

Министерство образования Российской Федерации
Омский государственный технический университет

А. И. ОДИНЕЦ, А.И. ГРЕБЕННИКОВ, С. Г. МИРОНОВ

ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

Учебное пособие

Омск 2003

УДК 621.372.54 (075)
ББК 32.84я73

О-42

Рецензенты:

А. П. Науменко, канд. техн. наук

А. А. Кузнецов, канд., техн. наук, доцент

Одинец А. И., Гребенников А. И., Миронов С. Г.
Цифровая обработка сигналов: Учеб. Пособие.
- Омск: Изд-во ОмГТУ, 2003. – 64 с.

Изложены сведения, относящиеся к теории и расчету рекурсивных и нерекурсивных цифровых фильтров первого и второго порядков. Рассмотрены вопросы квадратурной обработки сигналов, приведены способы разложения сигналов на квадратурные составляющие. Рассмотрены основы цифрового спектрального анализа. Учебное пособие предназначено для студентов специальности 200700 «Радиотехника».

Редактор Н. Н. Пацула
ИД № 06039 от 12.10.2001

Подписано в печать 5.02.03. Формат 60х84 1/64.
Отпечатано на дупликаторе. Бумага офсетная.
Усл. Печ. Л. 4,0. Уч.-изд. Л. 4,0. Тираж 150 экз. Заказ

Издательство ОмГТУ. Омск, пр. Мира, 11
Типография ОмГТУ

© А. И. Одинец, А. И. Гребенников, С. Г. Миронов, 2003
© Омский государственный технический университет, 2003

ВВЕДЕНИЕ

В развитии современной радиоэлектроники важное значение имеет цифровая обработка сигналов (ЦОС). Области применения ЦОС являются: обработка сигналов в радиолокации, сжатие данных в телеметрии, анализ спектра, прием сигналов, цифровые методы измерений, анализ вибраций и т.д. Из всех методов, используемых при ЦОС, наиболее важным является цифровая фильтрация. По сравнению с аналоговыми цифровые фильтры (ЦФ) обладают рядом важных достоинств, которые можно разделить на принципиальные, т.е. отсутствующие у аналоговых фильтров, и реализационные, определяющие лишь количественные отличия.

Принципиальные достоинства.

1. Мультиплексирование - возможность одновременного обслуживания одним арифметическим устройством нескольких каналов (обеспечивается благодаря дискретности цифровых сигналов во времени).

2. Многофункциональность - одновременная реализация при многоканальной работе различных АЧХ в разных каналах с помощью одного арифметического устройства.

3. Получение сколь угодно большого и даже бесконечного затухания на определенных частотах.

Реализационные достоинства.

1. Предельно высокая стабильность характеристик (ограниченная лишь стабильностью опорной частоты).

2. Идеальная повторяемость характеристик (нормированные к частоте дискретизации частотные характеристики ЦФ определяются только численными значениями их коэффициентов).

3. Простота перестройки характеристик.

4. Возможность реализации абсолютно линейной ФЧХ.

5. Возможность реализации теоретически точной конечной импульсной характеристики (КИХ).

6. Возможность работы на сколь угодно низких частотах и возможность получения сколь угодно узких полос пропускания или режекции.

7. Отсутствие конденсаторов и катушек индуктивности.

Недостатки.

1. Наличие шумов обработки, которые возникают из-за конечной разрядности цифровых схем. Шумы обработки могут быть уменьшены за счет увеличения разрядности (соответственно объема аппаратуры) или уменьшения быстродействия ЦФ.

2. Неустойчивость некоторых реализаций ЦФ.

3. Нелинейные эффекты, характерные для рекурсивных ЦФ. В рекурсивных ЦФ, если не приняты специальные меры, то могут возникнуть колебания малой

амплитуды при постоянном входном сигнале (малые предельные циклы) или колебания предельно большой амплитуды (большие предельные циклы).

4. Ограниченный частотный диапазон, связанный с конечной скоростью работы цифровых устройств.

5. Наличие специального дополнительного оборудования для обработки аналоговых сигналов: аналоговые фильтры, УВХ, АЦП и др. Это основной недостаток, т.к. устройства аналого-цифрового преобразования ограничивают чувствительность, динамический диапазон, линейность, наивысшую частоту обрабатываемого сигнала.

1. ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ О ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ

1.1. Структурная схема системы ЦОС

Сигнал, поступающий на вход устройства ЦОС, должен быть представлен в цифровой форме. Процесс дискретизации непрерывных сигналов состоит из двух этапов: дискретизации по времени и дискретизации по уровню (квантования). Сигнал, дискретизированный только по времени, называют дискретным. Такой сигнал представляет собой последовательность, элементы которой $f(kT)$ в точности равны соответствующим значениям исходного непрерывного сигнала $f(t)$. Дискретный сигнал

описывается выражением
$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \cdot F(t - kT),$$

где $F(t)$ - единичный импульс АИМ-колебания.

Если уменьшается длительность импульса $F(t)$ при сохранении его площади, то функция $F(t)$ стремится к δ -функции. Тогда выражение для дискретного сигнала

можно представить в виде
$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \cdot \delta(t - kT).$$

Для преобразования аналогового сигнала в цифровой после дискретизации по времени должно следовать квантование, которое представляет собой округление передаваемых значений с заданной точностью. Структурная схема и временные диаграммы системы ЦОС представлены на рис. 1.1. Система ЦОС содержит дискретизатор непрерывного сигнала по времени (УВХ), АЦП, ЦФ, осуществляющий обработку цифрового сигнала по заданному алгоритму, ЦАП и выходной сглаживающий фильтр (СФ).

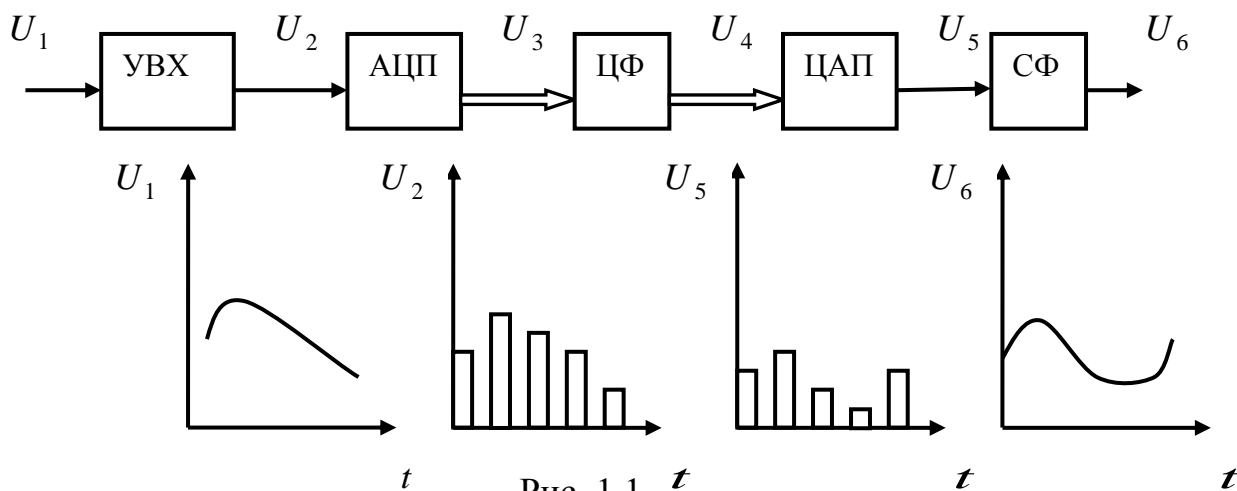


Рис. 1.1

1.2. Дискретизация аналогового сигнала

Переход от аналогового сигнала к цифровому состоит из трех этапов:

- дискретизация, т. е. взятие выборок из аналогового сигнала $U(t)$ в моменты времени $t_n = nT$, и получение дискретного сигнала $U(nT)$;
- хранение выборки в течение некоторого времени $t \leq T$;
- квантование, т. е. сравнение амплитуд выборок $U(nT)$ с эталонным напряжением U_0 , и преобразование их отношения в цифровой код.

Величину U_n сигнала $U(t)$ в момент времени $t = nT$ можно представить в виде

$$U_n = \int_{-\infty}^{\infty} U(t) \cdot \delta(t - nT) dt.$$

Последовательность выборок U_n составит сигнал $U(nT)$

$$U(nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n.$$

Используя свойство преобразования Фурье о спектре свертки функций, получим спектр сигнала $U(nT)$

$$U_n(\omega) = \frac{1}{T} U(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\Omega t},$$

где: $U(\omega)$ - спектр сигнала $U(t)$; $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\Omega t}$ - спектр последовательности δ -функций;

$\Omega = 2\pi f_d$; f_d - частота дискретизации.

Спектр сигнала $U(nT)$ можно записать в виде

$$U_n = \frac{1}{T} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} U(\omega - n \cdot \Omega).$$

Эта формула описывает размножение спектров при дискретизации. На рис 1.2 показано преобразование двустороннего спектра $U(f)$ сигнала $U(t)$ при дискретизации для случая $f_d < 2\Delta f$, а на рис.1.3 — при $f_d > 2\Delta f$.

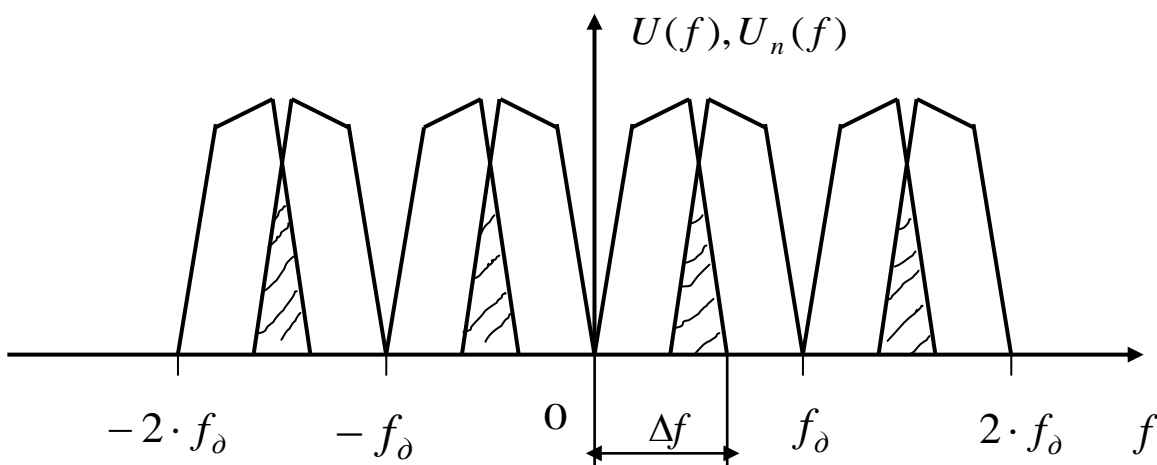


Рис. 1.2

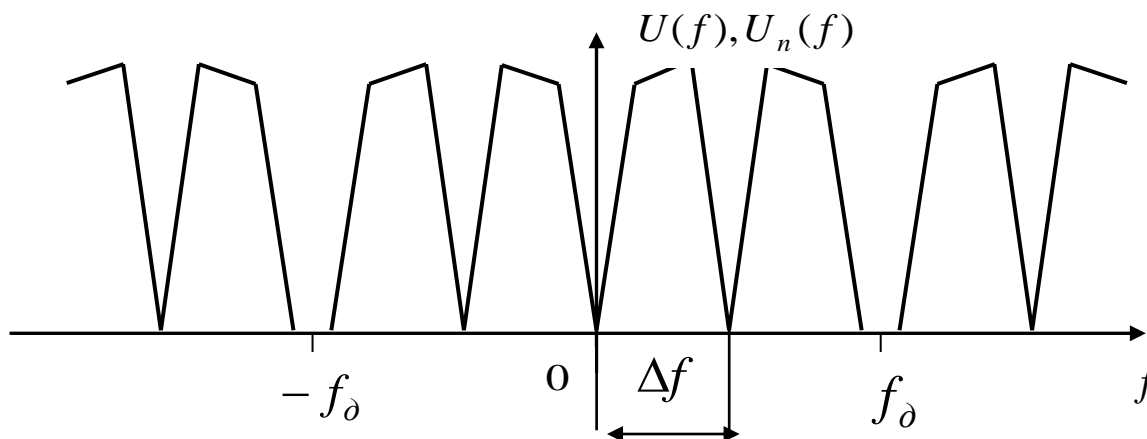


Рис. 1.3

Таким образом, для того чтобы любая n -я копия $U_n(f)$ спектра $U(f)$ правильно представляла исходный сигнал, необходимо, чтобы спектры $U_n(f)$ не перекрывались. Это возможно, если $f_d \Rightarrow 2\Delta f$, что является выражением теоремы отсчетов. Здесь Δf - полоса частот, за пределами которой составляющие спектра $U(f)$ равны нулю. Практически за Δf принимают полосу, за пределами которой составляющие спектра достаточно мало по сравнению с его основными составляющими (например, подавлены на 80 дБ). Обычно для выделения полосы Δf применяется предварительная аналоговая фильтрация.

Дискретизацию можно рассматривать как операцию стробирования (см. рис.4),

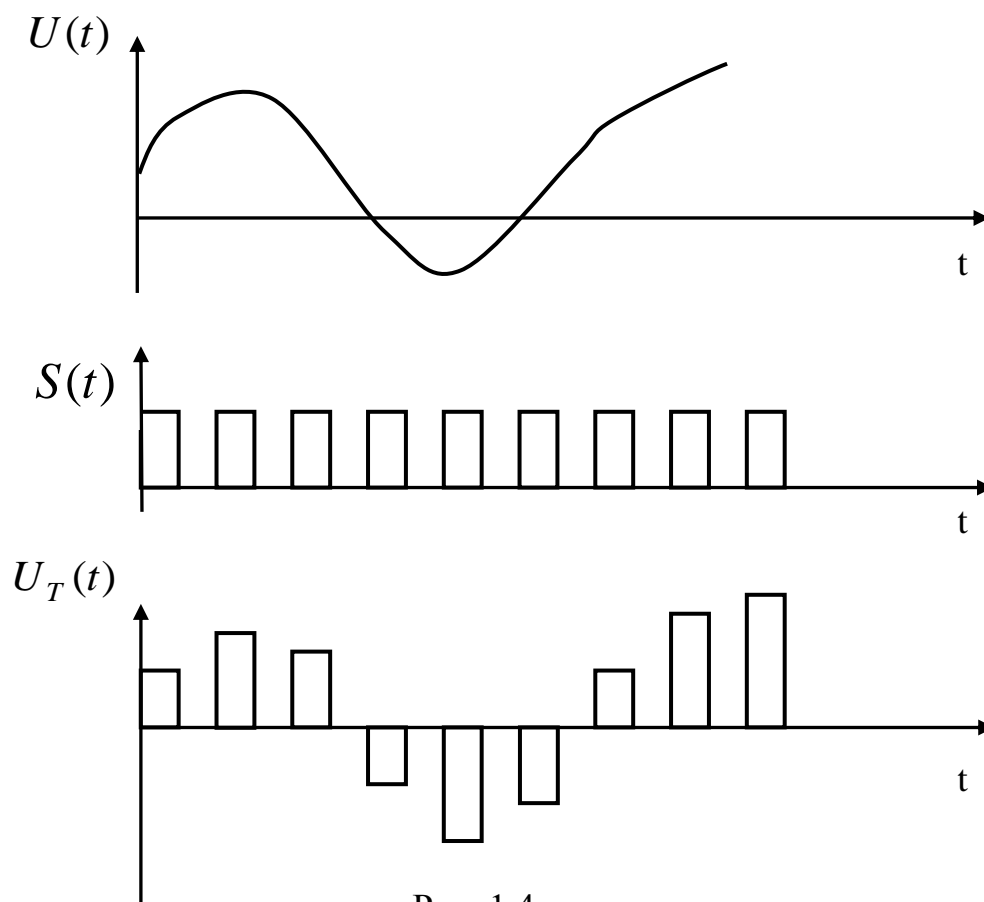


Рис. 1.4

которая выполняется блоком умножения. На первый вход блока подается аналоговый сигнал $U(t)$, а на второй - последовательность стробов $S(t)$ с частотой повторения (дискретизации) $f_d = 1/T$, где T - период дискретизации. Длительность каждого строб-импульса равна Δt , а их амплитуда - $1/\Delta t$. При $\Delta t \rightarrow 0$ $S(t) \rightarrow \delta(t)$. Так как длительность стробов много меньше времени корреляции сигнала $U(t)$, то импульсы дискретизированного сигнала $U_d(t)$ повторяют форму стробов, а их амплитуды равны соответствующим выборкам процесса $U(t)$.

1.3. Квантование и кодирование дискретизированного сигнала

На рис 1.5 представлена характеристика квантования $x_{ц} = f(x_d)$ дискретного сигнала $x_d(t)$ по уровню. Пики видеоимпульса сигнала $x_d(t)$ абсолютно точно воспроизводят соответствующие мгновенные значения аналогового сигнала $x(t)$. Цифровой сигнал $x_{ц}(t)$ отличается от дискретных выборок $x_d(t)$ на величину шума квантования $\xi(t)$, который по своим свойствам подобен белому шуму. Дисперсия шума квантования равна

$$\sigma_{\xi}^2 = \int_{-\Delta/2}^{+\Delta/2} \xi^2 \omega(\xi) d\xi = \Delta^2 / 12 \quad \text{при} \quad -\Delta/2 < \xi < \Delta/2,$$

где $\omega(\xi) = 1/\Delta$ - плотность вероятности.

При использовании системы с фиксированной запятой и представлении чисел в прямом коде интервал квантования равен

$$\Delta = x_{\max} / 2^b = 2^{-b},$$

где b - количество разрядов, определяющих модуль двоичного числа. Отношение сигнал/шум

$$A_{\text{дБ}} = 10 \lg(\sigma_c^2 / \sigma_{\xi}^2) = 10 \lg(12 \sigma_c^2 \cdot 2^{2b}), \text{ где } \sigma_c^2 - \text{дисперсия сигнала.}$$

Например, для высококачественного воспроизведения музыкальных и речевых сигналов отношение сигнал/шум должно быть не менее 60 дБ, что обеспечивается при $b = 10$ (при $\sigma_c^2 = 0,0625$).

Равномерное квантование, при котором шаг Δ остается постоянным (рис.1.5), в отдельных случаях оказывается неудобным. При логарифмическом квантовании (рис.1.6) шаг квантования пропорционален логарифму входного напряжения. Использование логарифмического квантования позволяет получить высокую точность передачи сигнала при ограниченном числе квантованных уровней сигнала.

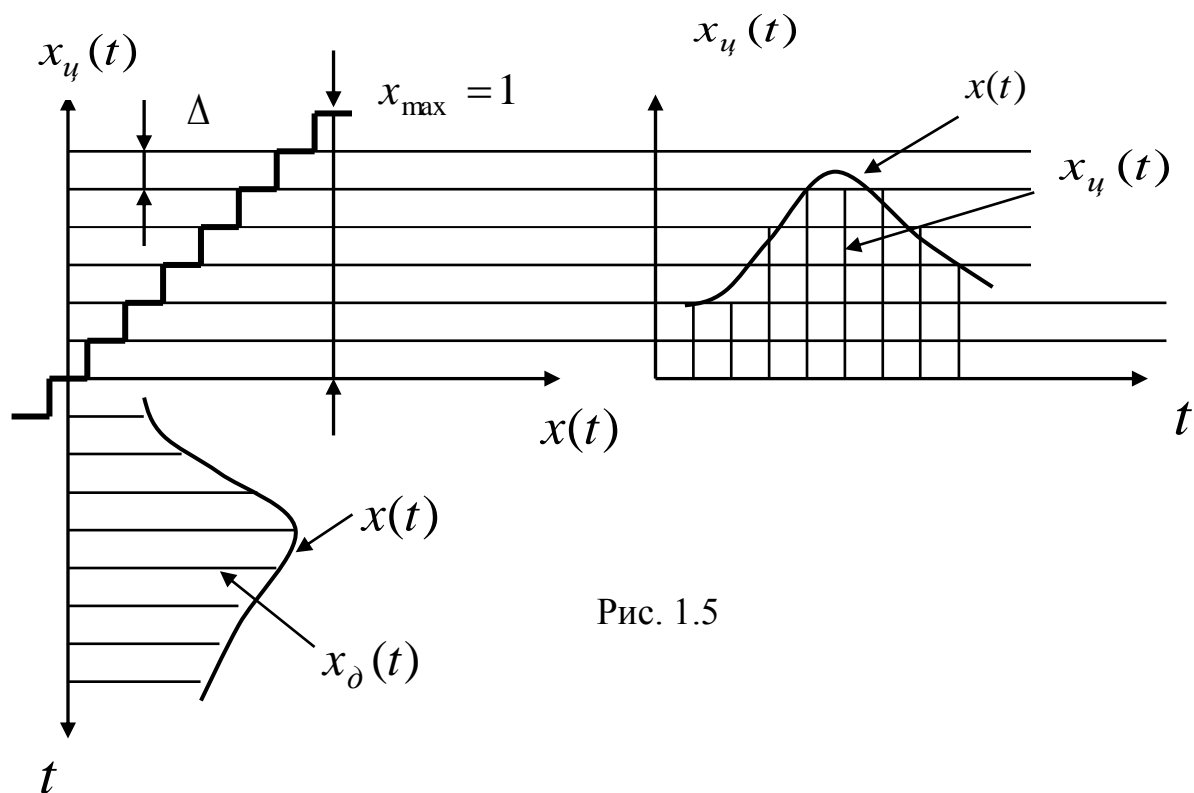


Рис. 1.5

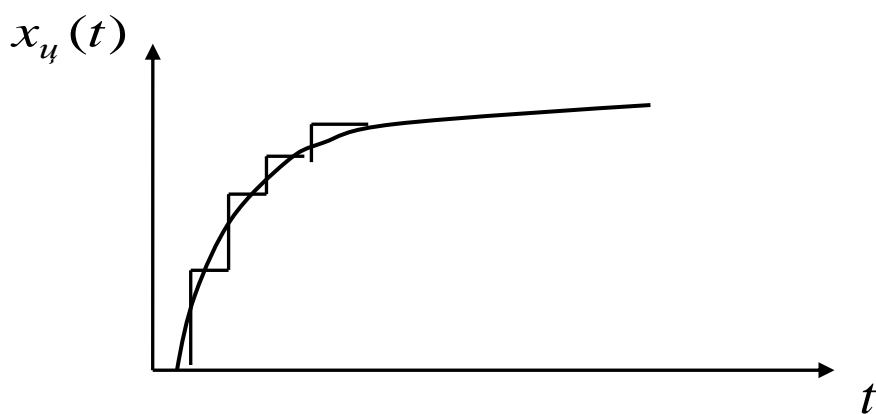


Рис. 1.6

2. СПОСОБЫ ОПИСАНИЯ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

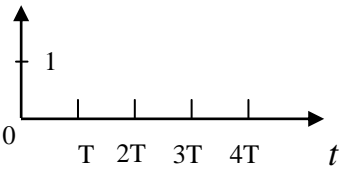
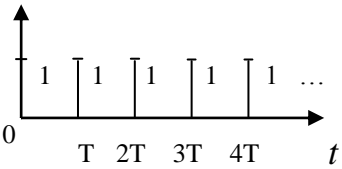
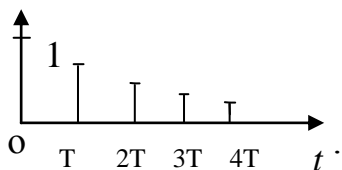
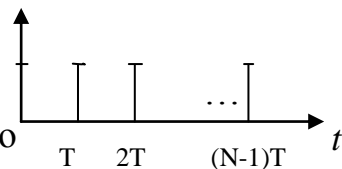
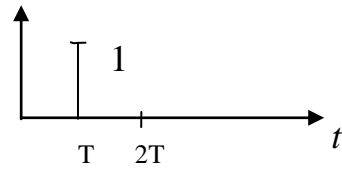
2.1. Z - преобразование

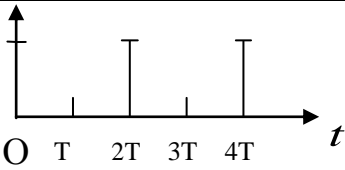
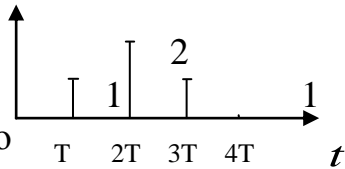
При описании дискретных сигналов используют Z-преобразование, которое представляет собой модификацию дискретного преобразования Лапласа:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \cdot z^{-n}.$$

В табл. 2.1. приведены Z-преобразования простейших сигналов.

