序言

由于集合论是宽泛的领域,在实分析中我们所运用到的不过是浅薄的实分析基础.于是本章是提供给志在速成集合论以进行实分析内容方面研究的人所准备的,关于集合论方面的内容反而会比较少.

假定读者已经学过了傅里叶分析(数学分析),线性代数(高等代数).

公理体系

在介绍集合论的任何内容之前,按照惯例,我们都需要对其公理体系进行一个阐释,本文选取的是ZFC(Zermelo-Fraenkel-Choice)公理体系并承认选择公理.

至于为何要定义这个公理体系?让我们把视角回到Cantor对于集合论下初始定义的时候,Cantor称集合(Set)是一些确定的,不同的东西的总体(Collection),这些东西人们能意识到,并且能判断一个给定的东西是否属于这个总体.但是这会造成一些矛盾(我们在类的部分会进行详细阐述)所以,为了安全地使用这个概念,集合论的公理体系便诞生了.

定义(集合) 集合(Set)是一些确定的,不同的东西的总体(Collection),这些东西人们能意识到,并且能判断一个给定的东西是否属于这个总体.

构筑

ZFC公理体系构筑于

- 一阶逻辑,其中具有常见的$\wedge$,$\neg$,$\leftrightarrow$,$\forall$,$\exists$等逻辑连词与量词,括号$()$,变元$x, y, z, \cdots$和等号$=$(视为二元谓词)等;可以判定一个公式是否合乎语言的规则,比如括号的左右配对,合规者可以称为合式公式.这套语言是形式逻辑的标准基础
- 集合论所需的二元谓词$\in$和以下将列出的一套公理体系$\mathbf{A.0}-\mathbf{A.9}$.若$x \in y$则称$x$为$y$中的元素.ZFC处理的所有对象$x, y$都应理解为集合;特别地,集合的元素本身也是一个集合,而集合s和仅含s的集合$\{s\}$是两回事

类

尽管ZFC公理体系并不承认类的概念,但是为了让读者更方便的理解集合论及其局限之处,我们还是介绍一下类的定义

定义(类) 令$\varphi(u)$为一个性质,则$\{u : \varphi(u)\}$不一定是一个集合(比如$\varphi(u) : u$为集合),这样的一个对象称为类(class),特别地,不是集合的类称为真类(proper class)

显然的,每一个集合都是类,例如$\{x : x \neq x\}$.但是有些类不是集合,例如$R = \{X : X \notin X\}$就是一个真类,至于我们为什么要定义出类这个概念,还需要追溯回Bertrand Russell(也有人叫他罗素)在1918年把一个悖论通俗化,称为理发师悖论: 一个乡村理发师,自夸无人可与之相比,宣称他当然不给自己刮脸的人刮脸,但却给所有自己不刮脸的人刮脸.一天他产生了疑问:他是否应该给自己刮脸.假如他自己不刮脸的话,则按照他声言的前一半,他就不应该给自己刮脸;但是假如他自己不刮脸的话,按照他自夸的,他又必须给自己刮脸,这个理发师陷入了逻辑的窘境.

对于上述问题,我们把"理发师"改成"集合","给自己刮脸"改成"是一个集合",也就是说理发师悖论即一切集合所组成的集合到底是不是一个集合的问题.

看到上述问题,是不是感觉集合论的体系摇摇欲坠?但是路是死的人是活的,我们可以在一些不引起悖论的类之间进行讨论,也就是我们的集合论只考虑一些安全的类(后来的Grothendieck也提出Grothendieck宇宙的概念对于讨论的集合设立一个防火墙),这也就是Zermelo以及Fraenkel的工作.

Zermelo的计划是,只准许那些看来不大会产生矛盾的类进入集合论.例如空类(也就是我们先前所讨论过的空集),任何一个有限类,以及自然数的类,看来是安全地给定了一个安全地类,从它所形成的一些类,诸如任何一个子类,安全类的联合,以及一个安全类的所有子类所成的类,都应该是安全类.但是,他排除了求余,因为既是x是一个安全类,x的余类,即对象的某个大宇宙中所有的非x(non-x)也未必是安全的.

Abraham A. Fraenkel改进了Zermelo所发展的集合论,von Neumann又对其加以改革(在此处不进行赘述).在Zermelo-Fraenkel系统中,避免悖论的希望寄托在将对于所容许的集合的类型加以限制,而同时又足够用来作为分析的基础.

