Chapter 1 : Some Basic Topological Notions

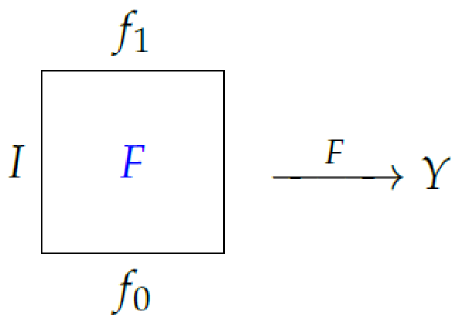
Homotopy(同伦)

人们经常用另一个更简单的函数来代替一个复杂的函数,这个函数在某种程度上近似于它,并具有原函数的重要性质.一个相关的概念是将一个功能"变形"为另一个功能:稍微"扰动"一个函数可能会产生一个与旧函数相似的更简单的新函数.

定义: 若X,Y为拓扑空间且f_0,f_1为从X到Y的连续映射,若存在一个连续映射$F:X\times\mathbb{I}\to Y$且

$$\text{对于任意的}x\in X,F(x,0)=f_0(x)\text{以及}F(x,1)=f_1(x)\text{对于任意的}x\in X$$

则称f_0同伦于f_1记作$f_0\simeq f_1$.F称为一个同伦.如果要展现一个同伦,经常写$F:f_0\simeq f_1$.

> 在Si Li的Introduction to Algebratic Topology中给出了一个很有意思的展现同伦的方式
>
> 
>

若$f_t:X\to Y$由$f_t(x)=F(x,t)$所定义,则同伦F给出了一个单参数的连续映射族,将f_0变形为f_1,我们可以用f_t来描述在t时刻的变形.

本文给出同伦的一些基本性质,并利用点集拓扑的一个初等引理为同伦的性质作铺垫.

引理 1.1(Gluing lemma). 假设一个拓扑空间X由有限个子集X_i的并所组成,即$X=\bigcup_{i=1}^n X_i$.若对于某个拓扑空间Y,有连续函数$f_i:X_i\to Y$在重叠部分相同(对于所有的i,j都有$f_i\mid X_i\cap X_j=f_j\mid X_i\cap X_j$),则存在唯一一个连续函数$f:X\to Y$使得对于每个$i$都有$f\mid X_i=f_i$.

[证明]

令$f(x)=f_i(x),x\in X_i$不难验证f是一个映射,由于$f\mid X_i=f_i$,且$X=\bigcup_{i=1}^n X_i$,于是唯一性得到保证,接下来验证f是连续的.

根据我们在点集拓扑中的学习可以得知,若f是连续的,则Y中的开集的逆像为X中的开集,于是Y中闭集的逆像也为X中的闭集.

那么令C为Y上的闭集,则

$$\begin{aligned}
f^{-1}(C) &= X\cap f^{-1}(C)=(\bigcup X_i)\cap f^{-1}(C)\\
&= \bigcup(X_i\cap f^{-1}(C))\\
&= \bigcup f_i^{-1}(C)
\end{aligned}$$

由于f_i是连续的,于是得知$f_i^{-1}(C)$是闭集,于是得到$f^{-1}(C)$是闭集(闭集的有限并).$\square$

Gluing引理还有另外一个针对开集的版本,证明方法是一致的.

引理 1.1$'$ 假设一个拓扑空间X有(可能是无穷的)开覆盖$X=\bigcup_i X_i$,若对于某个拓扑空间Y,有连续函数$f_i:X_i\to Y$在重叠部分相同则存在唯一的一个连续函数$f:X\to Y$使得$f\mid X_i=f_i$.

定理1.2 同伦在所有$X\to Y$的连续映射所组成的集合中是一个等价关系.

[证明]

1. 自反性: 构造$F(x,t)=f(x)$即可得到$f\simeq f$.
2. 传递性: 构建$F:f_1\simeq f_2$和$G:f_2\simeq f_3$.

