Chapter 0 : Introduce

Notation(标记)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{Z} &= \text{integers,即整数} \\
\mathbb{Q} &= \text{rational numbers,即有理数} \\
\mathbb{C} &= \text{complex numbers,即复数} \\
\mathbb{I} &= [0,1], \text{the(closed) unit interval,一个单位的闭区间}
\end{aligned}
$$

$\mathbb{R}^n$被称为n维实空间(或欧式空间),当然$\mathbb{R}^n$是n个$\mathbb{R}$的笛卡尔积.同样地,$\mathbb{R}^2$同胚于$\mathbb{C}$.

若$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$接着,范数定义为$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$当$n = 1$时有$\|x\| = |x|$,即为$x$的绝对值.

我们认为$\mathbb{R}^n$是一个$\mathbb{R}^{n+1}$的子空间,其由所有的最后一个坐标为0的$(n+1)$-元组构成

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$$

S^n称为一个$n-$球面(n - sphere)(半径为1且以原点为中心).不难发现$S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$($S^1 \subset \mathbb{R}^2$为圆).

不难发现一个$0-$球包含$\{1, -1\}$两个点是一个离散的两点空间.不难发现S^n可以作为S^{n+1}的一个"赤道"(比如若把地球视为S^3则赤道就是一个S^2),这是因为

$$S^n = \mathbb{R}^{n+1} \cap S^{n+1} = \{(x_1, \cdots, x_{n+2}) \in S^{n+1} : x_{n+2} = 0\}$$

接下来继续把S^n类比于地球.其北极点定义为$(0, 0, \cdots, 0, 1) \in S^n$,其南极点定义为$(0, 0, \cdots, 0, -1) \in S^n$.既然有了南北概念,那"南北半球"中的点也可以找到一个对称关系,对于$x = (x_1, \cdots, x_{n+1}) \in S^n$可以定义其对称点为 $-x = (-x_1, \cdots, -x_{n+1}) \in S^n$其中$x$到$-x$之间的距离为2.

既然定义了球面这一概念,我们或许可以将球面填充成一个完整的球,不难发现球中任意一个点都满足其距离球心长度小于等于1,即

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$$

D^n就称为一个$n-$实球(n-ball或$n-$盘n-disk).显然有$S^{n-1} \subset D^n \subset \mathbb{R}^n$;不难发现$S^{n-1}$是$D^n$在$\mathbb{R}^n$中的边界

$$\Delta^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \text{对于每个} x_i \geq 0, \sum x_i = 1\}$$

Δ^n称为一个标准n维单纯形(standard n - simplex).显然有Δ^0是一个点,Δ^1是一个单位的闭区间,Δ^2是一个三角形(包括其内部),Δ^3是一个(实)四面体,以此类推.不难发现$\Delta^n \approx D^n$,尽管读者在习题2.11前并不想构建一个同胚映射

> 这是一个练习:$\mathbb{R}^n$的一个包含了一个内点的紧凸子集是同胚于D^n的;这就揭示了Δ^n,D^n和I^n是同胚的.

这有一个标准的从$S^n \setminus \{\text{北极点}\}$到$\mathbb{R}^n$的一个同胚映射,称作赤平投影(球面投影,stereographic projection).使用N表示北极点,接着定义映射$\sigma : S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$为一个$\mathbb{R}^n$到一条经过$x$和$N$的直线(是$n+1$维的)的交点.

根据熟知的点斜式写法可以将后一直线写为$tx + (1-t)N$的形式.从而,其上的点具有如下坐标$(tx_1, \cdots, tx_n, tx_{n+1} + (1-t))$.当$t = (1 - x_{n+1})^{-1}$时最后一个坐标为0.

从而

$$\sigma(x) = (tx_1, \cdots, tx_n)$$

其中$t = (1 - x_{n+1})^{-1}$.这时按照惯例应当检查σ是否是一个同胚映射.

不难发现$\sigma(x) = x$当且仅当x在S^{n-1}的赤道上.