Таблица 2.1

Название сигнала	Аналитическая и графическая формы сигнала	z - преобразование сигнала
1	2	3
Единичный импульс	 $f(n \cdot T) = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n > 0 \end{cases}$	$F(z) = 1$
Дискретизированный единичный скачок	 $f(n \cdot T) = 1$	$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} =$ $= \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$
Экспоненциально убывающий дискретный сигнал	 $f(n \cdot T) = e^{-\alpha \cdot n \cdot T}$	$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha \cdot n \cdot T} \times$ $\times z^{-n} = \frac{1}{1-e^{-\alpha \cdot n \cdot T} \cdot z^{-1}}$
Серия из N одинаковых импульсов		$F(z) = \frac{1-z^{-N+1}}{1-z^{-1}}$
Сдвинутый единичный сигнал		$F(z) = z^{-1}$

1	2	3
Прореженная последовательность		$F(z) = \frac{1}{1-z^{-2}}$
Дискретизированный треугольный импульс		$F(z) = z^{-1} + 2 \cdot z^{-2} + z^{-3}$
Дискретизированный гармонический сигнал	$f(k \cdot T) = \cos(\omega_0 \cdot k \cdot T)$	$F(z) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1-e^{j\omega \cdot T} \cdot z^{-1}} + \frac{1}{1-e^{-j\omega \cdot T} \cdot z^{-1}} \right)$
Усечённый дискретизированный экспоненциальный импульс	$f(k \cdot T) = e^{-\alpha \cdot k \cdot T},$ $0 \leq k \leq N$	$F(z) = \frac{1-(e^{-\alpha \cdot T} \cdot z^{-1})^N}{1-e^{-\alpha \cdot T} \cdot z^{-1}}$
Дискретный сигнал	$f(k \cdot T) = a \cdot k,$ $0 \leq k \leq 8$	$F(z) = a \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot z^{-k}$
Комплексная экспонента	$f(n \cdot T) = e^{j \cdot n \cdot \omega \cdot T}$	$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{j \cdot n \cdot \omega \cdot T} \cdot z^{-n} =$ $= \frac{1}{1-e^{j \cdot \omega \cdot T} \cdot z^{-1}} =$ $= \frac{z}{z-e^{j \cdot \omega \cdot T}}$
Гармоническая функция	$f(n \cdot t) = \sin n \cdot \omega \cdot T =$ $\frac{1}{2 \cdot j} \cdot (e^{j \cdot n \cdot \omega \cdot T} - e^{-j \cdot n \cdot \omega \cdot T})$	$F(z) = \frac{1}{2 \cdot j} \cdot \left(\frac{1}{1-e^{j \cdot \omega \cdot T} \cdot z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-j \cdot \omega \cdot T} \cdot z^{-1}} \right)$

Единичный импульс используют как испытательный сигнал для определения импульсной характеристики ЦФ, а единичный скачок (единичная функция) - для определения переходной характеристики ЦФ.

Цифровая синусоида записывается так:

$$f(nT) = \sin(\omega_n T + \varphi),$$

где $\omega T = 2\pi f / f_d$ - круговая цифровая частота; f_d - частота дискретизации.

Диапазон изменения $\omega T = 0 \dots \pi$.

2.2. Свойства Z-преобразования

1. *Линейность*. Если $\{X_k\}$ и $\{Y_k\}$ - числовые последовательности, для которых известны Z-преобразования $X(Z)$ и $Y(Z)$, то сигналу $\{U_k\} = \{\alpha X_k + \beta Y_k\}$ соответствует преобразование $U(z) = \alpha X(z) + \beta Y(z)$.

2. *Z-преобразование смещенного сигнала*.

Пусть сигнал $\{Y_k\}$ получен из дискретного сигнала $\{X_k\}$ путем сдвига на одну позицию в сторону запаздывания, т. е. $Y_k = X_{k-1}$: $Y(z) = z^{-1} \cdot X(z)$. Символ z^{-1} служит оператором единичной задержки (на один интервал дискретизации) в Z-области.

3. *Z-преобразование свертки*.

Для дискретных сигналов $X_k = X(kT)$ и $Y_k = Y(kT)$ дискретная свертка

$$f(nT) = \sum_{k=0}^n X(kT) \cdot Y(nT - kT) = \sum_{k=0}^n X(nT - kT) \cdot Y(kT),$$

Z-преобразования сигналов

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k \cdot z^{-k}; \quad Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k \cdot z^{-k}; \quad F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_n \cdot z^{-k}.$$

Определим дискретную свертку $f(nT)$ двух сигналов $X(kT)$ и $Y(kT)$, имеющих соответственно два и три ненулевых отсчета:

$X(kT)$ [$X(0)=1, X(T)=1$]; $Y(kT)$ [$Y(0)=2, Y(T)=2, Y(2T)=2$];

$f(0)=X(0)Y(0)=2$; $f(2T)=X(T)Y(T)+X(0)Y(2T)=4$; $f(T)=X(T)Y(0)+X(0)Y(T)=4$;

$f(3T)=X(T)Y(2T)=2$; $f(4T)=0$.

Z-преобразования сигналов $X(kT)$, $Y(kT)$ и $f(nT)$

$$X(z) = 1 + z^{-1}; \quad Y(z) = 2 \cdot (1 + z^{-1} + z^{-2}); \quad F(z) = 2 \cdot (1 + 2z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3}).$$

Таким образом, свертке двух сигналов отвечает произведение их Z-преобразований: $F(z) = X(z)Y(z)$.

Обратное Z-преобразование устанавливает значения дискретного сигнала по виду функции $F(Z)$:

$$f(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint F(z) \cdot z^{k-1} dz.$$

Если сигнал $f_n = K^n$, а его абсолютное значение уменьшается во времени,

$K < 1$, то в качестве контура интегрирования используют окружность радиусом $R = 1$.

Теорема Парсерваля позволяет определить энергию сигнала. Для непрерывного сигнала его энергия определяется путем интегрирования в бесконечных пределах, или квадрата временной функции, или квадрата её спектра. Для дискретных сигналов теорема Парсерваля имеет вид

$$\frac{1}{2\pi j} \cdot \oint_L F(z) \cdot F(z^{-1}) \frac{dz}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} f^2(nT).$$

2.3. Передаточная функция и разностное уравнение ЦФ

Пусть на вход ЦФ подается входной сигнал $x_n = X(nT)$ в виде последовательности числовых значений, следующих с интервалом дискретизации T . Тогда выходной сигнал ЦФ $Y_n = Y(nT)$ записывают в виде линейного разностного уравнения:

$Y(nT) = a_0 X(nT) + a_1 X(nT-T) + \dots + a_N X(nT-NT) + b_0 X(nT) + b_1 X(nT-T) + \dots + b_M X(nT-MT)$,
где a, b - постоянные вещественные коэффициенты.

Применим к уравнению Z- преобразование $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \cdot z^{-n}$,

тогда передаточная или системная функция $H(z)$ ЦФ примет вид

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2} - \dots - b_M z^{-M}} = \frac{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}}{1 - \sum_{j=1}^M b_j z^{-j}}.$$

Существует несколько схем реализации ЦФ. На рис. 2.1 представлена схема нерекурсивного ЦФ, на рис. 2.2 - схема рекурсивного ЦФ, а на рис. 2.3 - каноническая схема N-порядка.

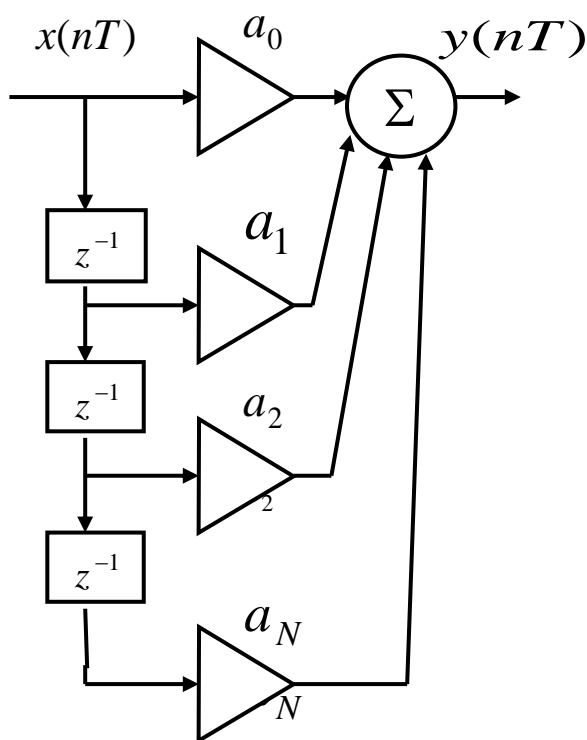


Рис. 2.1

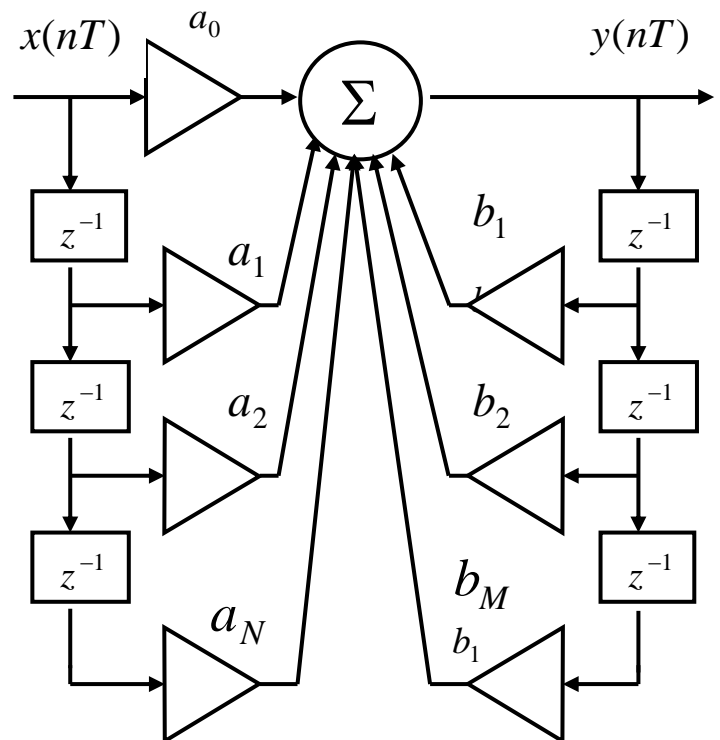


Рис. 2.2

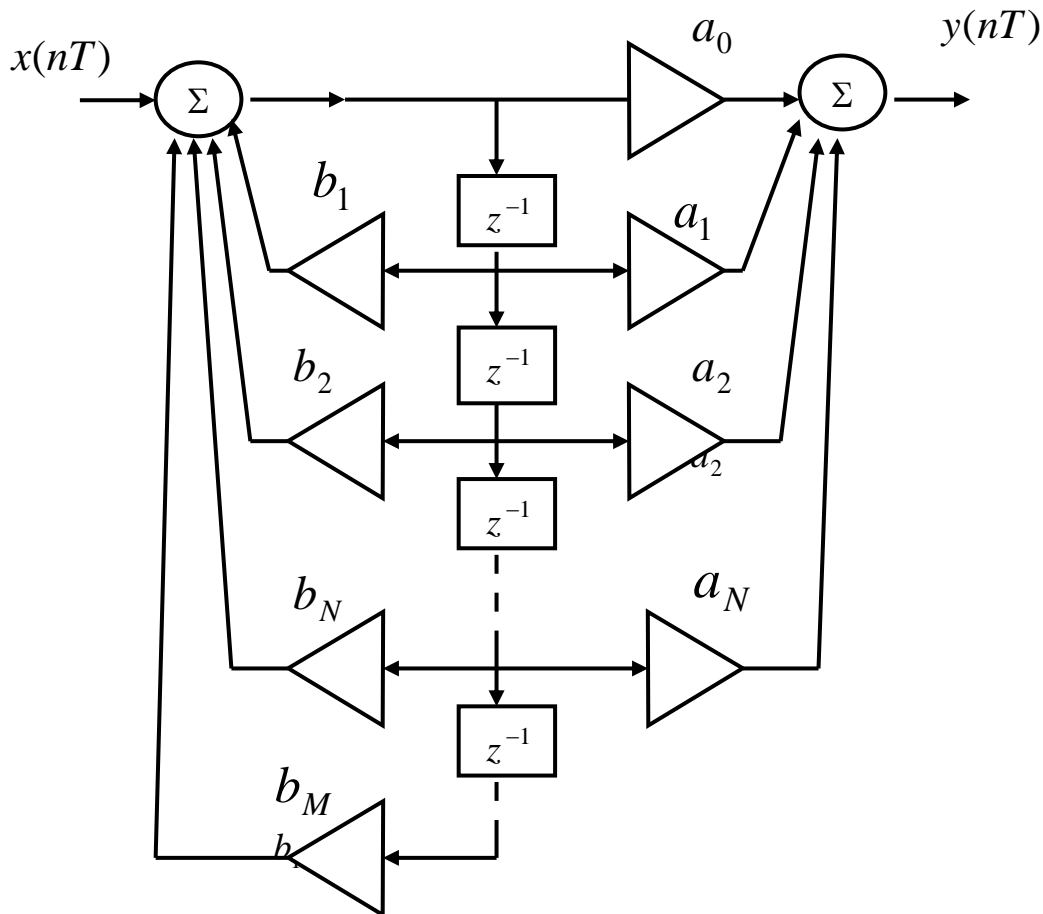


Рис. 2.3

Представленный на рис. 2.1 ЦФ иногда называют трансверсальным (поперечным) или КИХ- фильтром, т. к. его импульсная характеристика содержит конечное число отсчетов. Рекурсивные ЦФ имеют импульсную характеристику с бесконечным числом отсчетов, поэтому их называют БИХ-фильтрами.

2.4. Частотная характеристика цифрового фильтра

Для получения частотной характеристики ЦФ необходимо на его вход подать испытательный сигнал $X(n) = e^{j\omega T n}$, функционально эквивалентный дискретизированной синусоиде с цифровой частотой ωT .

Реакция ЦФ на такое воздействие: $Y(n) = H(j\omega T)X(n) = H(\omega T) e^{j\varphi(\omega T)} X(n)$, где $H(\omega T)$, $\varphi(\omega T)$ -АЧХ и ФЧХ цифрового фильтра.

Частотная характеристика РЦФ, разностное уравнение которого $Y(n) = a X(n) + b Y(n-1)$,

равна

$$H(j\omega T) = \frac{a}{1 - b \cdot e^{-j\omega T}}.$$

Так как $e^{-j\omega T} = \cos \omega T - j \cdot \sin \omega T$; то $H(j\omega T) = \frac{a}{(1 - b \cdot \cos \omega T) + j b \cdot \sin \omega T}.$

Амплитудно-частотная характеристика ЦФ

$$H(\omega T) = \frac{a}{\sqrt{1 + b^2 - 2b \cdot \cos \omega T}},$$

при $a = 1$, $b = 0.8$ и $T = 10$ мкс представлена на рис. 2.4. На оси частот отмечены круговая частота ωT , циклическая частота $\lambda = f/f_d$ и АЧХ аналогового ФНЧ $H(f)$.

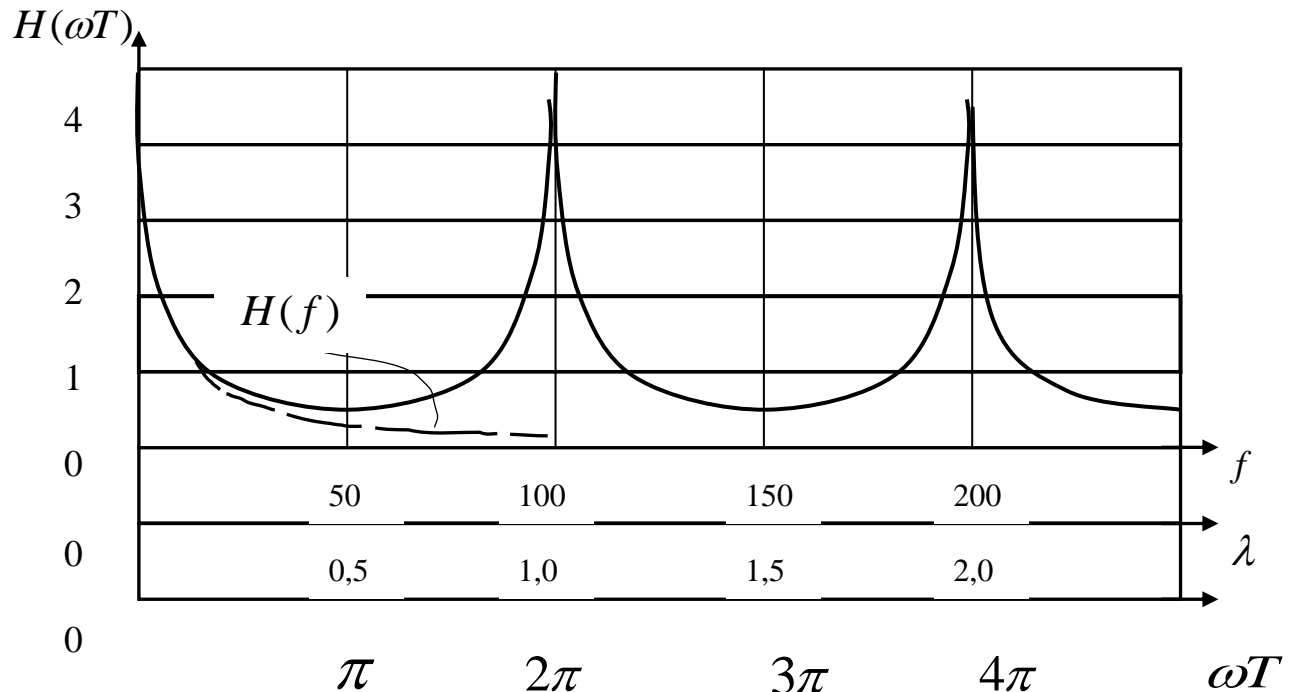


Рис. 2.4

2.5. Дискретизация дифференциального уравнения

Рассмотрим один из методов построения ЦФ, обладающего свойствами аналогового прототипа - ФНЧ, состоящего из однозвенной RC-цепи.

Дифференциальное уравнение фильтра

$$y(t) + \tau_{\phi} \cdot \frac{dy(t)}{dt} = x(t), \quad \tau_{\phi} = RC.$$

Первая производная выходного эффекта

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{Y(n) - Y(n-1)}{T},$$

где T - интервал дискретизации.

После дискретизации дифференциальное уравнение запишется в виде:

$$y(n) = a x(n) + b y(n-1),$$

где $a = T/(T + \tau_{\phi})$, $b = \tau_{\phi}/(T + \tau_{\phi})$.

Структура ЦФ, построенная на основании полученного разностного уравнения, представлена на рис 2.5.

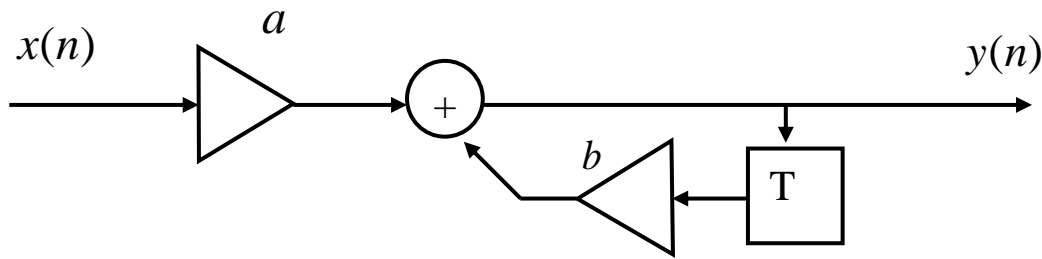


Рис. 2.5

Для проверки того, что полученный РЦФ соответствует заданному фильтру-прототипу, необходимо сравнить их импульсные характеристики.

Для аналогового прототипа отклик на единичный δ импульс описывается экспонентой $h(t) = \exp(-t/\tau_\phi)$, после дискретизации которой образуется дискретная импульсная характеристика (ДИХ) $h(n) = \exp(-T n / \tau_\phi)$.

Для определения ДИХ РЦФ подадим на его вход испытательное воздействие в виде единичного импульса. Выходной сигнал (ДИХ) определим с помощью табл. 2.2.

Таблица 2.2

n	0	1	2	3	4	...n
$x(n)$	1	0	0	0	0	...0
$y(n)$	a	$a \cdot b$	$a \cdot b^2$	$a \cdot b^3$	$a \cdot b^4$... $a \cdot b^n$

Дискретная импульсная характеристика при $a = 1$ имеет вид

$$h(n) = a \cdot b^n = \left(\frac{\tau_\phi}{T + \tau_\phi} \right)^n = \left(1 + \frac{T}{\tau_\phi} \right)^{-n}.$$

Так как выражение в скобках является первыми двумя членами ряда

$$e^m = 1 + \frac{m}{1!} + \frac{m^2}{2!} + \dots,$$

то $h(n) = \exp(-T n / \tau_\phi)$, что приближенно совпадает с ДИХ аналогового фильтра-прототипа. Если выбрать $a = 1$ и $b = \exp(-T / \tau_\phi)$, то ДИХ ЦФ и аналогового фильтра совпадут. Условие устойчивости работы РЦФ: $\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty$. Рассмотренный РЦФ устойчив при $b < 1$.

2.6. Нуль-полосные диаграммы

Известно, что знание расположения нулей и полюсов передаточной функции в S -плоскости позволяет легко оценить избирательные свойства линейных аналоговых фильтров. На рис. 2.6 а представлена схема ФНЧ, состоящая из однозвенной RC-цепи.

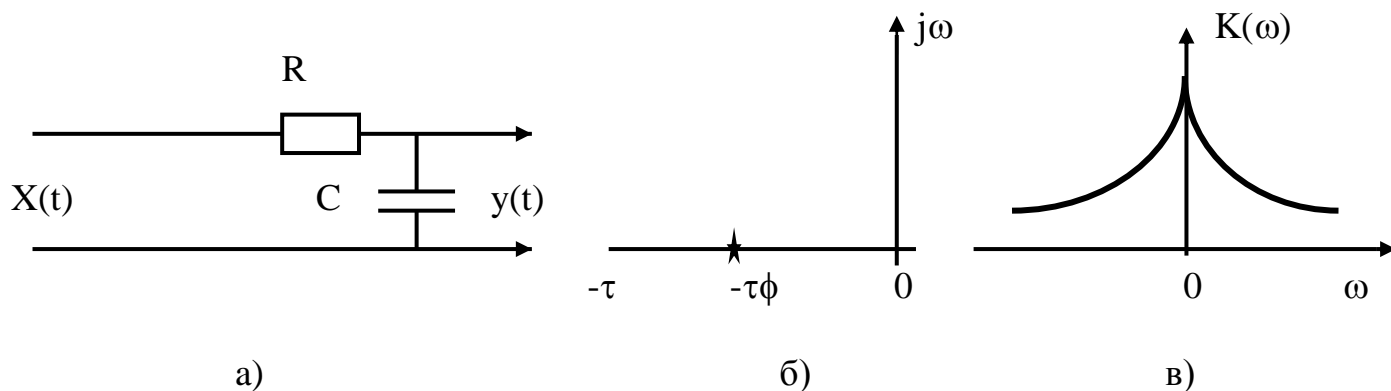


Рис. 2.6

Операторный коэффициент передачи такого фильтра

$$K(S) = \frac{1}{1 + \tau_\phi S}.$$

Функция $K(S)$ имеет один нуль (корень числителя) S_0 с координатами $\tau = -\infty$, $j\omega = 0$ и один полюс (корень знаменателя) S_n с координатами $\tau = -1/\tau_\phi$, $j\omega = 0$. Расположение полюса в S -плоскости показано на рис. 2.6 б. Так как нуль удален на оси τ в бесконечность, то он не влияет на избирательные свойства фильтра. Форма АЧХ (рис. 2.6 в) фильтра определяется степенью приближения точки, движущейся по оси $j\omega$ к полюсу.