   于是我们可以构建$H:X\times\mathbb{I}\to Y$使得

$$H(x,t)=\begin{cases}F(x,2t), & 0\le t\le 1/2\\ G(x,2t-1), & 1/2\le t\le 1\end{cases}$$

   由于重叠部分$\{(x,1/2)\}$的值相同,于是得到H是连续的,因此$f_1\simeq f_3$.
3. 对称性: 假设$f\simeq g$,于是存在$F(x,t)$使得$F(x,1)=g(x)$且$F(x,0)=f(x)$于是我们可以令$G(x,t)=F(x,1-t)$由于F是连续的,于是G也是连续的.不难发现在G下有$g\simeq f$.

因此同伦是一个等价关系.□

定义: 若$f:X\to Y$是连续的,它的同伦类是一个等价类

$$[f]=\{\text{连续函数}g:X\to Y,g\simeq f\}$$

这些同伦类所构成的族用$[X,Y]$表示.

定理1.3 令$f_i:X\to Y$以及$g_i:Y\to Z$,$i=0,1$是连续的.若$f_0\simeq f_1$且$g_0\simeq g_1$,则$g_0\circ f_0\simeq g_1\circ f_1$,即$[g_0\circ f_0]=[g_1\circ f_1]$.

[证明]

令$F:f_0\simeq f_1$以及$G:g_0\simeq g_1$是同伦.首先,我们证明

$$g_0\circ f_0\simeq g_1\circ f_1$$

构建$H:X\times\mathbb{I}\to Z$为$H(x,t)=G(f_0(x),t)$.由于f_0是一个连续函数,于是得知H是连续的.此外,
$H(x,0)=G(f_0(x),0)=g_0(f_0(x))=g_0\circ f_0(x)$且$H(x,1)=g_1\circ f_0(x)$于是得到

$$g_0\circ f_0\simeq g_1\circ f_0$$

接下来证明$g_1\circ f_0\simeq g_1\circ f_1$

构建$K:X\times\mathbb{I}\to Z$为$K(x,t)=g_1(F(x,t))$于是由于g_1和F是连续函数,有K是连续的.此外$K(x,0)=g_1\circ f_0(x)$且$K(x,1)=g_1\circ f_1(x)$于是由于同伦是一个等价关系得到$g_0\circ f_0\simeq g_1\circ f_1$.

因此可以得知$[g_0\circ f_0]=[g_1\circ f_1]$.□

于是我们可以考虑全体拓扑空间所构成的范畴Top,由于同伦是其态射集$\mathrm{Hom}(X,Y)$上的等价关系,于是得到

推论1.4 同伦是范畴Top上的同余.

> 定义 : 范畴$\mathscr{C}$上的同余是在对于所有$\mathscr{C}$上的态射类$\bigcup_{(A,B)}\mathrm{Hom}(A,B)$上的一个等价关系$\sim$,满足
>
> 1. $f\in\mathrm{Hom}(A,B)$且$f\sim f'$则$f'\in\mathrm{Hom}(A,B)$
> 2. $f\sim f'$,$g\sim g'$且合成$g\circ f$存在,则$g\circ f\sim g'\circ f'$
>
> 定理0.4 令$\mathscr{C}$为一个带有同余$\sim$的范畴,且令$[f]$为态射f的等价类.按照以下步骤定义$\mathscr{C}'$
>
> $$\begin{aligned}\text{obj }\mathscr{C}' &= \text{obj }\mathscr{C}\\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(A,B) &= \{[f]:f\in\mathrm{Hom}(A,B)\}\\ [g]\circ[f] &= [g\circ f]\end{aligned}$$
>
> 则$\mathscr{C}'$也是一个范畴,称为$\mathscr{C}$的商范畴
>
> [证明]
>
> 1. 不难发现$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}$之间是两两不相交的(由1. 可以得到)
> 2. 由于$[g\circ f]=[g]\circ[f]$于是可以得到$[(g\circ f)\circ h]=[g\circ f]\circ[h]=[g]\circ([f]\circ[h])=[g\circ(f\circ h)]$.
> 3. 不难发现$[1_A]$即$\mathscr{C}'$上的恒等映射
>
> 因此$\mathscr{C}'$确实是一个范畴□

[证明]

使用定理1.2可以直接得到同伦是一个等价关系且满足1.,而使用定理1.3可以得到同伦关系满足2.□

我们可以从定理0.4得知这是一个以拓扑空间X作为对象,且Hom集为$\mathrm{Hom}(X,Y)=[X,Y]$,态射合成为$[g]\circ[f]=[g\circ f]$的商范畴.