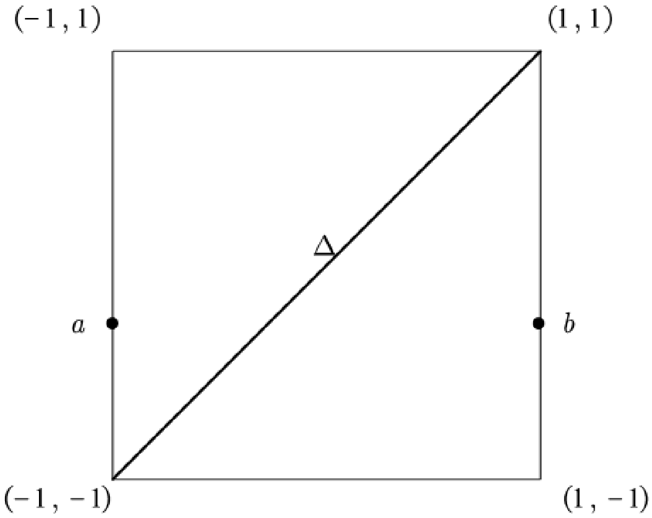
Brouwer Fixed Point Theorem

有了先前的记号,我们现在可以对于Brouwer fixed point theorem进行一个简单的证明:

若$f : D^n \to D^n$是连续的,接着这样就存在一个$x \in D^n$并且$f(x) = x$.

当$n = 1$时,定理就有一个简单的证明.实球D^1是一个闭区间$[-1, 1]$.

接下来我们看一个关于f在区域$D^1 \times D^1$内的图像.



定理0.1. 每一个连续的$f: D^1 \to D^1$都有一个不动点

[证明]

令$f(-1)=a$并且$f(1)=b$,若$f(-1)=-1$或者$f(1)=1$自然证毕(-1和1即为一个不动点)

因此,我们假设如图所示的一个函数满足$f(-1)=a>-1$并且$f(1)=b<1$.

令G为f的图像并且Δ作为单位函数的图像(当然是一个对角线),接下来,我们必须证明$G \cap \Delta \neq \varnothing$.

一个好的想法是利用连通性论证去展示任意一个从a到b的$D^1 \times D^1$中的路径必然要经过Δ.

由于f是一个连续函数,$G=\{(x,f(x)): x \in D^1\}$是连通的($G$是一个由$x \mapsto (x,f(x))$给出的连续映射$D^1 \to D^1 \times D^1$的像)

定义$A=\{(x,f(x)): f(x)>x\}$以及$B=\{(x,f(x)): f(x)<x\}$

注意到$a \in A$并且$b \in B$,于是有A, B均非空,若$G \cap \Delta = \varnothing$,则$G$是一个无交并

$$G = A \cup B$$

最后,这就导致无论是A和B都是G中的开集,这也就与G的连通性产生了矛盾□

不幸的是,当$n>1$时,没有人知道如何调整这个基本的拓扑结论.这就必须提出一些新的想法.这里有一个使用单纯逼近定理的证明([Hirsch]).接下来还有一些通过分析的证明(看[Dunford and Schwartz,pp. 467 - 470] or [Milnor (1978)]).最基础的想法是通过一个平滑函数$g: D^n \to D^n$去逼近,一个连续函数$f: D^n \to D^n$,如果所有的g都有一个不动点,则f有一个不动点;这样我们就可以把解析技术应用在光滑函数上.

这里有一个使用代数拓扑方法对于Brouwer不动点定理的证明:

我们终将证明,对于每个$n \geq 0$,都有一个满足以下条件的同调函子H_n:对于每个拓扑空间X都有Abel群$H_n(X)$并且对于每个连续的函数$f: X \to Y$都存在一个同态$H_n(f): H_n(X) \to H_n(Y)$,且$g$与$f$的合成定义如下

$$H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f)$$

且

$$H_n(1_X)\text{是}H_n(X)\text{的恒等映射}$$

其中,1_X是X的恒等映射.

$$H_n(D^{n+1}) = 0\text{对于所有的}n \geq 1$$
$$H_n(S^n) \neq 0\text{对于所有的}n \geq 1$$

利用这些H_n,现在我们证明Brouwer定理.

定义 : 拓扑空间Y的子空间X若存在一个连续的映射$r: Y \to X$使得对于所有的$x \in X$均有$r(x)=x$则X称为是Y的缩回.这样的r称为一个回缩映射.

