Chapter 0 : Introduce

Notation(标记)

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} &= \text{integers,即整数}\\ \mathbb{Q} &= \text{rational numbers,即有理数}\\ \mathbb{C} &= \text{complex numbers,即复数}\\ \mathbb{I} &= [0,1], \text{the(closed) unit interval,一个单位的闭区间}\end{aligned}$$

$\mathbb{R}^n$被称为n维实空间(或欧式空间),当然$\mathbb{R}^n$是n个$\mathbb{R}$的笛卡尔积.同样地,$\mathbb{R}^2$同胚于$\mathbb{C}$.

若$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$接着,范数定义为$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$当$n = 1$时有$\|x\| = |x|$,即为$x$的绝对值.

我们认为$\mathbb{R}^n$是一个$\mathbb{R}^{n+1}$的子空间,其由所有的最后一个坐标为0的$(n+1)$-元组构成

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$$

S^n称为一个$n-$球面(n - sphere)(半径为1且以原点为中心).不难发现$S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$($S^1 \subset \mathbb{R}^2$为圆).

不难发现一个$0-$球包含$\{1, -1\}$两个点是一个离散的两点空间.不难发现S^n可以作为S^{n+1}的一个"赤道"(比如若把地球视为S^3则赤道就是一个S^2),这是因为

$$S^n = \mathbb{R}^{n+1} \cap S^{n+1} = \{(x_1, \cdots, x_{n+2}) \in S^{n+1} : x_{n+2} = 0\}$$

接下来继续把S^n类比于地球.其北极点定义为$(0, 0, \cdots, 0, 1) \in S^n$,其南极点定义为$(0, 0, \cdots, 0, -1) \in S^n$.既然有了南北概念,那"南北半球"中的点也可以找到一个对称关系,对于$x = (x_1, \cdots, x_{n+1}) \in S^n$可以定义其对称点为
$-x = (-x_1, \cdots, -x_{n+1}) \in S^n$其中$x$到$-x$之间的距离为2.

既然定义了球面这一概念,我们或许可以将球面填充成一个完整的球,不难发现球中任意一个点都满足其距离球心长度小于等于1,即

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$$

D^n就称为一个$n-$实球(n-ball或$n-$盘n-disk).显然有$S^{n-1} \subset D^n \subset \mathbb{R}^n$;不难发现$S^{n-1}$是$D^n$在$\mathbb{R}^n$中的边界

$$\Delta^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \text{对于每个}x_i \geq 0, \sum x_i = 1\}$$

Δ^n称为一个标准n维单形(standard n - simplex).显然有Δ^0是一个点,Δ^1是一个单位的闭区间,Δ^2是一个三角形(包括其内部),Δ^3是一个(实)四面体,以此类推.不难发现$\Delta^n \approx D^n$,尽管读者在习题2.11前并不想构建一个同胚映射

> 这是一个练习:$\mathbb{R}^n$的一个包含了一个内点的紧凸子集是同胚于D^n的;这就揭示了Δ^n,D^n和I^n是同胚的.

这有一个标准的从$S^n \setminus \{\text{北极点}\}$到$\mathbb{R}^n$的一个同胚映射,称作赤平投影(球面投影,stereographic projection).使用N表示北极点,接着定义映射$\sigma : S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$为一个$\mathbb{R}^n$到一条经过$x$和$N$的直线(是$n+1$维的)的交点.

根据熟知的点斜式写法可以将后一直线写为$tx + (1-t)N$的形式.从而,其上的点具有如下坐标$(tx_1, \cdots, tx_n, tx_{n+1} + (1-t))$.当$t = (1 - x_{n+1})^{-1}$时最后一个坐标为0.

从而

$$\sigma(x) = (tx_1, \cdots, tx_n)$$

其中$t = (1 - x_{n+1})^{-1}$.这时按照惯例应当检查σ是否是一个同胚映射.

不难发现$\sigma(x) = x$当且仅当x在S^{n-1}的赤道上.

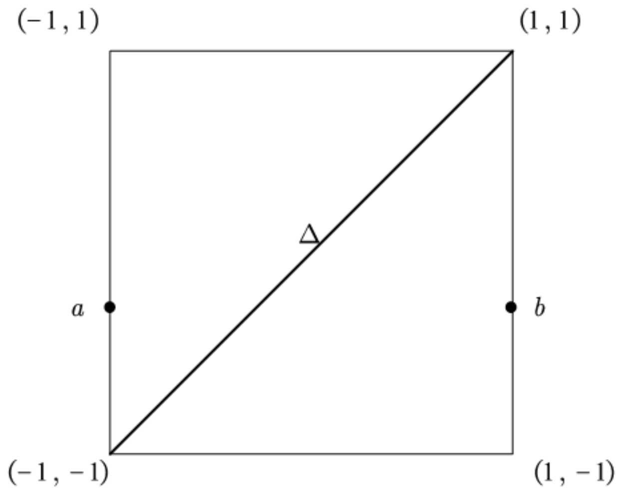
Brouwer Fixed Point Theorem

有了先前的记号,我们现在可以对于Brouwer fixed point theorem进行一个简单的证明:

若$f : D^n \to D^n$是连续的,接着这样就存在一个$x \in D^n$并且$f(x) = x$.

当$n = 1$时,定理就有一个简单的证明.实球D^1是一个闭区间$[-1, 1]$.

接下来我们看一个关于f在区域$D^1 \times D^1$内的图.



定理0.1. 每一个连续的$f : D^1 \to D^1$都有一个不动点

[证明]

令$f(-1) = a$并且$f(1) = b$,若$f(-1) = -1$或者$f(1) = 1$自然证毕(-1和1即为一个不动点)

因此,我们假设如图所示的一个函数满足$f(-1) = a > -1$并且$f(1) = b < 1$.

令G为f的图像并且Δ作为单位函数的图像(当然是一个对角线),接下来,我们必须证明$G \cap \Delta \neq \varnothing$.

一个好的想法是利用连通性论证去展示任意一个从a到b的$D^1 \times D^1$中的路径必然要经过Δ.

由于f是一个连续函数,$G = \{(x, f(x)) : x \in D^1\}$是连通的($G$是一个由$x \mapsto (x, f(x))$给出的连续映射$D^1 \to D^1 \times D^1$的像)

定义$A = \{(x, f(x)) : f(x) > x\}$以及$B = \{(x, f(x)) : f(x) < x\}$

注意到$a \in A$并且$b \in B$,于是有A, B均非空,若$G \cap \Delta = \varnothing$,则$G$是一个无交并

$$G = A \cup B$$

最后,这就导致无论是A和B都是G中的开集,这也就与G的连通性产生了矛盾□