定义: 上面描述的商范畴称为 **同伦范畴**,用hTop表示.

> 0.17 令$\mathscr{C},\mathscr{A}$为范畴,$\sim$为$\mathscr{C}$上的同余.若$T:\mathscr{C}\to\mathscr{A}$为一个当$f\sim g$时$T(f)=T(g)$的函子,则$T$定义了一个函子$T':\mathscr{C}'\to\mathscr{A}$(其中$\mathscr{C}'$为一个商范畴)通过对于每个$X\in\mathrm{obj}\ \mathscr{C}$都有$T'(X)=T(X)$且对于每个态射$f$都有$T'([f])=T(f)$.
>
> [证明]
>
> 由于T是一个函子,于是可以得知$T(X)\in\mathrm{obj}\ \mathscr{A}$因此$T'(X)\in\mathrm{obj}\ \mathscr{A}$.
>
> 接着考虑$g,f:A\to A'$有$g\sim f$时$T(g)=T(f)$.因此$T([f])=T(f)=T'([f])$.
>
> 由于$[g\circ f]=[g]\circ[f]$因此$T'([g])\circ T'([f])=T(g)\circ T(f)$由于$T$是一个函子于是$T(g)\circ T(f)=T(g\circ f)=T'([g\circ f])$,又因为$T(1_A)=T'([1_A])=1_{T'A}$因此得到$T'$确实是一个函子

我们将要构建所有的函子$T:\mathrm{Top}\to\mathscr{A}$,其中$\mathscr{A}$是一些"代数"范畴(比如$\mathrm{Ab}$,Groups,Rings),它们满足若$f\simeq g$则$T(f)\simeq T(g)$.除了识别同伦映射这个自然而然产生的想法以外,这个事实使同伦变得很有价值,因为它保证了$\mathscr{A}$中的代数问题是由一个经T的拓扑问题所引发的且比原问题更简单.0.17证明了上述T给出了一个函子$\mathrm{hTop}\to\mathscr{A}$,所以同伦范畴事实上是非常基本的.

hTop中的等价又是什么呢?

定义: 对于一个连续映射$f:X\to Y$,若有一个连续映射$g:Y\to X$满足$g\circ f\simeq 1_X$且$f\circ g\simeq 1_Y$则f是一个 **同伦等价**.若有一个同伦等价$f:X\to Y$则两个空间X和Y具有相同的伦型.

如果重写这个定义,就会发现f是一个同伦等价当且仅当$[f]\in[X,Y]$是一个hTop中的等价(即存在$[g]\in[Y,X]$使得$[g]\circ[f]=[1_X]$且$f\circ g=[1_y]$).因此,从hTop到更为熟悉的Top的传递是通过删除括号且将$=$替换为$\simeq$完成的.

显然有同胚空间具有相同的伦型,但是反过来说是错误的,我们将在定理1.12中展示.

接下来的两个结果表明同伦与一些有趣的问题相关.

定义: 令X和Y为拓扑空间,令$y_0\in Y$在y_0处的常值映射是一个函数$c:X\to Y$满足对于所有的$x\in X$都有$c(x)=y_0$,若对于连续映射$f:X\to Y$有$f\simeq c$则f称为一个零伦.

定理1.5 令$\mathbb{C}$表示复数,令$\Sigma_\rho\subset\mathbb{C}\approx\mathbb{R}^2$表示一个以原点0为圆心,$\rho$为半径的圆,且令$f_\rho^n:\Sigma_\rho\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$为一个限制在$\Sigma_\rho$上$z\mapsto z^n$的映射.若没有$f_\rho^n(n\geq 1$且$\rho>0)$是零伦,则代数基本定理成立(每一个复系数多项式都有一个复数根)

[证明]

考虑复系数多项式

$$g(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$$

选取$\rho>\max\{1,\sum_{i=0}^{n-1}|a_i|\}$并且定义$F:\Sigma_\rho\times\mathbb{I}\to\mathbb{C}$如下

$$F(z,t)=z^n+\sum_{i=0}^{n-1}(1-t)a_iz^i$$

若我们可以证明F的像包含在$\mathbb{C}\setminus\{0\}$中,则显然有$F:g\mid\Sigma_\rho\simeq f_\rho^n$;也就是说我们需要证明$F(z,t)\neq 0$(这个限制是至关重要的,因为,正如我们将在定理1.13中看到的,每一个在"可收缩"空间中有值的连续函数,例如$\mathbb{C}$中,都是零伦的)

