нулевых отсчетов для выравнивания.

2. Сдвиг последовательности.

$x(nT)$, $N \Rightarrow X(k)$, то: $y(nT) = x(nT + mT)$, $m < n$ – сдвиг меньше длины.

$$\text{Тогда: } Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n) \cdot W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x[(n+m) \cdot T] \cdot W_N^{nk} = W_N^{-km} \cdot X(k).$$

Сдвиг во времени приводит к умножению спектра на поворачивающий множитель (дискретная экспонента).

3. Сдвиг по частоте (сдвиг ДПФ).

Если есть сдвиг последовательности $X(k)$: $X(k+l) = Y(k)$, то:

$y(nT) = W_N^{nl} \cdot x(nT)$, т.е. временную последовательность следует умножить на дискретную экспоненту.

Здесь и далее: n – переменная по времени, k – переменная по частоте. Обычно: k, l – по частоте, m, n – по времени.

Сохраняется четность и нечетность: Re – четная, Im – нечетная.

4. Свертки дискретных сигналов.

Если есть последовательности $x_1(nT)$ и $x_2(nT)$ с одинаковой периодичностью N , то свертка определяется:

$$y(nT) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(mT) \cdot x_2(nT - mT) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(nT - mT) \cdot x_2(mT)$$

$y(nT)$ – результат свертки. Такую свертку называют круговой (циклической). Если для последовательностей существует преобразование Фурье, то ДПФ свернутого сигнала можно записать:

$$\begin{aligned} Y(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{N-1} x_1(mT) \cdot x_2(nT - mT) \right) \cdot W_N^{nk} = \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) \left(\sum_{n=0}^{N-1} x_2(nT - mT) \cdot W_N^{(n-m)k} \right) \cdot W_N^{mk} = X_2(k) \cdot \underbrace{\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) \cdot W^{mk}}_{X_1(k)} = \\ &= X_1(k) X_2(k) \end{aligned}$$

Свертке во временной области соответствует произведение спектров в частотной области. Справедливо и обратное утверждение, если: $x_1(nT) \cdot x_2(nT) = y(nT)$, то в

частотной области: $Y(k) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X_1(k) \cdot X_2(k+l)$. Здесь $\frac{1}{N}$ – масштабный множитель.

Алгоритм вычисления свертки

а) Находим ДПФ: $x_1(nT) \rightarrow X_1(k)$
 $x_2(nT) \rightarrow X_2(k)$.

б) Находим: $Y(k) = X_1(k) \cdot X_2(k)$.

в) Вычисляем обратное дискретное преобразование Фурье (ОДПФ) $\{Y(k)\}$.

Существует так называемая линейная свертка: если имеются 2 конечные последовательности $\underbrace{x_1(nT)}_{N_1}$ и $\underbrace{x_2(nT)}_{N_2}$, то свертка определяется следующим образом:

$$y(nT) = \sum_{m=0}^n x_1(mT) \cdot x_2(nT + mT) = \sum_{m=0}^n x_1(nT + mT) \cdot x_2(mT)$$

Т.е. длина линейной свертки: $N_y = N_1 + N_2 - 1$. Алгоритм можно привести к вышеприведенному, если выровнять длины $x_1(nT)$ и $x_2(nT)$. Если $N_1 \leq N_2$, то применяют метод секционированной свертки как показано на рис. 1.1.

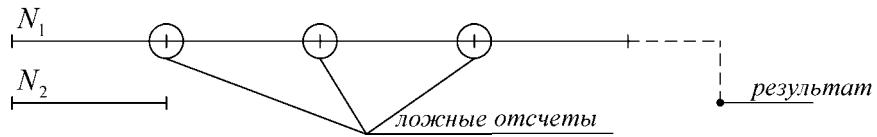


Рисунок 1.1 – Метод секционированной свертки

N_1 разбивают на секции и производят свертку с каждой секцией. Для ускорения процесса используется быстрое преобразование Фурье (БПФ). Рассмотрим классические алгоритмы БПФ. К ним относятся: алгоритм прореживания по времени и по частоте.

1.1 Алгоритм прореживания по времени

Пусть необходимо вычислить ДПФ последовательности с длиной: $N = 2^\nu$ ($\nu > 0$). Для классического варианта $N = 2^\nu$ является обязательным условием, при $N \neq 2^\nu$ нужно дополнять последовательность до соответствующей степени. Это является основным недостатком классического метода.

При прореживании по времени последовательность разбивается на 2 с длиной $N/2$, получим:

$$\begin{aligned} x(nT) &= x_\nu(n) \\ \underbrace{x_{\nu-1,0}(n)}_{\text{все четные номера}} &; \quad \underbrace{x_{\nu-1,1}(n)}_{\text{все нечетные номера}} \\ &\downarrow \quad \downarrow \\ x(2nT) &\quad x((2n+1)T) \end{aligned}$$

Где: $n = 0 \dots \frac{N}{2} - 1$.

Тогда, ДПФ примет вид:

$$X(k) = X_\nu(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{\nu-1,0}(n) \cdot W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{\nu-1,1}(n) \cdot W_N^{(2n+1)k};$$

Учитывая, что: $W_N^2 = W_{\frac{N}{2}} = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$, получим: $X_\nu(k) = X_{\nu-1,0}(k) + W_N^k \cdot X_{\nu-1,1}(k)$. Это первая половина, где соответственно:

$$X_{\nu-1,0}(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{\nu-1,0}(n) \cdot W_{\frac{N}{2}}^{nk};$$

$$X_{\nu-1,1}(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{\nu-1,1}(n) \cdot W_{\frac{N}{2}}^{nk};$$

Полученная последовательность определена в пределах половины отсчетов, для полного решения требуется доопределить последовательность на весь интервал. Учитывая, что ДПФ структура периодическая, то половинки имеют период $\frac{N}{2}$. Т.о. доопределенная последовательность примет вид:

$$X_\nu\left(k + \frac{N}{2}\right) = X_{\nu-1,0}\left(k + \frac{N}{2}\right) + W_N^{\left(k+\frac{N}{2}\right)} \cdot X_{\nu-1,k}\left(k + \frac{N}{2}\right);$$

Расписав поворачивающий множитель, получим:

$$W_N^{\frac{N}{2}} = e^{-j\frac{2\pi}{N} \frac{N}{2}} = -1;$$

$$X_\nu\left(k + \frac{N}{2}\right) = X_{\nu-1,0}(k) - W_N^k \cdot X_{\nu-1,k}(k);$$

Последнее выражение является 2ой половиной. Рассмотрим реализацию данного алгоритма (в литературе его обычно называют алгоритмом бабочки).

Алгоритм бабочки

$$\begin{aligned} c &= a + b \cdot W_N^k \\ d &= a - b \cdot W_N^k \end{aligned}$$

где: c, d – 1ая и 2ая половины; a, b – половины, входящие в c и d .

Изображение в графовой структуре имеет вид (рис. 1.2)

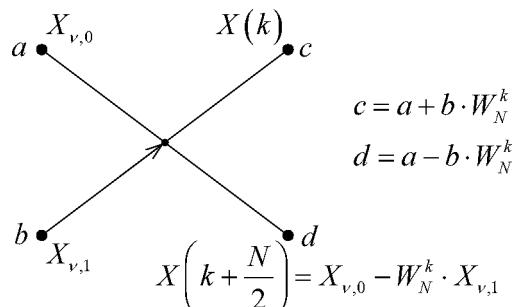


Рисунок 1.2 - Алгоритм бабочки в графовой структуре

$$X(k) = X_{\nu,0} + W_N^k \cdot X_{\nu,1};$$

На любой ступени определения ДПФ результат определяется через четные и нечетные половины. Разобьем полученные половины на половинки, получим четвертые части:

$$\begin{cases} \text{Первые половины} \\ X_{\nu-1,0}(k) = X_{\nu-2,0}(k) + W_N^{2k} \cdot X_{\nu-2,1}(k); \\ X_{\nu-1,0}(k) = X_{\nu-2,0}(k) - W_N^{2k} \cdot X_{\nu-2,1}(k); \\ \text{Вторые половины} \\ X_{\nu-1,1}(k) = X_{\nu-2,2}(k) + W_N^{2k} \cdot X_{\nu-2,3}(k); \\ X_{\nu-1,1}(k) = X_{\nu-2,2}(k) - W_N^{2k} \cdot X_{\nu-2,3}(k); \end{cases}$$

Т.о. разбиваем каждую последующую последовательность на четные и нечетные половины. В итоге, дойдя до предела, получим два четных и нечетных отсчета:

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= \varphi(0) + W_N^0 \cdot \varphi(1) = \varphi(0) + \varphi(1); \\ \Phi(1) &= \varphi(0) - W_N^0 \cdot \varphi(1) = \varphi(0) - \varphi(1) \end{aligned}$$

Пример вычисления ДПФ по методу прореживания по времени

Пусть последовательность имеет 8 отсчетов:

$$x(nT) = \{x(0), x(1), x(2), x(3), x(4), x(5), x(6), x(7)\}; N = 8 = 2^3 \Rightarrow \nu = 3$$

Разобьем последовательность пополам:

$$\begin{aligned} X_{2,0}(n) &= \{x(0), x(2), x(4), x(6)\}; \\ X_{2,1}(n) &= \{x(1), x(3), x(5), x(7)\}; \end{aligned}$$

После второго разбиения, получим:

$$\begin{aligned} X_{1,0}(n) &= \{x(0), x(4)\}; \\ X_{1,1}(n) &= \{x(2), x(6)\}; \\ X_{2,2}(n) &= \{x(1), x(5)\}; \\ X_{2,3}(n) &= \{x(3), x(5)\}; \end{aligned}$$

В результате деления пополам, получим вышеизложенные последовательности. Алгоритм бабочки примет вид, показанный на рис. 1.3

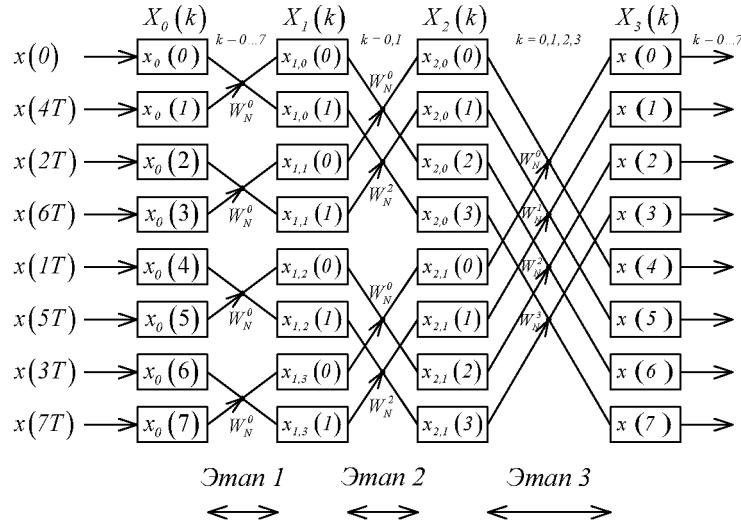


Рисунок 1.3 - Алгоритм бабочки в графовой структуре для 8 точек

Таблица 1.1 - Алгоритм двоичной инверсии

N п/п	Двоичная	Двоичная инверсия
0	000	000
1	001	100
2	010	010
3	011	110
4	100	001
5	101	101
6	110	011
7	111	111

1.2 Алгоритм прореживания по частоте

Во временном прореживании мы разбиваем входную временную последовательность, а в прореживании по частоте разбивается выходная последовательность (по частоте).

Алгоритм вычисления ДПФ с помощью прореживания по частоте имеет вид:

$$n = 0, 1, 2 \dots \frac{N}{2} - 1 ; \\ n = \frac{N}{2}, \frac{N}{2} + 1 \dots N$$

Входная последовательность разбивается на 2 последовательности (пополам). Количество отсчетов должно быть 2^v . Далее делим опять пополам и т.д., до тех пор, пока не получим 2-х точечные последовательности:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) \cdot W_N^{nk} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) \cdot W_N^{nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x\left(n + \frac{N}{2}\right) \cdot W_N^{\left(n + \frac{N}{2}\right)k} ; \\ W_N^{\frac{kN}{2}} = e^{-j \frac{2\pi}{N} \frac{kN}{2}} = e^{-j \cdot \pi k} = (-1)^k .$$

Получим:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[x(n) + (-1)^k \cdot x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] \cdot W_N^{nk};$$

$$X(2k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_0(n) \cdot W_{N/2}^{nk} \quad \text{четн.;}$$

$$X(2k+1) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(n) \cdot W_N^{n(2k+1)} \quad \text{нечетн.};$$

Четные и нечетные выборки определены в половине отсчетов. Причем:

$$x_0(n) = x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right);$$

$$x_1(n) = x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right);$$

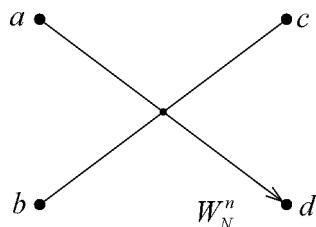
Следовательно, можно записать:

$$X(2k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] \cdot W_{N/2}^{nk};$$

$$X(2k+1) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] \cdot W_N^{n(2k+1)} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left\{ \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] \cdot W_N^n \right\} \cdot W_{N/2}^{nk};$$

$$c = a + b = x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right);$$

$$d = (a - b) \cdot W_N^n = \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] \cdot W_N^n;$$



Алгоритм прореживания по частоте является зеркальным отображением алгоритма по времени. Для последовательности из 8 отсчетов прореживание по частоте будет иметь вид:

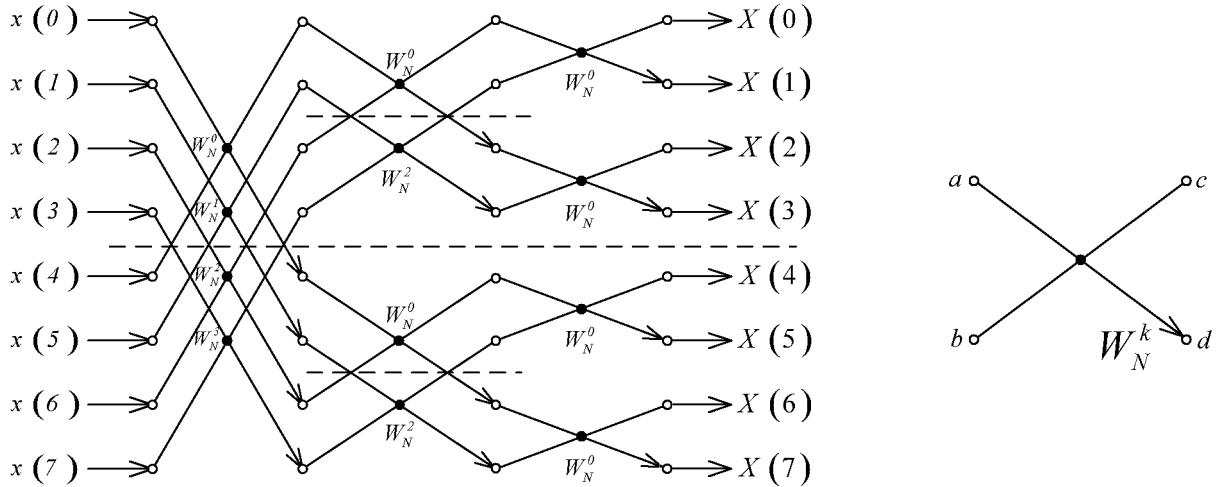


Рисунок 1.4 – Граф алгоритма с прореживанием по частоте

Выходные параметры инверсны. Для получения правильного решения требуется провести соответствующие операции. Алгоритмы по времени и частоте идентичны, при повороте стрелок один обращается в другой.

1.3 Определение ОДПФ

$$x(nT) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot W^{-nk};$$

В данном случае алгоритм применять нельзя, т.к. в степени присутствует знак минус: W^{-nk} . Запишем комплексно-сопряженное число:

$$x(nT)^* = \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot W^{-nk} \right)^* = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)^* \cdot W^{nk};$$

Последнее выражение аналогично прямому ДПФ, только от другой функции.

Получим: $x(nT) = \frac{1}{N} \left(\sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) \cdot W_N^{nk} \right)^*$;

1.4 Определение сигнала на выходе цифровой системы с помощью ДПФ

По определению выходной сигнал определяется путем свертки импульсной характеристики и входного сигнала:

$$y(nT) = \sum_{m=0}^{N-1} g(mT) \cdot x(nT - mT);$$

Если вычислить ДПФ от импульсной характеристики и входного сигнала, то получим ДПФ выходного сигнала.

$$\begin{aligned} G(k), X(k) &\rightarrow Y(k) = G(k) \cdot X(k); \\ Y(k) &\xrightarrow{\text{ОДПФ}} y(nT); \end{aligned}$$

Обычно входной сигнал довольно длинный, т.е. $M > N$, поэтому при определении выходного сигнала происходит некоторая задержка, пока произойдет $N + M - 1$ операций. Обычно последовательность M разбивают на P штук и вычисляют отрезки длиной L :

$$P, L \Rightarrow M = P \cdot L;$$

$$x(nT) = \sum_{i=0}^{P-1} x_i(nT); \quad 0 \leq n \leq PL - 1;$$

Определяем сигнал на выходе:

$$\begin{aligned} y(nT) &= \sum_{m=0}^{N-1} \left(\sum_{i=0}^{P-1} x_i(nT - mT) \right) \cdot g(mT) = \sum_{i=0}^{P-1} y_i(nT); \\ y_i(nT) &= \sum_{m=0}^{N-1} g(mT) \cdot x_i(nT - mT); \end{aligned}$$

2 Z – преобразование

Удобно при анализе именно цифровых систем. В общем случае:

$$\begin{aligned} X(z) &= z \{ x(nT) \} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \cdot z^{-n}; \\ z &= r \cdot e^{j\varphi} = \alpha + j \cdot \beta; \end{aligned}$$

Ряд сходится при условии:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x(nT)| \cdot r^{-n} < \infty; \text{ где: } r \text{ – радиус сходимости.}$$

Свойства z – преобразования

1. Линейность.
2. Сдвиг последовательности.
3. Перемножение последовательностей есть свертка в z – плоскости. Контур свертки определяется взаимным пересечением:

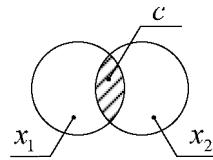


Рисунок 2.1 – Контур свертки в z – плоскости

4. Свертка последовательностей эквивалентна умножению в плоскости z – преобразований. Обратное z – преобразование:

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi j} \int_C X(z) \cdot z^{n-1} dz = \sum_{z_n} \operatorname{Res}_{z_n} (X(z) \cdot z^{n-1});$$

$$\operatorname{Res}_{z_n} (X(z) \cdot z^{n-1}) = \lim_{z \rightarrow z_n} ((z - z_n) \cdot X(z) \cdot z^{n-1});$$

Переход из плоскости z при условии сходимости, по окружности $z = e^{j\omega T}$, в частотную область достигается путем прохода по окружности.

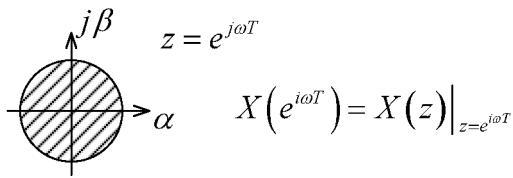


Рисунок 2.2 – Переход из плоскости z в частотную область

3 Дискретные системы

3.1 Алгоритмы и структурные схемы дискретных систем

Для одномерной дискретной системы связь между входной и выходной последовательностями определяется некоторым функционалом:

$$x(nT), y(nT) \Rightarrow y(nT) = \Phi\{x(nT)\};$$

Для нас эта связь будет определяться разностным уравнением, т.к. мы будем рассматривать линейные системы.

$$\sum_{m=0}^{M-1} b_m \cdot y(nT - mT) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot x(nT - kT); \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

где: b_m и a_k могут быть как комплексными, так и вещественными, они не зависят от сигнала $x(nT)$.

При $b_0 = 1$:

$$y(nT) = - \sum_{m=1}^{M-1} b_m \cdot y(nT - mT) + \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot x(nT - kT);$$

Если b_m и a_k начинают зависеть от n , т.е. $b_m, a_k = f(n)$, то такие цифровые системы называют параметрическими.

В общем случае, для получения результата на выходе дискретной системы, мы должны знать все начальные условия предыдущих отсчетов, такие системы называются рекурсивными.

$$y(-T); y(-2T) \dots$$

Если все коэффициенты $b_m = 0$, то: $y(nT) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot x(nT - kT)$, т.е. отсутствуют

сведения о предыдущих отсчетах, такая система называется нерекурсивной (поперечной) или трансверсальной.

Цифровая система состоит из умножителей, элементов задержки и сумматоров.

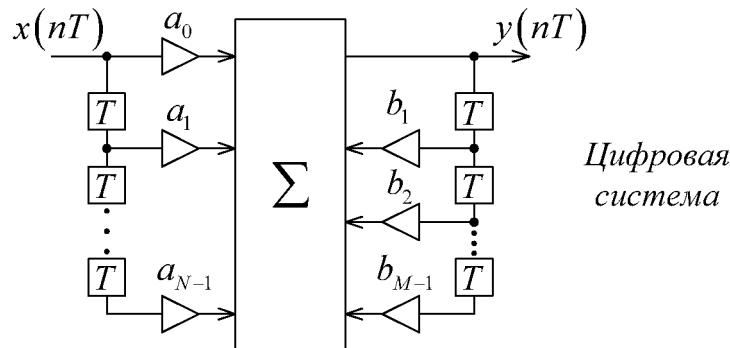


Рисунок 3.1 – Пример цифровой системы

Взяв прямое z – преобразование от разностного уравнения, получим:

$$\sum_{m=0}^{N-1} b_m \cdot z^{-m} \cdot Y(z) = \sum_{k=0}^{M-1} a_k \cdot z^{-k} \cdot X(z);$$

где: $Y(z)$ и $X(z)$ соответствующие z – преобразования.

Т.к. $Y(z) = H(z) \cdot X(z)$, то:

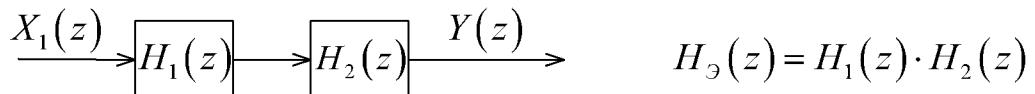
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \Rightarrow H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} a_k \cdot z^{-k}}{\sum_{m=1}^{N-1} b_m \cdot z^{-m}};$$

Передаточная функция для дискретной системы является системной функцией. Возвращаясь к разностному уравнению, и принимая $b_0 = 1$, получим:

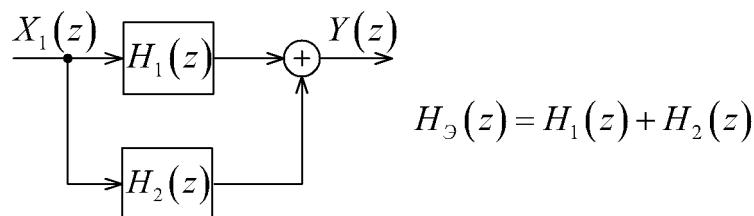
$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} a_k \cdot z^{-k}}{1 + \sum_{m=1}^{N-1} b_m \cdot z^{-m}};$$

Рассмотрим системы, соединенные различными методами:

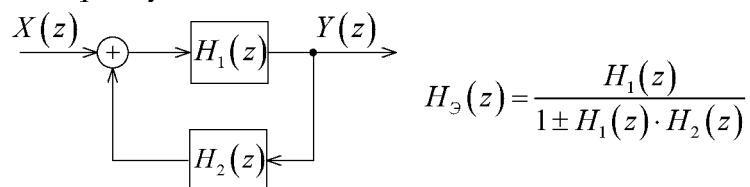
1. Последовательное соединение:



2. Параллельное соединение:



3. Соединение через обратную связь:



Достоинства – отрицательная обратная связь. Недостатки – положительная обратная связь. Такое включение приводит либо к генерации, либо к затуханию.

