《抽象代数》教学要点

(一) 群论

1. 证明一个集合在给定的运算下构成群, 分若干步骤验证群的公理定义.
2. 子群的定义和判别条件.
3. 正规子群的定义和判别条件.
4. 群同构概念, 群的同构分类 (即验证同构为等价关系).
5. 叙述 Cayley 定理.
6. 叙述并证明 Lagrange 定理.
7. 群元素的阶公式 $o(g^n) = o(g)/(o(g), n)$, 探讨在什么条件下 $o(ab) = o(a)o(b)$.
8. 证明子群的乘积公式: $|AB| = |A||B|/|A \cap B|$.
9. 证明群同态基本定理 (群的第一同构定理).
10. 证明群的第二同构定理.
11. 证明群的第三同构定理.
12. 循环群的结构定理, 写出其所有子群.
13. 描述商群 G/N 的子群和正规子群.
14. 证明 A_4 没有 6 阶子群.
15. 设 G 为群, 如果 $G/Z(G)$ 为循环群, 则 G 为交换群.
16. 设 $A, B \lhd G$ 且 $A \cap B = \{e\}$, 则 $ab = ba$, $\forall\, a \in A, b \in B$.
17. 求 S_3, S_4, Q_8 的元素共轭类, 所有的正规子群.
18. 把置换 $\sigma \in S_n$ 写成两两不相交的轮换乘积, 并确定该置换的奇偶性.
19. 设 $\sigma, \tau \in S_n$, 计算 $\tau\sigma\tau^{-1}$.
20. 证明 $A_n \lhd S_n$.

(二) 环论

21. 叙述整环, 除环, 无零因子环, 理想, 单环的定义.

22. 证明有限整环必为域.

23. 证明整数环 $\mathbb{Z}$ 和域 F 上一元多项式环 $F[x]$ 均为主理想整环.

24. 设 $\varphi : R \to S$ 为环的满同态, 如果 $I \lhd R$, 则 $\varphi(I) \lhd S$. 反之, 如果 $J \lhd S$, 则 $\varphi^{-1}(J) \lhd R$.

25. 证明环同态基本定理 (环的第一同构定理).

26. 证明环的第二同构定理.

27. 证明环的第三同构定理.

28. 叙述素理想和极大理想的定义, 并给出从商环的判别条件.

29. 叙述整环中素元和不可约元的定义, 证明素元均为不可约元.

30. 证明欧几里得整环均为主理想整环.

(三) 域论

31. 叙述域的特征概念, 证明域的特征只能是零或素数.

32. 给出素域的结构.

33. 给出代数元的定义, 证明其极小多项式可整除其每个零化多项式.

34. 证明单代数扩张的结构定理.

35. 证明有限扩张的次数公式, 即 $F \subseteq K \subseteq E$ 为域扩张, 则 $|E : F| = |E : K||K : F|$.

36. 证明域的有限扩张必为代数扩张.

37. 设 $F \subseteq E$ 为域扩张, $\alpha \in E$ 为 F 上的代数元, 证明 $|F(\alpha) : F| = \deg m_\alpha(x)$.

38. 计算 $|\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt[3]{7}) : \mathbb{Q}|$.

39. 叙述域论基本定理.

40. 给出一个多项式 $f(x) \in F[x]$ 的分裂域定义.