反过来,若存在$t\in\mathbb{I}$使得$F(z,t)=0$且$|z|=\rho$,则$z^n=-\sum_{i=0}^{n-1}(1-t)a_iz^i$.于是可以根据三角不等式得到$\rho>1$时有

$$\rho^n\leq\sum_{i=0}^{n-1}(1-t)|a_i|\rho^i\leq\sum_{i=0}^{n-1}|a_i|\rho^i\leq(\sum_{i=0}^{n-1}|a_i|)\rho^{n-1}$$

两边同时消去ρ^{n-1}则得到$\rho \le \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|$这与前文的选定矛盾.

假设g没有复数根,定义$G : \Sigma_\rho \times \mathbb{I} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$使得$G(z,t) = g((1-t)z)$(因为$g$没有根,于是得到$G$的所有取值都位于$\mathbb{C} \setminus \{0\}$中).

但是$G(z,1) = g(0) = a_0$是一个常值映射,即$g \mid \Sigma_\rho$同伦于一个常值映射,由于$g \mid \Sigma_\rho$还同伦于f_ρ^n因此f_ρ^n同伦于一个常值映射,这与假设矛盾.□

> 稍后,我们将在推论1.23中看到$\mathbb{C} \setminus \{0\}$就是圆$S^1 = \Sigma_1$.准确来说$\mathbb{C} \setminus \{0\}$与$S^1$有着相同的伦型.

一个常见的问题是将映射$f : X \to Z$扩张到更大的空间Y上,其图表为

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[dr, dashed, "g"] & \\ X \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"'] & Z. \end{tikzcd}$$

运用到同伦上则得到一个这样的问题:若$f_1, f_0 : X \to Z$则若我们可以将$f_0 \cup f_1 : X \times \{0\} \cup X \times \{1\} \to Z$扩张到整个$X \times \mathbb{I}$上,则$f_1 \simeq f_0$.

定理1.6 令$f : S^n \to Y$是一个映射到Y的连续映射则下述条件等价

(i) f是零伦.

(ii) f可以被扩张为一个连续映射$D^{n+1} \to Y$.

(iii) 若$x_0 \in S^n$且$k : S^n \to Y$是一个映射到$f(x_0)$的常值映射,则存在一个同伦$F : f \simeq k$使得对于任意的$t \in \mathbb{I}$均有$F(x_0, t) = f(x_0)$.

[证明]

(i) $\Rightarrow$ (ii).假设$F : f \simeq c$其中$c(x) = y_0$对于所有的$x \in S^n$成立.定义$g : D^{n+1} \to Y$如下

$$g(x) = \begin{cases} y_0, & 若 0 \le \|x\| \le 1/2 \\ F(x/\|x\|, 2 - 2\|x\|), & 若 1/2 \le \|x\| \le 1 \end{cases}$$

空穴来风,必有其因: 若$x \ne 0$则$x/\|x\| \in S^n$若$1/2 \le \|x\| \le 1$,则$2 - 2\|x\| \in \mathbb{I}$,若$\|x\| = 1/2$则$2 - 2\|x\| = 1$即$F(x/\|x\|, 1) = y_0$.

因此使用Gluing引理得知g是一个连续函数,且$x \in S^n \Leftrightarrow \|x\| = 1$即$g(x) = f(x,0) = f(x)$于是$g(x)$确实是$f(x)$的一个扩张.

(ii) $\Rightarrow$ (iii).假设$g : D^{n+1} \to Y$是f的一个扩张.定义$F : S^n \times \mathbb{I} \to Y$如下

$$F(x,t) = g((1-t)x + tx_0)$$

注意到$(1-t)x + tx_0 \in D^{n+1}$,因为这是一个连接于$x$和$x_0$之间的线段上的点.因此显然有$F$是连续的.有$F(x,0) = g(x) = f(x)$, $F(x,1) = g(x_0) = f(x_0)$对于所有的$x \in S^n$均成立.因此$F : f \simeq k$其中$k : S^n \to Y$是一个映射到$f(x_0)$的常值映射.最终$F(x_0, t) = g(x_0) = f(x_0)$对于所有的$t \in \mathbb{I}$成立.