Переход из S -плоскости в Z -плоскость производится на основе замены

$$Z = \exp(S T) = \exp(\tau + j\omega T) = A \exp(j\omega T), \quad A = \exp(\tau T).$$

Комплексная величина Z описывается в Z -плоскости вектором, имеющим длину A и угловое смещение $T\omega$ относительно вещественной оси X (рис. 2.7).

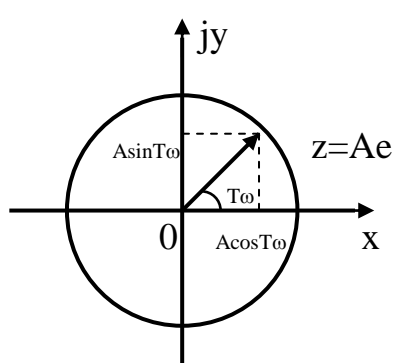


Рис. 2.7

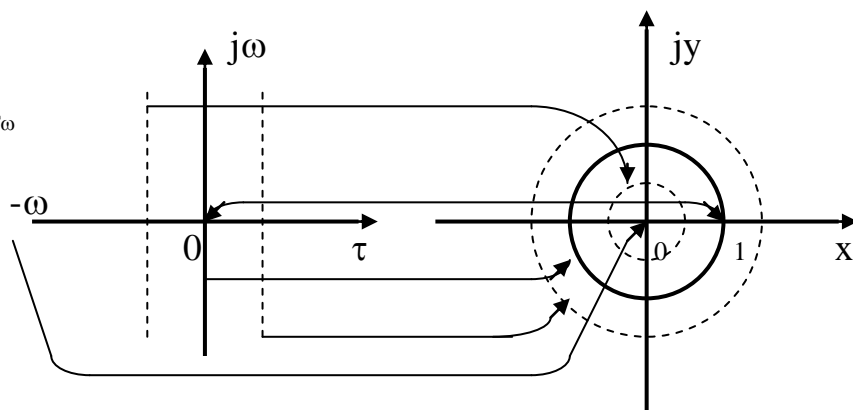


Рис. 2.8

Закономерности преобразования S -плоскости в Z -плоскость поясняются на рис. 2.8. Так движение в S -плоскости вверх по оси частот $j\omega$ переходит в Z -плоскости в циклическое вращение по окружности единичного радиуса против часовой стрелки. При этом первый оборот по окружности в Z -плоскости ($\omega T = 0..2\pi$) соот-

ветствует изменению частоты в S-плоскости в пределах $\omega=0..2\pi/T$.

График, на котором нули и полюсы передаточной функции ЦФ изображены в Z-плоскости относительно окружности единичного радиуса, называется нуль-полюсной диаграммой фильтра.

2.7. Нули и полюсы некоторых функций

В табл. 2.3 изображены нули и полюсы некоторых функций.

Таблица 2.3

Функция	Нули и полюсы	Z-плоскость
<p>Экспонента</p> $X(z) = \frac{z}{z-b}$	$Z_0 = 0$ $Z_{\Pi} = b$	
<p>Комплексная экспонента</p> $X(z) = \frac{z}{z-e^{j\theta}}$	$Z_0 = 0$ $Z_{\Pi} = \exp(j\theta)$	
<p>Произведение экспоненты на линейную функцию</p> $x(n) = n \cdot b^n$ $X(z) = \frac{b}{(z-b)^2}$	$Z_0 = 0$ $Z_{\Pi 1,2} = b$	
<p>Косинусоида с экспоненциальной амплитудой</p> $x(n) = a^n \cdot \cos\theta \cdot n,$ $n \geq 0$ $X(z) = \frac{z \cdot (z - a \cdot \cos\theta)}{z^2 - 2 \cdot a \cdot \cos\theta \cdot z + a^2}$	$z_{01} = 0$ $z_{02} = a \cdot \cos\theta$ $z_{\Pi 1,2} = a \cdot \cos\theta \pm \sqrt{a^2 \cdot \cos^2 \theta}$ $= a \cdot [\cos\theta \pm j \sin\theta] =$ $= a \cdot e^{\pm j\theta}$	

2.8. Построение АЧХ с помощью нуль-полюсных диаграмм

Построение АЧХ следует начинать со значения $\omega T=0$, двигаясь далее против часовой стрелки в пределах удвоенного интервала Найквиста $\omega T = 0 \dots \pi$. Дальнейшее движение по окружности приведет лишь к повторению копий АЧХ. Нули и полюсы, расположенные в начале координат, не влияют на форму ФЧХ.

Чем ближе расположен нуль к окружности единичного радиуса, тем меньше коэффициент передачи ЦФ на соответствующей частоте. Если ряд нулей расположен непосредственно на окружности единичного радиуса, то на частотах, соответствующих месту расположения нулей, коэффициент передачи ЦФ равен нулю (рис. 2.9).

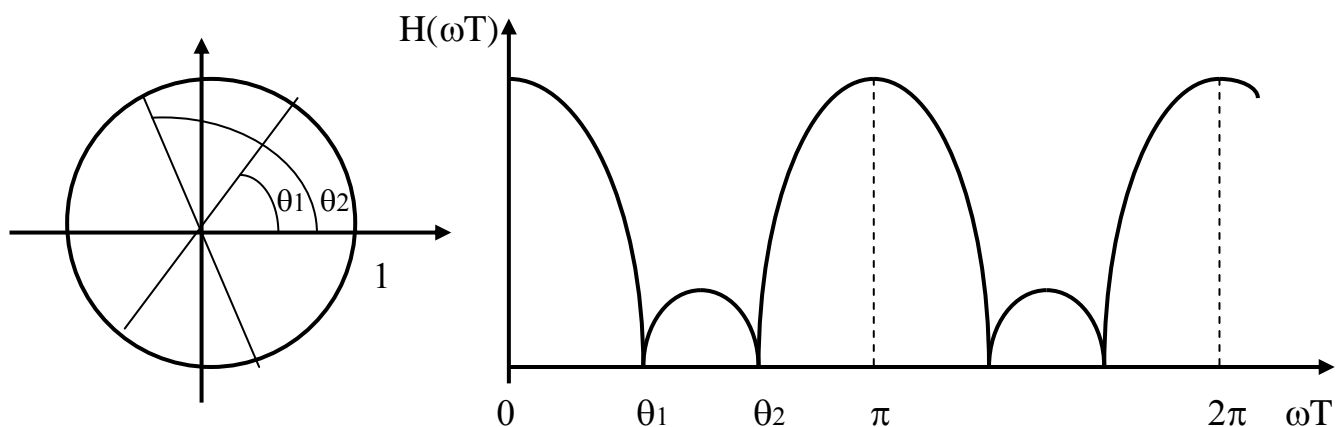


Рис. 2.9

Приближение полюса к окружности единичного радиуса (рис. 2.10 а) вызывает увеличение коэффициента передачи ЦФ на соответствующей частоте (рис. 2.10 б).

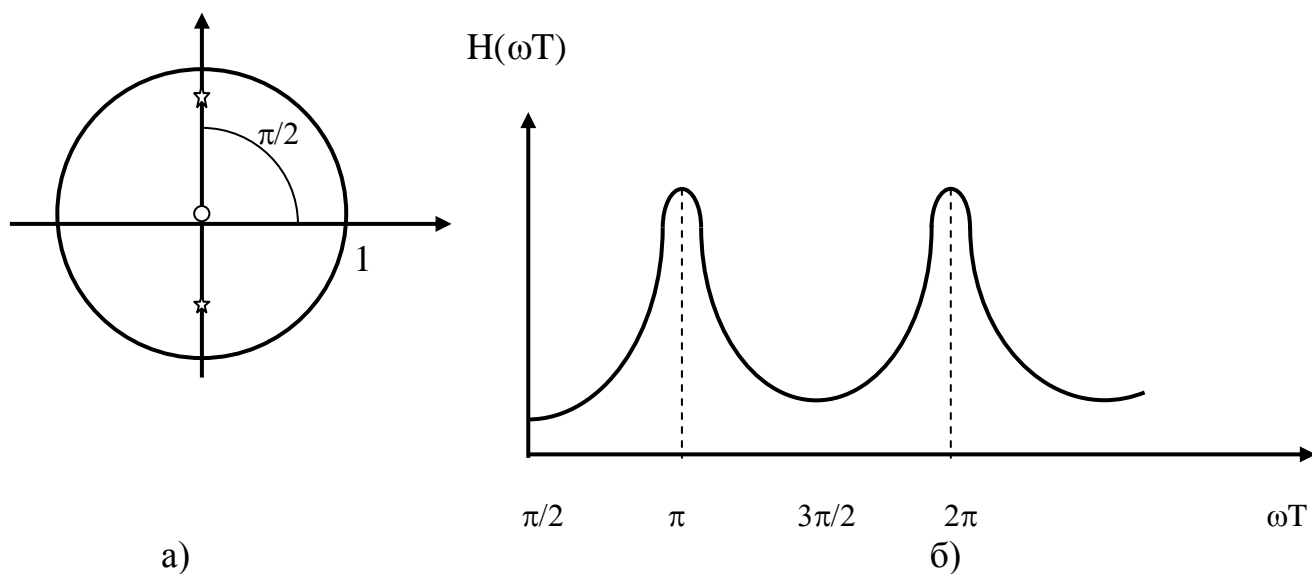


Рис. 2.10

Условие устойчивости ЦФ: ЦФ устойчив, если полюсы передаточной функции расположены внутри окружности единичного радиуса. Передаточная функция ЦФ, аналоговым прототипом которого является фильтр нижних частот, состоящий из однозвенной RC–цепи, имеет вид

$$H(z) = \frac{a \cdot z}{z - b}.$$

Нуль-полюсная диаграмма и АЧХ фильтра, передаточная функция которого имеет один нуль $Z_0 = 0$ и один полюс $Z_n = b$, представлены на рис. 2.11.

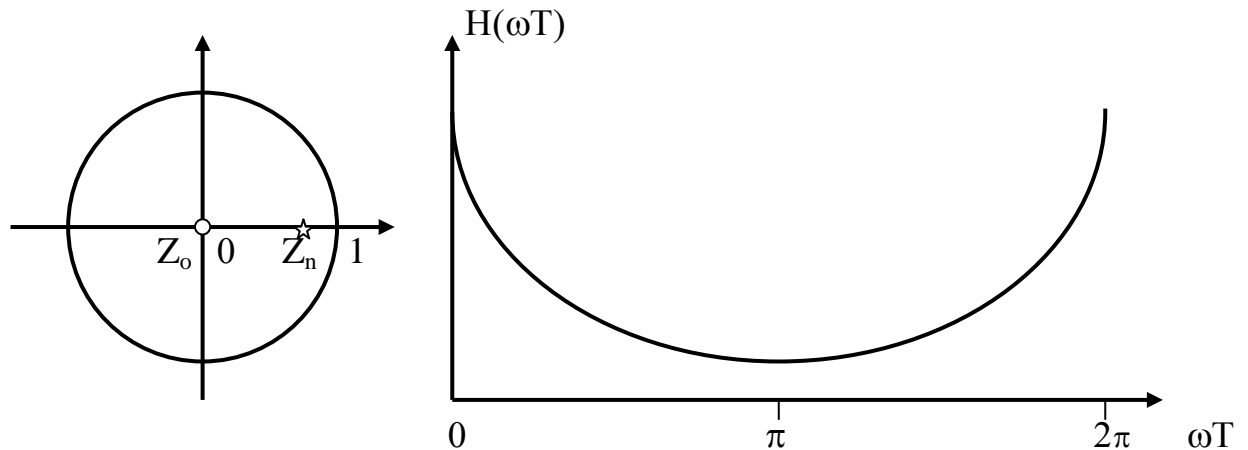


Рис. 2.11

3. ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ

3.1. Нерекурсивный ЦФ первого порядка

Схема нерекурсивного ЦФ первого порядка приведена на рис. 3.1.

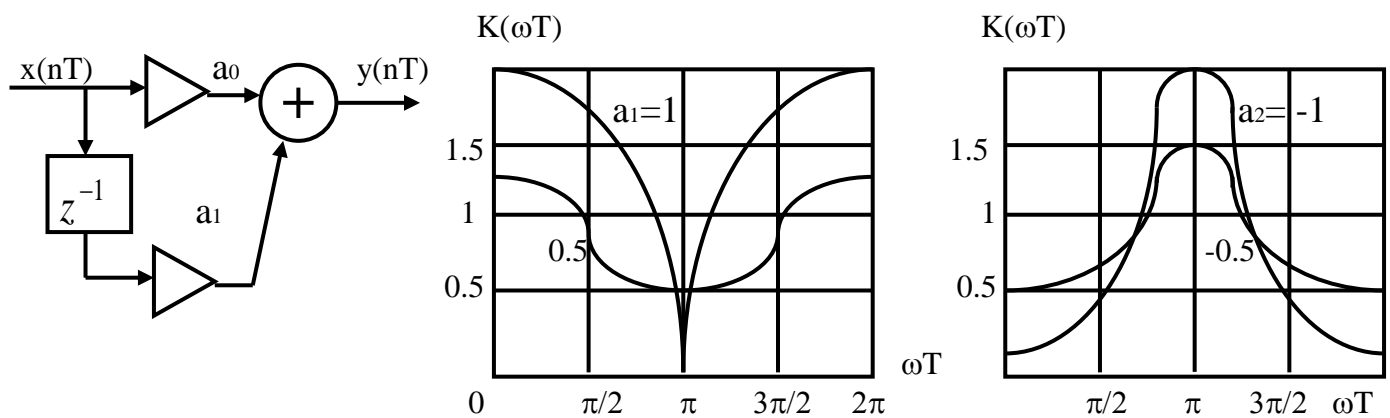


Рис. 3.1

Разностное уравнение подобного фильтра имеет вид

$$y(nT) = a_0 x(nT) + a_1 x(nT-T),$$

а передаточная функции

$$H(z) = a_0 + a_1 z^{-1}.$$

Для определения АЧХ фильтра осуществим замену

$$z^{-1} = \exp(-j\omega T) = \cos\omega T - j\sin\omega T$$

и найдем $|H(e^{j\omega T})| = K(\omega T)$ при $a_0 = 1$:

$$K(\omega T) = |1 + a_1 \cdot e^{-j\omega T}| = \sqrt{1 + a_1^2 + 2a_1 \cos\omega T}.$$

Результаты вычислений АЧХ для $a_1 = 0.5$ и 1 представлены на рис. 3.1, там же изображена АЧХ фильтра при отрицательных коэффициентах a_1 . Вне частотного диапазона $0 \leq \omega T \leq 2\pi$ АЧХ должны быть продолжены периодически.

Фазочастотная характеристика фильтра

$$\varphi(\omega T) = -\arctg \frac{a_1 \sin \omega T}{1 + a_1 \cos \omega T}.$$

При $a_1 = -1$ ФЧХ линейна: $\varphi(\omega T) = \pi/2 - \omega T/2$, $0 \leq \omega \leq 2\pi$.

Рассмотренный ЦФ можно использовать для подавления колебаний с частотами, близкими к $\omega T = \pi$ ($a_1 = 1$), а при $a_1 = 1$ - близкими к $\omega T = 0$ и 2π . Фильтры с такими характеристиками называются гребенчатыми режекторными цифровыми фильтрами.

Для определения нулей и полюсов запишем передаточную функцию в виде

$$H(z) = (z + a_1)/z, \quad (a_0 = 1).$$

Откуда следует, что функция имеет один нуль $Z_0 = -a_1$ и один полюс в начале координат $Z_{\pi} = 0$.

Нуль-полюсная диаграмма и примерный вид АЧХ для случая $a_1 > 0$ приведены на рис. 3.2. Принятое значение коэффициента Цф $a_1 > 0$ соответствует ФНЧ. При $a_1 < 0$ нерекурсивный ЦФ является ФВЧ. Соответствующие нуль-полюсная диаграмма и примерный вид АЧХ при $a_1 < 0$ показаны на рис. 3.3.

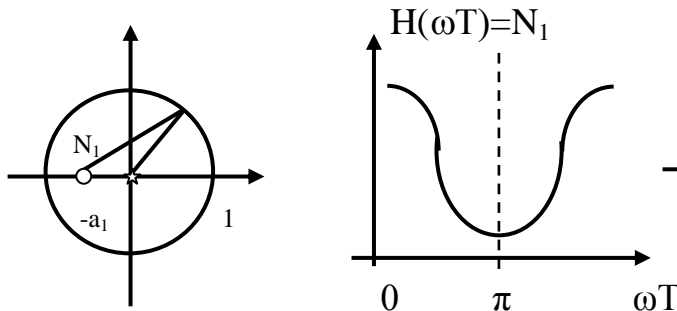


Рис. 3.2

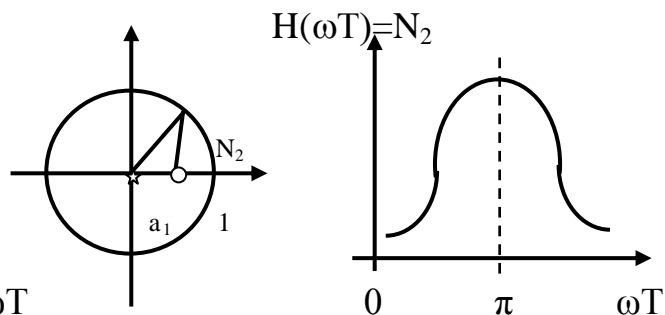


Рис. 3.3

3.2. Нерекурсивный ЦФ второго порядка

Схема нерекурсивного (трансверсального) ЦФ приведена на рис. 3.4.

На рис. 3.5 изображена АЧХ фильтра при $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 1$ (кривая 1) и при $a_0 = 1$, $a_1 = -\sqrt{2}$, $a_2 = 1$.

Для определения нулей и полюсов запишем передаточную функцию в виде

$$H(z) = \frac{z^2 + a_1 z + a_2}{z^2},$$

откуда следует, что функция $H(z)$ имеет двойной полюс $Z_{n1,2} = 0$ в начале координат и два нуля.

В табл. 3.1 приведены нуль-полюсные диаграммы и АЧХ ЦФ в зависимости от того, действительные или комплексно-сопряженные нули. Основные соотношения, характеризующие ЦФ, приведены в табл. 3.2.

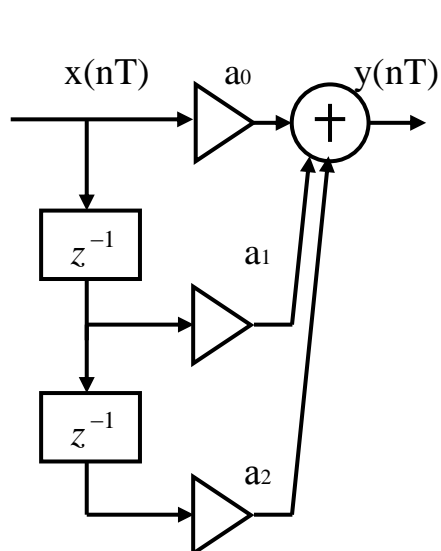


Рис. 3.4

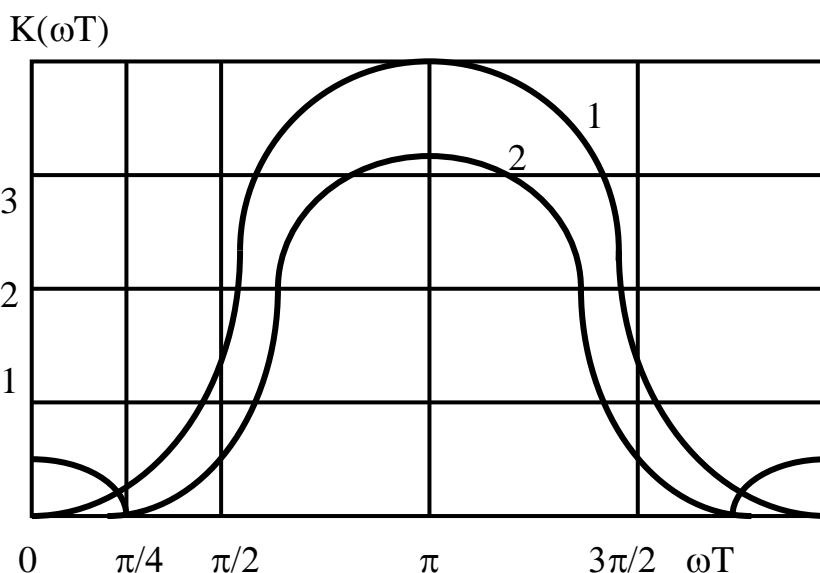


Рис. 3.5

Таблица 3.1

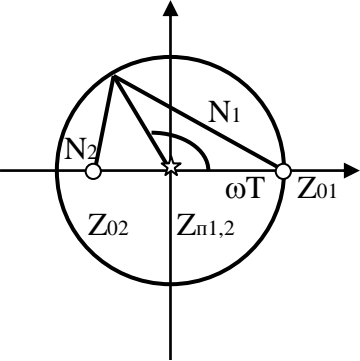
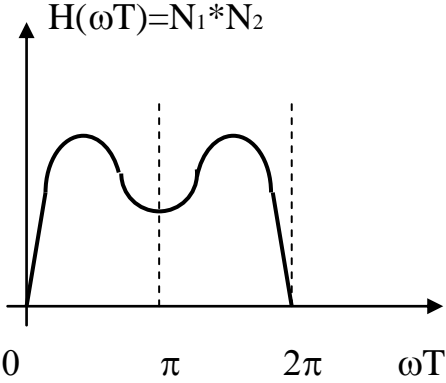
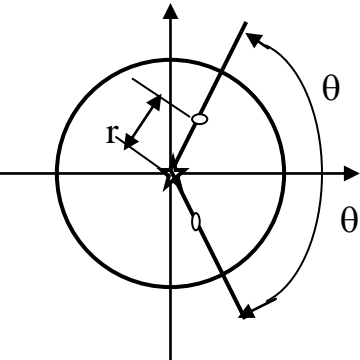
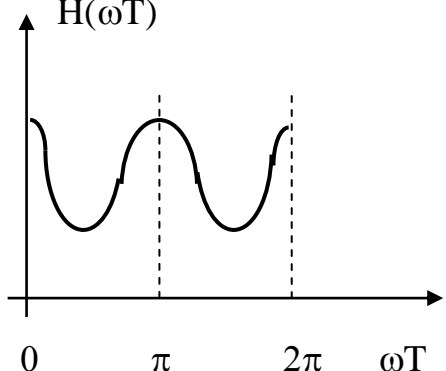
Значение $a_1^2 - 4a_2$	Нуль-полусная диаграмма	АЧХ
Действительные нули $z_{01,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1}{4} - a_2}$		
$a_1^2 - 4a_2 > 0$		
Комплексно-сопряженные нули $z_{01,2} = -\frac{a_1}{2} + j \cdot \frac{\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{2} = r \cdot e^{\pm j\theta}$		
$a_1^2 - 4a_2 < 0$ $a_1 = -2 \cdot r \cdot \cos \theta$ $a_2 = r^2$		

Таблица 3.2

Наименование функции	Уравнения функций нерекурсивного ЦФ
Разностное уравнение	$y(nT) = a_0 x(nT) + a_1 x(nT - T) + a_2 x(nT - 2T)$
Системная функция	$H(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}$
АЧХ при $a_0=1$	$H(\omega T) = \sqrt{(1 + a_1 \cos \omega T + a_2 \cos 2\omega T)^2 + (a_1 \sin \omega T + a_2 \sin 2\omega T)^2}$
ФЧХ при $a_0=1$	$\varphi(\omega T) = -\arctg \frac{a_1 \sin \omega T + a_2 \sin 2\omega T}{1 + a_1 \cos \omega T + a_2 \cos 2\omega T}$
АЧХ при $a_0=a_2=1$	$K(\omega T) = 2 \cos \omega T + a_1 $
АЧХ при $a_0=1, a_1=-2$	$K(\omega T) = 2 \cos \omega T - 1 = 4\sin^2(\omega T / 2)$
АЧХ при $a_0=1, a_1=-\sqrt{2}$	$K(\omega T) = 2\left \cos \omega T - \frac{1}{\sqrt{2}}\right $
ФЧХ	$\varphi(\omega T) = \pi - \omega T, 0 \leq \omega T \leq 2\pi$

3.3. Рекурсивный ЦФ первого порядка

Алгоритм цифровой фильтрации рекурсивного ЦФ 1-го порядка имеет вид

$$y(nT) = x(nT) + b_1 y(nT - T).$$

Системная функция фильтра, его АЧХ и ФЧХ определяются по формулам

$$H(z) = \frac{1}{1 - b_1 z^{-1}}, K(\omega T) = \frac{1}{\sqrt{1 + b_1^2 - 2b_1 \cos \omega T}}, \quad \varphi(\omega T) = -\arctg \frac{b_1 \sin \omega T}{1 - b_1 \cos \omega T}.$$

Схема рекурсивного ЦФ 1-го порядка и его АЧХ для различных значений коэффициента b_1 представлены на рис. 3.6 и рис. 3.7.