> 1. 回想包含在拓扑空间Y的拓扑空间X是一个Y的子空间若X的子集V在X中是开的当且仅当对于某些Y中的开子集U有$V = X \cap U$.不难看出这保证了包含映射$i: X \hookrightarrow Y$是连续的,由于若U在Y中是开的,则$i^{-1}(U) = X \cap U$在X中是开的.

这可以平移到群论上: 包含在群G群H是一个G的子群当且仅当$i: H \hookrightarrow G$是一个同态(这就说明H的代数运算与G是一致的)

2. 我们可以使用函数来重新表示缩回映射的定义.若$i: X \hookrightarrow Y$是一个包含映射,则连续函数$r: Y \to X$是一个缩回映射当且仅当

$$r \circ i = 1_X$$

3. 对于Abel群,我们可以证明G的子群H是G的一个缩回当且仅当H是G的直和(即存在$K \leq G$使得$K \cap H = e$且$K + H = G$)

[证明]

根据2中的结论我们可以得知$r: G \to H$是一个缩回映射当且仅当

$$r \circ i = 1_H$$

即$r: G \to H$是一个同态,且有$r(h) = h$,那么$\mathrm{Ker}\, r = \{g \in G : r(g) = e\} \lhd G$(由于$r(h) = h$于是对于$\forall h \neq e \wedge h \in H$由$h \notin \mathrm{Ker}\, r$,即$H \cap \mathrm{Ker}\, r = \{e\}$)由群的同态基本定理得到$G/\mathrm{Ker}\, r \simeq H$再由$\mathrm{Lagrange}$定理得到$|G| = |H||\mathrm{Ker} r|$,于是对于$hr \in H\mathrm{Ker}\, r \leq G(r \in \mathrm{Ker}\, r)$(由于$G$为$\mathrm{Abel}$群于是$H\mathrm{Ker}\, r$是一个子群)由$r(hr) = h$,且由于对于任意的$r_1, r_2 \in \mathrm{Ker}\, r$若$r_1 \neq r_2$由$hr_1 \neq hr_2$于是可以得到$H\mathrm{Ker}\, r = G$.使用加法代替群中的乘法运算,并且令$K := \mathrm{Ker} r$可以得知$H + K = G$

同理,若H是G的直和就可以得到一个K使得$KH = G$且$K \cap H = \{e\}$那么由于G为Abel群有$H \lhd G$于是可以构建一个群同态$r: G \to H$.由于$G = KH$于是可以构建一个群同态$kh \mapsto h$使得$\mathrm{Ker}\, r = K$.不难验证$r \circ i = 1_H$.

$\square$

引理0.2 : 若$n \geq 0$则S^n不是D^{n+1}的缩回.

[证明]

假设存在一个缩回映射$r: D^{n+1} \to S^n$,接着将会有一个由拓扑空间与连续函数组成的交换图表

$$\begin{tikzcd} & D^{n+1} \arrow[dr, "r"] & \\ S^n \arrow[ur, "i"] \arrow[rr, "1"] & & S^n \end{tikzcd}$$

(不难看出此即$r \circ i = 1$,合成为S^n的一个恒等映射).引入H_n得到Abel群和同态所构成的交换图表

$$\begin{tikzcd} & H_n(D^{n+1}) \arrow[dr, "H_n(r)"] & \\ H_n(S^n) \arrow[ur, "H_n(i)"] \arrow[rr, "H_n(1)"] & & H_n(S^n) \end{tikzcd}$$