Структурные схемы рекурсивных дискретных систем (фильтров):

1. Прямая форма (реализуется по разностному уравнению).

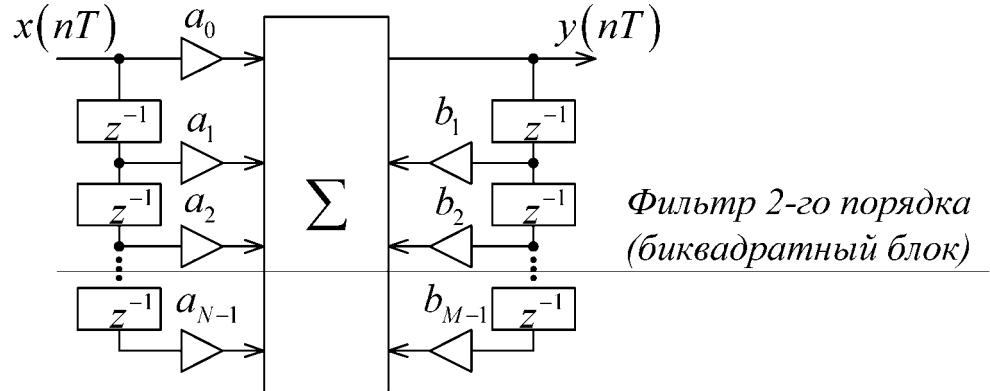


Рисунок 3.2 – Прямая форма рекурсивной дискретной системы

Биквадратные блоки мог быть соединены различными типами соединений. Биквадратный блок может быть канонической формы: 2 сумматора и один ряд элементов задержки:

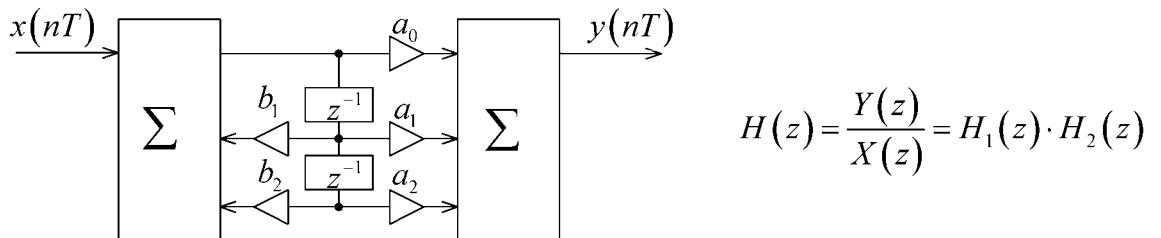


Рисунок 3.3– Форма 2 рекурсивной дискретной системы

Если представить в общем случае:

$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z);$$

$$H_1(z) = \frac{1}{1 + \sum_{m=0}^{M-1} b_m \cdot z^{-m}} = \frac{V(z)}{X(z)};$$

$$H_2(z) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot z^{-k} = \frac{Y(z)}{V(z)};$$

где: $V(z), X(z), Y(z)$ – другие передаточные функции.

$$v(nT) = x(nT) - \sum_{m=1}^{M-1} b_m \cdot v(nT - mT);$$

$$y(nT) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot v(nT - kT);$$

Из анализа уравнений видно, что в них участвуют одинаковые сигналы с одинаковыми задержками. Учитывая это их можно объединить, тогда получим:

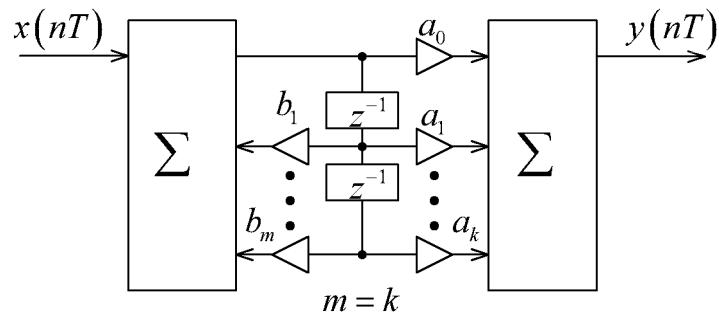


Рисунок 3.4– Форма 2 в общем виде

В случае биквадратного блока количество линий задержки составляет 2.

Наиболее часто используется каскадная форма. В этом случае передаточная функция имеет вид:

$$H(z) = \prod_{l=1}^L H_l(z);$$

$$H_l(z) = \frac{a_{0_l} + a_{1_l} \cdot z^{-1} + a_{2_l} \cdot z^{-2}}{1 + b_{1_l} \cdot z^{-1} + b_{2_l} \cdot z^{-2}};$$

Последовательная каскадная форма (если биквадратный блок построен в прямой форме) как на рисунке 3.5.

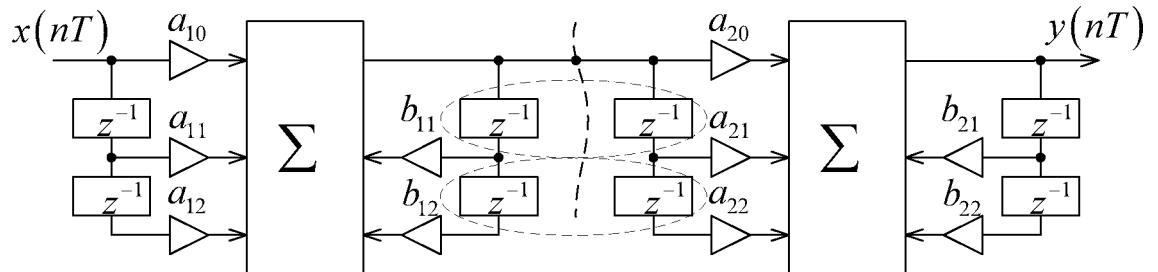
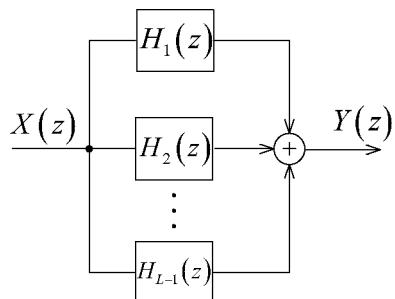


Рисунок 3.5 – Последовательная каскадная форма

Общее количество линий задержки сокращается на $(2L - 1)$.

При параллельной каскадной форме:

$$H(z) = \sum_{l=1}^{L-1} H_l(z);$$



Рассмотренные приемы аналогичны и для трансверсальных фильтров.

Рисунок 3.6 – Параллельная каскадная форма

3.2 Временные характеристики дискретных систем (рассматриваются линейные системы)

По определению: $g(nT) \rightarrow \delta(nT)$. В общем случае импульсную характеристику можно определить по разностному уравнению (на входе действует $\delta(nT)$):

$$y(nT) = \sum_{m=0}^{\infty} x(mT) \cdot g(nT - mT) = \sum_{m=0}^{\infty} x(nT - mT) \cdot g(mT);$$

Если входное воздействие конечно и импульсная характеристика тоже ограничена, то выражение примет вид:

$$y(nT) = \sum_{m=0}^{N-1} x(mT) \cdot g(nT - mT) = \sum_{m=0}^{N-1} x(nT - mT) \cdot g(mT);$$

Длина определяется количеством выборок во входном воздействии. При $x(nT) = \underbrace{\delta(nT)}_{\text{δ-функция}}$, получим: $y(nT) = \underbrace{g(nT)}_{\substack{\text{импульсная} \\ \text{характеристика}}}.$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \Rightarrow Y(z) = z \{g(nT)\} = H(z);$$

Т.о. $H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(nT) \cdot z^{-k}$, если импульсная характеристика конечна, то и

$$\text{преобразование конечно: } H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} g(nT) \cdot z^{-k}.$$

Вывод: обычно тип фильтра определяют не по количеству линий задержки или обратных связей, а по длине импульсной характеристики. Если импульсная характеристика конечна, то это КИХ-фильтр. Если импульсная характеристика длинная (бесконечная в общем случае), следовательно, фильтр БИХ. Трансверсальный фильтр всегда является КИХ-фильтром.

Пример:

$$\left. \begin{array}{l} H(z) = 3 + 0.5 \cdot z^{-1} + z^{-2} + 4 \cdot z^{-3} \\ g(nT) = \{3; 0.5; 1; 4\} \end{array} \right\} KIH$$

$$\left. \begin{array}{l} H(z) = \frac{1}{1 - 0.2 \cdot z^{-1}} \\ g(nT) = 0.2^n \end{array} \right\} BIH$$

$$\left. \begin{array}{l} H(z) = \frac{1 - z^{-5}}{1 - z^{-1}} \quad \text{фильтр рекурсивный} \\ g(nT) = \begin{cases} 1, & n = 1, 2, 3, 4 \\ 0, & n \geq 5 \end{cases} \end{array} \right\} KIH$$

Цифровой фильтр называется устойчивым, если при любых начальных условиях реакция фильтра на любое ограниченное входное воздействие, также ограничено.

$$\begin{aligned} |x(nT)| &\leq M_x < \infty; \\ |y(nT)| &\leq M_y < \infty; \end{aligned} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Т.о. критерий устойчивости можно записать исходя из конечности импульсной характеристики:

$$\sum_{m=0}^{\infty} |g(nT)| < \infty;$$

Это условие является не только достаточным, но и необходимым для определения устойчивости.

Другой вариант: передаточная функция определяется через $g(nT)$:

$$\begin{aligned} H(z) &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} g(nT) \cdot z^{-n} \right| \Rightarrow |H(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |g(nT)| \cdot |z^{-n}|; \\ |z^{-1}| &\leq 1 \Rightarrow |H(z)| = \sum_{n=0}^{\infty} |g(nT)|; \end{aligned}$$

Это означает, что в устойчивой системе передаточная функция конечна во всех точках z – плоскости, за пределами единичной окружности. Передаточная функция не должна иметь особых точек за пределами окружности.

Общие правила:

1. Отклик системы должен быть конечным.
2. Импульсная характеристика сходится (сходимость $g(nT)$).
3. Передаточная функция не существует за пределами единичной окружности. Особые точки – полюса располагаются внутри единичной окружности.

Из последнего правила могут быть отступления:

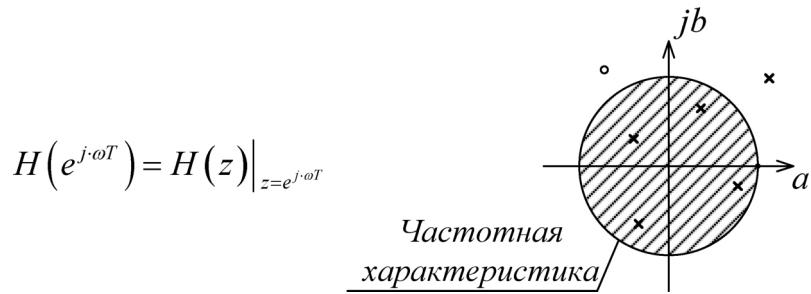
Пример: $H(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 - z^{-1}}$, $|z_n| = 1$, но: $H(z) = 1 + z^{-1}$ (после сокращения), а это абсолютно устойчивый трансверсальный фильтр.

3.3 Частотные характеристики линейных дискретных систем

В общем случае: $H(e^{j\omega t}) = \frac{Y(e^{j\omega t})}{X(e^{j\omega t})}$. Т.е. учитывая преобразование Фурье:

$$Y(e^{j\omega t}) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \cdot e^{-j\omega nT};$$

Вывод: частотная характеристика совпадает с передаточной функцией в точках единичной окружности z – плоскости. Т.е. когда входной сигнал определяется: $z = e^{j\omega T}$. Т.о. частотная характеристика есть передаточная функция, но не на всей плоскости, а только на единичной окружности.



Получим, для рекурсивного фильтра частотная характеристика имеет вид:

$$H(e^{j\omega t}) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot e^{-j\omega kT}}{1 + \sum_{m=1}^{M-1} b_m \cdot e^{-j\omega mT}};$$

Для трансверсального фильтра:

$$H(e^{j\omega t}) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot e^{-j\omega kT};$$

Для любого фильтра:

$$H(e^{j\omega t}) = \sum_{n=0}^{N-1} g(nT) \cdot e^{-j\omega nT} - \text{преобразование Фурье от } g(nT).$$

Передаточная характеристика в общем случае функция комплексная:

$$H(e^{j\omega t}) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} = \operatorname{Re}(\omega) + j \cdot \operatorname{Im}(\omega);$$

где: $A(\omega)$ – модуль передаточной функции (АЧХ),

$\varphi(\omega)$ – фаза передаточной функции (ФЧХ).

Групповое время задержки: $\tau(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$.

3.4 Свойства частотных характеристик дискретных систем

1. Все частотные характеристики дискретных систем, независимо от их структуры, всегда будут непрерывными.
2. Все частотные характеристики периодические, с частотой повторяемости, равной частоте дискретизации: $\omega_o = \frac{2\pi}{T}$.
3. Для вещественных фильтров АЧХ и групповое время задержки (ГВЗ) функции четные, ФЧХ – нечетная.

Пример:

$$H(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} \Big|_{z=e^{j\omega T}=\cos(\omega T)+j\sin(\omega T)};$$

Получим:

$$A(\omega) = \sqrt{3 + 4\cos(\omega \cdot T) + 2\cos(\omega \cdot 2T)};$$

$$\varphi(\omega) = -\omega \cdot T; \quad \tau(\omega) = T;$$

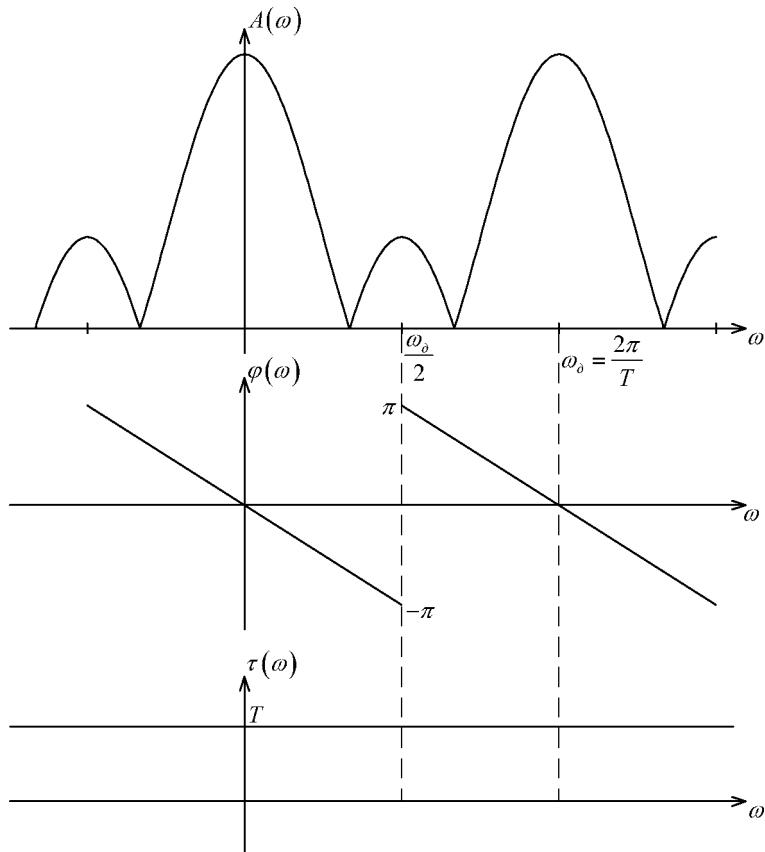


Рисунок 3.7 – Пример частотных характеристик дискретных систем

Т.к. характеристики периодические, то можно их отнормировать в соответствии с ω_d . Нормировку можно производить двумя способами:

1. Здесь принимается: $\omega T = \tilde{\omega}$. В этом случае весь частотный диапазон определяется $[0; 2\pi]$. Характеристика полностью определится на промежутке $[0; \pi]$.

2. Если обозначить: $\omega T = 2\pi W$, $\omega_d = 1$ $[0; 1]$. Тогда: $\frac{\omega_d}{2} = 0.5 [0; 0.5]$.

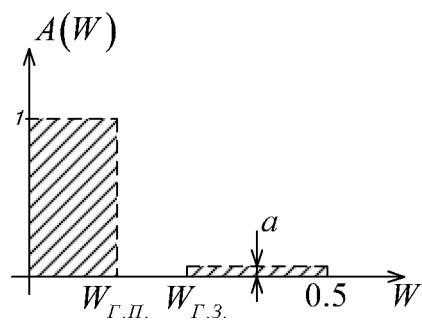


Рисунок 3.8 – Пример задания фильтра:

4 Цифровые фильтры

4.1 Проектирование цифровых фильтров

При проектировании фильтров придерживаются нескольких критериев, основными из которых являются:

1. Реализуемость характеристик.
2. Качественность проектирования.

Под реализуемостью характеристик определяют требования аппаратной или программной части (количество линий задержки, количество памяти и т.д.). Под качеством проектирования определяются требования к основным характеристикам фильтра (АЧХ, ФЧХ, ГВЗ, импульсная характеристика).

Т.о. проектирование на основе критериев можно разделить на 3 этапа:

1. Определение требуемых характеристик.

Требуемые характеристики (желаемые) определяются из условий эксплуатации и назначения фильтра. Для АЧХ задаются: f_{zp} , полоса пропускания, полоса задерживания, затухание в полосе заграждения, в полосе пропускания неровность АЧХ. Для ФЧХ предъявляются требования к ее линейности. Для описания самой характеристики используются все аналитические выражения, от простых тригонометрических функций до рядов.

2. Аппроксимация требуемых характеристик на основе использования физически реализуемых дискретных систем.

Решение аппроксимационной задачи приводит к определению коэффициентов передаточной функции, и это решение распадается на несколько подэтапов.

- 2.1. Выбор аппроксимационного критерия.

АЧХ должна быть примерно равна требуемой АЧХ:

$$H(e^{j\omega}) \approx \underbrace{H_T(e^{j\omega})}_{\text{требуемая}};$$

В результате определяют необходимое количество (порядок) фильтров N . И по количеству звеньев в фильтре, производится расчет коэффициентов этого фильтра a_i . $N \rightarrow a_i$, с расчетом, чтобы: $H(e^{j\omega}) \approx H_T(e^{j\omega})$. Далее строится характеристика по расчетным значениям, если равенство удовлетворяет, то переходят к следующему этапу, иначе возвращаются к выбору N и добиваются выполнения условия.

3. Реализация самого фильтра с использованием арифметически ограниченной точности, т.е. производится расчет разрядности регистров памяти, т.о. определяются физические параметры процессора. Этап основывается на использовании определенного типа процессоров.

Пример:

Типовые требования к характеристикам фильтра (КИХ-фильтр):

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} a_n z^{-k}, \quad \omega T = 2\pi W;$$

По условию нормировки:

$$H(e^{j2\pi W}) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} a_k e^{-jk2\pi WN} + a_{\frac{N}{2}} e^{-j\pi WN} + \sum_{k=\frac{N}{2}+1}^{N-1} a_k e^{-jk2\pi WN} = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)};$$

Количество коэффициентов – нечетное. При $a_k = a_{N-k}$ наблюдается симметрия. Т.о. фазовая характеристика имеет вид: $\varphi(W) = -N\pi W$, она линейна, следовательно ГВЗ постоянно.

Требования:

1. Фильтр должен иметь точно линейную характеристику, а АЧХ удовлетворять условию: $A(0) = 1$, (на $W = 0$ коэффициент передачи равен 1). Фильтр пропускает постоянную составляющую без изменений (стационарный подавитель помех).

2. Фильтр должен иметь линейную характеристику, а АЧХ удовлетворять условию:

$$|A^*(W) - A(W)| \leq \varepsilon(r), \quad 0 \leq W \leq 0.5;$$

где: $A^*(W), \varepsilon(r)$ – заданы заранее.

Т.е. получаем:

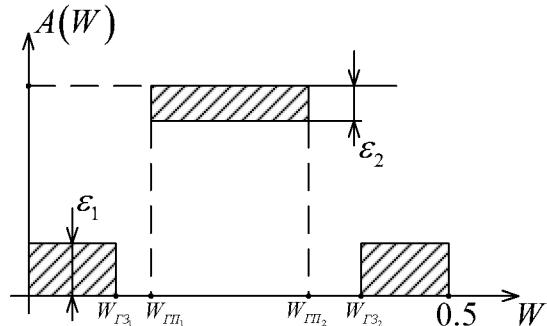


Рисунок 4.1 – Требования к АЧХ фильтра:

Характеристика задается при линейности АЧХ.

3. Мощность собственных шумов должна быть нулевой, в этом случае АЧХ должна удовлетворять требованию:

$$\int_0^{0.5} q(W) [A^*(W) - A(W)]^2 dW \leq \varepsilon(W);$$

Фильтры, определяющие класс и структуру, называются однородными фильтрами.

4.2 Однородные фильтры

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k z^{-k}, \quad \omega T = 2\pi W, \quad A^2(W) = |H(e^{j2\pi W})|^2 = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} a_m a_k \cos(m-k) 2\pi W;$$

$$A(0) = \sum_{l=0}^{N-1} a_l = 1 \Rightarrow a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_{N-1} = \frac{1}{N};$$

Фильтр, у которого каждый следующий коэффициент обратнопропорционален предыдущему и ФЧХ линейна, называются однородными (для КИХ-фильтра коэффициенты равны).

Фильтр можно осуществить с помощью передаточной характеристики вида:

$$H_{01}(z) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} z^{-l};$$

Разностное уравнение запишется в виде:

$$y_{01}(nT) = \frac{1}{N} \sum_{l=n-N+1}^n x(lT) - \text{для трансверсального фильтра.}$$

Другая разновидность:

$$H_{02}(z) = \frac{1}{N} \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}};$$

$$y_{02}(nT) = \frac{1}{N} [x(nT) - x((n-N)T) + y_{02}((n-1)T)] - \text{для однородного рекурсивного фильтра.}$$

Реализация фильтров:

1.

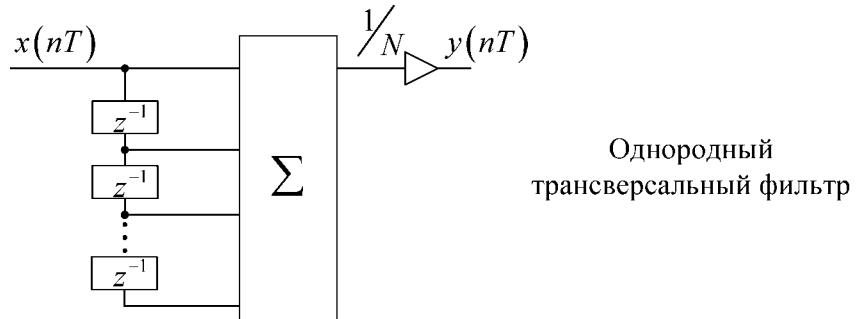


Рисунок 4.2 – Схема реализации однородного трансверсального фильтра
2.