Для случая, когда $1 - b_1 = \varepsilon \ll 1$, получим более простые выражения для определенных областей изменения аргумента ωT :

$$k(\omega T) \approx \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega T}{\varepsilon}\right)^2}}, \quad \varepsilon, (\omega T)^2 \ll 1;$$

$$\varphi(\omega T) \approx -\arctg \frac{\omega T}{\varepsilon}, \quad \omega T < \varepsilon \ll 1.$$

Полоса пропускания ЦФ: $\Delta f_{0.7} = \varepsilon / (2\pi T)$, $\varepsilon \ll 1$.

Групповое время задержки в полосе пропускания: $\tau(\omega T) = \varepsilon / (\varepsilon + (\omega T)^2)$, $\omega T < \varepsilon \ll 1$.

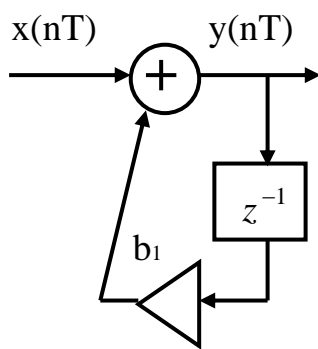


Рис. 3.6

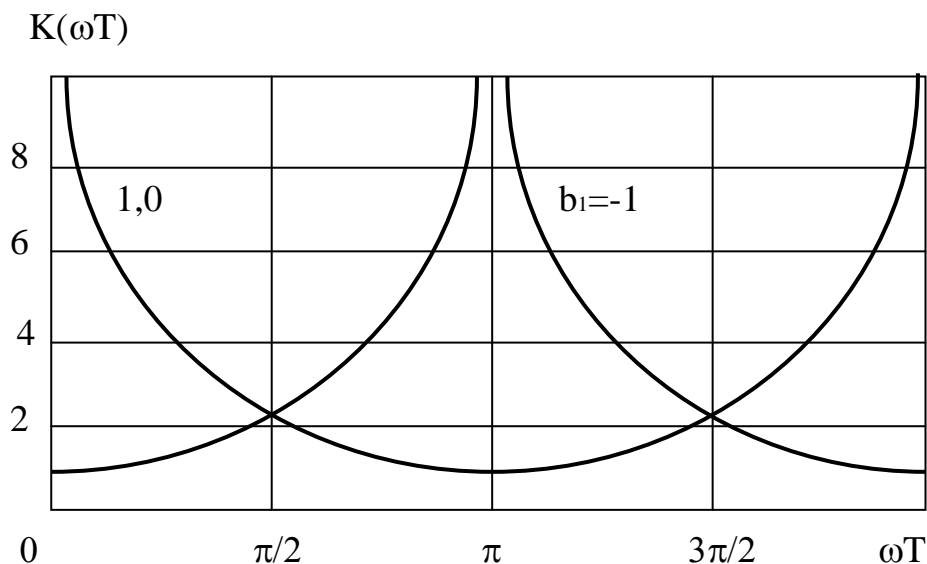


Рис. 3.7

На нулевой частоте $\tau(0) = T/\varepsilon$, а на краю полосы пропускания: $\tau(\Delta f_{0.7}) = T/(2\varepsilon)$.

Количество тактов $n_{0.5}$, необходимое для достижения выходным сигналом уровня 0,5 от установившегося значения при ступенчатом входном сигнале, время задержки и время нарастания переходной характеристики по уровням 0.1... 0.9 от установившегося значения $\tau_H = (n_{0.9} - n_{0.1})T$ равны $n_{0.9} = T/\varepsilon$, $\tau_{0.5} = 0.7T/\varepsilon$, $\tau_H = 2.2T/\varepsilon$.

3.4. Рекурсивный ЦФ второго порядка

Схема рекурсивного ЦФ 2-го порядка представлена на рис. 3.8.

Основные соотношения, характеризующие ЦФ, представлены в табл. 3.3.

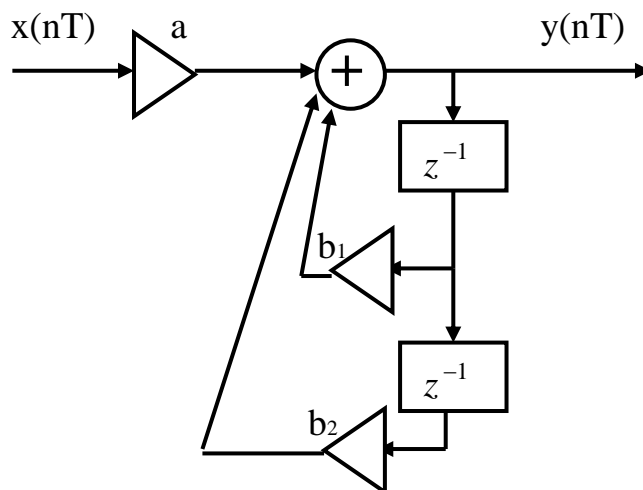


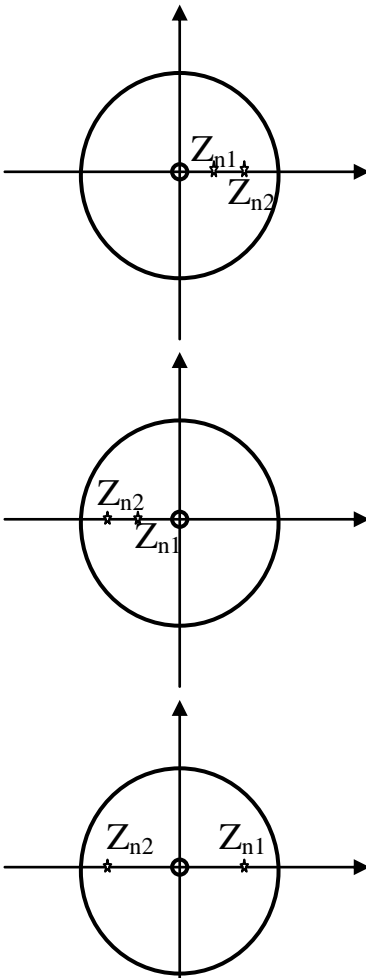
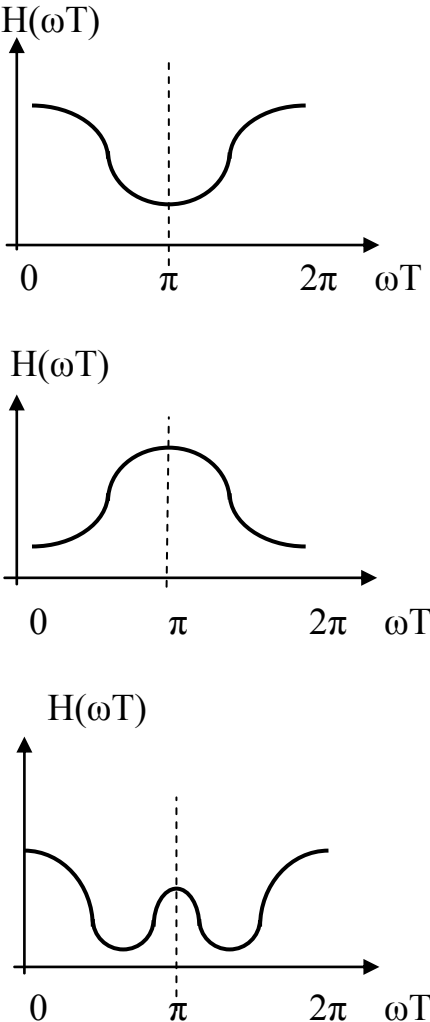
Рис. 3.8

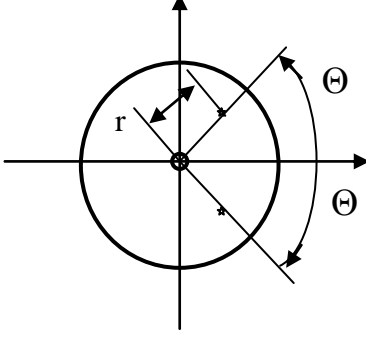
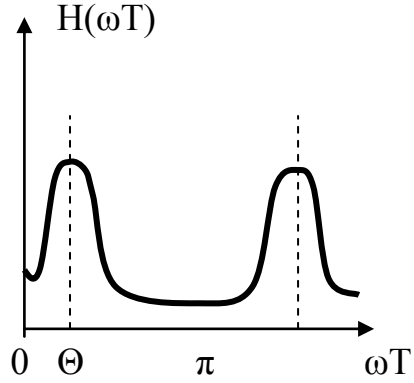
В табл. 3.4 приведены нуль-полосные диаграммы и АЧХ ЦФ.

Таблица 3.3

Наименование функции	Уравнения функций рекурсивного ЦФ
Передаточная функция	$H(z) = \frac{a}{1 - b_1 \cdot z^{-1} - b_2 \cdot z^{-2}}$
Разностное уравнение	$y(nT) = a \cdot x(nT) + b_1 y(nT - T) + b_2 y(nT - 2T)$
АЧХ	$H(\omega T) = \frac{a}{\sqrt{(1 - b_1 \cos \omega T - b_2 \cos 2\omega T)^2 + (b_1 \sin \omega T + b_2 \sin 2\omega T)^2}}$
ФЧХ	$\varphi(\omega T) = -\arctg \frac{b_1 \sin \omega T + b_2 \sin 2\omega T}{1 - b_1 \cos \omega T - b_2 \cos 2\omega T}$

Таблица 3.4

Действительные полюсы при $b_1^2 + 4b_2 > 0$		
$z_{01,2} = 0$ $z_{\Pi 1,2} = \frac{b_1}{2} \pm \sqrt{\frac{b_1^2}{4} + b_2}$ $b_1 = z_{\Pi 1} + z_{\Pi 2}$ $b_2 = -z_{\Pi 1} \cdot z_{\Pi 2}$		

Комплексно-сопряженные полюсы при $b_1^2 + 4b_2 < 0$		
$z_{01,2} = 0$ $z_{П1,2} = r \cdot e^{\pm j\theta}$ $b_1 = 2 \cdot r \cdot \cos \theta$ $b_2 = -r^2$		

Дискретная импульсная характеристика фильтра в случае действительных полюсов представляет собой сумму двух экспоненциальных последовательностей и равна

$$h(n) = a \cdot \frac{Z_{n1}^{n+1} - Z_{n2}^{n+1}}{Z_{n1} - Z_{n2}}.$$

На рис. 3.9 представлена ДИХ фильтра при $Z_{n1} = 0.2$, $Z_{n2} = 0.5$, $a = 1$. Если $Z_{n1} = Z_{n2} = Z_n$, то $h(n) = a \cdot (n+1) \cdot Z_n^n$.

Если полюсы комплексно-сопряженные, то ДИХ равна

$$h(n) = \frac{a \cdot r^n}{\sin \Theta} \cdot \sin(\Theta \cdot (n+1)).$$

На рис. 3.10 показана ДИХ при $a = 1$, $r = 0.9$, $\Theta = \pi/4$.

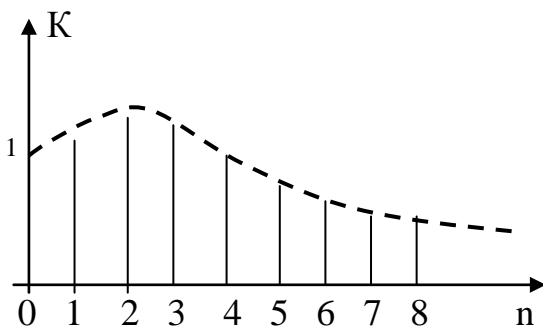


Рис. 3.9

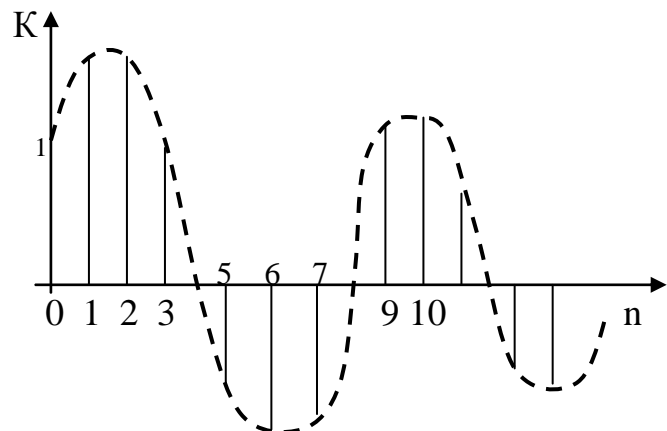


Рис. 3.10

3.5. Каноническая схема ЦФ второго порядка

Схема ЦФ приведена на рис. 3.2. Основные соотношения, характеризующие ЦФ 2-го порядка, приведены в табл. 3.5.

Таблица 3.5

Наименование функции	Уравнения функций рекурсивного ЦФ
Разностное уравнение	$y(nT) = a_0 x(nT) + a_1 x(nT - T) + a_2 x(nT - 2T) +$ $+ b_1 y(nT - T) + b_2 y(nT - 2T)$
Системная функция	$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}$
АЧХ при $a_0 = 1$	$H(wT) = \frac{\sqrt{1 + a_1^2 + a_2^2 + 2a_1(1 + a_2)\cos wT + 2a_2 \cos 2wT}}{\sqrt{1 + b_1^2 + b_2^2 + 2b_1(1 - b_2)\cos wT + 2b_2 \cos 2wT}}$
АЧХ при $a_0 = 1, a_1 = a_2 = 0,$ $w_{\Pi}T = 90^\circ$	$H(wT) = 1 / \sqrt{1 + 2r^2 \cos 2wT + r^4},$ <p>где $r = z_{\Pi 1,2}$ - расстояние полюса от начала координат;</p> $z_{\Pi 1,2} = b_1/2 \pm \sqrt{b_1^2 + b_2};$ <p>при $b_2 < 0$ и $b_2 > b_1^2/4$</p> $z_{\Pi 1} = b_1/2 + j\sqrt{ b_2 - b_1^2/4}, \quad z_{\Pi 2} = z_{\Pi 1}^*;$ $b_1 = 2 \operatorname{Re}(z_{\Pi 1,2}) = 2 \cdot r \cdot \cos w_{\Pi}T;$ $b_2 = - z_{\Pi 1,2} ^2 = -r^2.$

Амплитудно-частотная характеристика рекурсивного ЦФ второго порядка при $a_0 = 1, a_1 = a_2 = 0$ представлена на рис. 3.11.

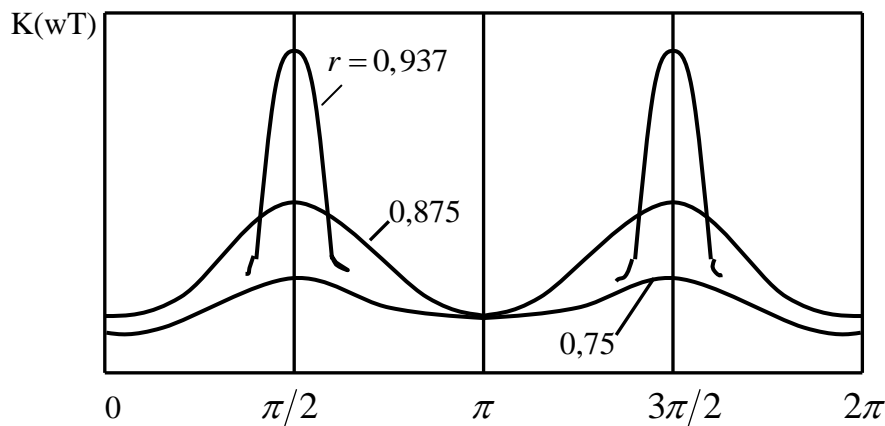


Рис. 3.11

Рассмотрим свойства ЦФ, вытекающие из вида системной функции. Если одновременно все задержки в ЦФ увеличить в m раз, то системная функция

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^N a_i z^{-mi}}{1 + \sum_{j=1}^M b_j z^{-mj}}. \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Для частотных характеристик это приведет к m -кратному сжатию масштаба по частоте, и на отрезке $0..F$ отложится теперь столько равномерно разнесенных характеристик, сколько прежде их умещалось на отрезке $0..mF$. (Напомним, что АЧХ, ФЧХ ЦФ являются периодическими с периодом $\omega = 2\pi/T = 2\pi F$, где T -период дискретизации сигнала).

Второе свойство касается коэффициентов ЦФ. Если у всех коэффициентов перед нечетными степенями Z^{-1} изменить знак, то фильтр нижних частот станет фильтром верхних частот и наоборот. Это вытекает из периодичности характеристик ЦФ. Требуемый переход от ФНЧ к ФВЧ или наоборот осуществляется заменой переменной f на $f + F/2$, а для аргумента ωT -добавлением π : $\omega T \rightarrow \omega T + \pi$, что для переменной $Z^k = \exp(-jk\omega T)$ приводит к появлению множителя $\exp(-jk\pi)$, который равен 1 для четных K и -1 для нечетных K . Новая системная функция через старые коэффициенты запишется в виде:

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^N (-1)^i a_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^M (-1)^j b_j z^{-j}}. \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

4. ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

4.1. Основные этапы проектирования цифровых фильтров

В заданиях на проектирование ЦФНЧ основным является требование к АЧХ передаточной функции, задаваемое граничной частоте f_{Π} полосы пропускания, в которой затухание не превышает заданного значения A_{Π} , и граничной частотой полосы задерживания, f_{Σ} которой затухание должно быть не меньше заданного значения A_{Σ} (рис. 4.1).

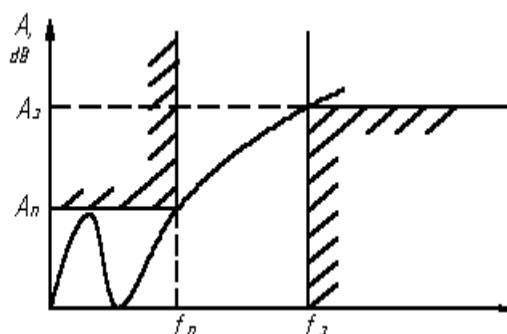


Рис. 4.1

Расчет фильтра сводится к расчету фильтра прототипа (ФП) с последующим преобразованием схемы ФП к схеме ЦФ с заданными характеристиками. Фильтром прототипом называют ФНЧ с нормированной полосой пропускания $\nu_{\Pi} = 1$. Текущая частота f и частота в масштабе ФП связаны соотношением $\nu = f/f_{\Pi}$.

Определение передаточной функции ФП $K(\nu)$ начинают с определения квадрата модуля частотной характеристики

$$|K(j\nu)|^2 = 1/(1 + \varepsilon^2 \Phi(\nu^2)),$$

где ε — коэффициент, характеризующий постоянство затухания в полосе пропускания $\nu \in [0, 1]$;

$\Phi(\nu^2)$ — дробно-рациональная функция, она меньше или равна единице в полосе пропускания и больше единицы за её пределами при $\nu > 1$.

Рассмотрим порядок проектирования фильтров Чебышева, отличающихся равноволновым приближением в полосе пропускания и монотонно возрастающим затуханием за её пределами. Квадрат модуля передаточной характеристики фильтра

$$|K(j\nu)|^2 = 1/(1 + \varepsilon^2 T_n^2(\nu)),$$

где $T_n(\nu)$ — полином Чебышева n — го порядка.

Коэффициент ε связан с допустимой неравномерностью АЧХ в полосе пропускания A_{Π} , дБ

$$\varepsilon \leq \sqrt{10^{A_{\Pi}/10} - 1}.$$

По заданным значениям ν_3 , A_3 , A_{Π} определяют порядок фильтра

$$n = E_{\nu} \left[\arccos(\sqrt{10^{A_3/10} - 1/\varepsilon}) \arccos(h\nu_3) \right],$$

где $E_{\nu}(x)$ – целая часть с избытком или $E_{\nu}(x) = E(x) + 1$ при нецелом x , а при $E_{\nu}(x) = x$ при целом.

Пусть ФНЧ Чебышева имеет следующие характеристики: $A_3 = 30$ дБ, $A_{\Pi} = 3$ дБ, $f_{\Pi} = 1$ кГц, $f_3 = 2$ кГц. Расчет ФНЧ проведем с помощью программ [36].

1. Граничная частота задерживания в масштабе ФП $\nu_3 = f_3/f_{\Pi} = 2/1 = 2$.
2. Определим коэффициент ε и порядок фильтра:

$$\varepsilon = 0,9976279; \quad n = 4.$$

3. Получим коэффициенты квадратичных множителей знаменателя передаточной функции:

$$K(p) = \frac{1}{(1,107313 \cdot p^2 + 0,1886202 \cdot p + 1) \cdot (5,102568 \cdot p^2 + 2,098370 \cdot p + 1)}.$$

3. Осуществим билинейное преобразование каждого квадратичного множителя передаточной функции $K(p)$ путем замены переменной p в функции $K(p)$ аналогового фильтра выражением

$$p = (2/T)(z - 1)/(z + 1)$$

по формуле

$$(\alpha p^2 + \beta p + 1) \rightarrow (Az^2 + Bz + C),$$

где $A = (2/T)^2 \alpha + (2/T) \beta + 1$;

$$B = 2(1 + (2/T)\alpha);$$

$$C = (2/T)^2 \alpha - (2/T) \beta + 1,$$

а при $\alpha = 0$ коэффициенты $A = 0$; $B = 1 + (2/T)\beta$ и $C = 1 - (2/T)\beta$.

При нормированной частоте дискретизации $\nu_d = 2$ получим период дискретизации $T = 1/\nu_d = 0,5$. В этом случае передаточная функция цифрового рекурсивного ФНЧ 4-го порядка имеет вид

$$K(p) = \frac{(1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{(19,47148 - 33,43401z^{-1} + 17,96252z^{-2})} \cdot \frac{(1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{(91,03456 - 161,2821z^{-1} + 74,24760z^{-2})}.$$

Осуществив несложные преобразования, получим

$$K(z) = K_1(z) \cdot K_2(z),$$

где

$$K_1(z) = \frac{(1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{(1 - 1,717075z^{-1} + 0,922504z^{-2})} \cdot \frac{1}{19,47148};$$

$$K_2(z) = \frac{(1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{(1 - 1,771657z^{-1} + 0,8155979z^{-2})} \cdot \frac{1}{91,03456}.$$

4. Затухание ФНЧ Чебышева, рассчитанное по программе [36], представлено на рис. 4.2.