(iii) $\Rightarrow$ (i).显然成立□

对比于引理0.2,若$Y = S^n$且f是恒等映射,则引理0.2(尚未正式公布)推出f不是一个零伦.

Convexity, Contractibility, and Cones(凸性,可收缩性和锥体)

我们给上一个证明中所用到的D^{n+1}的特性起个名.

定义 $\mathbb{R}^m$上的一个子集X若满足对于一对点$x,y\in X$连接x,y的线段都包含于X则称X是凸的.换句话说,若X是凸的,则对于所有的$x,y\in X$,$t\in\mathbb{I}$有$tx+(1-t)y\in X$.

很容易给出几个凸集的例子.具体的有$\mathbb{I}^n,\mathbb{R}^n,D^n$以及$\Delta^n$.将球面$S^n$视为$\mathbb{R}^{n+1}$的子集时其不是凸的.

定义 若1_X是一个零伦则空间X是可收缩的.

定理 1.7 : 每一个凸集X均为可收缩的.

[证明]

对于$x_0\in X$,定义$c:X\to X,c(x)=x_0$对于所有$x\in X$成立.定义$F:X\times\mathbb{I}\to X$为$F(x,t)=tx_0+(1-t)x$.可以很轻易地发现$F:1_X\simeq c$.□

一个半球是可收缩的,但不是凸的,所以定理1.7反过来是不成立的.在证明引理1.6后,我们观察到引理0.2表示S^n不可收缩.

Exercise

1.1 令$x_0,x_1\in X$且令$f_i:X\to X$,$i=0,1$表示一个映射到x_i的常值映射.证明$f_0\simeq f_1$当且仅当存在一个连续映射$F:\mathbb{I}\to X$使得$F(0)=x_0$且$F(1)=x_1$.

($\Rightarrow$)若$f_0\simeq f_1$则存在一个连续函数$H:X\times\mathbb{I}\to X$使得$H(x,0)=x_0,H(x,1)=x_1$对于任意的$x\in X$均成立.且H连续

那么,我们选定一个$x\in X$,令$F(t)=H(x,t)$得到F连续且$F(0)=x_0$且$F(1)=x_1$

($\Leftarrow$)若存在$F:\mathbb{I}\to X$使得$F(0)=x_0$且$F(1)=x_1$.

那么对于f_0和f_1有$F(0)=f_0(x)$且$F(1)=f_1(x)$对于任意的$x\in X$均成立.

由于F是一个连续函数,于是考虑$H:X\times\mathbb{I}\to X$使得$H(x,t)=F(t)$对于任意的$x\in X$成立,因此得到H是一个连续函数,且$H(x,0)=f_0(x),H(x,1)=f_1(x)$于是得到$f_0\simeq f_1$.

1.2

(i) 若$X\approx Y$且X是可收缩的,则Y也是可收缩的.

(ii) 若X,Y为Euclidean空间的子空间,$X\approx Y$且X是凸的,证明Y不一定是凸的.

(i) 若X是可收缩的,则$1_X\simeq c$其中c为某个映射到$x_0\in X$的常值映射,于是存在$H(x,t)$使得$H(x,0)=x$且$H(x,1)=x_0$.

由于$X\approx Y$,因此存在$h:X\to Y$使得h连续且有一个连续逆,因此$h\circ H$也是一个连续函数,由于$h(x_0)$在Y上只是一个点,因此得到$h\circ H(x,0)=h(x)$且$h\circ H(x,1)=h(x_0)$且由于H是一个连续函数,$h\circ H$也是连续的,因此$h\circ H$为一个$h(x)$到$h\circ c$的同伦,由于h是一个同胚映射,因此h显然是一个双射,则有$h(X)=Y$于是1_Y可以写为$h(x)\mapsto h(x)$的形式,由于$h\circ c$是一个Y上的常值映射,因此得到了Y是一个可收缩空间.