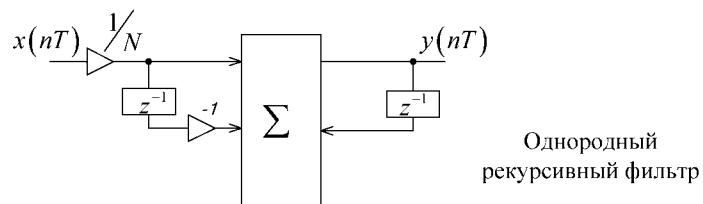


Рисунок 4.3 – Схема реализации однородного рекурсивного фильтра

Особенности фильтров:

1. При больших N ($N \rightarrow 100 \div 1000$) количество операций суммирования в первой схеме значительно больше, чем во второй. В этом случае первая схема менее предпочтительна. При малых N схемы идентичны.

2. Используя начальные условия в рекурсивном фильтре, можно входной сигнал на величину начальных условий изменить. Начальные условия увеличивают или уменьшают величину выходного сигнала. При нулевых начальных условиях обе схемы одинаковы.

Пример: $x(nT) = 1, \quad 0 \leq n \leq 2;$

Т.е. входной сигнал – три единицы. Зададим $N = 2$, $\underbrace{D=2}_{\substack{\text{нач. условия для} \\ \text{рекурсивной схемы}}}.$

Таблица 4.1 – Отсчеты

	$x((n-2)T)$	$x((n-1)T)$	$x(nT)$	$y_{02}((n-1)T)$	$y_{01}(nT)$	$y_{02}(nT)$
0	0	0	1	2	0.5	2.5
1	0	1	1	2.5	1	3
2	1	1	1	3	1	3
3	1	1	0	3	0.5	2.5
4	1	0	0	2.5	0	2
5	0	0	0	2	0	2

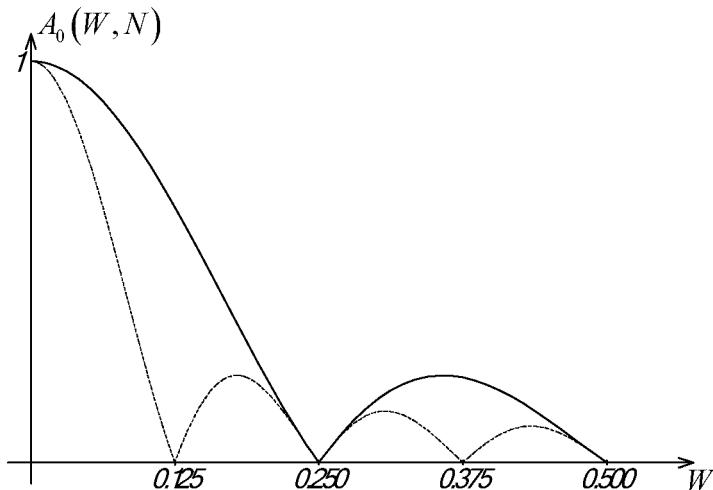


Рисунок 4.4 – АЧХ однородного фильтра

$$A_0(W, N) = H_0(e^{j2\pi W}) = \frac{1}{N} \left| \frac{\sin NW\pi}{\sin W\pi} \right|;$$

Чем больше число N , тем лучше давятся шумы.

$$\begin{cases} W_{II} = \frac{1}{k_1 N} & k_1 > 1 \\ W_{I3} = \frac{k_2}{N} & k_2 > 1 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} k = 1, 2, \dots, Q \\ \left(Q = \frac{N}{2} - \text{четные}, Q = \frac{N}{2} - 1 - \text{нечетные} \right) \end{array} \right\}$$

M – количество точек в частотной характеристики.

4.3 Проектирование КИХ-фильтров с линейной ФЧХ

Частотная характеристика фильтра с линейной ФЧХ имеет вид:

$$H(e^{j2\pi W}) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot e^{-j2\pi Wk};$$

Необходимо иметь симметрию коэффициентов a_k , существует 4 вида симметрии:

1. Симметричные коэффициенты четные.
2. Симметричные коэффициенты нечетные.
3. Антисимметричные коэффициенты четные.
4. Антисимметричные коэффициенты нечетные.

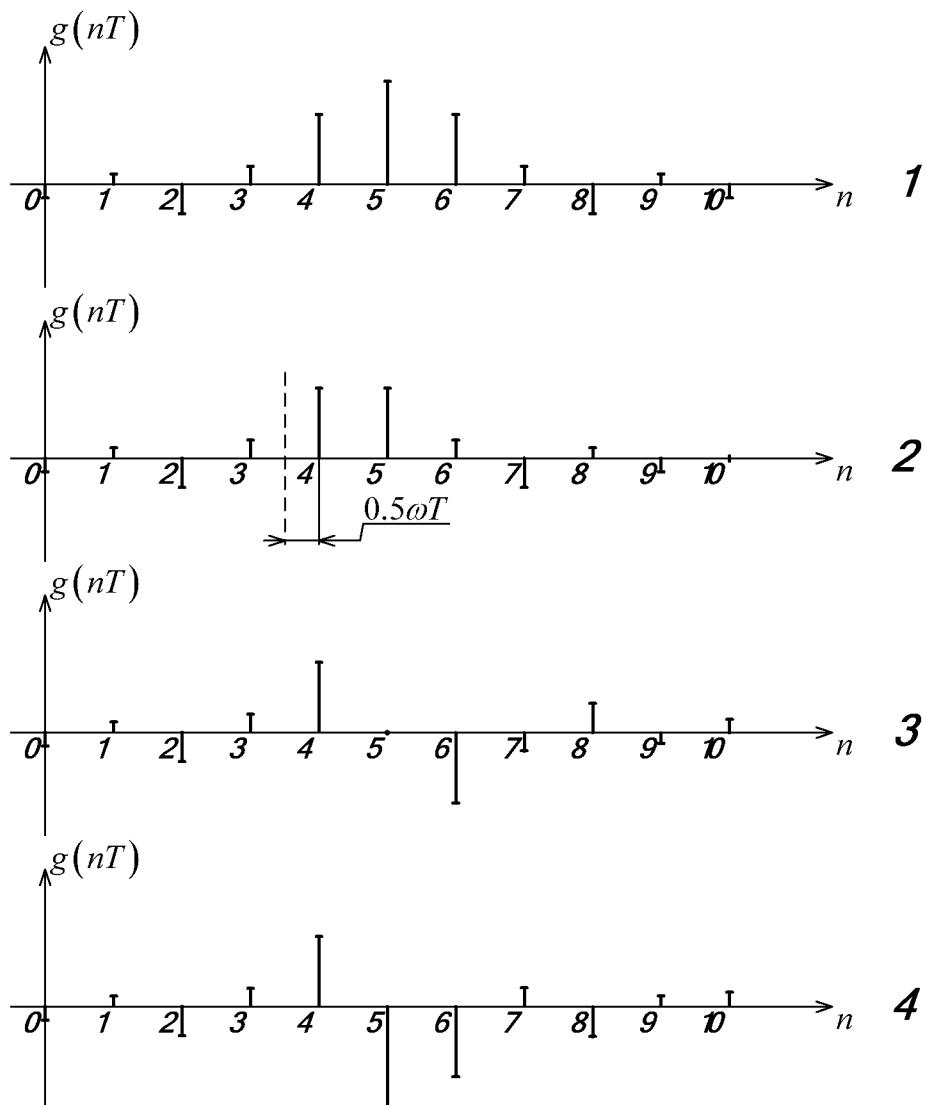


Рисунок 4.5 – Симметрия коэффициентов фильтра

1. N – нечетное:

$$a_l = a_{N-1-l}, \quad l = 0, 1, \dots, \frac{N-1}{2};$$

$$H(e^{j\omega T}) = e^{-jL\omega T} \sum_{l=1}^L C_l \cos(l\omega T), \quad L = \frac{N-1}{2};$$

2. N – четное:

$$a_l = a_{N-1-l}, \quad l = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1;$$

$$H(j\omega T) = e^{-j(L+0.5)\omega T} \sum_{l=0}^L C_l \cos[(l+0.5)\omega T], \quad L = \frac{N}{2} - 1;$$

3. N – нечетное:

$$a_l = -a_{N-1-l}, \quad H(e^{j\omega T}) = e^{-jL\omega T} \sum_{l=1}^L C_l \sin(l\omega T);$$

4. N – четное:

$$a_l = -a_{N-1-l}, \quad H(e^{j\omega T}) = e^{-j(L+0.5)\omega T} \sum_{l=0}^L C_l \sin[(l+0.5)\omega T];$$

Частотные характеристики приведены только для половины диапазона. Для полного отображения их следует отобразить в соответствии с формулами (1, 2, 3, 4).

4.3.1 Метод временных окон (для проектирования фильтров)

Берется требуемая характеристика фильтра, который требуется создать, она может быть идеализированной (не обязательно реальной) и от нее находится требуемая импульсная характеристика:

$$g_T(nT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_T(e^{j\omega T}) e^{j\omega_n T} d\omega;$$

Она определена по времени от $-\infty$ до ∞ . Для приближения характеристики к реальной, ее сдвигают на половину и отсекают, получим:

$$g(nT) = \begin{cases} g_T, & 0 < n < N - 1 \\ 0, & -\infty < n < 0, \quad n \geq N - 1 \end{cases}$$

Эта операция называется операцией взвешивания. Аналитически это можно записать так:

$$g(nT) = g_T(nT) \cdot \underbrace{\omega(nT)}_{\text{весовая функция}} ;$$

Пример:

Для весовой функции в виде прямоугольника:

$$\omega(nT) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0, & \text{за пределами интервала} \end{cases}$$

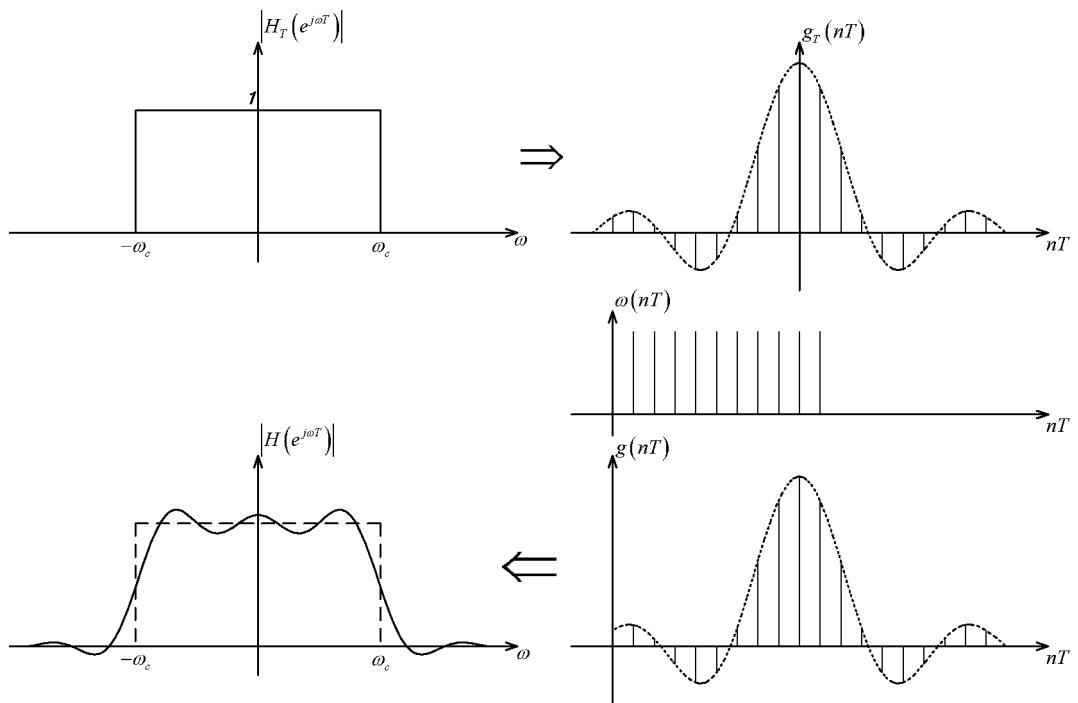


Рисунок 4.6 – Использование временных окон для проектирования фильтров
Недостатки:

1. Образование колебательного характера в зоне пропускания и задержки.
2. Появление новой зоны.

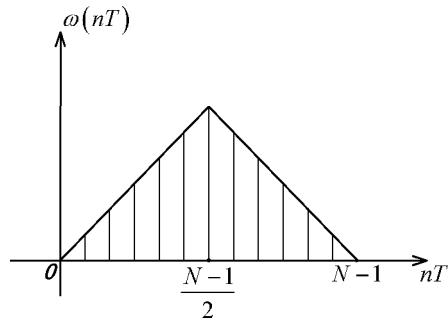
Явление Гиббса – колебательная характеристика в частотной области. Это явление образуется за счет свертки спектров. Временные окна в чистом виде используются редко. Для уменьшения явления Гиббса применяют другие окна, общей особенностью которых является:

1. Они должны иметь плавное нарастание отсчетов во временной области (нарастать и спадать).
2. В частотной области должно быть небольшое расширение спектра по сравнению с прямоугольником и уровень боковых лепестков частотного спектра временного окна должен быть минимальным.
3. В результате происходит менее резкое усечение во времени и за счет более широкой переходной полосы существенно снижается колебательный характер частотной характеристики проектируемого фильтра.

Используемые окна:

1. Окно Бартлетта:

$$\omega(nT) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1}, & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ \frac{2-2n}{N-1}, & \frac{N-1}{2} < n \leq N-1 \end{cases};$$



2. Окно Хемминга:

$$\omega(nT) = 0.5 - 0.5 \cos \frac{2\pi n}{N-1}, \quad 0 \leq n \leq N-1;$$

3. Окно Хемминга:

$$\omega(nT) = 0.54 - 0.46 \cos \frac{2\pi n}{N-1}, \quad 0 \leq n \leq N-1;$$

4. Окно Блекмана:

$$\omega(nT) = 0.42 - 0.5 \cos \frac{2\pi n}{N-1} - 0.08 \cos \frac{4\pi n}{N-1}, \quad 0 \leq n \leq N-1;$$

5. Окно Ланшоца:

$$\omega(nT) = \begin{pmatrix} \sin \frac{2\pi N}{N-1} \\ \frac{2\pi N}{N-1} \end{pmatrix}^L, \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad L \text{ -- целое число};$$

6. Окно Кайзера:

$$\omega(nT) = \frac{J_0 \left[\alpha \sqrt{\left(\frac{N-1}{2} \right)^2 - \left(n - \frac{N-1}{2} \right)^2} \right]}{J_0 \left[\alpha \frac{N-1}{2} \right]}, \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad \alpha = \text{const};$$

J_0 – модифицированная функция Бесселя 1-го рода 0-го порядка.

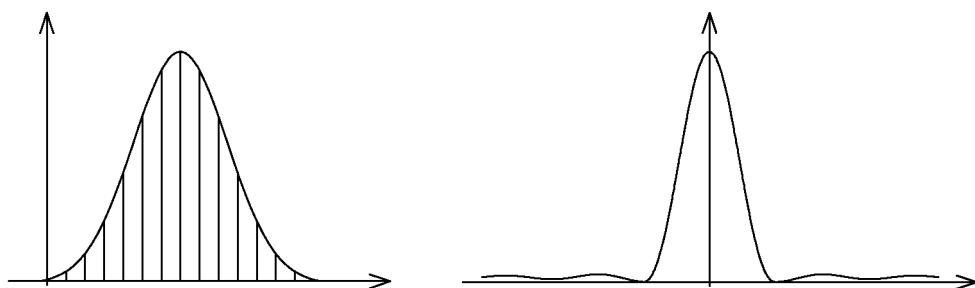


Рисунок 4.7 – Модифицированная функция Бесселя

Выводы по методу:

Достоинства:

1. Метод применим для широкого класса фильтров КИХ.
2. Достаточная простота программной реализации.

Недостатки:

1. Метод не производит оптимизации параметров фильтра. Затруднительным является выбор самого окна.
2. Использование методы предполагает повторные расчеты.

4.3.2 Метод частотной выборки

Необходимо определить отсчеты импульсной характеристики. Эти отсчеты однозначно определяют тип фильтра:

$$g(nT) = a_0|_{n=0}, a_1|_{n=1}, \dots, a_{N-1}|_{N-1};$$

Частотная выборка и передаточная функция имеют вид:

$$H(k) = H(z) \Big|_{z=e^{\frac{j2\pi}{N}nk}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1;$$

Выборки передаточной функции и импульсной характеристики связаны прямым и обратным преобразованием Фурье.

$$H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} g(nT) e^{-j\frac{2\pi nk}{N}};$$

$$g(nT) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j\frac{2\pi nk}{N}};$$

С другой стороны:

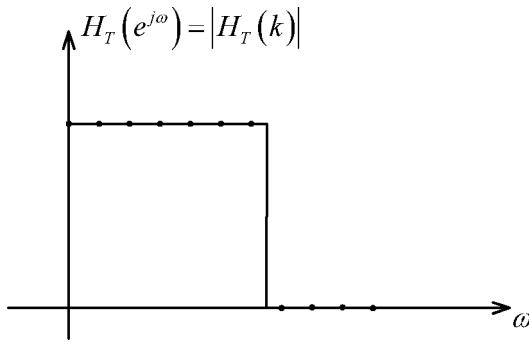
$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} g(nT) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} \right) z^{-n};$$

Перегруппировав суммы, получим:

$$H(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} \cdot z^{-1} \right)^n}_{\text{геометрическая прогрессия}} = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - e^{j\frac{2\pi nk}{N}} \cdot z^{-1}};$$

Получим:

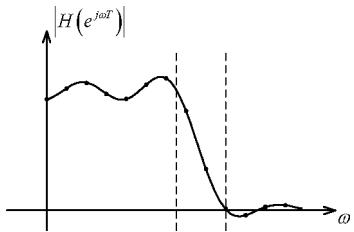
$$H(e^{j\omega T}) \Big|_{z=e^{j\omega}} = e^{-\frac{j\omega(N-1)}{2}} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \cdot \frac{\sin N \left(\frac{\omega - \frac{2\pi k}{N}}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\omega - \frac{2\pi k}{N}}{2} \right)} \cdot e^{j\pi k \left(1 - \frac{1}{N} \right)};$$



Поведение передаточной функции в промежутках между выборками зависит от фазовых соотношений.

Рисунок 4.8 – Выборки из АЧХ аналогового фильтра

При расчете по этому методу нужно учитывать и АЧХ. Процедура синтеза фильтра по этому методу не может предсказать его АЧХ. Для сглаживания колебательного характера частотной характеристики, назначают дополнительные выборки в переходной полосе. Величина этих выборок носит свободный характер.



Этим методом лучше всего рассчитывать узкополосные фильтры. В этом случае получается минимальное количество значащих выборок, остальные выборки будут нулевыми.

Рисунок 4.9 – Результат проектирования методом выборки из АЧХ

4.3.3 Метод наименьших квадратов

Этот метод используется для расчета фильтров с линейной АЧХ. Т.к. импульсная характеристика фильтра симметрична, то:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k z^{-k};$$

Используя свойства симметрии:

$$\omega T = 2\pi W,$$

$$H(e^{j2\pi W}) = a_0 + a_1 \cdot e^{-j2\pi W} + \dots + a_{k-1} \cdot e^{-j(k-1)2\pi W} + a_k \cdot e^{jk2\pi W} \\ + a_{k-1} \cdot e^{+j(k+1)2\pi W} + \dots + a_1 \cdot e^{+j(2k-1)2\pi W} + a_0 \cdot e^{+j2k2\pi W} = e^{-jk2\pi W} \sum_{l=0}^k C_l \cos l2\pi W;$$

$$k = \frac{N-1}{2}, \quad a_0 = C_k, \quad C_l = 2a_k - l, \quad l = 1, 2, \dots, k;$$

$$A(W) = |\Phi(\vec{C}, W)|;$$

$$\Phi(W, \vec{C}) = \sum_{l=0}^k C_l \cos 2\pi W l;$$

Метод наименьших квадратов сводится к определению коэффициентов фильтра:

$$a_k \longleftrightarrow C_l = \min \{ G(W, \vec{C}) \};$$

$$\underbrace{G(\vec{C})}_{\text{целевая функция}} = \int_0^{0.5} \underbrace{q(W)}_{\text{весовая функция}} \left[\underbrace{A^*(W)}_{AЧХ требуемого фильтра} - \underbrace{\Phi(W, \vec{C})}_{\substack{\text{частотная характеристика} \\ \text{в пространстве дополнительных коэффициентов}}} \right]^2 dW;$$

Весовая функция позволяет регулировать точность аппроксимации. Чем больше значение весовой функции, тем точность аппроксимации на данном участке выше.

Для достижения минимума целевой функции необходимо вычислить ее частные производные и приравнять к нулю:

$$\frac{\partial G(\vec{C})}{\partial C_m} = 0, \quad m = 0, 1, \dots, k;$$

В результате решения этой системы уравнений найдем: C_0, C_1, \dots, C_k . После чего определим истинные значения коэффициентов фильтра a_k . Решение системы сводится к определению коэффициентов:

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^k t_{m,l} \cdot C_l &= t_{m,k+1}; \\ t_{m,l} &= \int_0^{0.5} q(W) \cos m2\pi W \cdot \cos l2\pi W dW, \quad l = 0, 1, \dots, k; \\ t_{m,k+1} &= \int_0^{0.5} q(W) A^*(W) \cdot \cos m2\pi W dW; \end{aligned} \tag{*}$$

Получим из (*):

$$a_k = C_0, \quad a_{k-l} = \frac{C_l}{2}, \quad l = 1, 2, \dots, k;$$

Этот метод достаточно точен и дает решения для фильтров с абсолютно линейной фазовой характеристикой, но нет оптимизации параметров. Т.е. число отсчетов импульсной характеристики выбирается путем нескольких операций.

4.3.4 Минимаксный метод (метод наилучшей равномерной аппроксимации или Чебышевский метод)

Метод позволяет определить значения коэффициентов C_l из условия минимума величины $\min\{\varepsilon(\vec{e})\}$, которая определяется исходя из максимальной разности модуля:

$$\varepsilon(\vec{C}) = \max |\Delta(W, \vec{e})|, \quad 0 \leq W \leq 0.5;$$

где:

$$\Delta(W, \vec{C}) = [A^*(W) - \Phi_k(W, \vec{C})] \cdot q(W);$$

$$\Phi_k(W, \vec{C}) = \sum_{l=0}^k C_l \cos l 2\pi W;$$

$\min \{\varepsilon(\vec{e})\}$ – минимум функции (*).

$\varepsilon(\vec{e}) = \max |\Delta(W, \vec{e})|$ – максимальное отклонение в диапазоне $0 \leq W \leq 0.5$.

$$\Delta(W, \vec{C}) = \begin{bmatrix} A^*(W) & -\Phi_k(W, \vec{e}) \\ \text{требуемая характеристика} & \end{bmatrix} \underbrace{q(W)}_{\text{весовая функция}};$$

где: $\Phi_k(W, \vec{e})$ – особая аппроксимационная функция, называемая Чебышевской, при выполнении условия (*). Для выполнения этого требования вполне достаточно, чтобы разностная величина принимала наибольшее и равное друг другу значения, чередующиеся по знаку в $k+2$ точках, в интервале определения $0 \leq W \leq 0.5$.