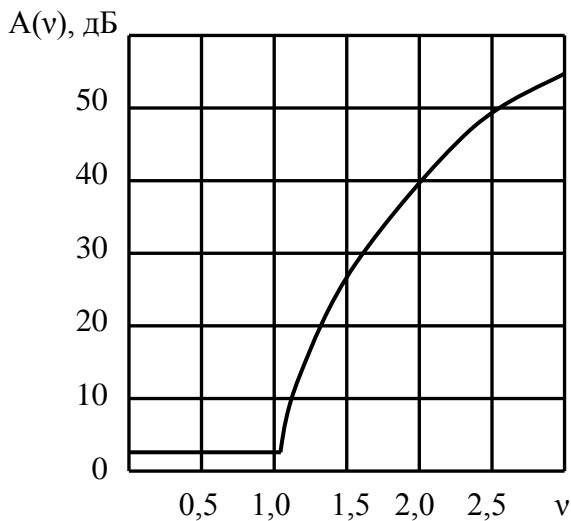


Рис. 4.2

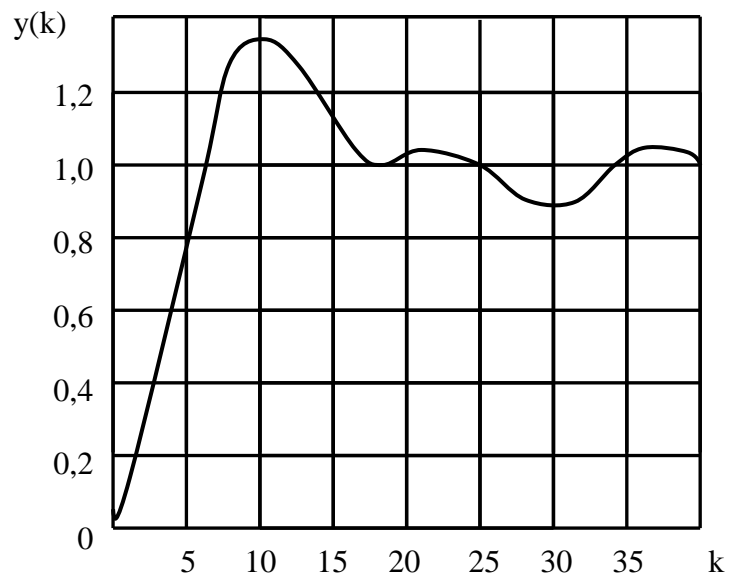


Рис. 4.3

5. На рис. 4.3 изображена последовательность $y(k)$ на выходе ФНЧ при входной последовательности $x(k) = 1, 1, 1 \dots 1$.
6. На рис. 4.4 приведена схема цифрового рекурсивного ФНЧ.

Выбрав N членов импульсной характеристики (так, чтобы $e^{-Nt/\tau} \ll 1$), получим выражение для сигнала на выходе нерекурсивного ЦФ.

$$y(nT) = x(nT) + e^{-T/\tau} x(nT - T) + e^{-2T/\tau} x(nT - 2T) + \dots + e^{-NT/\tau} x(nT - NT).$$

Таким образом, коэффициенты a_i нерекурсивного ЦФ равны

$$a_0 = 1, a_1 = e^{-T/\tau}, a_2 = e^{-2T/\tau}, \dots, a_M = e^{-NT/\tau}.$$

Системная функция данного ЦФ

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kT/\tau} z^{-k} = \frac{1}{1 - e^{-T/\tau} z^{-1}} = \frac{a}{1 - bz^{-1}}.$$

Алгоритм цифровой фильтрации рекурсивного ЦФ, аналогичного RC-цепи:

$$y(nT) = ax(nT) + by(nT - T).$$

Сравнив алгоритмы цифровой фильтрации для нерекурсивного и рекурсивного ЦФ, можно заметить, что для определения одного значения выходного сигнала с помощью алгоритма нерекурсивного фильтра требуется выполнить $2N$ операций, а при использовании алгоритма рекурсивного фильтра - две операции. В этом основное преимущество рекурсивных ЦФ. Кроме того, рекурсивные ЦФ осуществляют обработку сигнала с более высокой точностью, т. к. они более правильно реализуют импульсную характеристику без отбрасывания её "хвоста".

Для определения АЧХ и ФЧХ ЦФ необходимо подставить $z = \exp(j\omega T)$ в уравнение для передаточной функции

$$|H(\omega)| = |H(e^{j\omega T})|, \varphi(\omega) = \arg(H(e^{j\omega T})).$$

Так как АЧХ и ФЧХ являются периодическими с периодом $\omega = 2\pi/T = 2\pi F$, то характеристики ЦФ необходимо рассматривать лишь в диапазоне частот $0 \dots F$.

4.3. Вычисление коэффициентов цифрового ФНЧ с изменяемой частотой среза

Системная функция каскадного ЦФНЧ с частотой среза θ , состоящего из K звеньев первого порядка и L звеньев второго порядка, имеет вид

$$H(z) = b_0 \cdot \prod_{n=1}^K S_n(z) \cdot \prod_{i=1}^L H_i(z) = b_0 \cdot \prod_{n=1}^K \frac{1 + a_n z^{-1}}{1 + b_n z^{-1}} \cdot \prod_{i=1}^L \frac{1 + c_i z^{-1} + d_i z^{-2}}{1 + e_i z^{-1} + f_i z^{-2}}.$$

Системная функция преобразованного ЦФНЧ, имеющего аналогичную структуру, но с другой частотой среза

$$w_c = 2\pi f_c / f_\partial,$$

где f_c - полоса пропускания ЦФ, Гц;

f_∂ – частота дискретизации, Гц;

равна

$$H(z) = b_0(w_c) \prod_{n=1}^K S_n^*(z) \prod_{i=1}^L H_i^*(z) = b_0 \cdot \prod_{n=1}^K \frac{1+a_n(w_c)z^{-1}}{1+b_n(w_c)z^{-1}} \cdot \prod_{i=1}^L \frac{1+c_i(w_c)z^{-1}+d_i(w_c)z^{-2}}{1+e_i(w_c)z^{-1}+f_i(w_c)z^{-2}}.$$

Коэффициенты преобразованного ЦФНЧ первого порядка вычисляются по следующим формулам:

$$a_n(w_c) = \frac{tg \frac{w_c}{2} - M_{1n}}{tg \frac{w_c}{2} + M_{1n}}; \quad b_n(w_c) = \frac{tg \frac{w_c}{2} - M_{2n}}{tg \frac{w_c}{2} + M_{2n}},$$

где M_{1n} и M_{2n} – постоянные коэффициенты, характеризующие используемый фильтр- прототип, определяются по формулам

$$M_{1n} = \frac{1-a_n}{1+a_n} tg \frac{\theta_c}{2}; \quad M_{2n} = \frac{1-b_n}{1+b_n} tg \frac{\theta_c}{2}.$$

Значения коэффициентов преобразованного ЦФНЧ второго порядка получим из следующих формул:

$$\begin{aligned} c_i(w_c) &= \frac{2(tg^2 \frac{w_c}{2} - N_{1i})}{(tg \frac{w_c}{2} + N_{2i})^2 - N_{3i}}; & d_i(w_c) &= \frac{(tg \frac{w_c}{2} - N_{2i})^2 - N_{3i}}{(tg \frac{w_c}{2} + N_{2i})^2 - N_{3i}}; \\ e_i(w_c) &= \frac{2(tg^2 \frac{w_c}{2} - N_{4i})}{(tg \frac{w_c}{2} + N_{5i})^2 - N_{6i}}; & f_i(w_c) &= \frac{(tg \frac{w_c}{2} - N_{5i})^2 - N_{6i}}{(tg \frac{w_c}{2} + N_{5i})^2 - N_{6i}}; \end{aligned}$$

где $N_{1i} \dots N_{6i}$ – постоянные коэффициенты, которые заранее вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
N_{1i} &= \frac{1 - c_i + d_i}{1 + c_i + d_i} \operatorname{tg}^2 \frac{\theta_c}{2}; & N_{2i} &= \frac{1 - d_i}{1 + c_i + d_i} \operatorname{tg}^2 \frac{\theta_c}{2}; \\
N_{3i} &= \frac{c_i^2 - 4d_i}{(1 + c_i + d_i)^2} \operatorname{tg}^2 \frac{\theta_c}{2}; & N_{4i} &= \frac{1 - e_i + f_i}{1 + e_i + f_i} \operatorname{tg}^2 \frac{\theta_c}{2}; \\
N_{5i} &= \frac{1 - f_i}{1 + e_i + f_i} \operatorname{tg}^2 \frac{\theta_c}{2}; & N_{6i} &= \frac{e_i^2 - 4f_i}{(1 + e_i + f_i)^2} \operatorname{tg}^2 \frac{\theta_c}{2}.
\end{aligned}$$

Величину нормирующего множителя $b_0(w)$, который равен произведению множителей отдельных звеньев, вычисляют при $w = \theta = 0$:

$$b_0(w_c) = \frac{b_0 \cdot \prod_{n=1}^K \frac{1 + a_n z^{-1}}{1 + b_n z^{-1}} \cdot \prod_{i=1}^L \frac{1 + c_i z^{-1} + d_i z^{-2}}{1 + e_i z^{-1} + f_i z^{-2}}}{b_0 \cdot \prod_{n=1}^K \frac{1 + a_n(w_c) z^{-1}}{1 + b_n(w_c) z^{-1}} \cdot \prod_{i=1}^L \frac{1 + c_i(w_c) z^{-1} + d_i(w_c) z^{-2}}{1 + e_i(w_c) z^{-1} + f_i(w_c) z^{-2}}}.$$

В [22] более подробно рассмотрен алгоритм вычисления коэффициентов ЦФНЧ с изменяемой полосой пропускания и приведен пример применения данного алгоритма. В качестве прототипа использовался ЦФ (1 звено 2 порядка) с коэффициентами

$b_0 = 0,105$; $c = -0,7404$; $d = 0,9999$; $e = -1,541$; $f = 0,6828$
и полосой пропускания $2\theta_c = 0,4712$. Для ЦФ с полосой пропускания $2w_c = 0,7854$ получены коэффициенты

$b_0 = 0,1589$; $c = 0,5555$; $d = 0,9969$; $e = 1,068$; $f = 0,5036$,
а для ЦФ с полосой $2w_c = 0,1571$ коэффициенты равны
 $b_0 = 0,08748$; $c = 1,83$; $d = 0,9996$; $e = 1,869$; $f = 0,8852$.

4.4. Микропроцессорная реализация цифровых фильтров

Цифровые фильтры, построенные на МП, имеют ряд преимуществ перед ЦФ, выполненными на интегральных микросхемах с жесткой логикой:

- легкость изменения параметров и характеристик ЦФ, что осуществляется модификацией программного обеспечения или таблиц коэффициентов;
- возможность реализации адаптивных фильтров, параметры которых изменяются в процессе работы.

Основным недостатком ЦФ, реализованных на МП, является ограниченное быстродействие, которое определяет граничную частоту входного сигнала.

Практической основой для построения ЦФ обычно являются выражения,

определяющие его реализацию в частотной или временной областях.

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^M b_j z^{-j}}; \quad y_n = \sum_{m=0}^n x_m h_{n-m} = \sum_{m=0}^n x_{n-m} h_m,$$

где x_i , y_i - дискретные значения входного и выходного сигналов;

a_i , b_j - коэффициенты фильтра;

z - оператор единичной задержки ;

$\{h_n\}$ - импульсная характеристика ЦФ.

Процедура фильтрации осуществляется путем использования операции задержки, умножения на коэффициенты фильтра a_j и b_i или на значения h_n и сложения, которые могут быть реализованы как программными методами, так и аппаратным путем на схемах "жесткой логики". Краткое содержание этапов проектирования ЦФ приведено в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Этапы проектирования	Процесс проектирования	
Задача	Формулировка задачи. Определение входных и выходных требований.	
Метод	Выбор и обоснование метода. Расчет и оптимизация параметров	
Алгоритм	Разработка блок-схемы алгоритма, состава и количества операций, операндов и констант, допустимого времени вычислений, характера обмена данными с внешними устройствами	
Этапы проектирования	Аппаратная часть	Программная часть
1	2	3
Структура	Разработка структурной схемы устройства сопряжения МП с радиотехническими блоками.	Выбор микропроцессорного комплекта
Детализация	Разработка функциональной схемы устройства сопряжения.	Разработка рабочей программы на языке ассемблера. Отладка и редактирование программы.
Корректировка	Определение аппаратных затрат. Анализ технических характеристик. Корректировка предыдущих этапов.	Определение количества микроопераций, ограничений по времени, объема ОЗУ и ПЗУ. Корректировка предыдущих этапов.

Продолжение табл. 4.1

1	2	3
Реализация	Разработка принципиальной схемы устройства сопряжения, конструкции и технической документации.	Запись готовой программы на носители внешнего ЗУ
Воплощение	Изготовление ЦФ на базе МП. Испытание и отладка в процессе совместной работы аппаратной и программной частей	Занесение программы в ПЗУ

Особенности проектирования радиотехнических устройств с использованием микропроцессоров серии КР580 изложены в [18; 22; 28; 38], а система команд ЦПЭ К580ИК80 представлена в [1; 22; 28].

При разработке цифровых систем на базе МП серии К583, К584 можно воспользоваться данными, изложенными в [24; 25]. В [28, с.293] дан пример проектирования ЦФ нижних частот на основе МП серии К584. Основы проектирования ЦФ на основе алгоритма БПФ изложены в [38, с.90], реализация ЦФ на МП серии К589 дана в [37, с.121], а на МП серии К584 - в [37, с.131]. В [20, с.21] описан МП К1815ВФЗ, предназначенный для цифровой обработки сигналов. Микропроцессорные комплекты БИС серий К1810 и К1815 описаны в журналах "Микропроцессорные средства и системы" 1986 № 1, с.28 и 1986, №2, с.2 и с.14.

Однокристалльный микропроцессор К1815ВФЗ предназначен для построения устройств БПФ, ЦФ и систем ЦОС на их основе. Машинный язык МП является языком высокого уровня, а набор команд обеспечивает выполнение таких операций как БПФ, умножение и сложение комплексных чисел, нерекурсивный и рекурсивный ЦФ, а также логических операций. Предусмотрена возможность программного управления временем задержки выдачи результата. Микропроцессор обеспечивает автоматическое масштабирование. Производительность МП - 1..2 млн. арифметических или 100 тыс. крупных операций над 24-разрядными операндами.

Основные электрические параметры

Ток питания, мА.....	300
Тактовая частота, МГц	10
Напряжение питания, В.....	1,5...5

5. ОСНОВЫ КВАДРАТУРНОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

5.1. Аналитический сигнал

Принципиальным недостатком ЦФ является ограниченная полоса частот обрабатываемых сигналов, что связано с конечной скоростью переключения цифровых схем. Рассмотрим, как при цифровой обработке сигналов снизить частоту дискретизации f_0 . Если цифровую обработку вести на частоте f_0 , то $f_0 > 2f_0$. Уменьшение частоты f_0 упрощает аппаратуру, уменьшает потребляемую мощность. Наиболее выгодной оказывается предельно низкая "промежуточная" частота сигнала, равная нулю. Однако при $f_0 = 0$ необходимо переходить к комплексному представлению сигнала.

Пусть $S(t)$ - исходный действительный сигнал.

Комплексный сигнал равен

$$z(t) = S(t) + j\hat{S}(t),$$

где $\hat{S}(t)$ - преобразование Гильберта.

Сигнал

$$\hat{S}(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(\tau)}{\tau - t} d\tau$$

является сопряженным по Гильберту сигналу $S(t)$.

Представим исходный сигнал

$$S(t) = A(t)\cos\psi(t),$$

где $A(t)$ и $\psi(t)$ - огибающая и фаза сигнала, которые равны

$$A(t) = \sqrt{S^2(t) + \hat{S}^2(t)}, \quad \psi(t) = \arctg\left(\frac{\hat{S}(t)}{S(t)}\right).$$

Сигнал $z(t)$ принято называть аналитическим.

5.2. Спектр аналитического сигнала

Для определения спектра аналитического сигнала $z(t)$ необходимо знать связь спектров исходного сигнала $S(t)$ и его преобразования Гильберта $\hat{S}(t)$. Известно, что преобразование Гильберта над сигналом $S(t)$ не изменяет модуль спектра $S(w)$ этого сигнала, а фазу всех составляющих его спектра поворачивает на $-\pi/2$. Тогда для $\hat{S}(t)$ можно записать

$$\hat{S}(w) = \begin{cases} -jS(w), & w > 0; \\ jS(w), & w < 0, \end{cases}$$

где $S(w)$ и $\hat{S}(w)$ – спектры сигналов $S(t)$ и $\hat{S}(t)$, а

$j = +\sqrt{-1} = \exp(j\frac{\pi}{2})$ показывает поворот фазы сигнала.

Спектр аналитического сигнала $z(w)$ (рис. 5.1)

$$z(w) = \begin{cases} S(w) + j(-j)S(w) = 2S(w), & w > 0; \\ S(w) + j \cdot j \cdot S(w) = 0, & w < 0. \end{cases}$$

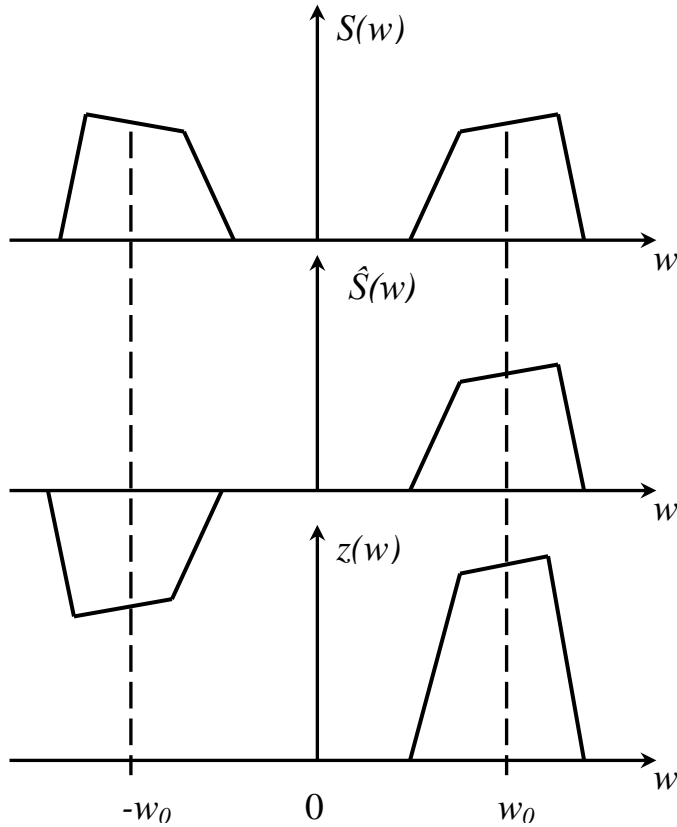


Рис. 5.1

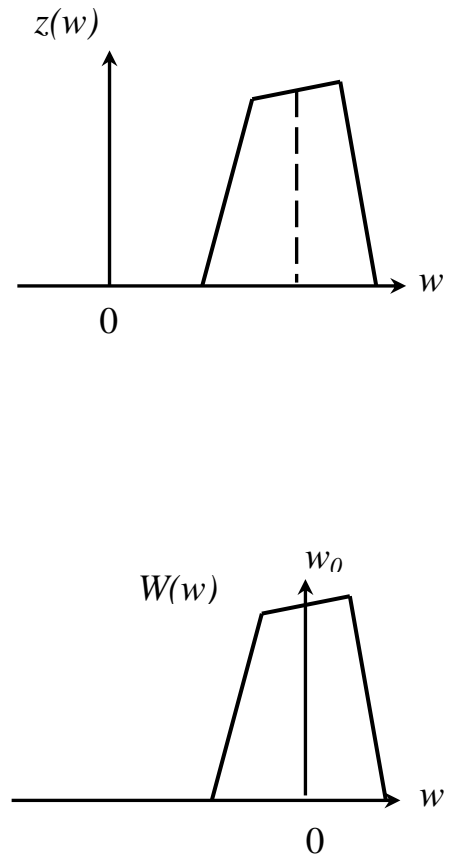


Рис. 5.2

Таким образом, аналитический сигнал имеет односторонний спектр только в области положительных частот. Дискретизировать аналитический сигнал можно с частотой $f_{д \geq \Delta f}$.

Выразим сигнал $S(t)$ через сигнал $z(t)$:

$$\begin{aligned} S(t) &= \operatorname{Re} z(t) = A(t) \cos \psi(t) = \operatorname{Re} \left[A(t) e^{j\psi(t)} \right] = \\ &= \operatorname{Re} \left[A(t) e^{j\theta(t)} e^{jw_0 t} \right] = \operatorname{Re} \left[W(t) e^{jw_0 t} \right], \end{aligned}$$

где $\Psi(t) = w_0(t) + \Theta(t)$;

$W(t) = U(t) + jV(t)$;

$W(t) = A(t) \exp(j \Theta(t))$ – комплексная огибающая;

$U(t)$, $V(t)$ – синфазная и квадратурная составляющие комплексной огибающей.

Комплексная огибающая $W(t)$ – это сигнал, смещенный по частоте на w_0 вниз, на нулевую несущую (рис. 5.2)

$$z = We^{jw_0 t}; \quad W = ze^{-jw_0 t}.$$

Так как спектр комплексной огибающей не односторонний, то она не является аналитическим сигналом.

Сущность квадратурной обработки сигналов - получение из исходного сигнала его комплексной огибающей и обработка этой огибающей, представленной двумя действительными сигналами: синфазной и квадратурной составляющими.

5.3. Способы разложения сигналов на квадратурные составляющие

1. Фазовый способ получения квадратур

Рассмотрим фазовый способ получения синфазной и квадратурной составляющих комплексной огибающей исходного действительного сигнала:

$$W = U + jV = ze^{-jw_0 t} = (S + j\hat{S})(\cos w_0 t - j \sin w_0 t).$$

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} U(t) = S(t)\cos(w_0 t) + \hat{S}(t)\sin(w_0 t); \\ V(t) = S(t)\sin(w_0 t) - \hat{S}(t)\cos(w_0 t). \end{cases}$$

Так как модуль спектра сигнала $\hat{S}(t)$ совпадает с модулем спектра сигнала $S(t)$, а фаза отстает на $\pi/2$, то для получения сигнала $\hat{S}(t)$ достаточно пропустить сигнал $S(t)$ через фазовращатель на $-\pi/2$ с усилением, равным единице. Для этого можно использовать цифровой преобразователь Гильберта (ЦПГ). Преобразователь Гильберта представляет собой нерекурсивный ЦФ с антисимметричными коэффициентами и задержками $2T$. Фаза ЦПГ во всей полосе равна $-\pi/2$, а коэффициент усиления равен единице. Схема устройства, формирующего квадратурные составляющие, представлена на рис. 5.3.