(ii) 考虑立体投影$\pi:S^2\setminus\{(0,0,1)\}\to\mathbb{E}^2$,不难发现$\pi$是一个同胚,$\mathbb{E}^2$是一个凸集,但是$S^2\setminus\{(0,0,1)\}$不是.

1.3 令$R:S^1\to S^1$为一个旋转α弧度的映射,证明$R\simeq 1_S$,其中1_S是S^1的恒等映射.进而得到每个连续映射$f:S^1\to S^1$均同伦于一个连续映射$g:S^1\to S^1$其中$g(1)=1(1=e^{2\pi i0}\in S^1)$

考虑映射$F:S^1\times\mathbb{I}\to S^1$为$F(x,t)$为一个旋转$t\alpha$弧度的映射,不难发现由于$R$是一个连续映射,于是$F$也是一个连续映射.因此$R\simeq 1_S$.

接着

若存在f且不存在g满足$g(1)=1$使得$f\simeq g$.由于f和g均为S^1上的映射,于是可以根据Euler公式将其转化为$[0,2\pi)$上的映射.

于是无论f还是g作为一个连续函数都可以视为一个旋转α度的映射或沿着某个轴对称的映射,因此必然有$f\simeq g$.

1.4

(i) 若X是$\mathbb{R}^n$的一个凸子集且Y是一个$\mathbb{R}^m$的凸子集,则$X\times Y$是$\mathbb{R}^{n+m}$上的一个凸子集

(ii) 若X,Y是可收缩的,则$X\times Y$是可收缩的.

(i) 对于$X\times Y$中任意一点x都可以写为$x=(x_1,x_2)$的形式,其中$x_1\in X,x_2\in Y$

由于X是$\mathbb{R}^n$的一个凸子集,因此对于任意的对于所有的$x_1,y_1\in X,t\in\mathbb{I}$都有$tx_1+(1-t)y_1$中所有点都处于$X$内.同理对于$x_2,y_2\in Y,t\in\mathbb{I}$也有$tx_2+(1-t)y_2\in Y$.

于是对于$x=(x_1,x_2),y=(y_1,y_2)$考虑$tx+(1-t)y=(tx_1+(1-t)y_1,tx_2+(1-t)y_2)\in X\times Y$,因此得到$X\times Y$是$\mathbb{R}^{n+m}$上的一个凸子集.

(ii) 若X是可收缩的,则$1_X\simeq c$其中c为映射至$x_0\in X$的一个常值映射,即存在一个连续映射$F(x,t)$使得$F(x,0)=x$且$F(x,1)=x_0$.同理由于Y是可收缩的,于是存在一个连续有映射$G(y,t)$使得$G(y,0)=y$且$G(y,1)=y_0\in Y$.

令$H((x,y),t)=(F(x,t),G(y,t))$有$H((x,y),0)=(x,y)$为$1_{X\times Y}$且$H((x,y),1)=(x_0,y_0)$为$X\times Y$上的一个常值映射,于是得知$X\times Y$是可收缩的.

1.5 令$X=\{0\}\cup\{1,1/2,\cdots,1/n,\cdots\}$且$Y$为一个可数离散空间.证明$X,Y$没有相同的伦型.

显然有X是一个紧集,因此考虑$h:X\to Y$由于Y是一个可数离散空间,我们有$\{h^{-1}(y):y\in Y\}$构成了X的一个开覆盖.由于X是紧的,因此$\{h^{-1}(y):y\in Y\}$有一个有限子覆盖.

由于X具有无穷多个元素因此必然存在一个子覆盖$U=h^{-1}(y)$使得U包含了X中无穷多个元素,即在U之外至多有有限个点.

现在假设$f:X\to Y$是一个同伦等价,那么就存在某个$g:Y\to X$使得同伦$H:f\circ g\simeq 1_Y$.但是由于$H(\{y\}\times\mathbb{I})$是一个连通映射的连续像,因此它本身也是连通的.由于Y是离散空间,因此得到$H(y,0)=H(y,1)$对于所有的$y\in Y$都成立.

但是由于f的像是有限的,且Y具有无穷多个元素,因此必然存在y使得$y\notin \mathrm{Im}\ f$即,$y\neq f(g(y))$因此有$H(y,0)=f(g(y))\neq y=1_Y$造成矛盾.因此X与Y没有相同的伦型.