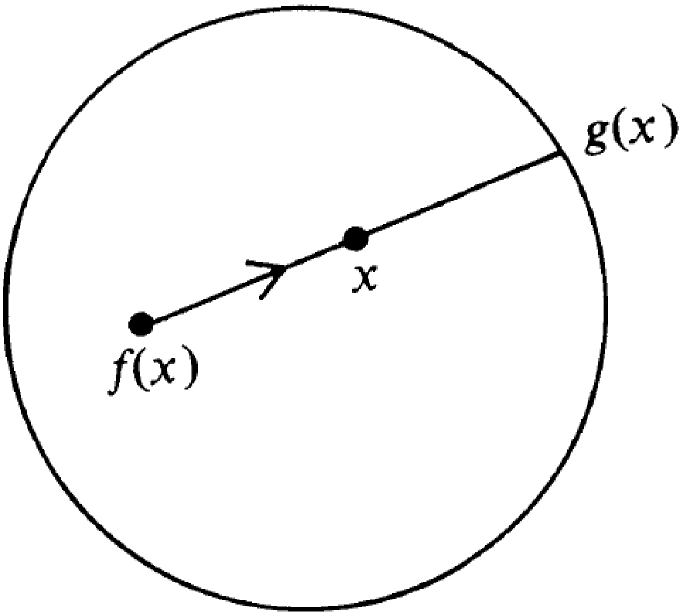
利用H_n的性质($H_n(g) \circ H_n(f) = H_n(g \circ f)$)可以得到这个新的图表是交换的.由于我们对于$H_n$有$H_n(D^{n+1}) = 0$的约束,于是得到$H_n(S^n) = 0$,但是前文定义了$H_n(S^n) \neq 0$于是造成了矛盾,即不存在缩回映射$r$使得$S^n$作为$D^{n+1}$的缩回.$\square$

注意到这个同调函子H_n将一个拓扑问题转化成了一个代数问题.

我们发现引理0.2在$n=0$时有一个初等的证法.显然有缩回映射$r:Y\to X$是一个满射.特别地,一个缩回映射$r:D^1\to S^0$在从$[-1,1]$投射到一个两点集$\{\pm1\}$时是连续的,这与连通集的连续像是连通的相矛盾.

定理0.3 (Brouwer) 若$f:D^n\to D^n$是连续的,则f有一个不动点.

[证明]



假设对于任意的$x\in D^n$均有$f(x)\neq x$.因此$f(x)$和x是互异的点,也就可以确定一条直线.定义$g:D^n\to S^{n-1}$(D^n的边界)为将x映射为$f(x)$到x的射线与S^{n-1}相交的点.显然有$x\in S^{n-1}$可以推出$g(x)=x$.接下来我们只需要证明g是连续的.

由于f是一个连续函数,于是对于以x为中心,以δ为半径的开球B使得其内所有x'均满足$\|g(x)-g(x')\|<\varepsilon$.于是我们可以得到$g^{-1}(O)$是一个$x$的邻域(其中$O$为以$g(x)$为球心,$\varepsilon$为半径的开球),也就是说$g$是一个连续函数.

而根据前文的推导得知,对于任意的$x\in S^{n-1}$都有$g(x)=x$也就是说此时S^{n-1}作为D^n的一个缩回.这与引理0.2相矛盾.$\square$

这一定理根据Schauder的工作(这就解释了为什么这里的证明用的是[Dunford and Schwartz])可以推广到无限维空间:若D是一个Banach空间中的一个紧凸子集,则任意的连续函数$f:D\to D$有一个不动点.这个证明涉及到使用Brouwer适用的定义在D的有限维子空间上连续函数序列来逼近$f\setminus 1_D$.

Exercise

$*$0.1 对于Abel群,我们可以证明G的子群H是G的一个缩回当且仅当H是G的直和(即存在$K\leq G$使得$K\cap H=e$且$K+H=G$)

(前文已证)

0.2 利用定理0.3和前文的注释的证明过程证明$n=1$时的Brouwer不动点定理.

对于$n=1$时,有$D^1=[-1,1]$且$S^0=\{\pm1\}$.于是对于任意的$f:D^1\to D^1$假设f没有不动点,即$f(x)\neq x$于是可以根据0.3的证明过程构造从$f(x)$出发经过x的射线,其与S^0交于$g(x)$上,即$g(x)\in\{\pm1\}$.

那么接下来我们证明g是连续的,不难得知我们只需要对于$(a,b),-1<a<1<b$有$g^{-1}((a,b))$是一个开集即可.

那么由于f是一个连续函数,有$|x-x'|<\delta\Leftrightarrow|f(x)-f(x')|<\varepsilon$于是若$g(x)=1$,则$x>f(x)$于是可以得到对于$x'$满足$|x-x'|<\delta$且$x'>f(x)$时有$g(x')=1$,那么就得到$g^{-1}((a,b))$确实是$D^1$上的开集.那么$g$确实是一个连续函数.

根据后续的证明过程可以得到Brouwer不动点定理成立.