2. Фильтровый способ получения квадратур

Выразим сигнал $S(t)$ через квадратуры $U(t)$ и $V(t)$:

$$S(t) = \operatorname{Re} z(t) \operatorname{Re} \left[W(t) e^{jw_0 t} \right] = \operatorname{Re} [(U(t) + jV(t))(\cos w_0 t + j \sin w_0 t)];$$

$$S(t) = U(t) \cos w_0 t - V(t) \sin w_0 t.$$

Умножим левую и правую части равенства вначале на $2\cos w_0 t$, а затем на $-2\sin w_0 t$:

$$\begin{aligned} a) \quad S \cdot 2\cos w_0 t &= U(t) \cdot 2\cos^2 w_0 t - V(t) \cdot 2\sin w_0 t \cdot \cos w_0 t = \\ &= U(t)[1 + \cos 2w_0 t] - V(t)\sin 2w_0 t = U(t) + U(t)\cos 2w_0 t - V(t)\sin 2w_0 t; \end{aligned}$$

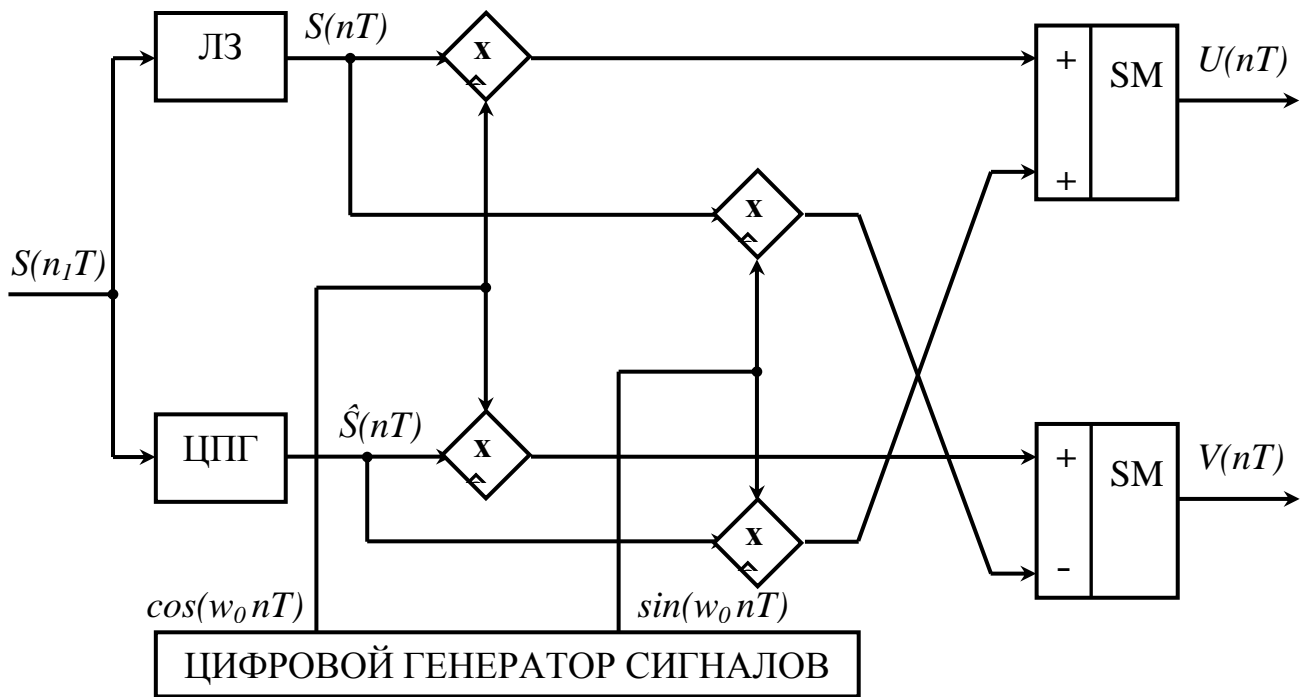


Рис. 5.3

б)

$$\begin{aligned}
 -S \cdot 2 \sin w_0 t &= -U(t) \cdot 2 \sin w_0 t \cdot \cos w_0 t + V(t) \cdot 2 \sin^2 w_0 t = \\
 &= -U(t) \cdot \sin 2w_0 t + V(t) \cdot [1 - \cos 2w_0 t] = \\
 &= -U(t) \cdot \sin 2w_0 t + V(t) - V(t) \cdot \cos 2w_0 t.
 \end{aligned}$$

Если теперь с помощью ФНЧ устранить составляющие с удвоенной несущей частотой, то получим квадратуры $U(t)$ и $V(t)$. Описанный алгоритм реализован в схеме, представленной на рис. 5.4.

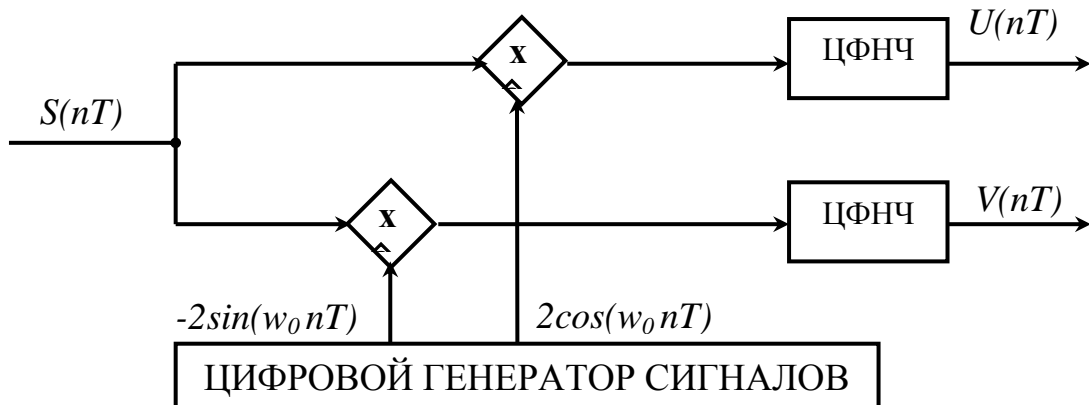


Рис. 5.4

Выберем f_δ такой, чтобы после дискретизации сигнал оказался на несущей частоте, равной четверти частоты дискретизации: $f_\delta = f_0$. Тогда последовательности $-2\sin(w_0 nT)$ и $2\cos(w_0 nT)$ превращаются в периодические последовательности 0, -2, 0, 2 и 2, 0, -2, 0. При этом умножители можно заменить

регистрами с управляемой инверсией или инверторами и коммутаторами, что намного проще, чем полные умножители.

3. Способ получения квадратур узкополосного сигнала

Если сигнал $S(t)$ узкополосный (ширина его спектра $\Delta f \ll f_0$), то можно использовать способ получения квадратур сигнала одновременно с его дискретизацией. Для этого дискретизацию необходимо производить в двух каналах с задержкой импульса взятия выборки в одном из каналов относительно другого на четверть периода несущей частоты исходного сигнала (рис.5.5)

$$\Delta t = \frac{t_0}{4} = \frac{1}{4f_0} = \frac{2\pi}{4\omega_0} = \frac{\pi}{2\omega_0}.$$

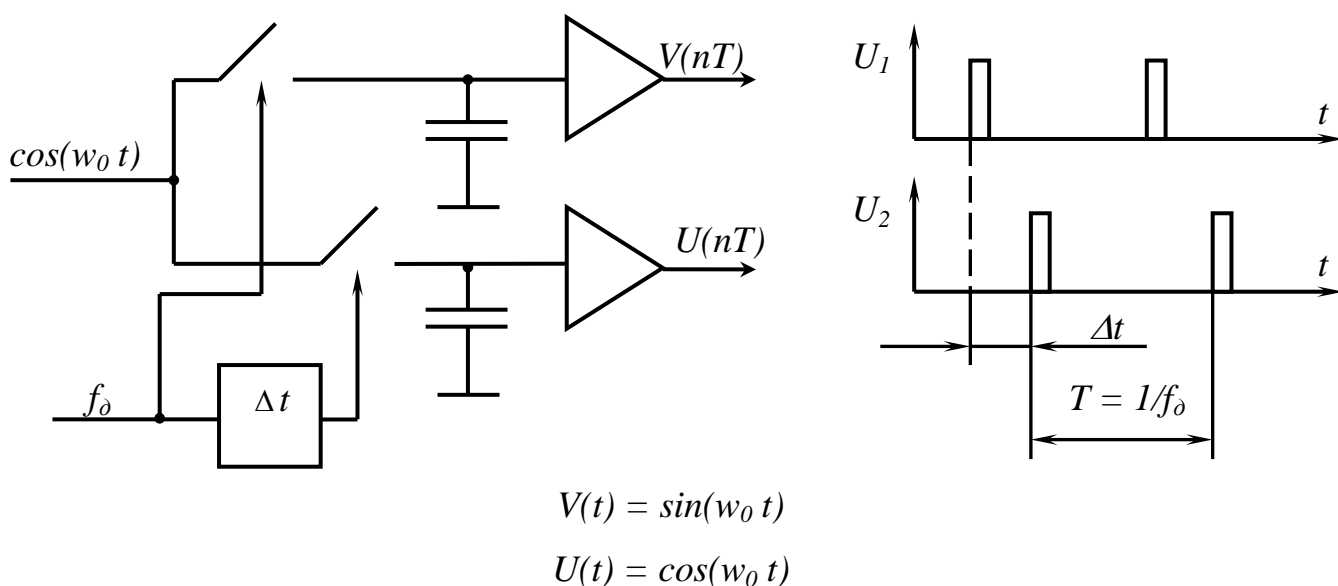


Рис. 5.5

Если отнести выборку к моменту, когда замыкается нижний ключ, то можно для верхней цепи записать:

$$\begin{aligned} V(nT) &= \cos[\omega_0(nT - \Delta t)] = \cos\left[\omega_0 nT - \frac{\pi}{2\omega_0} \cdot \omega_0\right] = \\ &= \cos(\omega_0 nT) \cdot \cos \frac{\pi}{2} + \sin(\omega_0 nT) \cdot \sin \frac{\pi}{2} = \sin(\omega_0 nT). \end{aligned}$$

Таким образом, для сигнала несущей частоты разложение на квадратуры производится совершенно точно. Однако для других частот спектра имеется ошибка разложения на квадратуры, заключающаяся в том, что сдвиг фаз между квадратурами составляет не $-\pi/2$, а $-(\pi/2 + \delta\varphi)$,

$$\text{где } \delta\varphi = \frac{\pi}{2} \frac{\delta\omega}{\omega_0} = \frac{\pi}{2} \frac{\delta f}{f_0}, \quad f = f_0 + \delta f.$$

Если $\delta f \ll f_0$, то ошибкой разложения на квадратуры можно пренебречь.

Если сдвиг $\Delta t = \pi / (2w_0) = 1/(4f_0)$ необходимо использовать для различных несущих f_0 , то систематическую погрешность фазы можно устранить с помощью последующей коррекции второй квадратуры.

Пусть сдвиг равен не $\Delta t_0 = \pi / (2w_0) = 1/(4f_0)$, а $\Delta t_1 = \Delta t_0 - \tau$.

Обозначим $\tilde{V}(nT)$ вторую квадратуру, полученную с фазовой погрешностью

$$\begin{aligned}\tilde{V}(nT) &= \cos[(nT - \Delta t_1)] = \cos\left[w_0\left(nT - \frac{\pi}{2w_0} + \tau\right)\right] = \cos\left[\left(w_0 nT - \frac{\pi}{2}\right) + \tau w_0\right] = \\ &= \sin(w_0 nT) \cdot \cos(w_0 \tau) + \cos(w_0 nT) \cdot \sin(w_0 \tau) = \\ &= V(nT) \cos \theta + U(nT) \sin \theta,\end{aligned}$$

где $\theta = \tau w_0$.

Тогда, значение второй квадратуры $V(nT) = [\hat{V}(nT) - U(nT) \sin \theta] \cdot \frac{1}{\cos \theta}$.

5.4. Особенности фильтрации комплексного сигнала

Пусть сигнал $S(t)$ имеющий спектр $S(f)$, поступает на фильтр R , АЧХ которого - $R(f)$ (рис.5.6). Эквивалентная низкочастотная обработка требует четырех фильтров (рис.5.7). Здесь низкочастотные фильтры S отвечают за симметричную часть частотной характеристики, а фильтры N - за несимметричную часть.

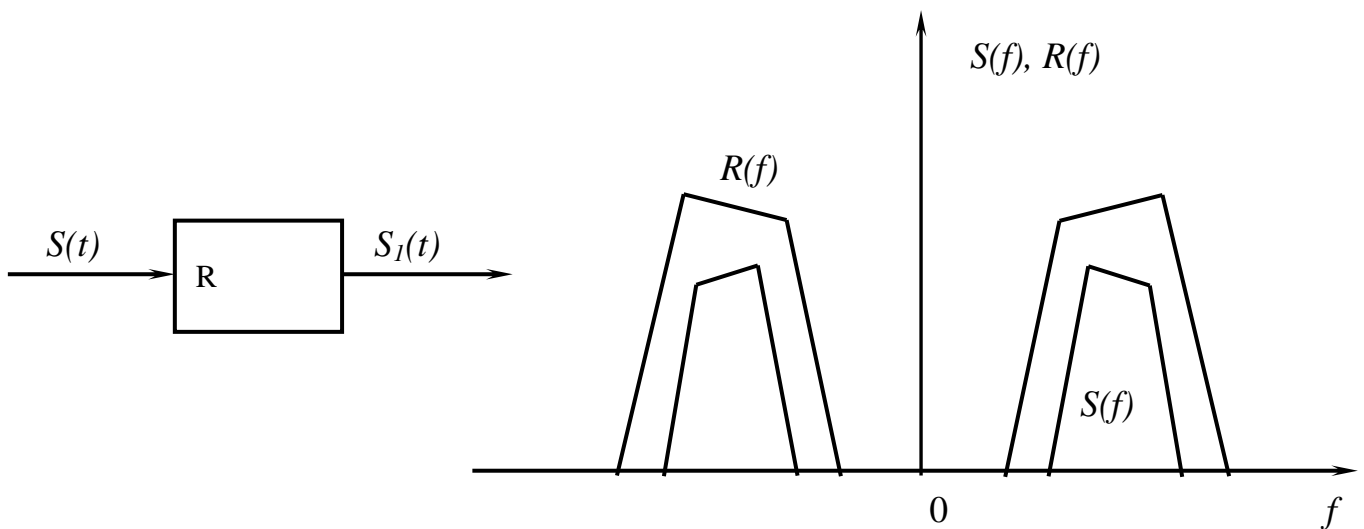


Рис. 5.6

Дискретизировать полосовой сигнал можно с минимальной частотой $f_0 = 2\Delta f$, а комплексный сигнал с $f_0 = \Delta f$. При этом количество отсчетов сохраняется, так как во втором случае имеем два отсчета (две квадратуры).

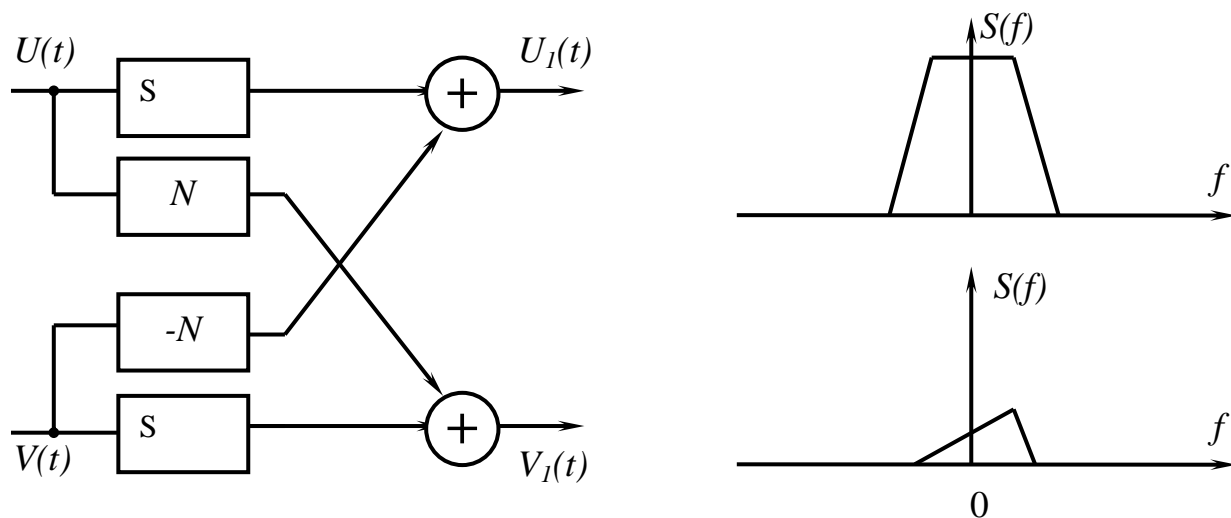


Рис. 5.7

Если M - порядок низкочастотных фильтров, то порядок полосового фильтра будет равен $2M$. Производительность полосового ЦФ пропорциональна величине

$$2\Delta f \cdot 2M = 4M\Delta f,$$

а производительность каждого из четырех ФНЧ равна $M \cdot \Delta f$. Производительность четырех фильтров составит $4 M \cdot \Delta f$.

В радиотехнике чаще используются сигналы с симметричным относительно несущей частоты спектром, для обработки которого используют фильтры с симметричными характеристиками. В этом случае в эквивалентной низкочастотной обработке АЧХ "несимметричных" фильтров N становится равной нулю, перекрестные связи исчезают, и обработка распадается на два отдельных независимых для каждой квадратуры канала. При этом имеем двукратный выигрыш в производительности ($2M \cdot \Delta f$) по сравнению с полосовой обработкой.

5.5. Цифровой квадратурный частотный детектор

Выходной сигнал идеального частотного детектора равен

$$y_{\text{чд}} = S_{\text{чд}} \frac{d}{dt} \varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ – фаза сигнала.

Для комплексной огибающей

$$W(t) = U(t) + jV(t)$$

модуль и фаза соответственно равны

$$|W(t)| = \sqrt{U^2(t) + V^2(t)}, \quad \varphi = \arctg \frac{V(t)}{U(t)}.$$

Подставим значение для фазы сигнала в формулу $y_{\text{чд}}$

$$\begin{aligned} y_{\text{чд}} &= S_{\text{чд}} \frac{d}{dt} \arctg \frac{V(t)}{U(t)} = S_{\text{чд}} \frac{U(t) \frac{dV(t)}{dt} - V(t) \frac{dU(t)}{dt}}{U^2(t) + V^2(t)} = \\ &= S_{\text{чд}} \frac{U(t) \frac{dV(t)}{dt} - V(t) \frac{dU(t)}{dt}}{|W(t)|^2}. \end{aligned}$$

Заменяем $\frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{x(nT) - x[(n-m)T]}{mT}$.

Пусть $S_{\text{чд}} = 1 \text{ В/Гц}$, тогда

$$\begin{aligned} y_{\text{чд}} &= \frac{1}{|W(nT)|^2} \left\{ U(nT) \left[\frac{V(nT) - V[(n-m)T]}{mT} \right] - V(nT) \left[\frac{U(nT) - U[(n-m)T]}{mT} \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{|W(nT)|^2} \cdot \frac{1}{mT} \{ U(nT) \cdot V[(n-m)T] - V(nT) \cdot U[(n-m)T] \}. \end{aligned}$$

Определим значение m . Пусть $W(nT) = \exp(j\Omega nT) = \cos \Omega nT + j \sin \Omega nT$, тогда

$$y_{\text{чд}} = \frac{1}{mT} \{ \sin \Omega nT \cdot \cos[\Omega(n-m)T] - \cos \Omega nT \cdot \sin[\Omega(n-m)T] \} = \frac{1}{mT} \sin \Omega mT.$$

Пусть $\Omega = 2\pi F_c / 2 = \pi F_c$. Максимальное значение $y_{\text{чд}}$ достигается при $\sin(\pi F_c mT) = 1$, откуда $\pi F_c mT = \pi/2$ или

$$m = \frac{1}{2TF_c} = \frac{f_{\text{д}}}{2F_c},$$

где F_c – частотный разнос при частотной телеграфии.

Выходной сигнал частотного детектора

$$y_{\text{чд}}(nT) = S_{\text{чд}} \cdot 2F_c \frac{1}{|W(nT)|^2} \cdot \{ U(nT) \cdot V[(n-m)T] - V(nT) \cdot U[(n-m)T] \}.$$

Структурная схема цифрового квадратурного частотного детектора представлена на рис. 5.8. Постоянство $|W(nT)|$ достигается ограничением сигнала и АРУ. Например, если $f_{\text{д}} = 8 \text{ кГц}$, $F_c = 250 \text{ Гц}$, то $m = 16$.

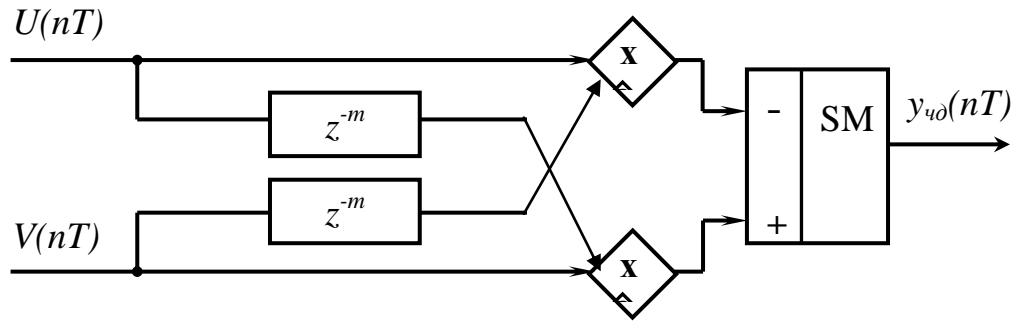


Рис. 5.8

5.6. Цифровой квадратурный детектор для ОФТ-сигнала

Операцию фазового детектирования можно рассматривать как произведение комплексной огибающей исходного на сопряженную комплексную огибающую опорного сигналов. Для ОФТ в качестве опорного сигнала используется сам входной сигнал, задержанный на длительность элементарной посылки τ . Тогда

$$y_{\phi\delta}(t) = \text{Re}[W(t) \cdot W^*(t - \tau)].$$

Для дискретного времени

$$y_{\phi\delta}(t) = \text{Re}\{W(t) \cdot W^*[(n - e)T]\},$$

где $e = \tau / T$.

Выходной сигнал фазового детектора равен

$$y_{\phi\delta}(nT) = U(nT) \cdot U[(n - e)T] + V(nT) \cdot V[(n - e)T],$$

где $e = \tau f_\delta$.

Структурная схема фазового детектора представлена на рис. 5.9.

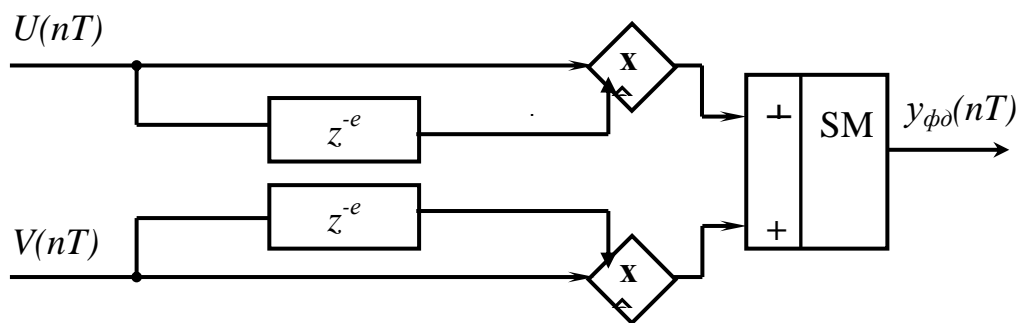


Рис. 5.9

5.7. Форма сигналов при частотной и фазовой телеграфии

На рис. 5.10 представлены временные диаграммы сигналов при частотной (ЧТ) и фазовой (ФТ) телеграфии $S_{\text{чм}}(t)$ и $S_{\text{фм}}(t)$ соответственно.

Комплексные сигналы $z(t)$ для ЧТ и ФТ необходимо рассматривать не на оси, а на плоскости (рис.5.11).

Для ЧТ вектор сигнала вращается против часовой стрелки то быстрее (нажатие), то медленнее (отжатие). Его проекция на ось x и есть действительный сигнал ЧТ.

