3 基本群

3.1 引例

对于 $\frac{y}{x^2+y^2}$ 以及 $\frac{x}{x^2+y^2}$ 在 $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 上连续, 考虑曲线积分

$$\int_{\gamma} -\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$$

令 $P(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$,$Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$.

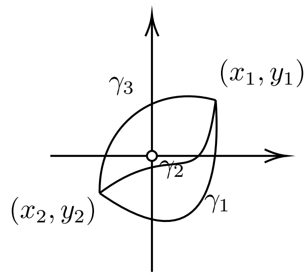
由于

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

因而曲线积分 $\int_{\gamma} -\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$ 与路径无关.

但是由于两者在原点 $(0,0)$ 处均无定义.

考虑从 (x_1,y_1) 到 (x_2,y_2) 的三条曲线 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$, 如下图所示



首先考虑 γ_1 与 γ_2 的情况, 由于 γ_1 与 γ_2 所围区域不包含原点, 因此.

$$\int_{\gamma_1} -\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y = \int_{\gamma_2} -\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$$

这是因为 γ_1 与 γ_2 所围成的闭区域 D 不包含原点, 使用 Green 公式得到

$$\oint_{\gamma_1\cup\gamma_2}(P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y) = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

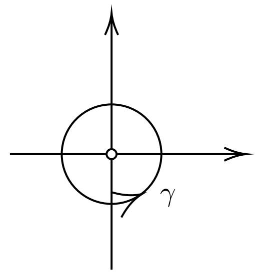
接下来考虑 γ_2 与 γ_3 所围成的封闭区域, 这个封闭区域包含原点, 因此

$$\int_{\gamma_2} -\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y \neq \int_{\gamma_3} -\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$$

这是为什么呢?

由前文知该积分与路径无关, 并且 γ_2 与 γ_3 所围的闭曲线只绕原点转了一圈, 因此

它等价于一个绕原点一圈的圆.



接下来取 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 的一条曲线 γ

$$\gamma = \left\{ \begin{array}{l} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{array} \right. ,0 \leq \theta \leq 2\pi$$

得到

$$\begin{aligned} \oint_\gamma -\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi} -\frac{\sin\theta}{1}(-\sin\theta)\mathrm{d}\theta + \frac{\cos\theta}{1}(\cos\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = 2\pi \end{aligned}$$

而 $\int_{\gamma_3\cup\gamma_2} = \int_\gamma$ 因此得到二者不相等.

此外, 还可以进行推广, 对于任何 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 中的闭曲线 γ 有

$$\oint_\gamma -\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y = 2k\pi(k \in \mathbb{Z})$$

其中 k 表示闭曲线绕原点正向 (逆时针) 旋转的周数.

由于 k 与具体的形状无关, 因此 k 也是一个拓扑性质,$\mathbb{Z}$ 就是 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 的一个基本群.