Т.е.: $\Delta(W_1, \vec{C}) = -\Delta(W_2, \vec{C}) = \dots = (-1)^{k+1} \cdot \Delta(W_{k+2}, \vec{C})$. Точки, в которых происходит чередование, называют точками альтернанса.

Причем:

$$\underbrace{|\Delta(W_j, \vec{C})|}_{\text{максимальное отклонение}} \geq \underbrace{|\Delta(W, \vec{C})|}_{\text{промежуточное значение}};$$

Весовая функция $q(W)$ позволяет управлять точностью аппроксимации. Если весовая функция $q(W)$ кусочно-постоянна в некотором диапазоне частот: $q(W) = h$, $W_j \leq W \leq W_{j+1}$, причем этот диапазон включает хотя бы одну точку альтернанса, то справедливо следующее отношение:

$$\frac{h_j}{h_k} = \frac{\max_{W_k \leq W \leq W_{k+1}} |A^*(W) - \Phi(W, \vec{C})|}{\max_{W_j \leq W \leq W_{j+1}} |A^*(W) - \Phi(W, \vec{C})|};$$

Это выражение означает, что максимум абсолютной погрешности обратно пропорционален значению весовой функции на этом интервале.

Т.о. функция, заданная при проектировании АЧХ $A^*(W)$ имеет разрывы. При этом методе аппроксимации, эту функцию можно заменить непрерывной функцией на всем интервале частот: $A^*(W)$.

При этом весовая функция выбирается таким образом, и настолько малой величиной, вне заданных интервалов, чтобы точки альтернанса попали как раз в заданные интервалы.

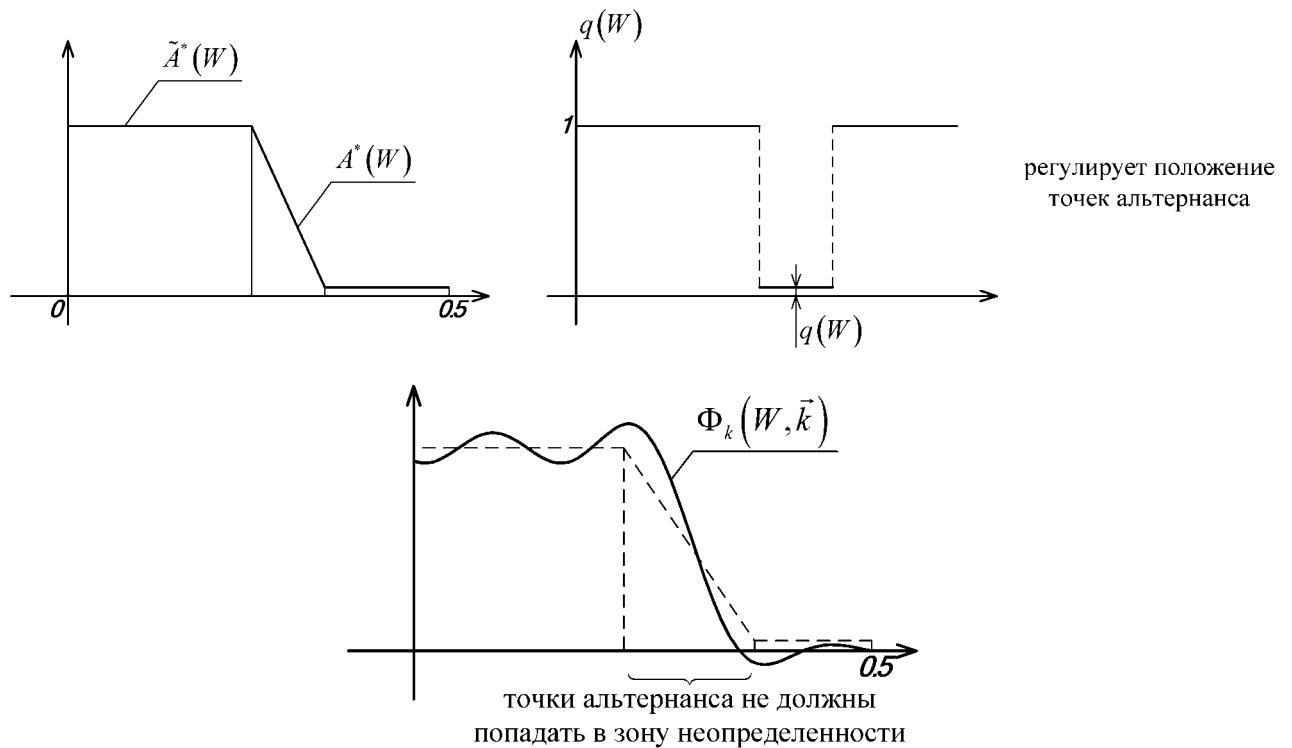


Рисунок 4.10 – Чебышевский метод проектирования фильтра

Пример:

$$\tilde{A}^*(W) = \begin{cases} 1, & 0 \leq W \leq 0.1063; \\ 0, & 0.3937 \leq W \leq 0.5; \end{cases}$$

$$\tilde{q}(W) = \begin{cases} 1, & 0 \leq W \leq 0.1063; \\ 1, & 0.3937 \leq W \leq 0.5; \end{cases}$$

От кусочно-разрывной функции перейдем к непрерывной:

$$A^*(W) = \begin{cases} 1, & 0 \leq W \leq 0.1063; \\ -10.44W + 2.71, & 0.1063 \leq W \leq 0.3937; \\ 0, & 0.3937 \leq W \leq 0.5; \end{cases}$$

$$q(W) = \begin{cases} 1, & 0 \leq W \leq 0.1063; \\ 0.001, & 0.1063 \leq W \leq 0.3937; \\ 1, & 0.3937 \leq W \leq 0.5; \end{cases}$$

Теперь, например, при $k = 5$ (количество точек половины импульсной характеристики), получим:

$k = 5$ – точки альтернанса:

$C_0 = 0.4999999$	$W_1 = 0.0512220$
$C_1 = 0.5986008$	$W_2 = 0.0908867$
$C_2 = 0.0000000$	$W_3 = 0.1062999$
$C_3 = -0.1188343$	$W_4 = 0.393700$
$C_4 = 0.0000000$	$W_5 = 0.4091255$
$C_5 = 0.0207811$	$W_6 = 0.4487950$
	$W_7 = 0.5000000$

Максимальное отклонение: $\Delta(W, \vec{C}) = -0.0005476$.

Этот метод наиболее эффективен и алгоритм построения функции Φ_k называется алгоритмом Ремеза, суть его заключается в пошаговой модификации коэффициентов C_i до тех пор, пока не будет найдено равенство максимальных отклонений.

Процесс вычисления коэффициентов при Чебышевской аппроксимации оказывается сложнее, чем в методе наименьших квадратов, но этот метод позволяет найти фильтр с оптимальным порядком (наименьшим числом k).

Порядок определяется: $N_{\min} = 2 \cdot K_{\min} + 1$.

АЧХ фильтра удовлетворяет требованию: $|A^*(W) - A(W)| \leq \varepsilon(W)$. Для выполнения этого условия функция Φ_k определяется несколько раз при различных k , при этом: $q(W) = \frac{1}{\varepsilon(W)}$.

Если при некоторой итерации k аппроксимационная функция Φ_k удовлетворяет требованию минимума максимального отклонения, а предыдущая функция Φ_{k-1} не удовлетворяла этому требованию, то делается остановка и принимается k равное последней остановке.

4.4 Проектирование БИХ фильтров

При проектировании задаются частотные характеристики:

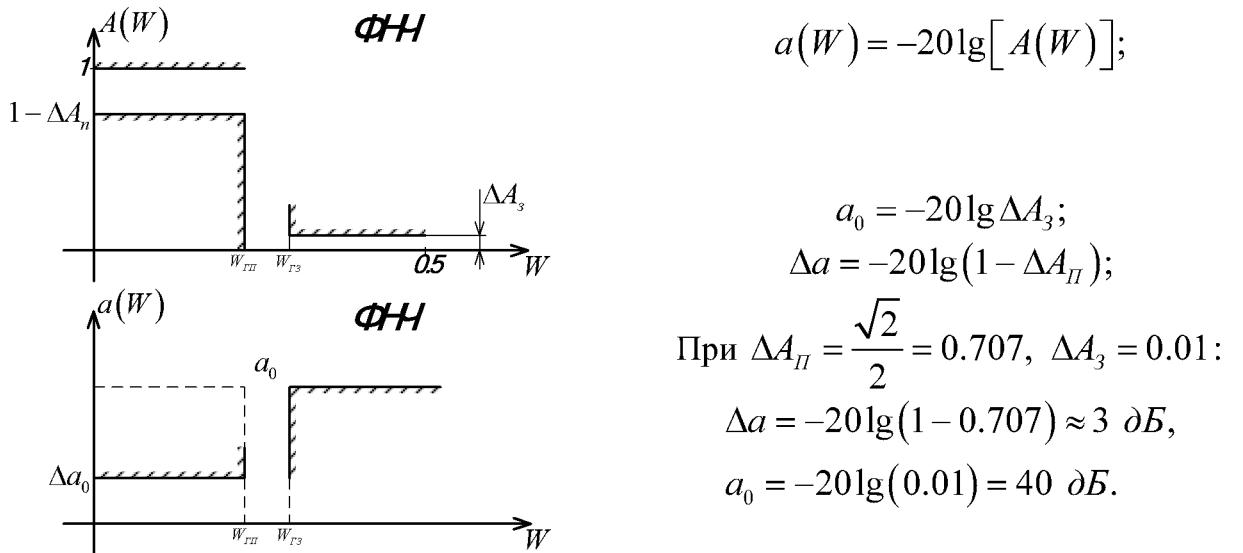


Рисунок 4.11 – Задание параметров частотной характеристики

Методы решения оптимизационных задач при проектировании БИХ фильтров.

Классы:

1. Метод преобразования аналоговых фильтров в цифровые.
2. Прямые методы расчета БИХ фильтров.
3. Метод использования алгоритмов оптимизации.

Рассмотрим 1ый метод:

Метод обусловлен простотой, является широко распространенным и называется методом билинейного преобразования. Суть метода состоит в том, что берется передаточная функция аналогового фильтра, заданная в частотном аналоговом диапазоне и с помощью метода билинейного преобразования из аналогового частотного переводится в z -плоскость, т.о. получается цифровой фильтр: $T(s) \Rightarrow H(z)$.

Достоинства метода:

1. Передаточная функция цифрового фильтра определяется с помощью простых формул из передаточной функции аналогового фильтра.
2. Сигнал на выходе цифрового фильтра совпадает с аналоговым сигналом в точках дискретизации.

Типы аналоговых фильтров, используемых при проектировании цифровых

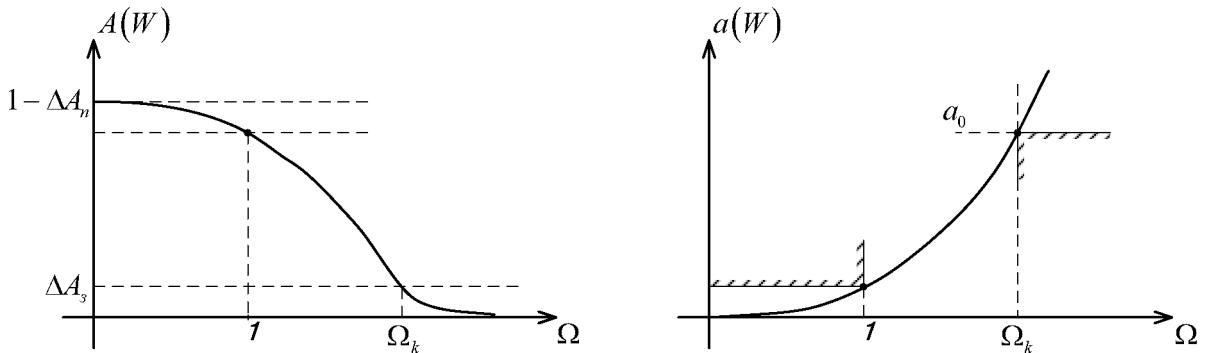


Рисунок 4.12 – Фильтр Баттерворт (фильтр типа В)

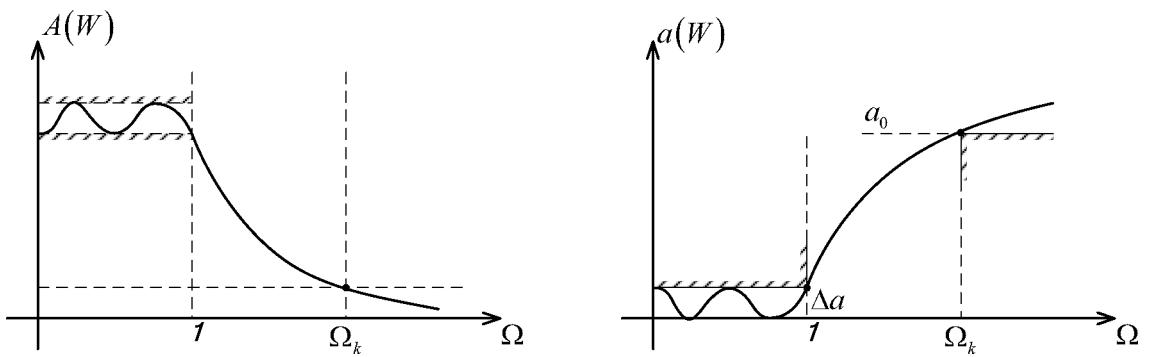


Рисунок 4.13 – Фильтр типа Т (Чебышевский)

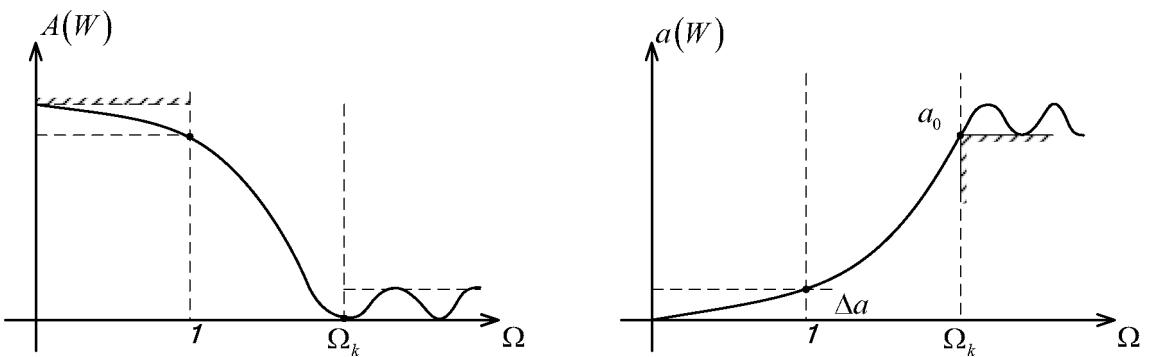


Рисунок 4.14 – Фильтр типа I (инверсный Чебышевский)

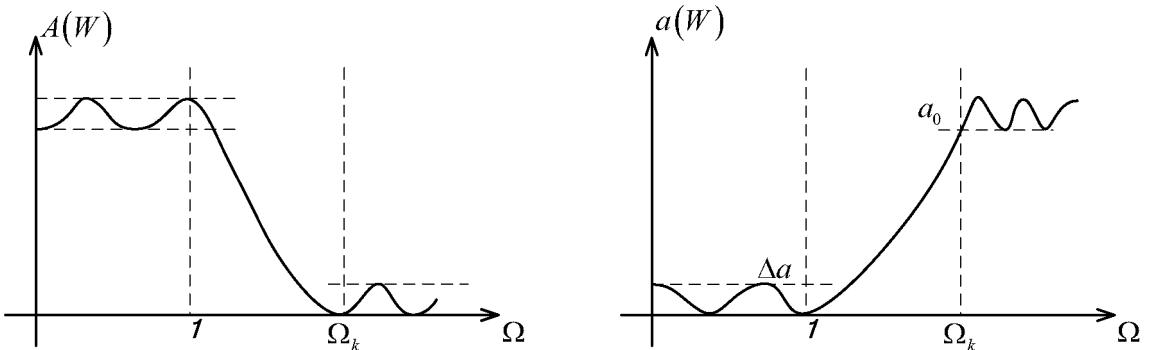


Рисунок 4.15 – Фильтр типа С (Золоторева – Кауэра)

Билинейное преобразование – конформное отображение из одной плоскости в другую. Замена точек s плоскости на точки z плоскости (пересчет коэффициентов) производится:

$$s = \gamma \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = \gamma \frac{z - 1}{z + 1};$$

где: γ – постоянный множитель, не влияющий на форму преобразования.

Обратное преобразование производится: $z = \frac{\gamma + s}{\gamma - s}$. Используя подстановку берем аналоговый фильтр: $T(s) \Rightarrow H(z)$. Т.е.: $H(z) = T(s) \Big|_{s=\gamma \frac{z-1}{z+1}}$. Каждой точке $s = \Sigma + j\Omega$ соответствует: $z = e^{(\sigma+j\omega)T}$.

Мнимая ось: $j\Omega$ $[-\infty < \Omega < \infty]$, следовательно:

$$z = e^{j\omega T}, \quad z = \frac{\gamma + j\Omega}{\gamma - j\Omega};$$

$$z = \frac{r_1 \cdot e^{j\Theta_1(\omega)}}{r_2 \cdot e^{j\Theta_2(\omega)}} = \frac{\sqrt{\gamma^2 + \Omega^2} \cdot e^{j \operatorname{arctg} \frac{\Omega}{\gamma}}}{\sqrt{\gamma^2 + \Omega^2} \cdot e^{-j \operatorname{arctg} \frac{\Omega}{\gamma}}} = 1 \cdot e^{j \cdot 2 \operatorname{arctg} \frac{\Omega}{\gamma}};$$

При $s = j\Omega \Rightarrow z = \frac{\gamma + j\Omega}{\gamma - j\Omega}$;

При:

$$\Omega = 0, \quad z = 1;$$

$$\Omega = \infty, \quad z = -1;$$

$$\Omega = -\infty, \quad z = -1;$$

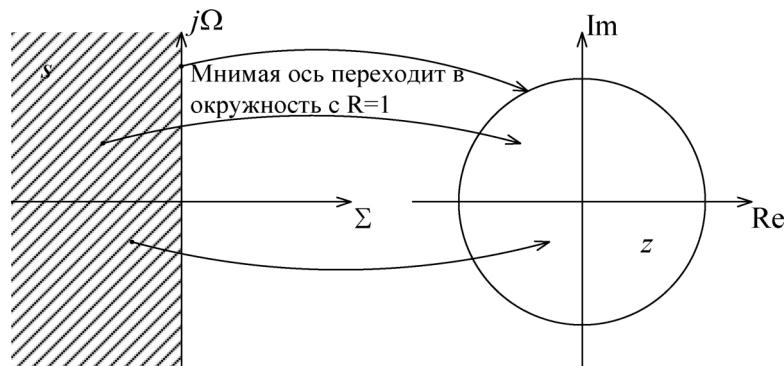


Рисунок 4.16 – Билинейное преобразование

Все точки, расположенные слева мнимой оси имеют однозначные переходы внутрь круга.

Свойства аналогов

1. Т.к. все полюсы устойчивого аналогового фильтра расположены в левой полуплоскости s , то при билинейном преобразовании цифровой фильтр оказывается автоматически устойчивым, в пределах, ограниченных единичной окружностью.

2. Т.к. мнимая ось s плоскости отображается в окружность z плоскости, то все минимумы и максимумы аналоговой области сохраняются и для цифровой области.

Преобразование аналоговой частоты, в частоту цифровую происходит нелинейно, т.о. частотная ось деформируется: $\Omega = \gamma \cdot \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} = \gamma \cdot \operatorname{tg}(\pi W)$.

Происходит следующее, равномерные участки в аналоговой области трансформируются в неравномерные для цифровой области.

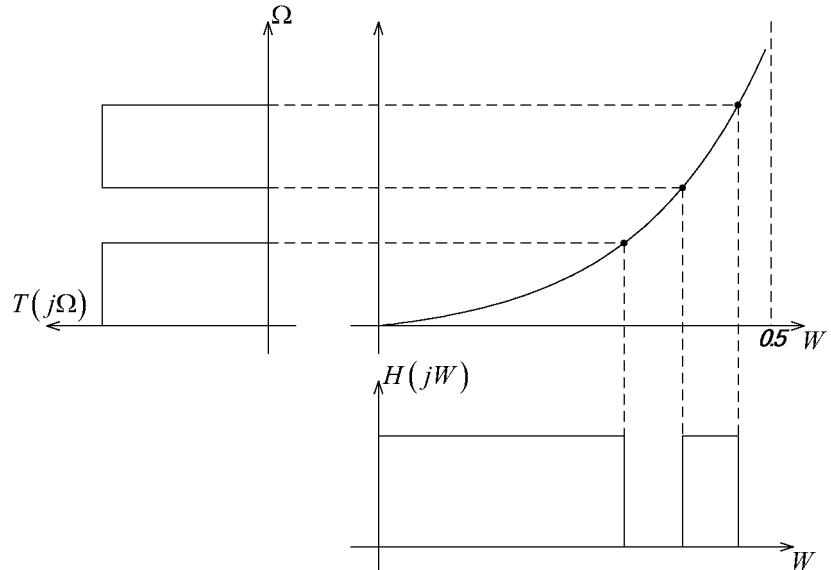


Рисунок 4.17 – Преобразование аналоговой частоты в цифровую

Методы борьбы: предискажения в аналоговой области. Предискажения можно определить:

$$\gamma = \operatorname{ctg} \frac{W_{\text{пп}} \cdot T}{2} = \operatorname{ctg} (\pi \cdot W_{\text{пп}}) - \text{для ФНЧ;}$$

Недостаток: коэффициент γ предназначен для одной частоты.