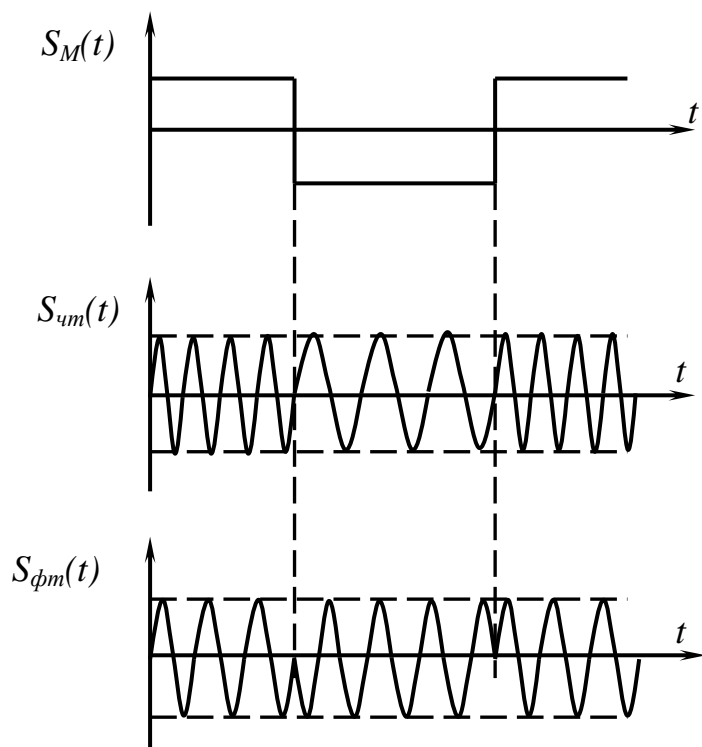


Рис. 5.10

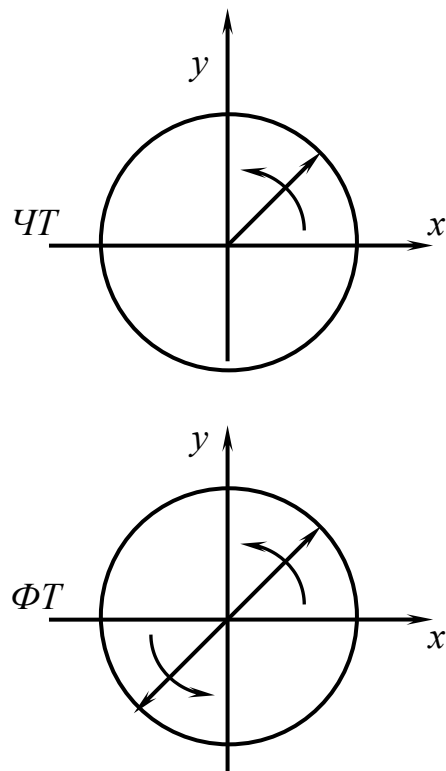


Рис. 5.11

Для ФТ вектор сигнала вращается равномерно, но при смене полярности посылки скачком смещается на 180° . Действительный сигнал ФТ – проекция вектора на ось x . При переходе к комплексной огибающей $W(t)$ необходимо исключить несущую частоту ω_0 :

$$W(t) = z(t)e^{-j\omega_0 t}.$$

Для этого переходят в систему координат, которая вращается с угловой скоростью ω_0 . Тогда вектор сигнала при ЧТ будет медленно (со скоростью $F_c/2$) то опережать нас, то отставать. Мы увидим вращающийся попеременно в разные стороны вектор: против часовой стрелки – при нажатии и по часовой стрелке – при отжатии ключа. Для ФТ мы увидим скачки на 180° вектора из одного положения в противоположное. Начальный угол зависит от соотношения фаз f_δ и f_0 .

На рис 5.12 представлены временные зависимости квадратур для ЧТ и ФТ.

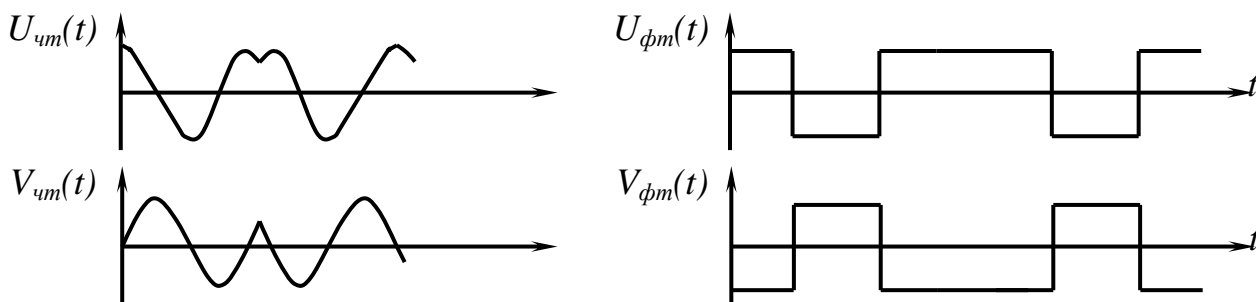


Рис. 5.12

6. ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЧИСЕЛ В ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРАХ

6.1. Представление чисел

В цифровых устройствах применяют два вида представления чисел.

1. *С фиксированной точкой*

В представлении числа с фиксированной точкой обычно полагают, что $|A| < 1$. Запятая располагается между 1-м и 2-м разрядом числа, причём в первом разряде записывается знак числа, например:

$$+0.4_{10} = 0100;$$

$$-0.3_{10} = 1011.$$

Разрядная сетка, содержащая $m+1$ двоичных разрядов, позволяет представить 2^{m+1} различных чисел с шагом 2^{-m} в диапазоне $[0, 1-2^{-m}]$.

Если значение числа выходит за пределы указанного диапазона, например, $|A| > 1$, то происходит переполнение разрядной сетки и искажение результатов.

2. *С плавающей точкой*

Особенность: $A = \pm \mu \cdot 2^{\pm v}$, где μ - мантисса и v - порядок числа без знака.

В представлении числа с плавающей точкой m_μ - количество разрядов под мантиссу; m_v - количество разрядов под порядок чисел.

Диапазон представления числа шире, чем с фиксированной точкой.

Однако, в устройствах цифровой обработки в виде спецвычислителей обычно применяется представление чисел с фиксированной точкой.

6.2. Кодирование чисел

Для кодирования чисел с фиксированной точкой используются три метода кодирования:

1. Прямой

$$A_{\text{пр}} = \begin{cases} 0, a_1, a_2, a_3 \dots a_n, & A > 0 \\ 1, a_1, a_2, a_3 \dots a_n, & A < 0 \end{cases}$$

2. Обратный

$$A_{\text{обр}} = \begin{cases} 0, a_1, a_2, a_3 \dots a_n, & A > 0 \\ 1, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3 \dots \bar{a}_n, & A < 0 \end{cases}$$

3. Дополнительный

$$A_{\text{дон}} = \begin{cases} 0, a_1, a_2, a_3 \dots a_n, & A > 0 \\ 1, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3 \dots \bar{a}_n + 2^{-m}, & A < 0 \end{cases}$$

Прямой код обычно используется для операций умножения. Дополнительный код – для сложения с отрицательными числами.

6.3. Влияние округления (квантования) коэффициентов цифрового фильтра

Так как, значения коэффициентов цифрового фильтра квантуются, то ошибки квантования приводят к большему или меньшему изменению полюсов и нулей передаточной функции и, следовательно, к искажению частотной характеристики фильтра

$$\Delta A = A(\omega) - \tilde{A}(\omega),$$

где ΔA - ошибка АЧХ;

$A(\omega) = |H(e^{j\omega T})|$ - АЧХ с неквантованными коэффициентами;

$\tilde{A}(\omega)$ - АЧХ с квантованными коэффициентами.

Величина ΔA ($\Delta A(\omega)$) не должна превышать некоторую величину ΔA_{\max} , определяемую так, чтобы отклонения реальной АЧХ от идеальной были в допустимых пределах (рис. 6.1).

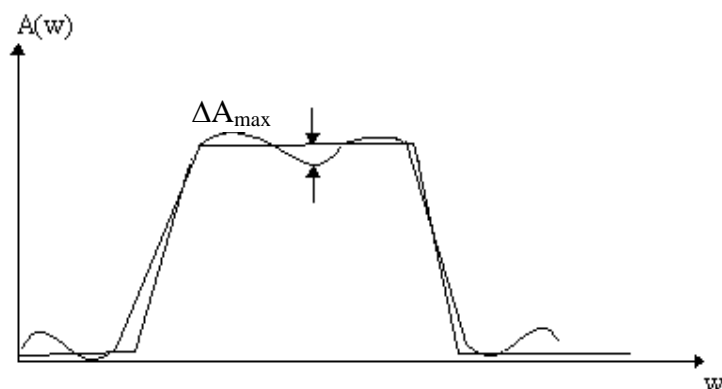


Рис. 6.1

Необходимое число разрядов квантованных коэффициентов можно определить путём вычисления $|\Delta A(\omega)|$ для последовательно возрастающего числа разрядов квантованных коэффициентов при выполнении условия

$$|\Delta A(\omega)| < |\Delta A_{\max}|.$$

Влияние квантования коэффициентов более просто может быть учтено путём представления реального фильтра, состоящего из двух фильтров (рис.6.2).

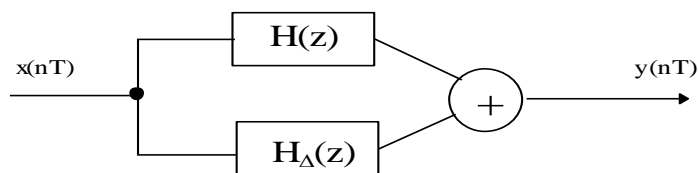


Рис. 6.2

$H(z)$

- фильтр с неквантованными коэффициентами;

$H_{\Delta}(z)$

- паразитный фильтр, коэффициент которого зависит от погрешностей Δa_k и Δb_m .

6.4. Влияние округления результатов арифметических операций

Сложение двух чисел с фиксированными точками не приводит к ошибкам округления представленной суммы при условии, что разрядность сумматора не меньше разрядности слагаемого.

Возможно лишь переполнение при сложении двух или более чисел. Для предотвращения этого процесса вводится масштабирование.

Выполнение операций умножения всегда связано с ошибкой округления (усечения).

Произведение двух чисел с количеством разрядов b_1 и b_2 имеет разрядность двойную:

$$b = b_1 + b_2.$$

Обычно это произведение размещается в регистре с разрядом меньшим, чем b . В результате алгоритм фильтра реализуется не точно, и выходной сигнал получается с ошибкой. Для того, чтобы оценить эту ошибку, умножитель представляют следующей моделью (рис. 6.3).

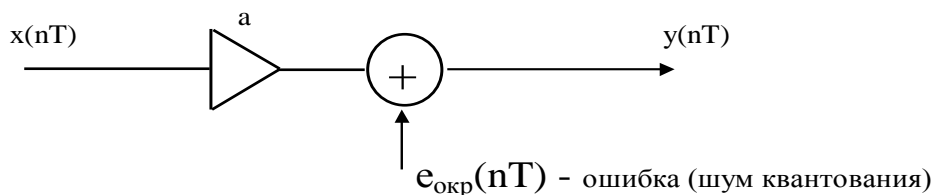


Рис. 6.3

Ошибка округления $e_{\text{окр}}(nT)$ ($\max |e_{\text{окр}}(nT)| = \frac{Q}{2}$, $Q = 2^{-b}$) может рассматриваться как дискретный стационарный процесс с равномерной спектральной плотностью мощности с нулевым средним и дисперсией $\sigma = \frac{2^{-b}}{12}$.

6.5. Масштабирование сигналов в цифровых фильтрах

Для предотвращения переполнения применяется масштабирование, которое сводится к сдвигу двоичных разрядов слагаемых на 1 разряд или более, при суммировании чисел.

В результате масштабирования возможно появление ошибки: $e_m = 2^{-b}$, где b - число разрядов. Вероятность появления этой ошибки $p = \frac{1}{2}$, математическое ожидание $\mu = 0$ и дисперсия $\sigma^2 = \frac{2^{-2b}}{2}$ (прямой и обратный коды).

При использовании дополнительного кода $e_m = -2^{-b}$, $p = \frac{1}{2}$, $\mu = \frac{-2^{-b}}{2}$, $\sigma^2 = \frac{2^{-2b}}{2}$.

Эти ошибки могут быть учтены так же, как ошибки округления. Другой способ устранения возможного переполнения сводится к масштабированию входного сигнала.

7. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

7.1. Фильтры с конечной и бесконечной импульсными характеристиками

Фильтр с конечной импульсной характеристикой (КИХ) - фильтр, у которого импульсная характеристика представляет собой конечный n -точечный дискретный сигнал, т. е. что может принимать отличные от нуля значения на интервале $[0, N-1]$.

Фильтр с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ) - фильтр, у которого импульсная характеристика может принимать отличные от нуля значения на бесконечном интервале $n = 0, 1, 2, 3 \dots$

Нерекурсивный фильтр всегда имеет КИХ.

Рекурсивный фильтр может иметь КИХ или БИХ.

7.2. Критерий реализуемости фильтров

Линейный дискретный фильтр физически реализуем, если его реакция (выходной сигнал) не опережает входного, т. е. в любой момент nT реакция $y(nT)$ зависит лишь от значений входной последовательности $x(nT)$ в момент времени $n'T \leq nT$ и не зависит от значений в последующие моменты.

Критерием реализуемости фильтра является равенство нулю отчётов импульсной характеристики при отрицательном значении моментов отсчёта

$$h(nT) = 0, \quad \text{при } n = 0.$$

7.3. Критерий устойчивости

Фильтр называется устойчивым, если при любых начальных условиях реакция фильтра на любое ограниченное воздействие $x(nT)$ тоже ограничена.

Если $|x(nT)| < \infty (M_x)$, для $n = 0, 1, 2 \dots$, то $|y(nT)| < \infty (M_y)$.

Критерием устойчивости фильтра является абсолютная сходимость ряда отчётов импульсной характеристики.

Это условие является не только достаточным, но и необходимым условием устойчивости фильтра. Непосредственное применение этого условия для проверки устойчивости затруднено

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(nT) \cdot Z^{-n}$$

$$|H(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |h(nT)| \cdot |Z^{-n}|.$$

$$\text{Если } |Z^{-n}| \leq 1, \text{ то } |H(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |h(nT)|.$$

Это означает, что в устойчивой системе передаточная функция $H(z)$ конечна во всех точках Z -плоскости, где $|Z| \geq 1$ и, следовательно, передаточная функция не

должна иметь особых точек (полюсов) при $Z \geq 1$ (на и вне единичного круга Z -плоскости).

Система будет устойчива, если все полюсы $H(z)$ расположены внутри единичного круга в Z -плоскости.

Если $H(z)$ дробно-рациональная функция, то $H(z)$ определяется нулями (корнями) многочлена знаменателя передаточной функции.

Пример:

$$1. H(z) = \frac{1 - Z^{-1}}{1 - 0.2 \cdot Z^{-1}}, \quad Z1 = 0.2 < 1 \quad - \text{фильтр устойчив.}$$

$$2. H(z) = \frac{1 - Z^{-1}}{1 + 1.2 \cdot Z^{-1}}, \quad Z2 = -1.2; \quad |1.2| > 1 \quad - \text{фильтр неустойчив.}$$

Критерий устойчивости относится только к несократимой дроби, т. к. полюс может компенсироваться нулём.

$$H(z) = \frac{1 - Z^{-2}}{1 - Z^{-1}}, \quad \text{фильтр устойчив, несмотря на то, что } |z| = 1.$$

Нерекурсивные фильтры всегда устойчивы.

7.4. Частотные характеристики цифровых фильтров

$$X(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \cdot e^{j\omega T},$$

$$Y(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT) \cdot e^{j\omega T}.$$

Суммирование производится от нуля, поскольку предполагается, что $x(nT)$ и $y(nT)$ до этого момента были равны нулю.

$$\text{Частотной характеристикой называют } H(z) = \frac{Y(e^{j\omega T})}{X(e^{j\omega T})}.$$

Следовательно, частотная характеристика совпадает с передаточной функцией на единичной окружности Z -плоскости.

$$\text{Для рекурсивного фильтра } H(e^{j\omega T}) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot e^{j\omega \cdot k \cdot T}}{1 + \sum_{m=1}^{M-1} b_m \cdot e^{j\omega \cdot m \cdot T}}.$$

$$\text{Для нерекурсивного фильтра } H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(nT) \cdot e^{-j\omega \cdot n \cdot T}.$$

Частотная характеристика является передаточной функцией системы для входного комплексного синусоидального сигнала

$$x(nT) = e^{j\omega \cdot n \cdot T},$$

$$y(nT) = H(e^{j\omega T}) \cdot e^{j\omega \cdot m \cdot T}.$$

В общем случае, частотная характеристика - это комплексная функция, которая может быть записана в виде

$$A(e^{j\omega T}) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} = \text{Re}(\omega) + j \cdot \text{Im}(\omega),$$

где $A(\omega) \rightarrow |H(e^{j\omega T})|$ – АЧХ, $e^{j\varphi(\omega)} \rightarrow \arg H(e^{j\omega T})$ – ФЧХ.

Групповое время замедления - скорость изменения фазы, изменяющейся по частоте

$$\tau(\omega) = - \frac{d\varphi(\omega)}{d(\omega)}.$$

7.5. Свойства частотных характеристик

1. Все ЧХ являются непрерывными функциями частоты.
2. Все ЧХ представляют собой периодические функции частоты ω с периодом, равным частоте дискретизации $\omega_d = \frac{2\pi}{T}$.
3. Для фильтров с вещественными коэффициентами, АЧХ и ГВЗ являются чётными функциями, а ФЧХ - нечётной функцией.

7.6. Нормирование частотных характеристик

Нормирование характеристик необходимо для сравнения свойств различных фильтров. Поскольку все характеристики зависят при постоянном T от ωT , то вместо ωT вводят одну переменную.

Существует два способа нормирования (рис. 7.1):

1. $\omega T = \varpi$; $\omega_d = 2\pi$, требования к фильтру задаются на интервале $[0, \pi]$;
2. $\omega T = 2\pi \cdot \lambda$; $\lambda_d = 1$, требования к фильтру задаются на интервале $[0, 0.5]$.

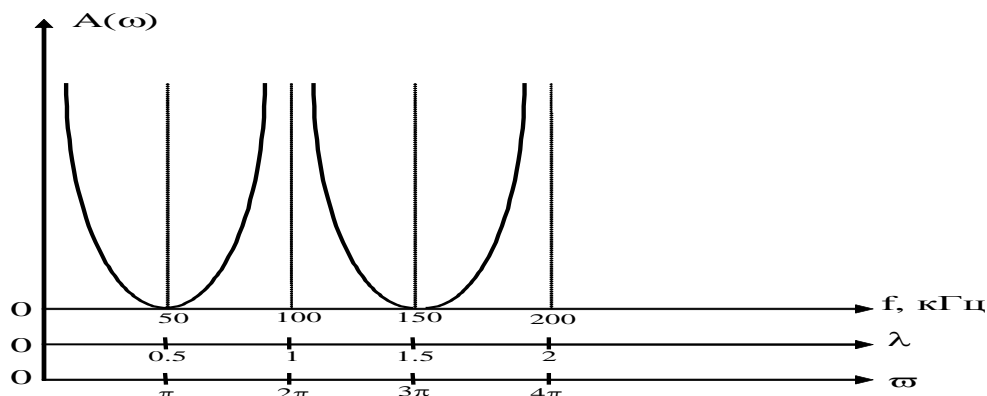


Рис. 7.1

7.7. Постановка и решение аппроксимационных задач. Формулировка требований к частотным характеристикам фильтров

Различают четыре типа фильтров: ФНЧ, ФВЧ, ПФ и РФ (рис. 7.2):

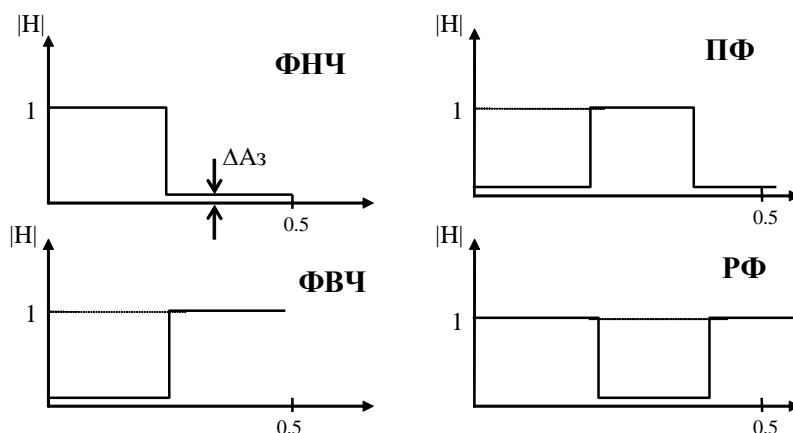


Рис. 7.2

На этапе решения аппроксимационной задачи определяют передаточную функцию $H(z)$, которая воспроизводит заданную АЧХ $\rightarrow |H(z)| \rightarrow A(\omega)$ с заданной точностью. Таким образом, в качестве исходных данных должны быть заданы допуски (рис 7.3):

- 1) на максимальное значение неравномерности в полосе пропускания ($\Delta A_{\text{п}}$);
- 2) на максимальное отклонение АЧХ от нуля в полосе задерживания ($\Delta A_{\text{з}}$).

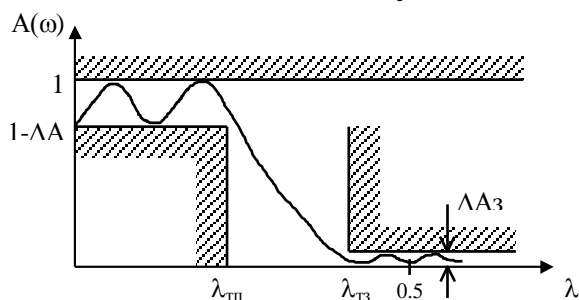


Рис. 7.3

Требования к ФЧХ фильтра в ходе проектирования избирательных БИХ фильтров при использовании методов, описанных ниже, не предъявляются, поэтому ФЧХ получается нелинейной. Степень нелинейности ФЧХ можно проконтролировать путём расчёта непосредственно ФЧХ или ГВЗ для определённой передаточной функции. Методы построения БИХ фильтров с линейной ФЧХ базируются на использовании дополнительного корректора ФЧХ.

7.8. Методы решения аппроксимационных задач

Используются три класса методов для определения передаточной функции:

1. Метод преобразования аналоговых фильтров в цифровые.
2. Прямые методы расчётов БИХ фильтров.

3. Метод, использующий алгоритмы оптимизации. Для расчёта ЦФ со стандартными характеристиками (ФНЧ, ФВЧ, ПФ, РФ) широко используется метод билинейного преобразования. С помощью этого метода $T(S)$ аналогового фильтра преобразуется в $H(z)$ цифрового фильтра.

Передаточная функция ЦФ определяется с помощью простых формул из передаточной функции прототипа, для разработки которого имеется много таблиц, графиков и т. д. Выходной сигнал ЦФ приближён совпадает с выходным сигналом аналогового фильтра при одинаковых воздействиях.

7.9. Виды аппроксимаций

На рис. 7.4 – 7.7 изображены АЧХ фильтров Баттерворта Чебышева и Золотарёва-Кауэра

Фильтр Баттерворта (Тип В)

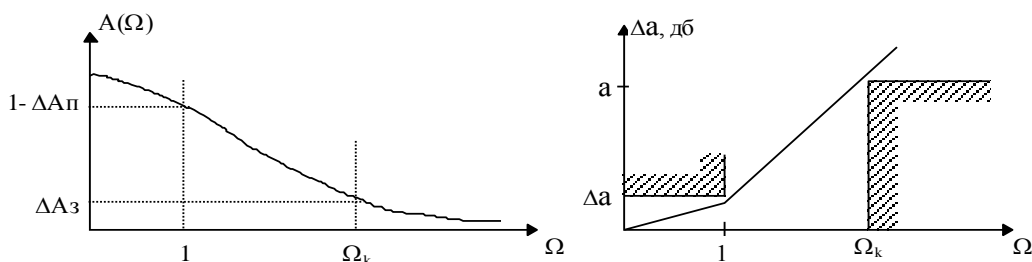


Рис. 7.4

Фильтр Чебышева (Тип Т)

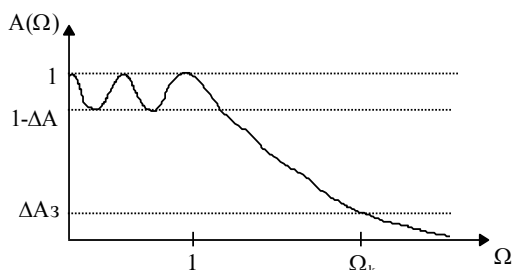


Рис. 7.5

Инверсный фильтр Чебышева (Тип I)

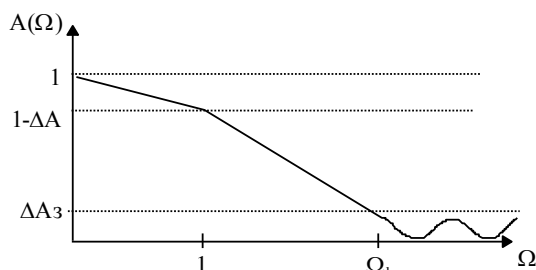


Рис. 7.6

Фильтр Золотарёва-Кауэра (Тип С)

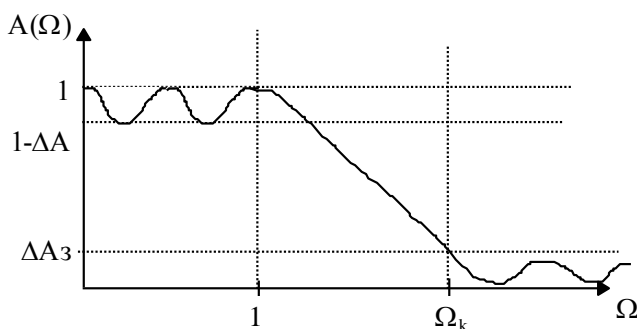


Рис. 7.7

7.10. Билинейное преобразование (БП)

Билинейное преобразование представляет собой отображение точек S - плоскости на точки Z - плоскости и использует замену переменной вида

$$S = \gamma \cdot \left[\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right] = \gamma \cdot \left[\frac{z - 1}{z + 1} \right], \quad (1)$$

где γ - постоянный множитель, значение которого не изменяет формы преобразования

$$z = \frac{\gamma + S}{\gamma - S}.$$

Использование выражения (1) обеспечивает однозначное преобразование передаточной функции $H(z)$

$$H(z) = T(S) \Big|_{s = \gamma \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}}.$$

Таким образом, каждой точке комплексной плоскости S ставится в соответствие точка Z - плоскости (рис. 7.8).