0.3 假设$n \geq 1$,且$i = 0, n$时$H_i(S^n) = \mathbb{Z}$且在其他情况下有$H_i(S^n) = 0$,使用引理0.2的证明工具证明S^n上的赤道不是一个缩回.

假设存在一个缩回映射$S^n \to S^{n-1}$.由于$H_n(S^{n-1}) = 0$于是根据0.2的证明过程可以得知$H_n(S^n) = 0$但是由于$H_n(S^n) \neq 0$于是造成矛盾.

0.4 令X为一个同胚于D^n的拓扑空间,则每个连续函数$f : X \to X$都存在一个不动点.

记$h : X \to D^n$为同胚映射,于是可以得到$hfh^{-1} : D^n \to D^n$由于f, h, h^{-1}均为连续函数,于是hfh^{-1}也是一个连续函数,因此根据Brouwer不动点定理可以得知hfh^{-1}存在一个不动点x,即$hfh^{-1}(x) = x$有$fh^{-1}(x) = h^{-1}(x)$而$h^{-1}(x) \in X$于是得到$f : X \to X$存在一个不动点.

0.5 令$f, g : \mathbb{I} \to \mathbb{I} \times \mathbb{I}$是连续的;令$f(0) = (a, 0)$以及$f(1) = (b, 1)$且令$g(0) = (0, c)$以及$g(1) = (1, d)$其中$a, b, c, d \in \mathbb{I}$.证明存在某个$s, t \in \mathbb{I}$使得$f(s) = g(t)$.也就是说,路径是相交的.

由于$\mathbb{I}$与D^1同胚,于是$f(\mathbb{I}) = \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to \mathbb{I} \times \mathbb{I} = g(\mathbb{I})$有一个不动点$(x, y)$于是令$x = s, t = y$即可得到$f(s) = g(t)$

0.6 (Perron) 令$A = [a_{ij}]$为一个$n \times n$实矩阵且对于每个i, j都有$a_{ij} > 0$.证明A有一个正特征值λ且有一个对应的特征向量$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$其中对于每个$i$都有$x_i > 0$

定义$\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,$\sigma((x_1, x_2, \cdots, x_n)) = \sum_{i=1}^n x_i$接着定义$g : \Delta^{n-1} \to \Delta^{n-1}$为$g(x) = Ax/\sigma(Ax)$,其中$x \in \Delta^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$是一个列向量.

接下来我们先证明g是一个连续映射.

首先由于对于任意的$x \in \Delta^{n-1}$,由于A是一个矩阵,于是Ax可以视为一个线性变换,且$\sigma(Ax)$有定义,由于$a_{ij} > 0$于是有$\sigma(Ax) \neq 0$,于是$g(x)$确实是一个映射.

接下来验证g是连续的.由于Ax作为一个线性变换是连续的,且σ也是连续的.于是两个连续函数的商以及合成也是连续的,于是g是连续的.

而Δ^{n-1}显然与D^n同胚.于是我们可以使用Brouwer不动点定理得知g有一个不动点x.即$Ax/\sigma(Ax) = x$于是得到$Ax = \sigma(Ax)x$其中$\sigma(Ax) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$是一个正数.不难发现$x$就是我们所求的特征向量,$\sigma(Ax)$也就是正特征值$\lambda$.

范畴与函子

定义: 一个范畴$\mathscr{C}$由三个成分组成: 一类对象(object),obj $\mathscr{C}$;每一个有序对$A, B \in \text{obj } \mathscr{C}$间的态射所构成集合$\text{Hom}(A, B)$;合成$\text{Hom}(A, B) \times \text{Hom}(B, C) \to \text{Hom}(A, C)$记为$(f, g) \mapsto g \circ f$.对于obj $\mathscr{C}$中每个A, B, C均满足以下公理:

(i) $\text{Hom}(A, B)$的族是两两不相交的.

(ii) 若定义了合成,则合成是满足结合律的.

(iii) 对于每个$A \in \text{obj } \mathscr{C}$都存在一个恒等态射$1_A \in \text{Hom}(A, A)$对于任意的$f \in \text{Hom}(B, A)$满足$1_A \circ f = f$且对于任意的$g \in \text{Hom}(A, C)$满足$g \circ 1_A = g$.

(剩余内容日后补充)