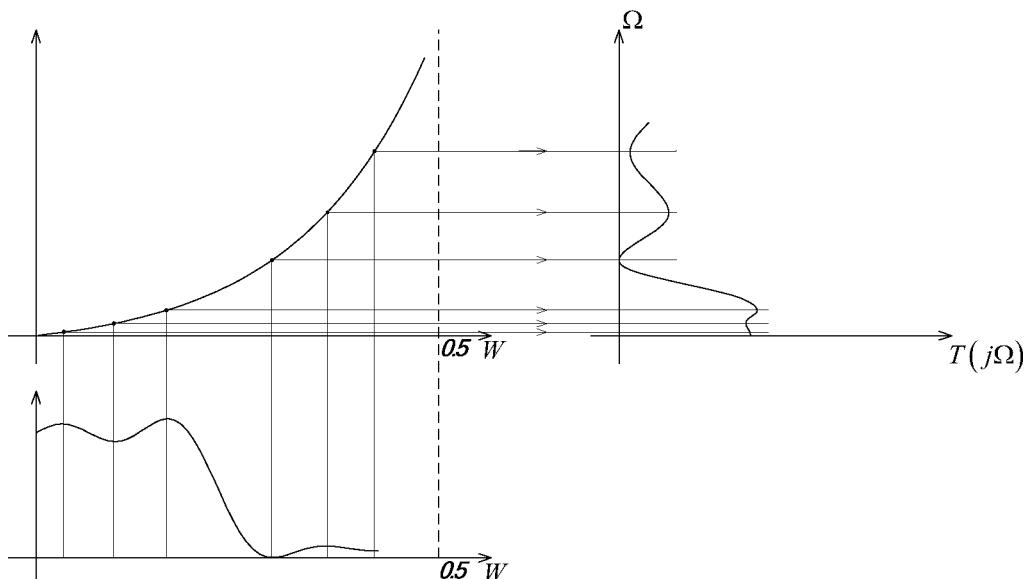


Рисунок 4.18 – Использование предыскажений
Обобщенное билинейное преобразование Константинидиса

С помощью обобщения Константинидиса можно билинейно преобразовать:

$$\begin{aligned}
\Phi H\mathcal{C}_a &\longrightarrow \Phi H\mathcal{C}_u \\
\Phi H\mathcal{C}_a &\longrightarrow \Phi B\mathcal{C}_u \\
\Phi H\mathcal{C}_a &\longrightarrow P\Phi_u \\
\Phi H\mathcal{C}_a &\longrightarrow P\Phi_u
\end{aligned}$$

Таблица 4.2 – Преобразование основных типов фильтров

	$\Phi H\mathcal{C}_a \rightarrow \Phi H\mathcal{C}_u$	$\Phi H\mathcal{C}_a \rightarrow \Phi B\mathcal{C}_u$	$\Phi H\mathcal{C}_a \rightarrow P\Phi_u$	$\Phi H\mathcal{C}_a \rightarrow P\Phi_u$
Границчная частота фильтра	$W_{\Gamma\Pi}, W_{\Gamma 3}$	$W_{\Gamma\Pi}, W_{\Gamma 3}$	$W_{\Gamma\Pi_1}, W_{\Gamma 3_1}$ $W_{\Gamma\Pi_2}, W_{\Gamma 3_2}$	$W_{\Gamma\Pi_1}, W_{\Gamma 3_1}$ $W_{\Gamma\Pi_2}, W_{\Gamma 3_2}$
Замена переменных	$s = \gamma \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$	$s = \gamma \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$	$s = \gamma \frac{1-2\alpha \cdot z^{-1} + z^{-2}}{1-z^{-2}}$	$s = \gamma \frac{1-z^{-2}}{1-2\alpha \cdot z^{-1} + z^{-2}}$
Параметр γ	$\gamma = ctg\pi W_{\Gamma\Pi}$	$\gamma = tg\pi W_{\Gamma\Pi}$	$\gamma = ctg\pi (W_{\Gamma\Pi_2} - W_{\Gamma\Pi_1})$	$\gamma = tg\pi (W_{\Gamma\Pi_2} - W_{\Gamma\Pi_1})$
Параметр α	—	—	$\alpha = \frac{\cos \pi (W_{\Gamma\Pi_2} - W_{\Gamma\Pi_1})}{\cos \pi (W_{\Gamma\Pi_2} + W_{\Gamma\Pi_1})}$	$\alpha = \frac{\cos \pi (W_{\Gamma\Pi_2} - W_{\Gamma\Pi_1})}{\cos \pi (W_{\Gamma\Pi_2} + W_{\Gamma\Pi_1})}$
Связь аналоговой частоты с цифровой	$\Omega = \gamma \cdot tg\pi W$	$\Omega = \gamma \cdot ctg\pi W$	$\Omega = \gamma \frac{\alpha - \cos 2\pi W}{\sin 2\pi W}$	$\Omega = \gamma \frac{\sin 2\pi W}{\alpha - \cos 2\pi W}$
Границные аналоговые частоты	$\Omega_c = 1$ $\Omega_k = \gamma \cdot tg\pi W_{\Gamma 3}$	$\Omega_c = 1$ $\Omega_k = \gamma \cdot ctg\pi W_{\Gamma 3}$	$\Omega_c = 1$ $\Omega_k = \min \{ \Omega'_k ; \Omega''_k \}$ $\Omega'_k = \gamma \frac{\alpha - \cos 2\pi W_{\Gamma 3_1}}{\sin 2\pi W_{\Gamma 3_1}}$ $\Omega''_k = \gamma \frac{\alpha - \cos 2\pi W_{\Gamma 3_2}}{\sin 2\pi W_{\Gamma 3_2}}$	$\Omega_c = 1$ $\Omega_k = \min \{ \Omega'_k ; \Omega''_k \}$ $\Omega'_k = \gamma \frac{\sin 2\pi W_{\Gamma 3_1}}{\alpha - \cos 2\pi W_{\Gamma 3_1}}$ $\Omega''_k = \gamma \frac{\sin 2\pi W_{\Gamma 3_2}}{\alpha - \cos 2\pi W_{\Gamma 3_2}}$

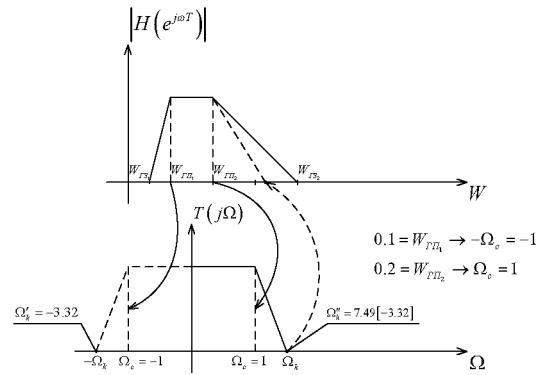
Выбор дополнительного параметра α осуществляется по соответствующим формулам и преобразование происходит таким образом, чтобы при преобразовании $\Phi H\mathcal{C}_a$ (аналогового), преобразовывались соответствующие фильтры и частота Ω_c (пропускания) с учетом деформации частот, преобразовывались соответственно в граничные частоты пропускания 1 и 2 (ПФ и РФ). Из-за деформации частотной шкалы при определении граничной частоты Ω_k получаются 2 значения частоты: Ω'_k и Ω''_k . Из этих двух значений выбирается минимальное.

Пример билинейного преобразования

Полосовой фильтр: $P\Phi_u$.

$$W_{\Gamma 3_1} = 0.05, \quad W_{\Gamma\Pi_1} = 0.1, \quad W_{\Gamma\Pi_2} = 0.2, \quad W_{\Gamma 3_2} = 0.4.$$

Частотная характеристика:



Параметры преобразования:

$$\gamma = \operatorname{ctg} \left[\pi (W_{RP_2} - W_{RP_1}) \right] = \operatorname{ctg} \pi (0.2 - 0.1) \approx 3.08;$$

$$\alpha = \frac{\cos(W_{RP_2} + W_{RP_1})\pi}{\cos(W_{RP_2} - W_{RP_1})\pi} = \frac{\cos(0.3 \cdot \pi)}{\cos(0.1 \cdot \pi)} \approx 0.618;$$

$$\Omega_1 = \gamma \frac{\alpha - \cos 2\pi W_{RP_1}}{\sin 2\pi W_{RP_1}} = 3.08 \frac{0.618 - \cos 0.2\pi}{\sin 0.2\pi} = -1;$$

$$\Omega_2 = \gamma \frac{\alpha - \cos 2\pi W_{RP_2}}{\sin 2\pi W_{RP_2}} = 3.08 \frac{0.618 - \cos 0.4\pi}{\sin 0.4\pi} = +1;$$

$$\Omega'_k = 3.08 \frac{0.618 - \cos 0.1\pi}{\sin 0.1\pi} = -3.32;$$

$$\Omega''_k = 3.08 \frac{0.618 - \cos 0.8\pi}{\sin 0.8\pi} = 7.49;$$

$$\Omega_k = \min \{ |-3.32|, |7.49| \} = 3.32;$$

Теперь делаем подстановку:

$$s = \gamma \frac{1 - 2\alpha \cdot z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-2}} \Rightarrow H(z) \rightarrow H(j\omega);$$

Достоинством данного преобразования является простота алгоритма.

Билинейное преобразование импульсных характеристик

Билинейное преобразование импульсной характеристики заключается в том, что импульсная характеристика БИХ-фильтра получается из аналоговой характеристики путем ее дискретизации:

$$g(nT) = g_a(t) \Big|_{t=nT};$$

Алгоритм имеет вид:

1. Получение передаточной функции аналогового фильтра в виде полинома с вычисленными значениями корней числителя и знаменателя:

$$H_a(p) = \sum_{k=1}^M \frac{C_k}{p - p_k};$$

2. Получение аналоговой импульсной характеристики:

$$g_a(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{C-p}^{C+p} H_a(p) \cdot e^{pt} dt = \sum_{k=1}^M C_k \cdot e^{p_k t} \cdot G(t);$$

где: $G(t)$ – функция включения (единичный скачок для отсечения “отрицательного времени”).

3. Получение дискретной импульсной характеристики:

$$g(nT) = \sum_{k=1}^M C_k \cdot e^{p_k nT} \cdot G(nT);$$

4. Определение передаточной функции цифрового фильтра:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT) \cdot z^{-n} = \sum_{k=1}^M \frac{C_k}{1 - e^{p_k T} \cdot z^{-1}} \Big|_{z=e^{j\omega T}} \Rightarrow H(e^{j\omega T});$$

где: k – число полюсов.

В данном случае не требуется заботиться об устойчивости фильтра, она получается автоматически (при условии устойчивости прототипа).

В общем случае можно представить:

$$H(z) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_a\left(p + j \cdot \frac{2\pi}{T} m\right);$$

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_a\left[j\left(\omega - \frac{2\pi}{T} m\right)\right];$$

Функции имеют периодический характер, т.е. частотные характеристики повторяются с частотой дискретизации.

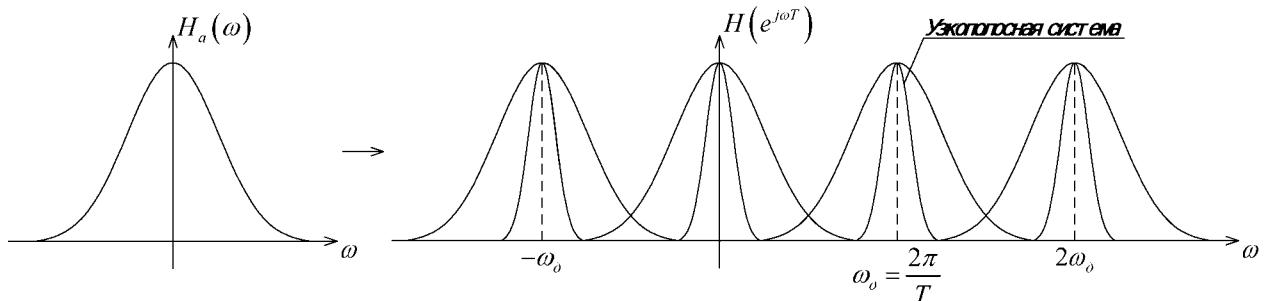


Рисунок 4.19 – Билинейное преобразование импульсной характеристики

Недостаток: перекрытие характеристик фильтра. Для уменьшения этого эффекта прибегают к следующему:

1. Увеличение частоты дискретизации (влияние уменьшается).
2. Отказ от метода или использование его для узкополосных систем.

5 Цифровые методы операций над спектрами

- Перенос спектра,
- Инверсия спектра,
- ОБП.

5.1 Перенос спектра

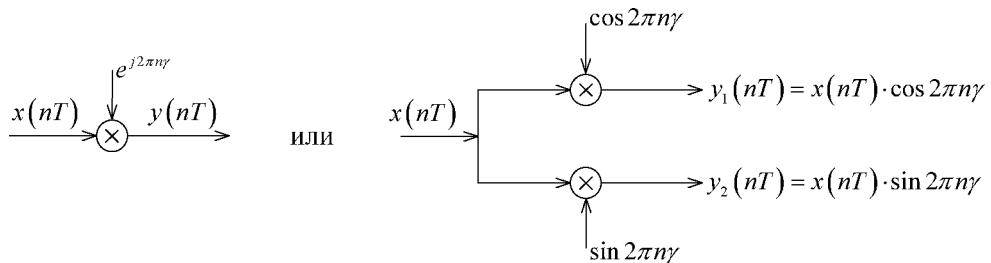
Если имеется вещественный сигнал $x(nT)$, спектр которого определен в области $[0, 0.5]$, то для перемещения спектра необходимо сигнал умножить на дискретную экспоненту:

$$y(nT) = x(nT) \cdot e^{-j \cdot 2\pi W n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot e^{j \cdot 2\pi n\gamma} \cdot e^{-j \cdot 2\pi nW} = X(e^{j \cdot 2\pi(W-\gamma)});$$

Смещение исходного спектра на частоту γ . В общем случае эта операция выглядит следующим образом:

$$e^{j2\pi n\gamma} = \cos 2\pi n\gamma + j \sin 2\pi n\gamma;$$

Если $\gamma > 0$ – сдвиг вправо, если $\gamma < 0$ – сдвиг влево.



Исходный спектр симметричен относительно нуля, следовательно, сигнал вещественный. 2, 3, 4 строчки сигнал несимметричен, значит сигнал комплексный. Для того, чтобы при γ_3 получить вещественный сигнал, достаточно произвести умножение на $2 \cdot \cos 2\pi \gamma_3 n$. При этом сдвиг должен быть полностью в область положительных частот:

$$y(nT) = x(nT) 2 \cos 2\pi n\gamma_3 = x(nT) \cdot e^{j2\pi n\gamma_3} + x(nT) \cdot e^{-j2\pi n\gamma_3} = \underbrace{y_1(nT)}_{\gamma > 0} + \underbrace{y_2(nT)}_{\gamma < 0};$$

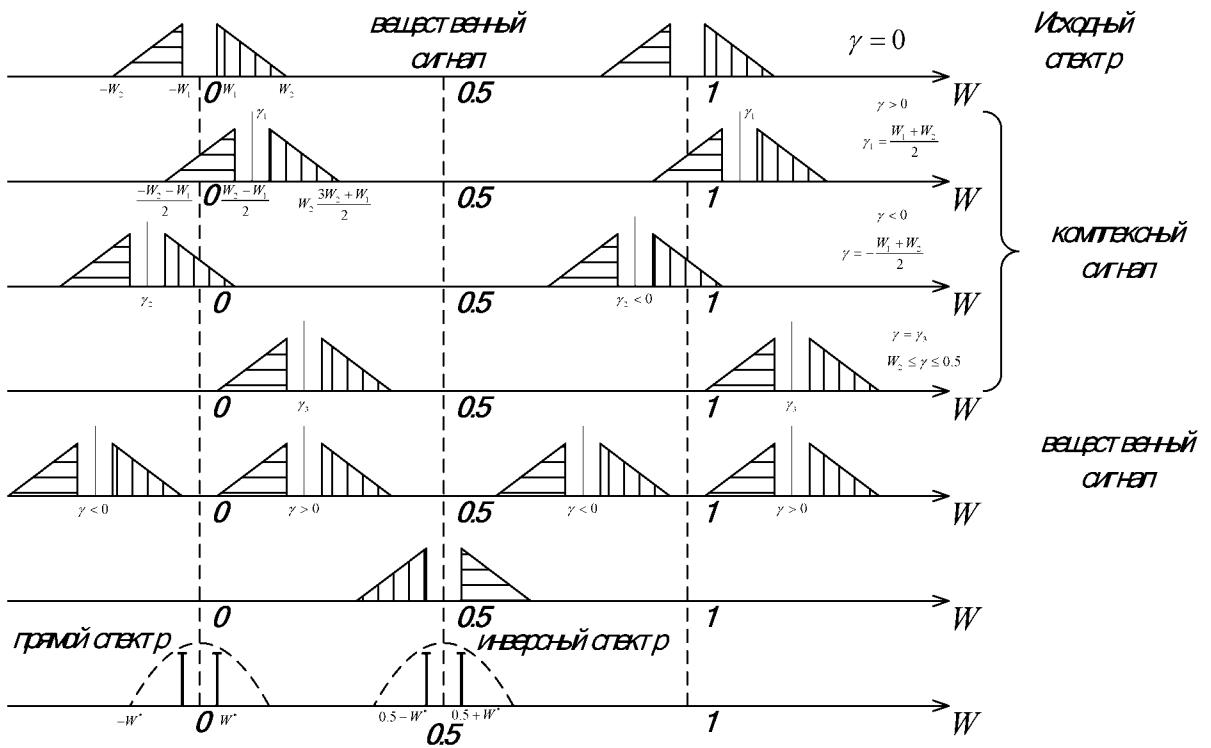


Рисунок 5.1 – Перенос спектра

Инверсия – исходная частота сдвигается до тех пор, пока не перевернется (отражение относительно 0.5). Для инверсии:

$$Y(e^{j2\pi W}) = X(e^{j2\pi(W-0.5)}), e^{j2\pi\gamma} = e^{j2\pi\frac{1}{2}n} = e^{j\pi n} = (-1)^n = \{1, -1, 1, -1, \dots\};$$

Инверсный спектр распадается относительно 0.5.

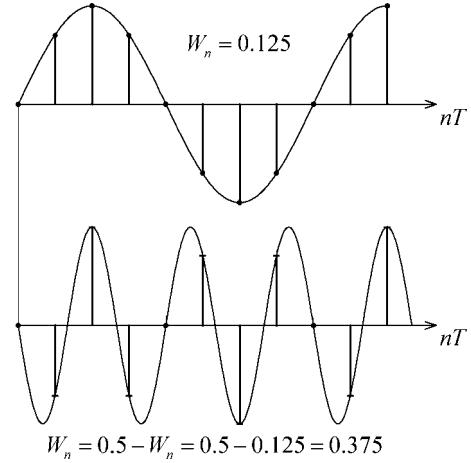
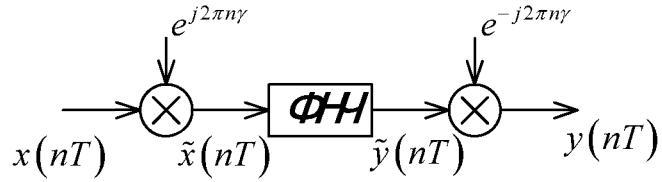


Рисунок 5.2 – Инверсный спектр

5.2 Получение сигнала с одной боковой полосой

Получение сигнала с одной боковой полосой проводится за счет операций сдвига, значительно проще, чем в аналоговой области. В общем случае операция получения сигнала с одной боковой полосой сводится к следующему алгоритму:



Пример:

$$y(nT) = \tilde{y}(nT) \cdot e^{-j2\pi n\gamma} = [\tilde{y}_1(nT) + j \cdot \tilde{y}_2(nT)][\cos 2\pi n\gamma + j \cdot \sin 2\pi n\gamma] = [\tilde{y}_1(nT)\cos 2\pi n\gamma + \tilde{y}_2(nT)\sin 2\pi n\gamma] + j[\tilde{y}_2(nT)\cos 2\pi n\gamma - \tilde{y}_1(nT)\sin 2\pi n\gamma];$$

Упрощенная схема в соответствии с этой формулой имеет вид:

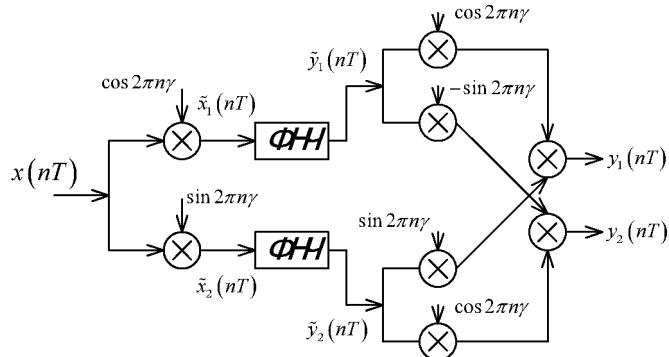


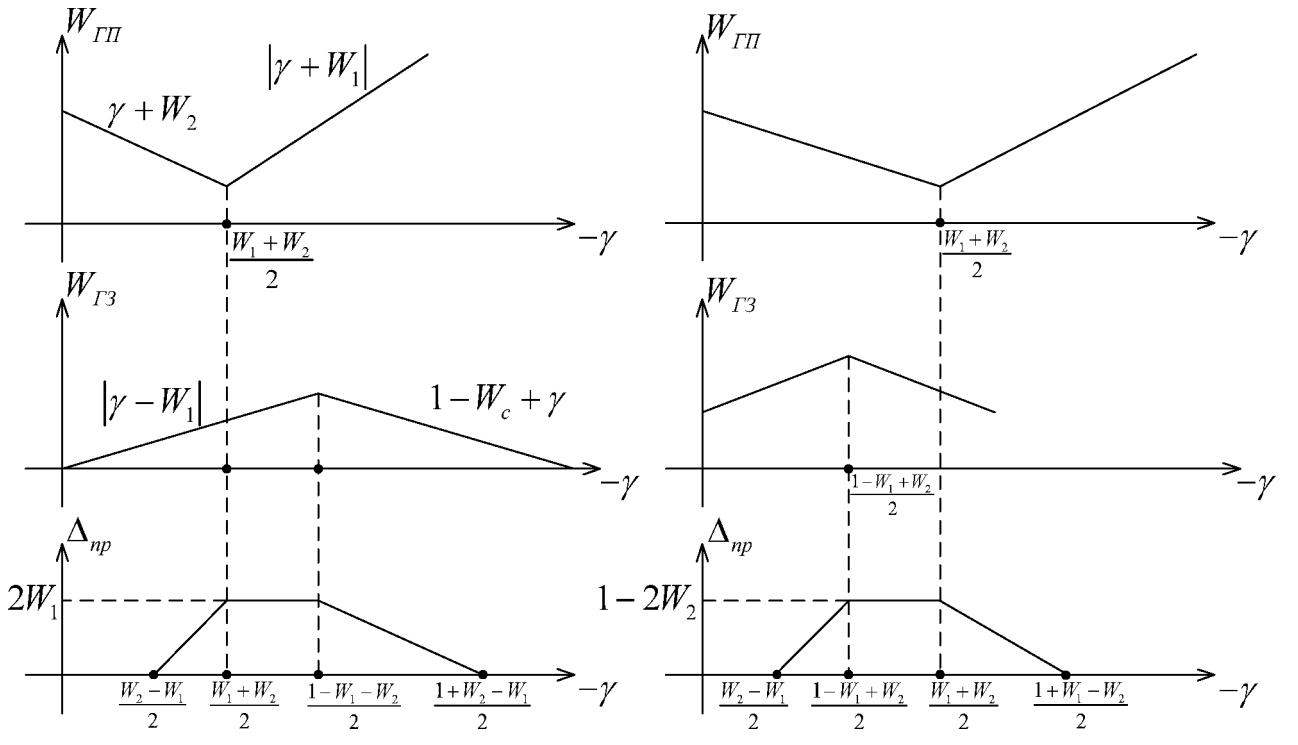
Рисунок 5.3 – Схема получения сигнала с одной боковой полосой

Задача в данном случае состоит в том, чтобы установить: на сколько нужно сдвинуть спектр, чтобы получить наиболее простой фильтр. Для получения такого фильтра необходимо исследовать зависимость полосы переходной зоны от величины смещения γ :

$$W_{II} \geq \max[(\gamma + W_1), \gamma + W_2];$$

$$W_{I3} \leq \min[|\gamma - W_1|, 1 - W_2 + \gamma];$$

Эти зависимости определяют ширину переходной зоны фильтров:



при $W_1 + W_2 < 0.5$

при $W_1 + W_2 > 0.5$

Рисунок 5.3 – Зависимость полосы переходной зоны от величины смещения

При $W_1 + W_2 = 0.5$: $\Delta_{np} = 2W_1 = 1 - 2W_2$, $\gamma = 0.25$ (промежуточная полоса).

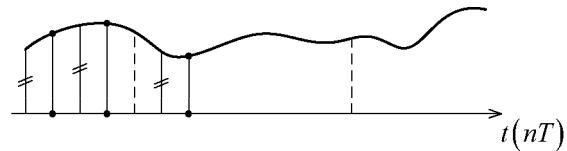
6 Преобразование частоты дискретизации

Необходимость преобразования частоты дискретизации вызвана тем, что в общем случае цифровые системы работают на разных частотах дискретизации.