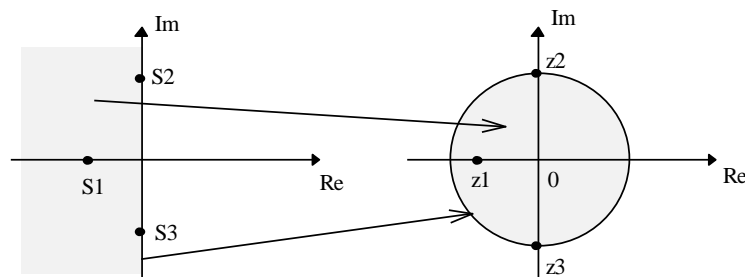


Рис. 7.8

Мнимая ось преобразуется в окружность единичного радиуса.

1. Поскольку все полюсы **устойчивого** аналогового фильтра расположены в левой половине S - плоскости, то он при преобразовании к ЦФ будет давать устойчивый фильтр.

2. Так как мнимая ось S - плоскости отображается на единичную окружность Z - плоскости, то все максимумы и минимумы АЧХ аналогового фильтра сохраняются и в АЧХ ЦФ. Сохраняется также неравномерность АЧХ для соответствующих диапазонов.

Соотношение между аналоговыми и цифровыми частотами является

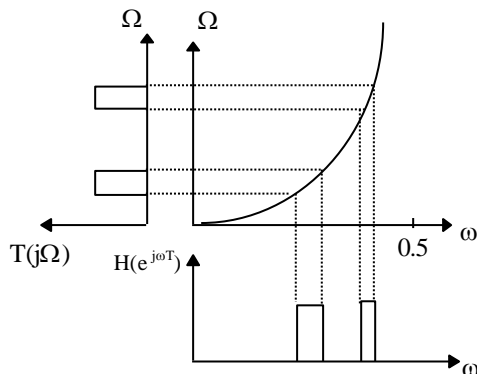


Рис. 7.9

нелинейными, следовательно имеет место деформация шкалы частот при переходе от аналогового фильтра к цифровому (рис. 7.9).

Деформацию частот можно компенсировать с помощью предискажений в фильтре прототипе.

8. ЦИФРОВОЙ СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

В задаче спектрального анализа считается априори известным, что анализирующий сигнал $x(nT)$ представляет собой M синусоидальных составляющих и белого шума

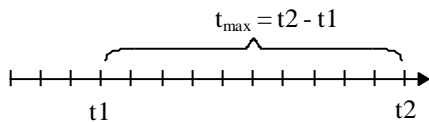
$$x(nT) = \sum_{j=1}^m a_j \cdot \sin(n\omega_j T + \varphi) + a_m x_m(nT),$$

где a_j - амплитуда j - составляющей, φ - фаза этой составляющей.

Причём, если $a_j = 0$, то составляющая отсутствует.

Исходными данными для обработки являются N отчётов этого сигнала:

$$Q = (N - 1)T.$$



В спектральном анализе задаются параметры:

m - значения отчётов частоты ω и амплитуды a .

Задачи:

- 1) $m = 1$, $a_{\text{ш}} = 0$, ω_1 , a_1 - ?, φ_1 - ?
- 2) $m > 1$, $a_{\text{ш}} = 0$, $\omega_1 \dots \omega_m$, a_j - ?, φ_j - ?
- 3) $m = 1$, $a_{\text{ш}} = 1$, ω_1 , a_1 - ?, т. е. принять решение о наличии или отсутствии синусоидальных колебаний;
- 4) $m = 2$, $a_2 = r \cdot a_1$, $r \ll 1$, $|\omega_1 - \omega_2| > \Delta\omega_1$, ω_1 , $\Delta\omega_1$ - задана, ω_2 , a_2 .

1. *Методы цифровой фильтрации.* Каждая из синусоидальных составляющих выделяется своим фильтром, за ним стоит анализатор.

2. *Методы, основанные на дискретном преобразовании Фурье (ДПФ).* Устанавливаются специализированные вычислители ДПФ.

3. *Методы линейного моделирования.* Предусматривают вычисление параметров линейной модели БИХ фильтра, квадрат АЧХ которого воспроизводит спектральную плотность мощности входного сигнала.

8.1. Основы алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ)

Пусть $x(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) \cdot W_N^{nk}$; $k = 0, 1, \dots, N-1$; $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$;

$$x(k) = \sum_{n=0}^{N-1} X(n) \cdot W_N^{-nk}; \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

где W_N - является периодической последовательностью с периодом N ,

$$W_N^{(nk+mN)} = W_N^{nk}.$$

Непосредственное вычисление ДПФ при комплексных значениях входного сигнала требует для каждого значения величину $k(N-1)$ умножений и $N-1$ сложений комплексных чисел или в 4 раза больше умножений, или в 2 раза больше сложений действительных чисел, следовательно, для всех значений $k = 0, 1 \dots N-1$ требуется $\approx N^2$ умножений и $\approx N^2$ сложений (для комплексных чисел). Для больших значений N требуется выполнение большого количества операций, что затрудняет вычисление спектра в реальном времени.

БПФ - набор алгоритмов, реализация которых приводит к существенному уменьшению вычислительной сложности ДПФ.

Исходная идея состоит в том, что N -точечная последовательность разбивается на две последовательности ($N/2$). Вычисляется ДПФ для этих более коротких последовательностей, и из полученных ДПФ конструируется ДПФ исходного сигнала. Выигрыш при этом такой: $\frac{N}{\log_2 N}$ - в такое количество раз уменьшается N операций.

Если $N = 1000$, то требуется 10^6 операций ДПФ и 10^4 операций БПФ.

8.2. Алгоритм БПФ с прореживанием по времени

Пусть $N = 2^v$, $v > 0$ – целое, если $N \neq 2^v$, то последовательность дополняется нулями. Значение $x(nT) = x_v(n)$ определяет размер последовательности.

Разобьем исходную последовательность на две $N/2$ точечные последовательности. Причём каждая из этих последовательностей содержит: одна чётные $x_{v-1,0}(n)$, другая нечётные $x_{v-1,1}(n)$ члены последовательности

$$x_{v-1,0}(n) = x(2nT); \text{ при } n = 0, 1 \dots \frac{N}{2} - 1,$$

$$x_{v-1,1}(n) = x((2n+1)T); \text{ при } n = 0, 1 \dots \frac{N}{2} - 1.$$

При этом ДПФ будет выглядеть так:

$$X(k) = X_v(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{v-1,0}(n) \cdot W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{v-1,1}(n) \cdot W_N^{(2n+1)k}.$$

Учитывая, что $W_N^2 = W_{N/2} = e^{j \frac{2\pi}{N/2}}$, получаем:

$$x_v(k) = x_{v-1,0}(k) + W_N^k \cdot x_{v-1,1}(k). \quad (2)$$

Поскольку $x_v(k)$ должна быть определена для N точек, а величины x_{v-1} определяются только для $N/2$, то необходимо доопределить значения для $k = \frac{N}{2}, \frac{N}{2}+1, \dots, N-1$.

Учитывая, что x_{v-1} - это периодическая функция с периодом $N/2$, можно записать:

$$x_v(k + \frac{N}{2}) = x_{v-1,0}(k) - W_N^k \cdot x_{v-1,1}(k). \quad (3)$$

Так как $W_N^k = -1$, то формула (2) - даёт ДПФ первой половинки, а формула (3) - даёт ДПФ второй половинки,

$$\begin{cases} c = a + b \cdot W_N^k; \\ d = a - b \cdot W_N^k. \end{cases}$$

Если это выражение представить в виде графов, то получим рисунок

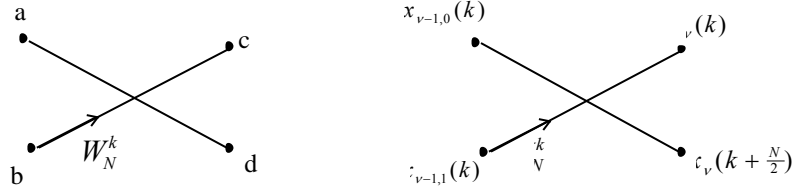


Рис. 8.1

Аналогично можно выразить $N/2$ – точечные последовательности через $N/4$ – точечные последовательности

$$\begin{cases} x_{v-1,0}(k) = x_{v-2,0}(k) + W_N^{2k} \cdot x_{v-2,1}(k); & k = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1; \\ x_{v-1,0}(k) = x_{v-2,0}(k) - W_N^{2k} \cdot x_{v-2,1}(k); & k = \frac{N}{4}, \frac{N}{4} + 1, \dots, \frac{N}{2} - 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{v-1,1}(k) = x_{v-2,2}(k) + W_N^{2k} \cdot x_{v-2,3}(k); & k = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1; \\ x_{v-1,1}(k) = x_{v-2,2}(k) - W_N^{2k} \cdot x_{v-2,3}(k); & k = \frac{N}{4}, \frac{N}{4} + 1, \dots, \frac{N}{2} - 1. \end{cases}$$

Процесс уменьшения размеров ДПФ продолжается до тех пор, пока на v шаге не окажется только двухточечная ДПФ:

$\Phi(k)$, $k = 0, 1$ - ДПФ от последовательности $\varphi(n)$, $n = 0, 1$;

$$\begin{cases} \phi(0) = \varphi(0) + W_N^0 \cdot \varphi(1) = \varphi(0) + \varphi(1); \\ \phi(1) = \varphi(0) + W_N^{N/2} \cdot \varphi(1) = \varphi(0) - \varphi(1). \end{cases}$$

Последние операции выполняются без умножения.

Пример. Построим алгоритм БПФ с прореживанием во времени с короткой последовательностью длиной $N = 8 = 2^3$, $v = 3$;

$x(nT)$, $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$;

$X(nT) = x_3(n)$.

Разобьём исходную последовательность на две последовательности из чётных и нечётных членов:

$$\begin{cases} x_{2,0}(n) = \{x(0), x(2), x(4), x(6)\} \\ x_{2,1}(n) = \{x(1), x(3), x(5), x(7)\} \end{cases}$$

$$x_{1,0}(n) = \{x(0), x(4)\}$$

$$x_{1,1}(n) = \{x(2), x(6)\}$$

$$x_{1,2}(n) = \{x(1), x(5)\}$$

$$x_{1,3}(n) = \{x(3), x(7)\}$$

Алгоритм БПФ с прореживанием во времени представлен на рис. 8.2.

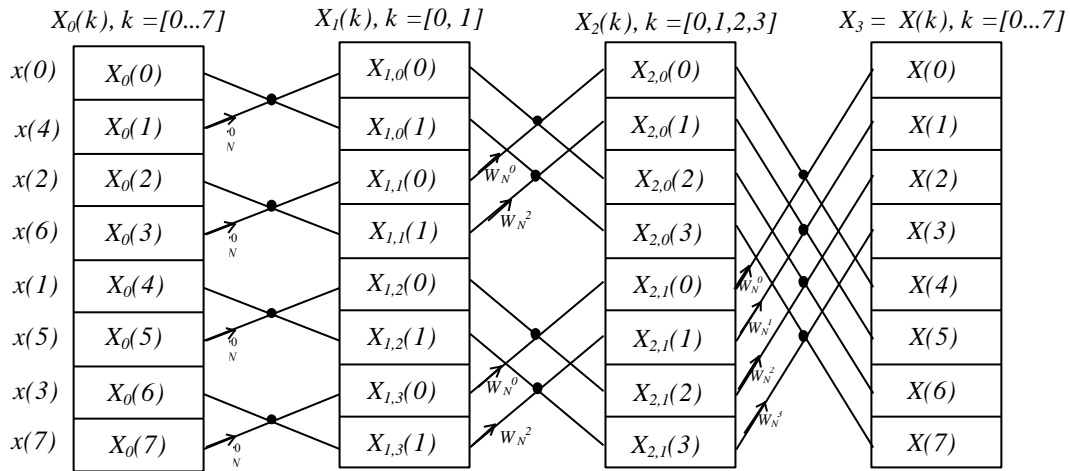


Рис. 8.2

Таким образом, если предположить, что $x(nT)$ записывается в массив ячеек памяти, то $X(n)$ удобно расположить в соответствии с рисунком. Элементы этой последовательности получаются из исходной в соответствии с двоичной инверсией номеров, т.е. число с номером $n = (n_{\nu-1}, \dots, n_0)$ запоминается в ячейке памяти с номером $p = (n_0, \dots, n_{\nu-1})$:

$$x(4), \quad 4_{10} = 100, \\ 1_{10} = 001.$$

Исходная последовательность получается в результате двоичной инверсии номеров, выходная последовательность получается в естественном порядке следования. В рассмотренном алгоритме вычисление можно выполнить по способу замещения.

8.3. Алгоритм БПФ с прореживанием по частоте

Этот алгоритм отличается тем, что входная последовательность разбивается на две ровно посередине и процесс разбиения идёт до тех пор, пока не останется одноэлементной последовательности. После выполнения БПФ результат получается в виде последовательности с двоичной инверсией номеров.

Выводы по БПФ:

1. Для обоих алгоритмов требуется примерно $\approx N \log_2 N$ комплексных умножений.
2. Алгоритмы могут быть реализованы по способу замещения, используя 1 массив памяти.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Алексеенко А. Г., Галицин А. А., Иванников А. Д. Проектирование радиоэлектронной аппаратуры на микропроцессорах: Программирование, типовые решения, методы отладки. – М.: Радио и связь, 1984. – 272 с.
2. Аналоговые и цифровые интегральные микросхемы: Справочное пособие/ С. В. Якубовский и др.; Под ред. С. В. Якубовского. – М.: Радио и связь, 1984. – 432 с.
3. Вычислительные устройства на микросхемах: Справочник/ В. И. Корнейчук и др. – Киев: Техника, 1986. – 264 с.
4. Голд Б., Рэйдер Ч. Цифровая обработка сигналов: Пер. с англ. Под ред. А. М. Трахмана. М.: Сов. Радио, 1973. – 368 с.
5. Гольденберг Л. М. и др. Цифровые фильтры. – М.: Связь, 1974. – 160 с.
6. Гольденберг Л. М. и др. Цифровая обработка сигналов: Справочник. – М.: Радио и связь, 1985. – 312 с.
7. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов. – М.: Радио и связь, 1986. – 512 с.
8. Горошков Б. И. Радиоэлектронные устройства: Справочник.- М.: Радио и связь, 1984. – 400 с.
9. Горошков Б. И. Элементы радиоэлектронных устройств: Справочник. – М.: Радио и связь, 1988. – 176 с.
10. Данилов А. А. Устройства выборки-хранения: Состояние разработки, пути совершенствования // Измерения, контроль, автоматизация. - 1986, № 4 (60). С. 26 – 36.
11. Данилов А. А. Устройства выборки-хранения для 12-14 разрядных аналого-цифровых преобразователей // Приборы и техника эксперимента. – 1987, № 2. С. 63 – 66.
12. Зельдин Е. А. Цифровые интегральные микросхемы в информационно-измерительной аппаратуре. – Л.: Энергоатомиздат, 1986. – 280 с.
13. Карташов В. Г. Основы теории дискретных сигналов и цифровых фильтров: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. школа, 1982. – 109 с.
14. Корейчук В. И. и др. Вычислительные устройства на микросхемах: Справочник. – Киев: Техника, 1986. – 264 с.
15. Каппелини В. и др. Цифровые фильтры и их применение: Пер. с англ. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 360 с.
16. Лэм Г. Аналоговые и цифровые фильтры: Расчет и реализация: Пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 592 с.
17. Лихтциндер Б. Я. Кузнецов В. Н.. Микропроцессоры и вычислительные устройства в радиотехнике: Учеб. пособие. – Киев: Выща шк., 1988. – 272 с.
18. Микропроцессорный комплект БИС серии K1815 для цифровой обработки сигналов: Справочник / А. И. Белоус, О. В. Подрубный, В. М. Журба; Под ред. А. И. Сухопарова. – М.: Радио и связь, 1992. – 256 с.
19. Микропроцессор K1815ВФЗ для цифровой обработки сигналов / В.А. Бобков, А. И. Сухопаров, В. Ф. Гузик и др. // Микропроцессорные средства и системы. – 1986, № 2. С. 21 – 23.

20. Мизин И. А., Матвеев А. А. Цифровые фильтры (анализ, синтез, реализация с использованием ЭВМ). – М.: Связь, 1979. – 240 с.
21. Нуссбаумер Г. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток: Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1985. – 285 с.
22. Одинец А. И., Гребенников А. И., Миронов С. Г. Цифровые фильтры: Учеб. пособие / Омск, ОмГТУ, 1991.- 76 с.
23. Одинец А. И. Цифровые устройства. Учеб. пособие. – Омск, ОмГТУ, 2000. – 64 с.
24. Применение интегральных микросхем в электронной вычислительной технике: Справочник / Р. В. Данилов и др.; Под ред. Б. Н. Файзулаева, Б. В. Тарабрина.- М.: Радио и связь, 1986. – 384 с.
25. Полупроводниковые БИС запоминающих устройств: Справочник / В. В. Баранов и др.; Под ред. А. Ю. Гордонова и Ю. Н. Дьяконова. – М.: Радио и связь, 1987. – 360 с.
26. Птачек М. Цифровое телевидение. Теория и техника / Пер. с чешск. Под ред. Л. С. Виленчика. – М.: Радио и связь, 1990. – 528 с.
27. Применение цифровой обработки сигналов: Пер. с англ. Под ред. Э. Оппенгейма. – М.: Мир. – 1980. – 552 с.
28. Погрибной В. А. Дельта-модуляция в цифровой обработке сигналов. – М.: Радио и связь, 1990. - 216 с.
29. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов: Пер с англ. – М.: Мир, 1978. – 848 с.
30. Рекурсивные фильтры на микропроцессорах / А. Г. Остапенко и др.; Под ред. А. Г. Остапенко. – М.: Радио и связь, 1988. – 128 с.
31. Справочник по устройствам цифровой обработки информации / Н. А. Виноградов и др. - Киев: Техника, 1988. – 415 с.
32. Савельев А. Я. Арифметические и логические основы цифровых автоматов: Учебник. – М.: Высш. школа, 1980. – 255 с.
33. Титце У., Шенк К. Полупроводниковая схемотехника: Справочное пособие: Пер. с нем. – М.: Мир, 1982. – 512 с.
34. Ушкар М. Н. Микропроцессорные устройства в радиоэлектронной аппаратуре / Под ред. Б. Ф. Высоцкого. – М.: Радио и связь, 1988. – 128 с.
35. Хемминг Р. В. Цифровые фильтры: Пер. с англ. / Под ред. А. М. Трахтмана. – М.: Сов. Радио, 1980. – 224 с.
36. Цифровые фильтры в электросвязи и радиотехнике / А. В. Бунченко и др.; Под ред. Л. М. Гольденберга. – М.: Радио и связь, 1982. – 224 с.
37. Цифровые фильтры и устройства обработки сигналов на интегральных микросхемах: Справочное пособие / Б. Ф. Высоцкий и др.; Под ред. Б. Ф. Высоцкого. – М.: Радио и связь, 1984. – 216 с.
38. Цифровая обработка сигналов: Учеб. пособие для вузов /Л. М. Гольденберг, Б. Д. Матюшкин, М. Н. Поляк.–М.: Радио и связь, 1990.–256 с.
39. Цифровые радиоприемные системы: Справочник / М. И. Жодзишский и др.; Под ред. М. И. Жодзишского. – М.: Радио и связь, 1990. – 208 с.
40. Шило В. Л. Популярные цифровые микросхемы: Справочник. – М.: Радио и связь, 1987. – 352 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ О ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ	4
1.1. Структурная схема системы ЦОС	4
1.2. Дискретизация аналогового сигнала	5
1.3. Квантование и кодирование дискретизированного сигнала	7
2. СПОСОБЫ ОПИСАНИЯ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ	8
2.1. Z- преобразование	9
2.2. Свойства Z-преобразования	11
2.3. Передаточная функция и разностное уравнение ЦФ	12
2.4. Частотная характеристика цифрового фильтра	13
2.5. Дискретизация дифференциального уравнения	14
2.6. Нуль-полюсные диаграммы	16
2.7. Нули и полюсы некоторых функций	17
2.8. Построение АЧХ с помощью нуль-полюсных диаграмм	18
3. ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ	19
3.1. Нерекурсивный ЦФ первого порядка	19
3.2. Нерекурсивный ЦФ второго порядка	21
3.3. Рекурсивный ЦФ первого порядка	23
3.4. Рекурсивный ЦФ второго порядка	24
3.5. Каноническая схема ЦФ второго порядка	27
4. ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ	29
4.1. Основные этапы проектирования цифровых фильтров	29
4.2. Синтез цифрового фильтра по заданной импульсной характеристике	32
4.3. Вычисление коэффициентов цифрового ФНЧ с изменяемой частотой среза	33
4.4. Микропроцессорная реализация цифровых фильтров	35
5. ОСНОВЫ КВАДРАТУРНОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ	38
5.1. Аналитический сигнал	38
5.2. Спектр аналитического сигнала	38
5.3. Способы разложения сигналов на квадратурные составляющие	40
5.4. Особенности фильтрации комплексного сигнала	43
5.5. Цифровой квадратурный частотный детектор	44
5.6. Цифровой квадратурный детектор для ОФТ-сигнала	46
5.7. Форма сигналов при частотной и фазовой телеграфии	46
6. ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЧИСЕЛ В ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРАХ	48
6.1. Представление чисел	48
6.2. Кодирование чисел	48
6.3. Влияние округления (квантования) коэффициентов цифрового фильтра	49
6.4. Влияние округления результатов арифметических операций	50
6.5. Масштабирование сигналов в цифровых фильтрах	50
7. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ	51
7.1. Фильтры с конечной и бесконечной импульсными характеристиками	51

7.2. Критерий реализуемости фильтров	51
7.3. Критерий устойчивости	51
7.4. Частотные характеристики цифровых фильтров	52
7.5. Свойства частотных характеристик	53
7.6. Нормирование частотных характеристик	53
7.7. Постановка и решение аппроксимационных задач. Формулировка требований к частотным характеристикам фильтров	54
7.8. Методы решения аппроксимационных задач	54
7.9. Виды аппроксимаций	55
7.10. Билинейное преобразование (БП)	56
8. ЦИФРОВОЙ СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ	57
8.1. Основы алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ)	57
8.2. Алгоритм БПФ с прореживанием по времени	58
8.3. Алгоритм БПФ с прореживанием во частоте	60
Библиографический список	61
Содержание	63