古今数学思想杂记

公理化数学

起源

公理化的数学起源于古希腊.古希腊的晚期毕达哥拉斯学派(Pythagoras)与柏拉图(Plato)学派把观念世界与实物世界严格区分开来，认为物质世界中的关系是会变的，因而其并不代表最终真理，但理想世界中的关系是不变的，因而是绝对真理，绝对真理才是哲学家应该惯性的，这或许是古希腊人热衷于抽象的源头.

雏形

自柏拉图(Plato)处产生雏形，他认为唯有具体对象的完美理想才是实在，唯有理想世界以及理想间的关系才是永恒的，不受时代影响的，不朽的，而且是普遍的.物理世界是理想世界的不完善体现，因此它是会枯朽的，所以只有理想世界才值得进行研究，只有在纯粹理性的形式上，才能获得绝对正确的知识.

Plato比较注重推理过程中的方法论，演绎结构在Plato眼中是有需要的，正如其在《理想国》中所述

> *你们知道几何、算术和有关科学的学生，在他们的各科分支里，假定奇数和偶数、图形以及三种类型的角等等都是已知的，这些是他们的假设，是大家认为他们以及所有人都知道的事，因而认为是无需向他们自己或向别人再作任何交代的；但他们是以这些事实出发的，并以前后一贯的方式往下推，直到得出结论.*

Aristotle学派

Aristotle认为科学可以分为3类：理论性的、生产性的和实务性的.理论性科学是探求真理的；生产性科学是各项工艺而实务性科学是摆正人的行为和动作而出现的.

Aristotle讨论定义.他对定义的想法是符合现代精神的；他说定义只不过是给一批文字命个名.他又指出定义必须用先存在于所定义事项的某种东西来表述.他同时也承认未经定义的名词是需要的，因为在一系列的定义中总得有个开头.

他又指出一个定义只能告诉我们一件事物是什么，并不能说明它一定存在.定义了的东西是否存在有待于证明，除非是少数几个第一性的东西诸如点和直线，它们存在是同公理(第一性原理)一起事先为人们所接受的.

Aristotle 和 Euclid 所采取的用于证明存在性的方法是构造(construction).Euclid《原本》中头三个公理承认直线和圆的构造；所有其他数学概念则必须构造出来以证明其存在.

Aristotle 也讨论数学的基本原理.他把公理和公设区分开来，认为公理是一切科学公有的真理，而公设则只是为了一门学科所接受的第一性原理.他把逻辑原理(诸如矛盾律、排中律、等量加减后结果相等的公理以及其他这类原理)都列为公理.公设无需是不言自明的，但其是否属于真应受所推出结果的检验.所列出的一批公理和公设，数目应当越少越好，只要它们能够用以证明所有的结果.

圆锥曲线(conic section)

起源

圆锥曲线起源于Plato学派，Menaechmus是这样引入圆锥曲线的：他利用三种圆锥：直角的、锐角的和钝角的圆锥，再用垂直于锥面一母线的平面来切割每个锥面.于是当时他们只知道双曲线的一支.

无理数

起源

$\sqrt{2}$与1不能公度

毕达哥拉斯(Pythagoras)学派把能用整数比表达的比称为可公度比，意即相比量可以用公度量单位量尽，而把不能这样表达的比称为不可公度比.当时毕达哥拉斯学派认为：宇宙间的一切现象都可以归结为整数或整数之比

但是好景不长，Aristotle说Pythagoras学派通过归谬法(间接证法)给出$\sqrt{2}$与1是不能公度的.

证明：设等腰三角形斜边与一直角边之比为$\alpha:\beta$并设这个比已经表达成了最小整数之比。于是根据Pythagoras定理可以得出$\alpha^2=2\beta^2$即α^2必然为偶数，由于任意奇数的平方必为奇数，于是α必然为偶数。

但是$\alpha:\beta$是既约的，因此β必然是奇数.α既然为偶数，故可以设$\alpha=2\gamma$，于是得到$\beta^2=2\gamma^2$这说明β为偶数，导致矛盾，于是可以得知等腰三角形的斜边与直角边之比不可公度.

立方倍积问题

在Eratosthenes的一本书中的一种说法是：得洛斯(Delos)地方的人遭瘟疫求教于巫神，巫神告诉他们应把现有的立方祭坛翻倍.得洛斯人知道把祭坛一边加倍是无法把体积加倍的，就去找Plato解决.Plato告诉他们说巫神之意并不是要两倍大的祭坛，而只是借此谴责希腊人不重视数学并对几何不够尊崇.

Hippocrates指出立方倍积问题可以化为一个线段与另一双倍长线段之间求两个比例中项的问题

即令x，y是这两个量，使得

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a} \tag{1}$$

则有

$$x^2=ay,y^2=2ax \tag{2}$$

因$y=\frac{x^2}{a}$，故从(2)可得

$$x^3=2a^3 \tag{3}$$

Eudoxus学派

Eudoxus是古希腊最伟大的数学家.在他的时代，越来越多的不可公度比的发现迫使古希腊人不得不去研究这些数，它们确实是数吗？它们出现于几何论证中，而整数与整数之比既出现于几何也就出现于一般数量的研究中.此外，用于可公度的长度、面积和体积的几何证明，怎样才能推广用之于不可公度的这些量呢？

Eudoxus引入了变量(或称为量)这个概念.它不是数，而是代表诸如线段、角、面积、体积这些能够连续变动的东西，量和数不同，数是一个跳动到另一个，例如从4跳到5，对于量则是不指定数值的.然后Eudoxus定义两个量之比并定义比例(即两个比相等的关系)，把可公度比与不可公度比都包括在内，但是他仍不用数表示这个比.比和比例的概念是同几何学分不开的.