Процесс повышения частоты дискретизации называется интерполяцией, снижения – децимацией.

Процесс повышения частоты дискретизации (интерполяция)

С точки зрения математики этот процесс определен однозначно:



С точки зрения цифровой обработки процесс расширяется и возможны варианты интерполяции:

— Новые отсчеты не обязательно повторяют старые, т.е. новые отсчеты не совпадают со старыми, но повторяют огибающую аналогового сигнала, при этом спектр сигнала не изменяется.

— Отсчеты могут не совпадать, при этом огибающая теряет свою форму, но модуль частотного спектра остается прежним. Используется в системах, где фазовые соотношения не имеют значения (например: звук).



Рисунок 6.1 – Пример использования видов интерполяции с учетом идеализированной схемы

Идеальный интерполятор вводит новый интервал: $T = \frac{T'}{L}$ (L – целое число).

$H_\phi(e^{j2\pi W})$ – цифровая линейная система: $H_\phi(e^{j2\pi W}) = e^{-jR(W)2\pi W}$, фазовая характеристика может быть разной, фильтр является всепропускающим, т.е.: $|H_\phi(e^{\cdot\cdot\cdot})| = 1$, следовательно возможны 3 варианта дискретизации:

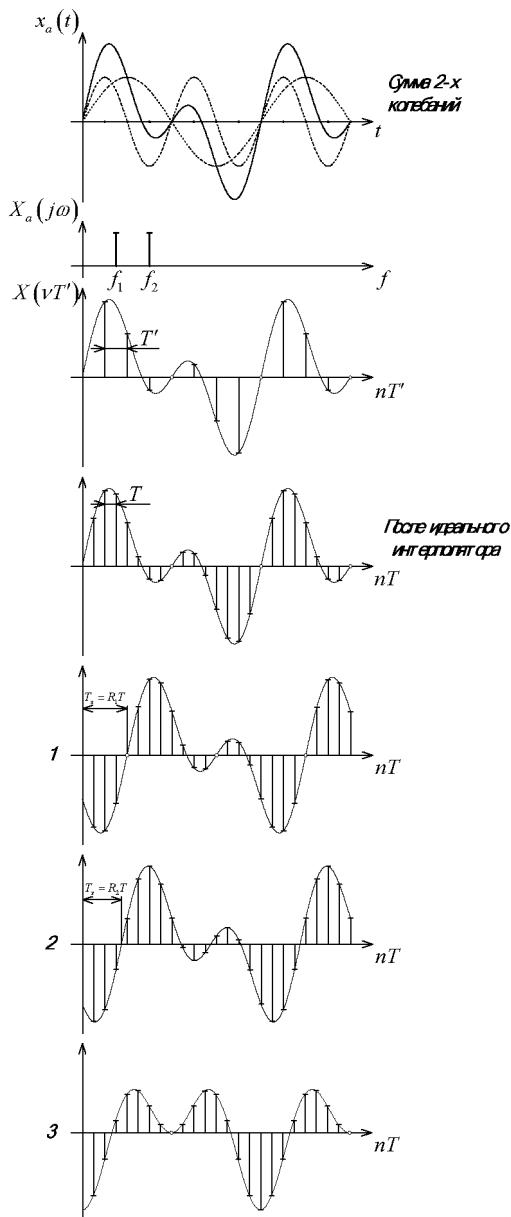


Рисунок 6.2 – Варианты интерполяции

После цифровой системы возможны 3 варианта:

1. $R(W) = \text{const}$. Допустим, $R_1 = 4$, следовательно все фазовые соотношения сдвигаются на 4 единицы вправо. Интерполяция соответствует определению.
2. $R(W) = \text{const}$, $R = 3.5$.
3. $R_3(W_1) = 4$, $R_3(W_2) = 2$ – разная задержка на разных частотах.

Нелинейная фазовая характеристика

В этом случае форма сигнала искажается. В результате суммирования форма сигнала искажается и отсчеты выходного сигнала не являются отсчетами исходного сигнала, но суммарный сигнал так и остается суммой двух синусоид, т.е. модуль спектра, амплитудно-частотный спектр состоит из двух гармоник.

Т.е. идеальный интерполятор и цифровая система выполняют интерполяцию по 3-му методу: фазы изменяются, но модуль спектра остается постоянным.

Указанные методы представлены во временной области.

В частотной области получим:

- 1) Процесс интерполяции сводится к подавлению лишних составляющих.
- 2) В зависимости от фазовой характеристики получается 3 варианта интерполяции.

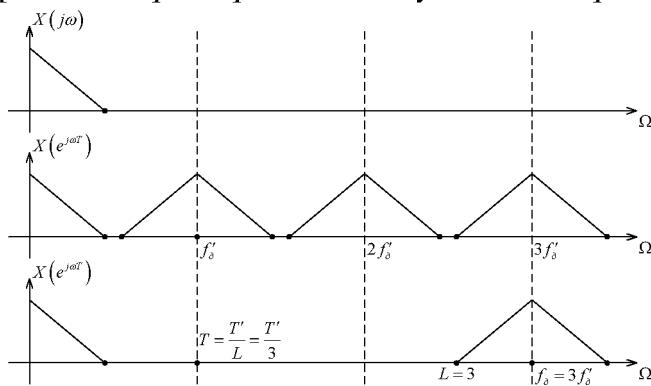


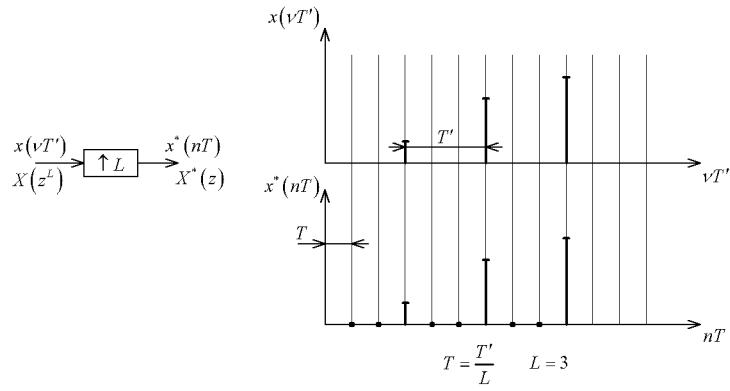
Рисунок 6.3 – Варианты интерполяции в зависимости от фазовой характеристики

С точки зрения интерполяции мы должны увеличить частоту в L раз, добавляя новые отсчеты. Устройство, добавляющее новые отсчеты называется экспандером частоты дискретизации.

Экспандер частоты дискретизации работает по следующему алгоритму:

$$x^*(nT) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{L}T'\right), & \text{при } n = 0, L, 2L, \dots; \\ 0, & \text{при других } n; \end{cases}$$

Т.е. экспандер частоты дискретизации повторяет отсчеты в моменты совпадения с коэффициентом интерполяции, в другие моменты отсчеты равны нулю.



Z–преобразование в этом случае будет выглядеть следующим образом:

$$X(z') = \sum_{v=0}^{\infty} x(nT') (z^1)^{-v}, \quad z' = e^{j\omega T'};$$

$$X^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x^*(nT) \cdot z^{-n}, \quad z = e^{j\omega T}, \quad T' = TL, \quad z' = z^L;$$

Z–преобразование выходного сигнала имеет вид:

$$X^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x^*(kLT) \cdot z^{-kL}, \quad LT = T', \quad z' = z^L, \quad z^{-kL} = (z')^{-k};$$

$$X^*(z) = X(z');$$

Экспандер частоты дискретизации не изменяет Z–преобразование сигнала, т.к.: $z' = e^{j\omega T'} = e^{j\omega LT}$, получим частотный спектр сигнала на выходе экспандера:

$$X^*(e^{j\omega T'}) = X(e^{j\omega LT}), \quad X^*(e^{j2\pi W}) = X(j2\pi LW);$$

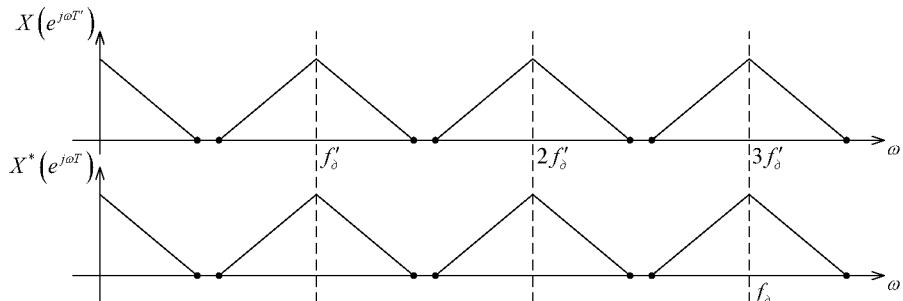


Рисунок 6.4 – Частотный спектр на выходе экспандера

Простейшая система интерполяции

Простейшая система интерполяции содержит экспандер и фильтр:

$$\begin{array}{c} x(vT') \\ X(z^L) \end{array} \xrightarrow{\uparrow L} \begin{array}{c} x^*(nT) \\ X^*(z) \end{array} \xrightarrow{H(z)} \begin{array}{c} y(nT) \\ Y(z) \end{array}$$

$$X^*(e^{j2\pi W}) = X(e^{j2\pi LW}) = \frac{1}{T'} \sum x\left(j\omega + jk\frac{1}{L}\right);$$

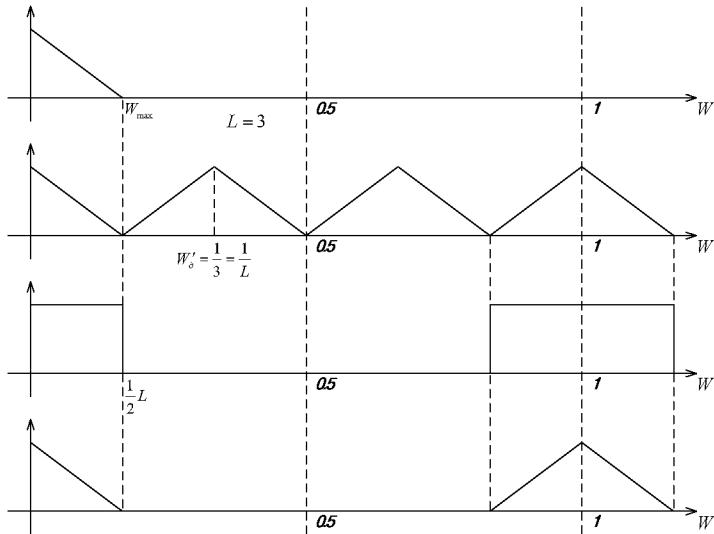


Рисунок 6.5 – Принцип простейшей системы интерполяции

Коэффициент передачи фильтра должен удовлетворять следующему условию:

$$|H(e^{j2\pi W})| = \begin{cases} L, & \text{при } W \in \left[0, \frac{1}{2L}\right] \\ 0, & \text{при } W \in \left[\frac{1}{2L}, 0.5\right] \end{cases}$$

Это условие требуется для выделения части спектра на более высокой частоте дискретизации f_δ .

Выводы:

1. Спектр входного сигнала должен соответствовать спектру входного сигнала, но только с новой частотой дискретизации. Изменения в спектре обуславливаются только влиянием частотной характеристики фильтра.

2. Форма спектра выходного сигнала существенно зависит от типа используемого фильтра и его ФЧХ, в качестве фильтра можно использовать как КИХ, так и БИХ фильтры. Для КИХ фильтра возможно два случая симметрии:

— симметрия импульсной характеристики с нечетным числом отсчетов (число коэффициентов нечетное),

— КИХ фильтр при четном числе отсчетов (четное значение коэффициентов)

При этом, если КИХ фильтр (число коэффициентов нечетное), то фазовый множитель фильтра определяется: $R = \frac{N-1}{2}$, т.е. получается целое число, что соответствует первому типу интерполяции (математическому типу).

КИХ фильтр при четном числе отсчетов: $R = \frac{N-1}{2}$ – нецелое число. Получим

второй тип интерполяции (старые отсчеты потеряны, новые соответствуют дискретизации с повышенной частотой). Но это справедливо для линейной фазовой характеристики.

Для нелинейной фазовой характеристики: модуль спектра сигнала сохраняется, но фазовые соотношения становятся нелинейными (меняется форма сигнала).

БИХ фильтр имеет нелинейную фазовую характеристику, следовательно, его использование приводит к интерполяции третьего типа.

Структуры схем интерполяции с использованием КИХ фильтров

Особенность: фильтр работает на повышенной частоте дискретизации f_δ , но с “пониженней скоростью”. Т.к. после экспандера добавляются нулевые отсчеты между значащими отсчетами, то нет смысла производить умножение на нулевые отсчеты, поэтому операция умножения проводится быстро, но редко, через старый интервал дискретизации.

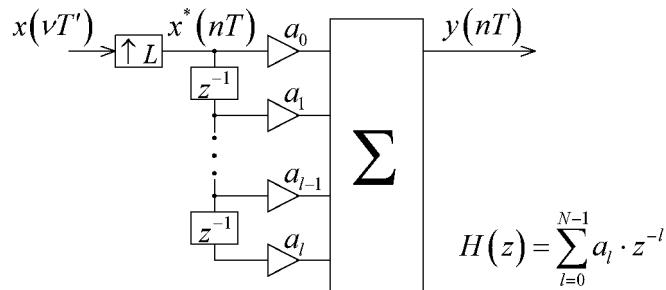
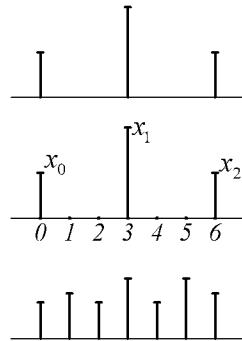


Рисунок 6.6 – Структура схемы интерполяции с использованием КИХ фильтра

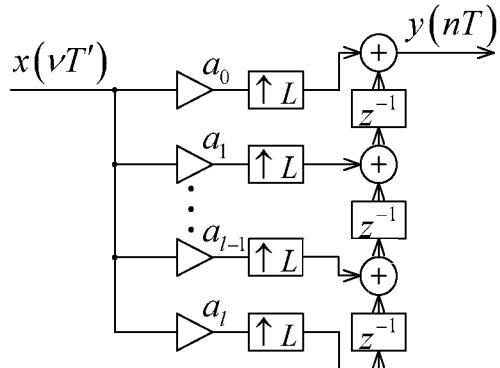
Таблица 6.1 - Интерполяция с использованием КИХ фильтра

Такт выходного сигнала										Число операций
	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	
0	x_0									
1	0	x_0								
2	0	0	x_0							
3	x_0	0	0	x_0						
.....	
$n(9)$	x_v	0	0	x_{v-1}	0	0	x_{v-2}	0	0	3
$n+1(10)$	0	x_v	0	0	x_{v-1}	0	0	x_{v-2}	0	3
$n+2(11)$	0	0	x_v	0	0	x_{v-1}	0	0	x_{v-2}	3
$n+3(12)$	x_{v+1}	0	0	x_v	0	0	x_{v-1}	0	0	3

На каждом выходном такте, при вычислении $y(nT)$ используется только 3 коэффициента $a_l[N]$. На n -ом такте используются коэффициенты: $\{a_0, a_3, a_6\}$. На $n+1$ -ом такте: $\{a_1, a_4, a_7\}$, а на $n+2$ -ом такте: $\{a_2, a_5, a_8\}$. Далее идет повторение: $\{a_0, a_3, a_6\}$.



Вторая, более эффективная структура, выглядит следующим образом:



Особенность схемы состоит в том, что перемножители работают на низкой частоте, а сумматоры и линии задержки работают на высокой частоте.

Рисунок 6.7 – Эффективная структура интерполяции

Существует третий тип схемы. В этой схеме происходит распараллеливание процессов обработки. За счет этого перемножители и сумматоры работают на низкой частоте и в результате получается высокочастотный сигнал.

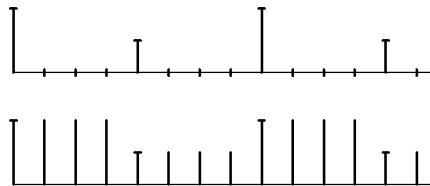
6.1 Интерполяция

Интерполяция полиномами

а) Интерполяция нулевым полиномом (нулевого порядка).

В этом случае при вычислении очередного отсчета выходной последовательности $y(nT)$ с малым периодом дискретизации T_o используется только один отсчет входного интерполируемого сигнала $x(vT')$.

При увеличении частоты дискретизации в l раз отсчеты сигнала $x(vT')$ повторяются l раз в точках $n = v \cdot L, v \cdot L + 1, v \cdot L + 2, \dots, v \cdot L + L - 1$. Т.е.:



В этом случае стоит выбирать фильтр следующим образом:

Во-первых, длина импульсной характеристики фильтра равна коэффициенту интерполяции L , т.к.: $y(nT) = \sum_{l=0}^{L-1} a_l \cdot x^*(nT - lT)$. Во-вторых, т.к. этот сигнал имеет один отсчет не равный нулю, то:

$$x^*(nT' - lT) \neq 0, \text{ при } l = \langle n \rangle_L;$$

$$x^*(nT' - lT) = x^*(vT'), \quad v = \left[\frac{n}{L} \right];$$

$$y(nT) = \sum_{l=0}^{L-1} a_l x^*(nT - lT) = a_l x(vT');$$

$$v = \left[\frac{n}{L} \right], \quad n = \langle n \rangle_L, \quad a_l = 1;$$

$$H(z) = \sum_{l=0}^{L-1} z^{-l} - \text{однородный фильтр.}$$

Передаточная функция: $A(w) = |H(e^{j2\pi w})| = \left| \frac{\sin \pi LW}{\sin \pi w} \right|$. Т.о. однородный фильтр

обеспечивает достаточное подавление только в области частот: $W = r \frac{1}{L}, \quad r = 1, 2, \dots$

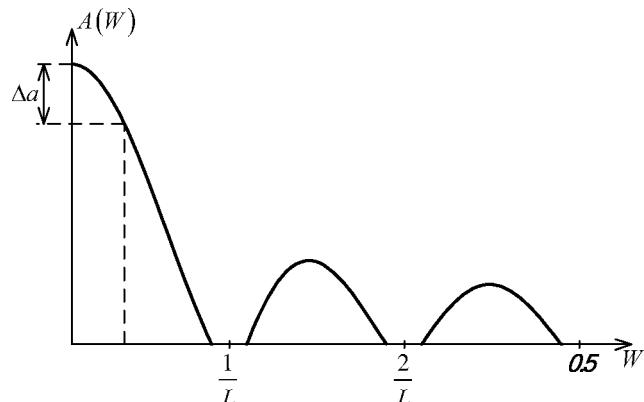


Рисунок 6.8 – АЧХ однородного фильтра для интерполяции

Кроме того, однородный фильтр имеет достаточно большую неравномерность в полосе пропускания, значит такой интерполятор можно использовать для сигналов, полоса которых $\ll \frac{1}{L}$.

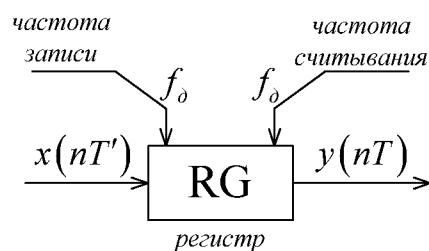


Рисунок 6.9 – Реализация интерполятора нулевого порядка

б) Линейная интерполяция. Интерполяция 1-го порядка (линейный интерполятор).

В этом случае необходимо использовать 2 отсчета входного сигнала, а интерполяционные отсчеты лежат на прямой, соединяющей амплитуды двух известных отсчетов.

$$y(nT) = \frac{k+1}{L}x(\nu T') + \frac{L-k-1}{L}x((\nu-1)T'), \quad \nu = 0, 1, \dots, k; \\ k = \langle n \rangle_L, \quad n = \nu L - 1 = (\nu-1)L + (L-1);$$

$k = \langle n \rangle_L = L-1$, $y(nT) = x(\nu T')$ – выходные отсчеты равны исходным отсчетам на концах интервала.

В этом случае передаточная функция должна содержать:

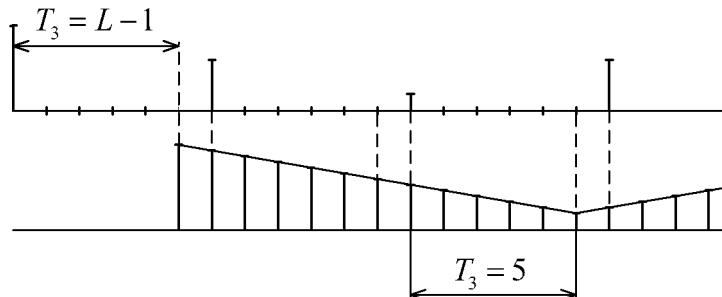
$H(z) \rightarrow N = 2L-1$ – коэффициент, т.е. порядок фильтра увеличивается и выходной сигнал можно записать как:

$$y(nT) = \sum_{l=0}^{2L-2} a_l x^*(nT - lT); \\ a_l = \begin{cases} \frac{l+1}{L}, & l = 0, 1, \dots, L-1 \\ \frac{2L-1-l}{L}, & l = L, L+1, \dots, 2L-2 \end{cases} = \frac{1}{L} \begin{cases} l+1; \\ 2L-1-l; \end{cases} \\ H(z) = \sum_{l=0}^{2L-2} a_l z^{-l}, \quad H(z) = \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{2L-2} a_l z^{-l};$$

Фильтр, у которого коэффициенты импульсной характеристики или значения коэффициентов фильтра сначала увеличиваются, затем уменьшаются и его размерность составляет $2L-2$ называется треангулярным.

В этом случае выходной сигнал записывается:

$$y(nT) = \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{2L-2} a_l x(nT - lT) = \frac{1}{L} [a_{k+1} x(\nu T') + a_{l+k-1} x((\nu-1)T')]; \\ A(W) = \frac{1}{L} \left(\frac{\sin \pi LW}{\sin \pi W} \right)^2;$$



При $L = 6$: $N = 2L-1 = 11$

$$a_i = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1]$$

$$W = r \cdot \frac{1}{L}, \quad r = 1, 2, \dots;$$

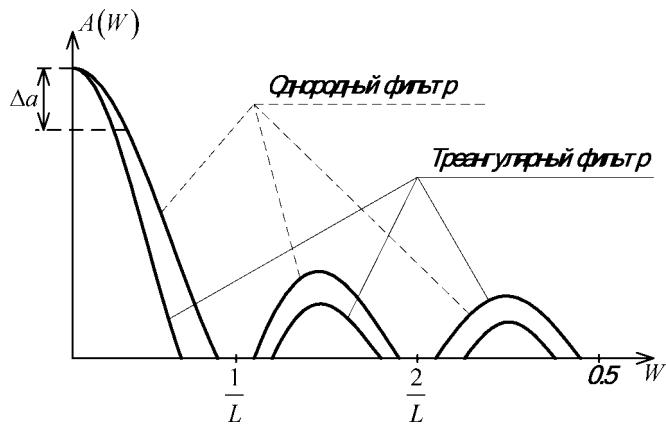


Рисунок 6.10 – Сравнение АЧХ однородного и триангулярного фильтров

Использование полиномов более высоких степеней для интерполяции становится нецелесообразным всвязи с тем, что задержка появления сигнала увеличивается и для интерполяции требуется 3 и более отсчетов, в этом случае фильтр становится достаточно сложным, что затрудняет его реализацию.

Этих же результатов можно достичь при использовании КИХ фильтра, реализованного по минимаксному методу (Чебышевский фильтр).

Перенос спектра при интерполяции

Существует 2 метода переноса спектра:

1. Перенос с использованием полосового фильтра.

При увеличении частоты дискретизации в l раз, перенос может быть осуществлен в l раз, при $l = 0, 1, 2, 3, \dots, L - 1$.

При этом спектр перемещается в частотный диапазон:

$$\beta = l \left(\frac{1}{2L} \right), \quad l = 1, 2, 3, \dots, L - 1; \\ \left[l \frac{1}{2L}; (l+1) \frac{1}{2L} \right];$$

Используется полосовой фильтр, частотная характеристика которого имеет вид:

$$|H(e^{j2\pi W})| = \begin{cases} L, & \text{при } W \in \left[\frac{l}{2L} + W_1, \frac{l}{2L} + W_2 \right]; \\ 0, & \text{при } W \notin \left[\frac{l}{2L} + W_1, \frac{l}{2L} + W_2 \right]; \end{cases} \quad l = 2, 4, \dots, 2 \cdot \text{int} \left[\frac{L-1}{2} \right];$$

$$|H(e^{j2\pi W})| = \begin{cases} L, & \text{при } W \in \left[\frac{l+1}{2L} + W_1, \frac{l+1}{2L} + W_2 \right]; \\ 0, & \text{при } W \notin \left[\frac{l-1}{2L} + W_1, \frac{l+1}{2L} + W_2 \right]; \end{cases} \quad l = 1, 3, 5, \dots, 2 \cdot \left\{ \text{int} \left[\frac{L-1}{2} \right] + 1 \right\};$$

где: int – наибольшее целое число.

Пример:

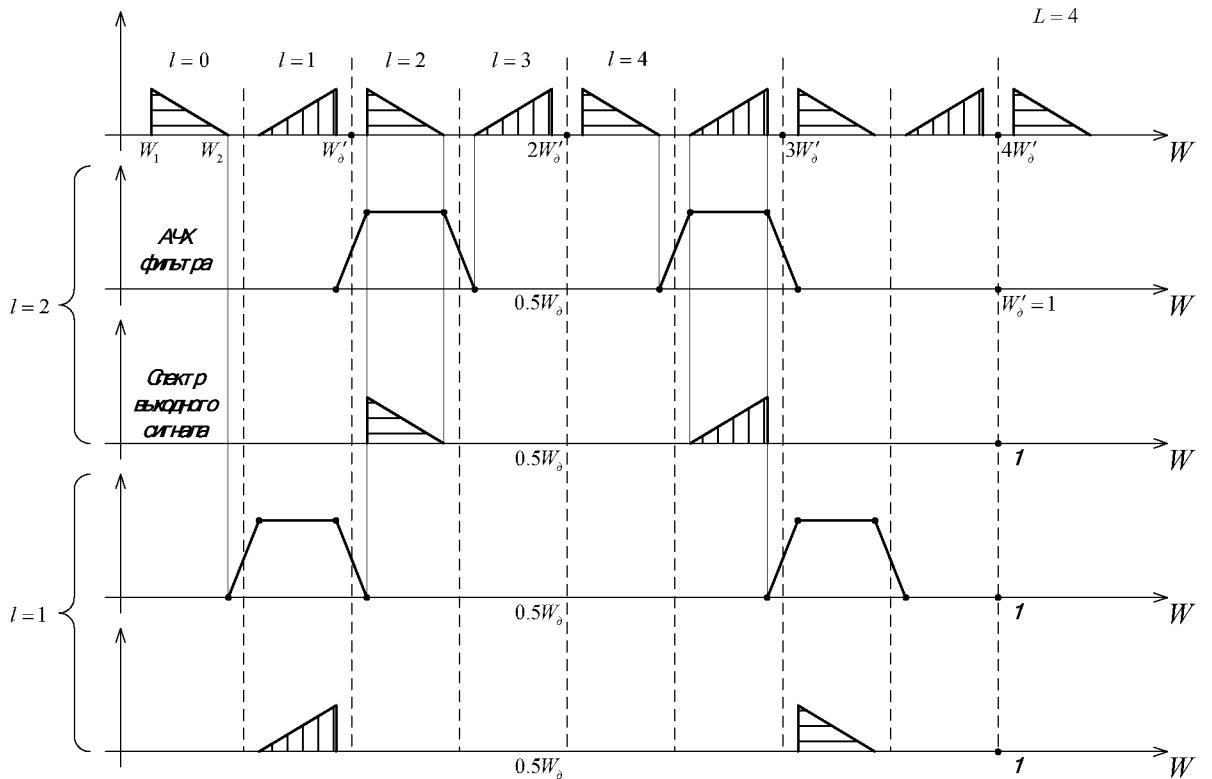


Рисунок 6.11 – Перенос спектра при интерполяции

В связи с тем, что цифровой сигнал имеет спектр периодической структуры, тем самым, при повышении частоты дискретизации f_d мы можем выделить любую из областей. Необходимо правильно выбрать полосу фильтра. При выделении четных полос, спектр выходного сигнала является прямым, при выделении нечетных полос, выходной спектр – инверсный. При получении исходного сигнала, для прямого спектра, необходимо:

- 1) сначала инвертировать исходный сигнал,
- 2) перенос спектра осуществляется только в определенную область, ограниченную полосой и сдвигом, т.о. требование к частоте сдвига β ужесточается.

2. Метод переноса спектра с одновременной интерполяцией.

При использовании ФНЧ метод лишен вышеупомянутых недостатков, но алгоритм сложнее, чем при использовании полосового фильтра.

:

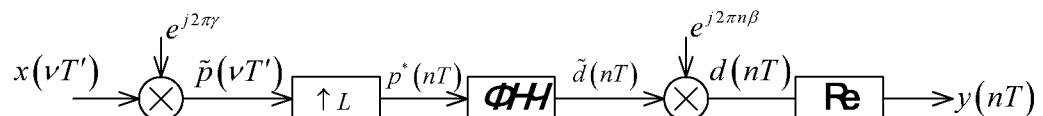


Рисунок 6.12 – Алгоритм метода переноса спектра с одновременной интерполяцией

Тогда, алгоритм схемы:

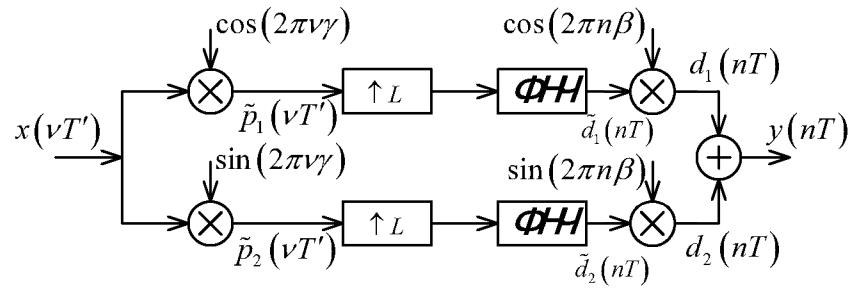


Рисунок 6.13 – Схема реализации метода переноса спектра с одновременной интерполяцией

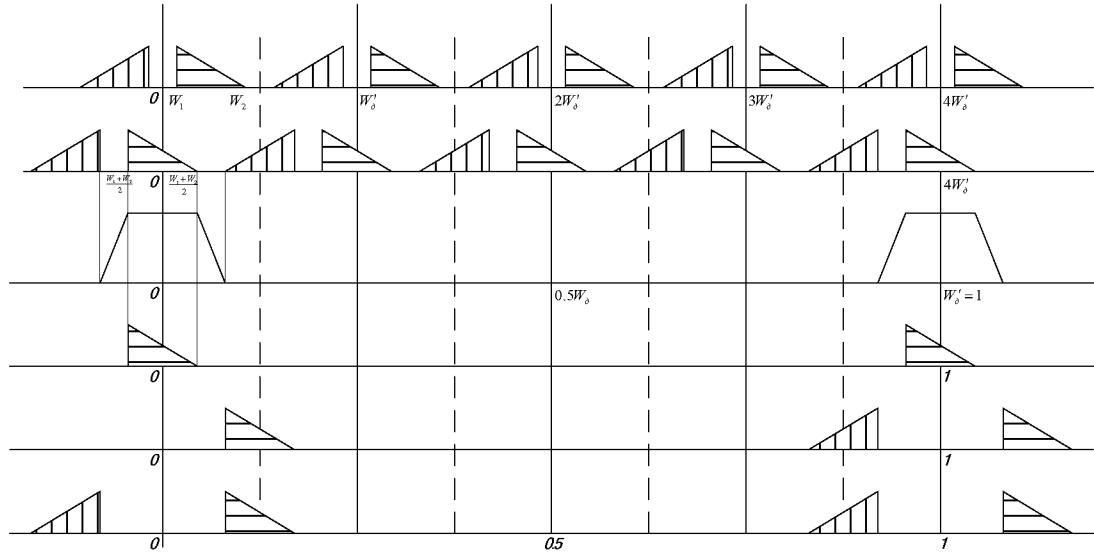


Рисунок 6.14 – Пример интерполяции при $L = 4$

Достоинством схемы является отсутствие ограничений на выбор величины сдвига β .

6.2 Системы с децимацией

Пусть аналоговый сигнал подвергается дискретизации:

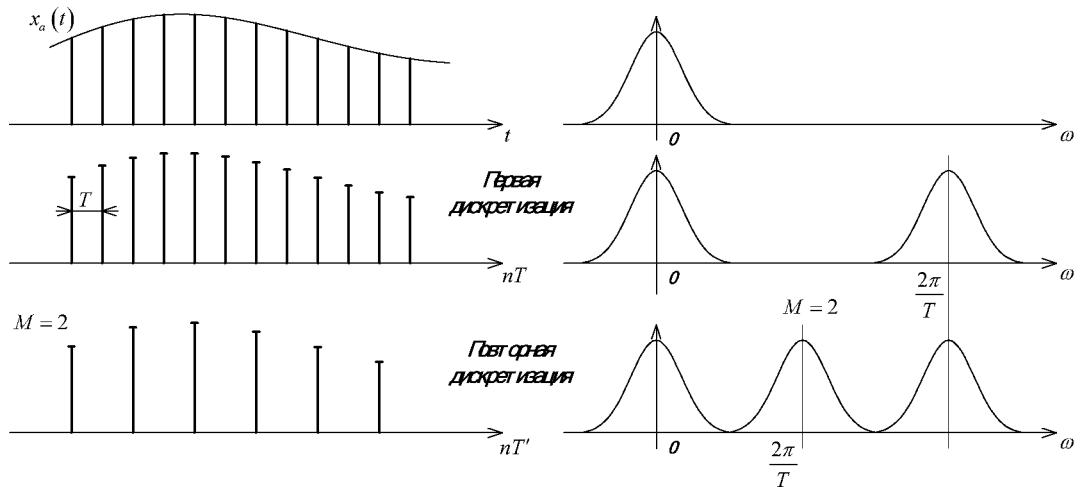


Рисунок 6.15 – Дискретизация аналогового сигнала

Варианты:

1. Первая дискретизация была выбрана из условия:

$$\omega_d > 2M_{\omega'_d}$$

где: M – целочисленный коэффициент.

В этом случае повторная дискретизация не вызывает наложение спектра.

2. Первая дискретизация удовлетворяет условию Котельникова, но повторная дискретизация приводит к тому, что спектры начинают перекрываться.

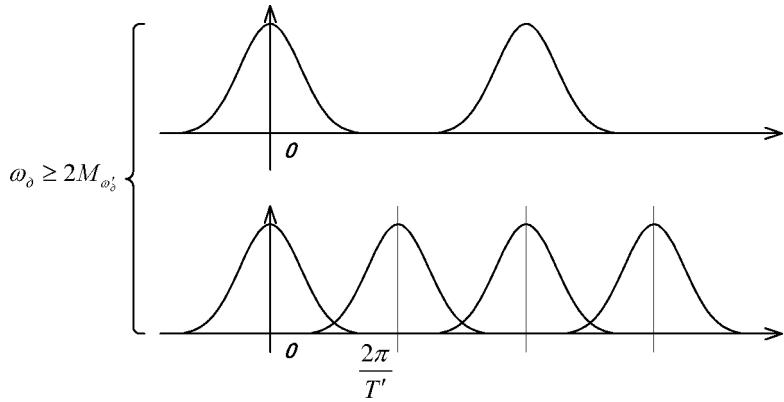
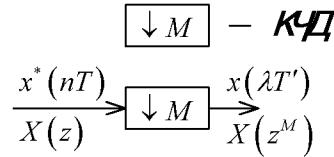


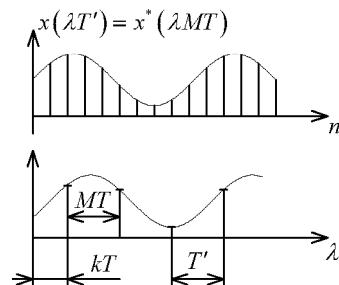
Рисунок 6.16 – Эффект перекрытия спектров

Децимация – прореживание по времени выборок исходного сигнала.

Операция прореживания по времени называется компрессией. Устройство, реализующее эту функцию – *компрессором частоты дискретизации*.



Ключ включается на время: $t = nMT = \lambda T'$, $n = 0, 1, 2, \dots$



где: k – сдвиг прореженной последовательности.

Для сдвинутой последовательности:

$$x_k(\lambda T' + kT) \Rightarrow X_k(z^M) = z^{-k} \sum_{\lambda=0}^{\infty} x(\lambda T' + kT) z^{-\lambda M} \text{ – выходной сигнал;}$$

$$x^*(nT) \Rightarrow X^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x^*(nT) z^{-n} \text{ – входной сигнал;}$$

В результате связь между ними будет иметь вид:

$$X_k(z^M) = \frac{1}{M} \sum_{\chi=0}^{M-1} e^{j2\pi \frac{\chi}{M} k} X\left(e^{j2\pi\left(W + \frac{\chi}{M}\right)}\right), \quad W' = \frac{W}{M};$$

где: M – целочисленный коэффициент децимации, χ – количество полос децимации.

Если перейти к спектру и избавиться от сдвига, т.е. принять $k = 0$, получим:

$$X_k(z^M) = \frac{1}{M} \sum_{\chi=0}^{M-1} X^*\left(z \cdot e^{j2\pi \frac{\chi}{M}}\right);$$

$$X\left(e^{j2\pi W'}\right) = \frac{1}{M} \sum_{\chi=0}^{M-1} X^*\left(e^{j2\pi\left(W + \frac{\chi}{M}\right)}\right);$$

Спектр сигнала на выходе КЧД есть сумма спектров входного сигнала, причем спектры сдвинуты один относительно другого на величину $\frac{1}{M}$.

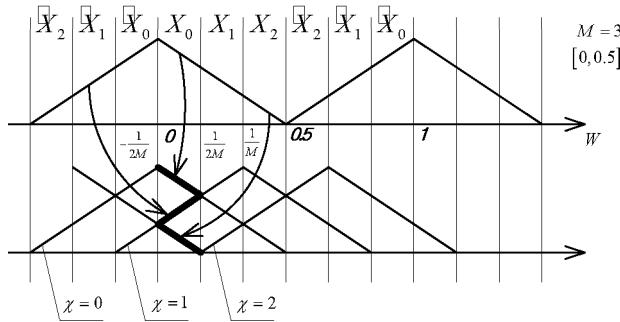


Рисунок 6.17 – Спектр сигнала на выходе КЧД

Для $M = 3$ полоса децимирования: $\left[0, \frac{1}{2M}\right]$.

Если есть сигнал с полосой $[0, 0.5]$ и требуется понизить f_o , в результате децимации попадает суммарный спектр составляющих исходного сигнала со сдвигом $\frac{1}{M}$. Справа попадают четные (X_0 и X_2 – прямой спектр), слева нечетные (X_1 – инверсный спектр). Следовательно, для того чтобы этого не происходило, необходимо ввести ограничения на полосу децимируемого сигнала и на его положение на частотной оси.

Выбор условия осуществляется:

$$r \cdot \frac{1}{2M} \leq W \leq (r+1) \cdot \frac{1}{2M}, \quad r = 0, 1, \dots, M-1;$$

Это условие является ограничением на полосу децимирования (на f_o). Также это условие является обобщенной теоремой Котельникова.

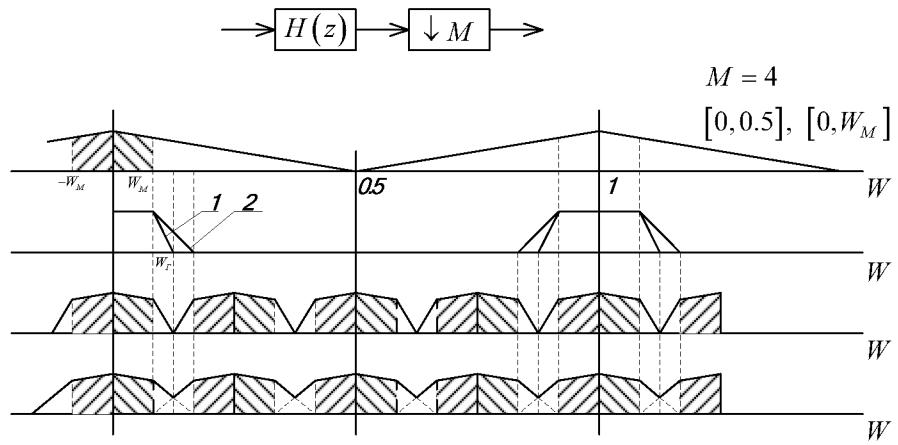


Рисунок 6.18 – Простейшая схема децимации

Для исключения наложения требуется ограничиться в полосе:

$$\left[\frac{r}{2M}, \frac{r+1}{2M} \right], r = 1, 2, \dots, M-1;$$

$$A(W) = |H(e^{j2\pi W})| = \begin{cases} 1, & W \in [0, W_M]; \\ 0, & W \in [W_M, 0.5]; \end{cases}$$

$$1. W_f = \frac{1}{2M};$$

$$2. W_f = \frac{1}{M} - W_M;$$

Особенности использования фильтров:

Могут быть использованы как БИХ, так и КИХ–фильтры. Для КИХ–фильтров: работают на низкой частоте децимации. Для БИХ–фильтров: должны использовать все входные выборки, независимо от того будут они учитываться или нет, следовательно, фильтр работает на высокой частоте.

С точки зрения экономии оперативной памяти предпочтительным является БИХ–фильтр, т.к. у него меньше операций умножения. Если необходимо сохранять фазовые соотношения, то нужно использовать КИХ–фильтр.

Структуры децимации схожи со структурами интерполяции. Итак, структура децимации имеет вид:

$$H(z) = \sum_{l=0}^{N-1} a_l z^{-l}, \quad y(\lambda T') = y^*(MT\lambda) = \sum_{l=0}^{N-1} a_l x(\lambda MT - lT);$$

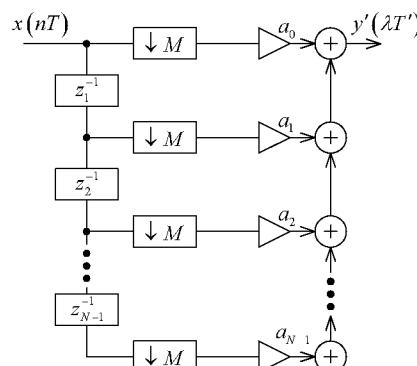


Рисунок 6.19 – Структуры децимации

Если коэффициент децимации равен коэффициенту интерполяции, то децимация однозначно соответствует интерполяции. В схемах децимации возможно использование однородного и треангулярного фильтров.

Для однородного фильтра передаточная характеристика имеет вид:

$$H(z) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} z^{-i}, \quad A(W) = |H(e^{j2\pi W})| = \frac{1}{N} \left| \frac{\sin(N\pi W)}{\sin \pi W} \right|;$$

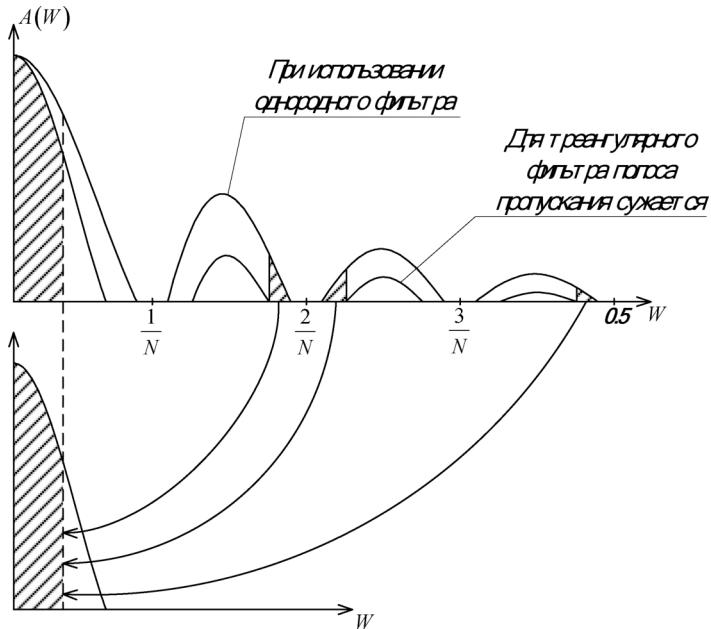


Рисунок 6.20 – Фильтрация при децимации

При использовании треангулярного фильтра, частотная характеристика имеет вид:

$$A(W) = \frac{1}{N^2} \left(\frac{\sin N\pi W}{\sin \pi W} \right)^2, \quad H(z) = \frac{1}{N^2} \left(\sum_{l=0}^{N-1} z^{-l} \right)^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{l=0}^{2N-1} a_l z^{-l};$$

$$a_l = \begin{cases} l+1, & l = 0, 1, \dots, N-1; \\ 2N-1-l, & l = N, N+1, \dots, 2N-2; \end{cases}$$

Порядок фильтра: $N = k \cdot M = [k=2, M=4] = 8$.

$$a_l = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1\};$$

Однородные и треангулярные фильтры можно использовать только при достаточно узкой полосе децимации.

Перенос спектра при децимации

Как и при интерполяции, перенос спектра можно выполнить с использованием полосовых (ПФ) и низкочастотных фильтров (НЧФ).

1. С использованием полосовых фильтров.

$$X_l(e^{j2\pi W}), \quad l = 0, 1, 2, \dots, M-1;$$

$$X\left(e^{j2\pi W}\right) = \sum_{l=0}^{M-1} X_l\left(e^{j2\pi W}\right) = \sum_{l=0}^{M-1} \left(X_l\left(e^{j2\pi W}\right) + \bar{X}_l\left(e^{j2\pi W}\right) \right);$$

$$X_l\left(e^{j2\pi W}\right) = \begin{cases} X\left(e^{j2\pi W}\right), & \text{npu } W \in [W_1^l, W_2^l]; \\ 0, & \text{npu } W \notin [W_1^l, W_2^l]; \end{cases}$$

$$A(W) = \begin{cases} 1, & W \in \left[\frac{l}{2M} + W_1, \frac{l}{2M} + W_2 \right]; \\ 0, & W \notin \left[\frac{l-1}{2M} + W_2, \frac{l+1}{2M} + W_1 \right]; \end{cases}$$

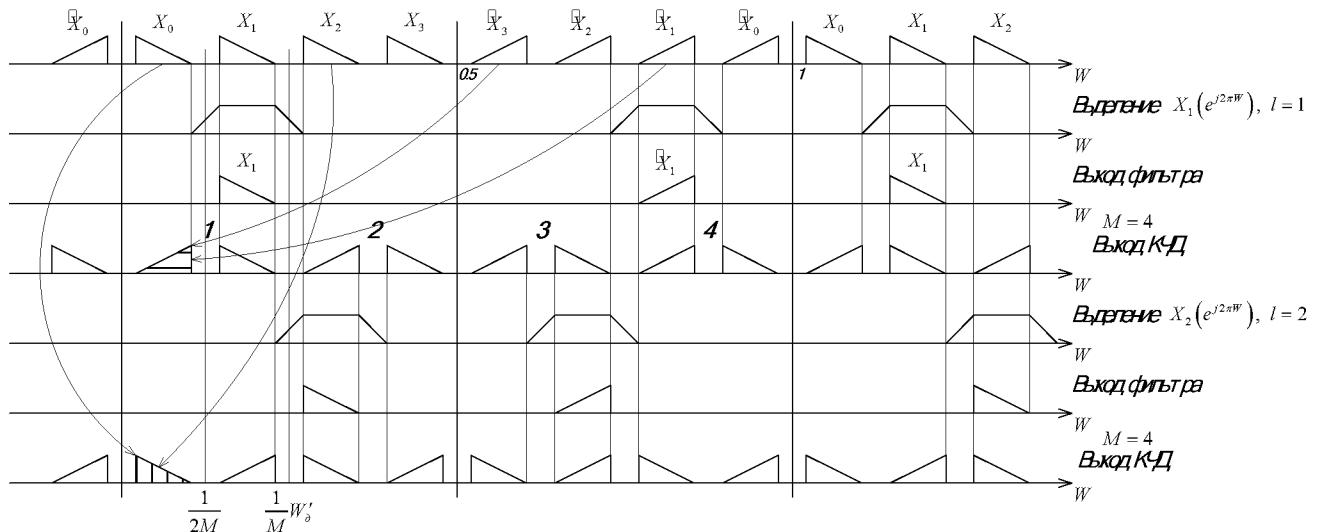


Рисунок 6.21 – Перенос спектра при децимации

Если исходный сигнал (исходный спектр) можно разделить на M составляющих, которые являются неотъемлемой частью исходного сигнала, то при выделении одной из компонент ПФ, удовлетворяющего условию пропуска только этой компоненты, ПФ выделяет компоненту, а компрессор понижает f_δ . При выделении ПФ нечетных компонент, попадают инверсные составляющие нечетных компонент. При выделении четных компонент, попадают четные составляющие прямого спектра.

Перенос спектра при децимации с использованием низкочастотных фильтров

Алгоритм схемы подобен алгоритму работы интерполятора соответствующей структуры:

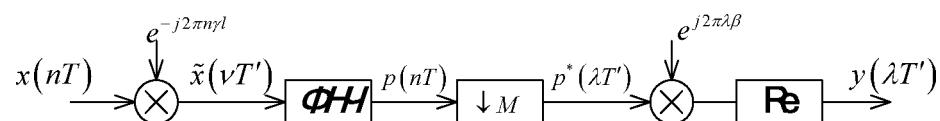


Рисунок 6.22 – Децимация с использованием низкочастотных фильтров

Эта схема позволяет проводить децимацию с одновременным переносом спектра в любую область частотной оси. Предполагается, что исходный частотный спектр содержит несколько компонент, с помощью схемы можно выбрать любую из них. Для примера это вторая компонента, поэтому $l = 2$. Добиваются, чтобы ноль был посередине компоненты. Фильтром ФНЧ выбирают компоненту, на высокой частоте происходит децимация и обратный сдвиг на любую частотную область f_ϕ .

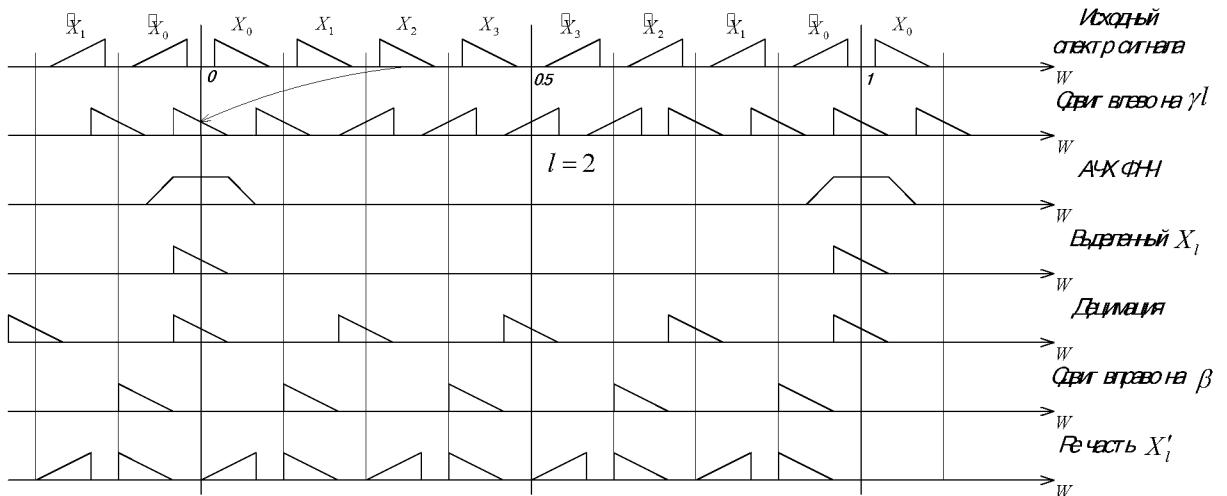
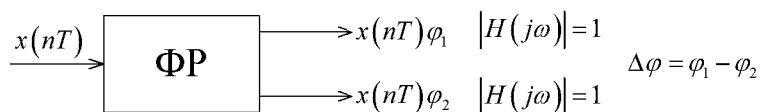


Рисунок 6.23 – Перенос спектра при децимации с использованием низкочастотных фильтров

7 Устройства цифровой обработки сигналов

7.1 Фазорасщепители

В общем случае фазорасщепитель – цифровой узел, имеющий 1 вход и 2 выхода.



Модуль передаточной функции по каждому сигналу $|H(j\omega)|=1$, при $\Delta\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$ такой фазорасщепитель является преобразователем Гильберта, т.к. по определению преобразователь Гильберта:

$$y(nT) = x(nT) + j \cdot x_1(nT);$$

Т.о. такие фазорасщепители могут быть построены как по рекурсивной, так и по трансверсальной форме.

Рассмотрим рекурсивный цифровой узел 1го порядка, у которого коэффициенты равны:

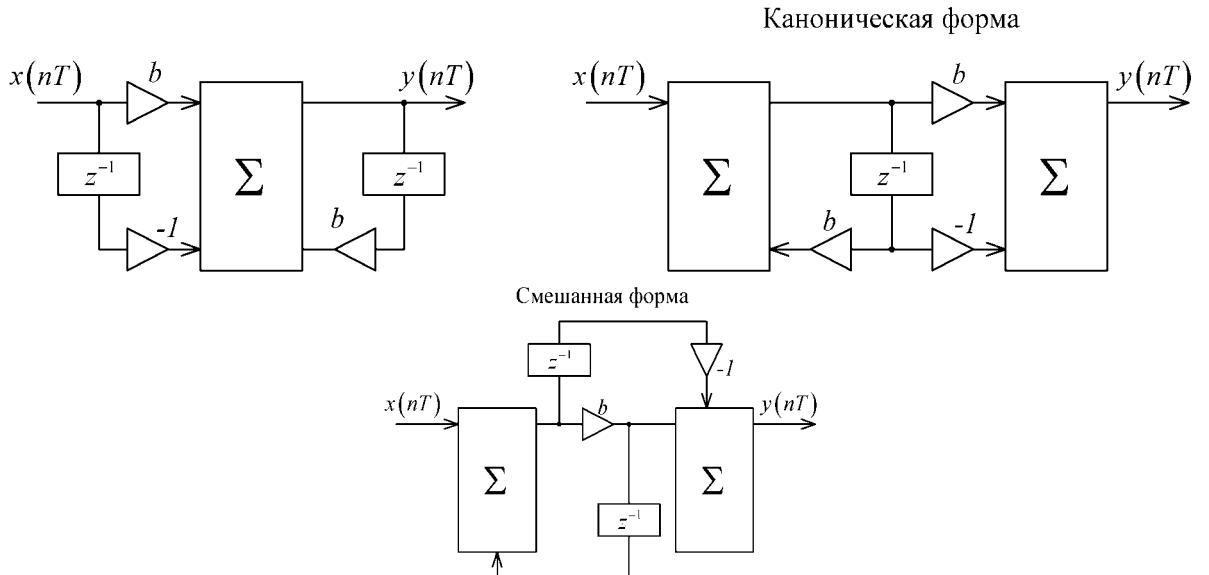


Рисунок 7.1 – Структуры фазорасщепителей

$$H(z) = \frac{b - z^{-1}}{1 - b \cdot z^{-1}}, \quad z^{-1} = e^{-j2\pi W} = \cos 2\pi W - j \cdot \sin 2\pi W;$$

$$H(e^{j2\pi W}) = \frac{b - \cos 2\pi W + j \cdot \sin 2\pi W}{1 - b \cdot \cos 2\pi W + j \cdot \sin 2\pi W} = A(W) \cdot e^{j\varphi(W)};$$

$$A(W) = \sqrt{\frac{1 - 2b \cdot \cos 2\pi W + b^2}{1 - 2b \cdot \cos 2\pi W + b^2}} = 1 \quad (*)$$

$$\varphi(W) = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin 2\pi W}{b - \cos 2\pi W} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin 2\pi W}{1 - \cos 2\pi W} \right) \quad (**)$$

Из анализа частотных характеристик видно, схема является всепропускающей, фазовый сдвиг зависит от частоты и от b , т.е. на основе схемы можно построить фазорасщепители.

1 Эллиптический фазорасщепитель

Каждый из представленных блоков имеет структуру узла, представленного выше. Расчет производится по методу известного преобразования, с использованием функций Якоби, получаются эллиптические интегралы 1го рода. В результате получается ряд коэффициентов b_i , причем эти коэффициенты включаются по-разному:

если $b_i = z_i$, $|z_i| < 1 \Rightarrow$ I ветвь;

если $b_i = \frac{1}{z_i}$, $|z_i| > 1 \Rightarrow$ II ветвь;

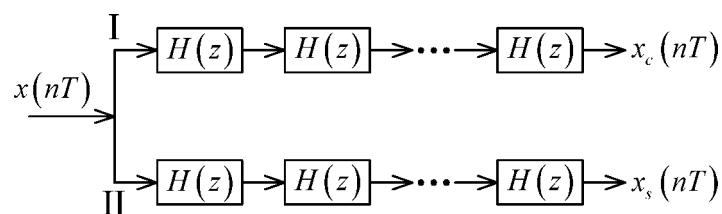


Рисунок 7.1 – Эллиптический фазорасщепитель

Фактически разность фаз определяется: $\Delta\varphi = \sum_{i=1}^N \varphi_{I_i} - \sum_{i=1}^N \varphi_{II_i}$;

где: φ_i – находится из (**).

Особенность схемы: $|H(j\omega)|=1$.

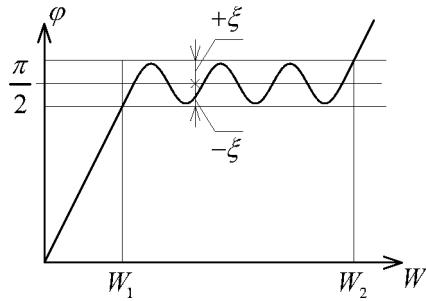


Рисунок 7.2 – Фазовая характеристика эллиптического фазорасщепителя

Т.е. рекурсивное звено может быть всепропускающим, но диапазон частот при котором $|H(j\omega)|=1$, ограничен. Также эллиптические интегралы дают колебания фазы.

2 Фазорасщепитель на основе трансверсальных фильтров

В общем случае преобразователь Гильберта должен иметь передаточную функцию следующего характера:

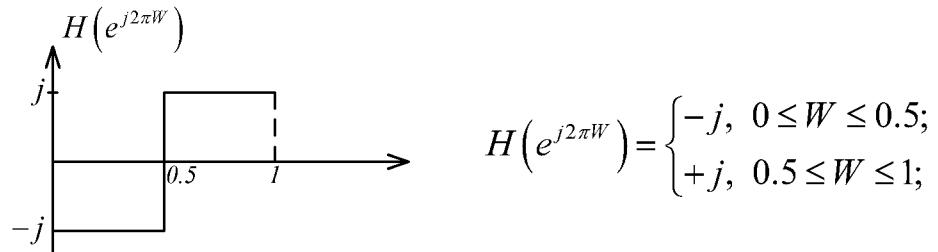


Рисунок 7.3 – Передаточная функция преобразователя Гильберта

Такую характеристику можно получить с помощью трансверсального фильтра с антисимметричными коэффициентами:

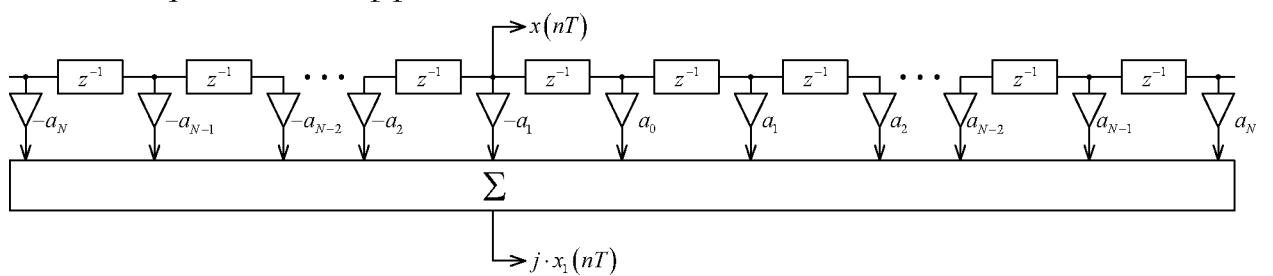


Рисунок 7.4 – Трансверсальный фильтр с антисимметричными коэффициентами

$$H(z) = -a_N - a_{N-1}z^{-1} - \dots - a_1z^{-N+1} + a_0z^N + a_1z^{-N-1} + \dots + a_Nz^{-2N};$$

$$\begin{aligned}
H(e^{j2\pi W}) &= \left[a_0 - a_1 (e^{j2\pi W} - e^{-j2\pi W}) - a_2 (e^{j2\pi 2W} - e^{-j2\pi 2W}) \dots \right] e^{jN2\pi W} \\
&= \left(a_0 - j \sum_{k=1}^N 2a_k \sin k2\pi W \right) e^{j2\pi WN};
\end{aligned}$$

Для полного соответствия требуется убрать коэффициент a_0 . Для этого:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} H(e^{j2\pi W}) &= 0 \Rightarrow a_0 = 0; \\
H(e^{j2\pi W}) &= \left(-j 2 \sum_k a_k \sin(k2\pi W) \right) e^{j2\pi WN};
\end{aligned}$$

Т.к. есть гармоническая функция (\sin), следовательно, идеальную характеристику реализовать нельзя (т.к. \sin начинается с 0), поэтому реализация коэффициента передачи равного 1 возможна только в некотором диапазоне частот.

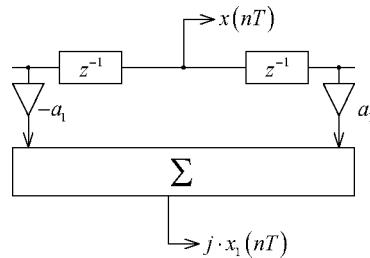


Рисунок 7.5 – Пример: при $2N = 2$ (получаем 2 звена)
АЧХ: $A(W) = |2a_1 \sin 2\pi W|$.

1ый коэффициент трансверсального фильтра: $a_1 = 0.5$, $A_{0.25} = 1$.

Ошибка: $\sigma = \frac{1}{A(W)} = \frac{1}{|2a \sin 2\pi W|}$. На нулевой частоте: $\sigma = \infty$.

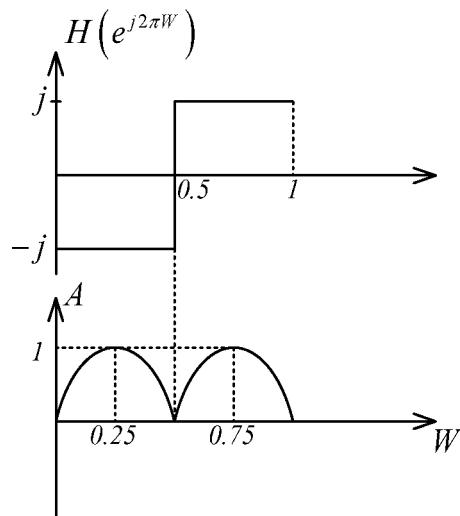


Рисунок 7.6 – АЧХ ПГ при при $2N = 2$

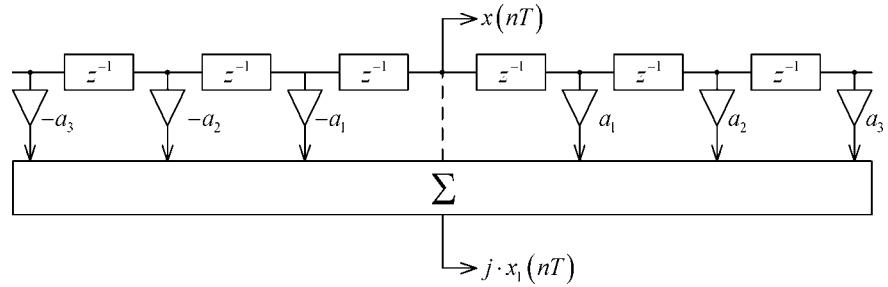


Рисунок 7.7 – Трансверсальный фильтр с антисимметричными коэффициентами для 6-ти звенного фильтра

При увеличении числа звеньев, мы увеличиваем число гармоник, определяющих требуемую характеристику. Четные коэффициенты могут быть приравнены к 0, т.к. при разложении существуют только нечетные гармоники.

Следовательно, АЧХ такого фильтра: $A(W) = |a_1 \sin 2\pi W + a_3 \sin 6\pi W|$.

$$\text{Ошибка: } \sigma = \frac{1}{A(W)} = \frac{1}{|a_1 \sin 2\pi W + a_3 \sin 6\pi W|}, \quad \sigma|_{W=0} = \infty.$$

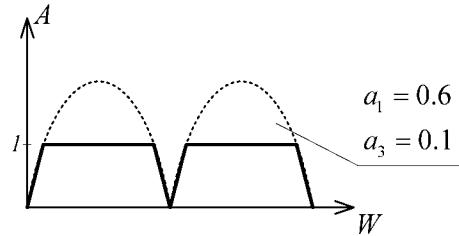


Рисунок 7.8 – АЧХ ПГ для 6-ти звенного фильтра

Диапазон частот расширяется, но он не является всепропускающим.

Для расчета обычно используются: метод СКО, метод взвешенных выборок и др.

7.2 Цифровой фильтр с подавлением импульсной помехи (медианные фильтры)

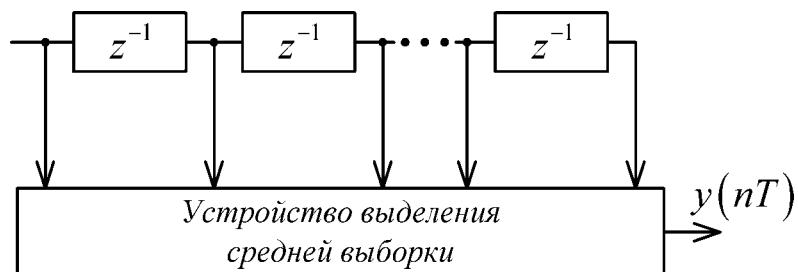


Рисунок 7.9 – Структура фильтра с подавлением импульсной помехи

Пусть есть N – звенная структура. С выхода каждого устройства выборки поступают на устройство выделения средней выборки.

Пример:

Пусть $N = 3$.

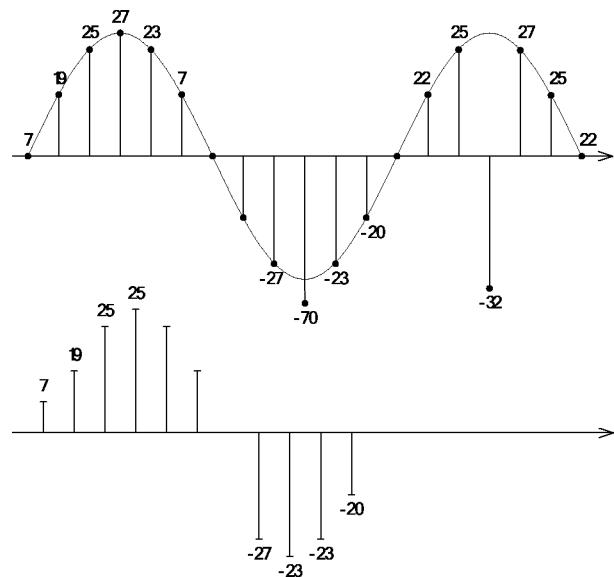


Рисунок 7.10 – Принцип работы фильтра с подавлением импульсной помехи

Заключение

Разработанное учебное пособие освещает основные методы цифровой обработки сигналов, используемые в большинстве радиотехнических систем. Рассматривается реализация основных и специальных алгоритмов обработки информации. При проведении занятий с магистрантами с использованием пособия рекомендуется использовать инновационные методы обучения: раздача персональных заданий студентам при выполнении лабораторных занятий с целью приобретения навыков самостоятельной работы, использование метода соревновательности и конкуренции среди студентов при проведении лабораторных занятий, имитирование возможных реальных ситуаций для определения действий студентов в реальной ситуации при возникновении отказов в ходе всех занятий по дисциплине, развитие элементов творческого и образного мышления у студентов при выполнении индивидуальных заданий на практических и лабораторных занятиях. В качестве технических средств и материального обеспечения учебного процесса необходимы компьютерный класс, используемый при проведении лабораторных занятий, компьютерные обучающие программы с необходимым набором элементов программного обеспечения для сигнальных процессоров, таблицы и плакаты со справочными материалами, отражающими содержание лекционного материала.

Список литературы

1. Солонина, А.И. Основы цифровой обработки сигналов: учеб.для вузов по специальности 201100 «Радиосвязь, радиовещание и телевидение» [Текст] – М,: БХВ, 2005. – 768с.
2. Сергиенко, А.Б. Цифровая обработка сигналов [Текст]: Учебное пособие для вузов по направлению подгот.дипломир.специалистов «Информатика и вычисл.техника». - М.: Питер, 2003. - 603 с.
3. Куприянов, М.С. Цифровая обработка сигналов: процессоры, алгоритмы, средства проектирования [Текст]: – 2е изд.перераб.и доп./ Куприянов М.С., Матюшкти Б.Д. – СПб.: Политехника, 2002, -592 с.
4. Гольденберг, Л.М. Цифровая обработка сигналов [Текст]: Учеб. пособие для ву-зов/ Л.М. Гольденберг, Б.Д. Матюшкин, М.Н. Поляк.-2-изд., перераб. и доп. - М.: Радио и связь, 1990.-256с. (20 экземпляров).