ZFC公理体系

A.0 存在公理(Exi) 存在一个集合

$$\exists x(x=x)$$

这条逻辑公理提醒我们,我们所遵循的逻辑有一个本体上的承诺:我们所谈论的世界不能是虚无的,它至少存在着一个事物.

A.1外延公理(Ext) 两个有相同元素的集合相等

$$\forall X\forall Y\forall u(u\in X\leftrightarrow u\in Y)\to X=Y$$

由于$X=Y\to\forall u(u\in X\leftrightarrow u\in Y)$是基本的逻辑定理,于是我们有

$$\forall u(u\in X\leftrightarrow u\in Y)\leftrightarrow X=Y$$

这个公理表明集合是由其元素决定的.

A.2配对公理(Pai)对于任意a和b,存在一个集合只以a,b为元素,即

$$\forall a\forall b\exists c\forall x(x\in c\leftrightarrow x=a\vee x=b)$$

根据我们先前所描述的外延公理不难发现对于c有这样的集合c是唯一的(任何满足上述公理的集合c都相等),我们可以将其表示为$\{a,b\}$.

有序对(x,y)的概念也可以使用配对公理进行描述: 我们能定义$(x,y):=\{\{x\},\{x,y\}\}$由此可以定义积集$X\times Y:=\{(x,y):x\in X,y\in Y\}$;准此要领不难定义有限多个集合的积集$X\times Y\times\cdots$.集合间的映射$f:X\to Y$等同于它的图形$\Gamma_f\subset X\times Y$:对每个$x\in X$,交集$\Gamma_f\cap(\{x\}\times Y)$是一个独点集(不难发现这就意味着映射是良定义的),记作$\{f(x)\}$

A.3分离公理模式(Sep) 令$\varphi(u)$为公式. 对任意集合X,存在一个集合$Y=\{u\in X:\varphi(u)\}$:

$$\forall X\exists Y\forall u(u\in Y\leftrightarrow u\in X\wedge\varphi(u))$$

也可以写为

$$Y=\{u\in X:\varphi(u)\}$$

我们称其为分离公理模式,是因为其本质上可以代表无穷多条公理,试想,对于每一公式φ都存在一条相应的分离公理.由于Y实际上是X的一个子集,于是有时候也叫他子集公理.然而更多时候称其为分离公理.

至于分离公理为何基于一个集合X进行讨论呢?

我们先给出一个叫做"概括原则"($*$)的概念.给定一个性质$\psi(x)$,概括原则允许我们定义集合$Y=\{x:\psi(x)\}$但是这显然可以生成一些真类.于是分离公理需要一个已经存在的集合X,利用ψ将Y从X中分离出来.Zermelo指出:这条公理不同于概括原则之处就在于"它有以下限制.首要的是集合不能通过这条公理**独立地定义**,而是必须由已存在的集合中被**分离**出来"

有了分离公理模式,我们就可以进行如下操作

令$\varphi(u)$为一个性质:若存在集合X满足对于任意u,$\varphi(u)$蕴含着$u\in X$,则$\{u:\varphi(u)\}=\{u\in X:\varphi(u)\}$,根据分离公理可以得知这样的集合是存在的(任取一个集合X即可),并且这个集合并不依赖于X(根据外延公理可以得出),即如果有X'也满足$\varphi(u)$蕴含$u\in X'$则有$\{u\in X:\varphi(u)\}=\{u\in X':\varphi(u)\}$这种情况下,考虑所有满足条件的集合$X$便可以得到$x\neq x\to x\in X$总是真的,于是根据**A.0**可以得知至少存在一个集合.

即我们可以得到以下定义

定义(空集) $\{x:x\neq x\}$是一个集合,根据外延公理可知它是唯一的(考虑$A=\{u\in X:u\neq u\}$以及$B=\{u\in Y:u\neq u\}$可以得到$u\in A\leftrightarrow u\in B$)我们将其记为$\varnothing$也就是常说的空集.

由分离公理不难推导出集合的子集,真子集,交集$\cap$与差集$\setminus$具体的证明留给读者

$\mathbf{A.4}$并集公理(Uni)对任意集合X,存在集合Y满足: $u \in Y$当且仅当存在$z \in X$使得$u \in Z$,即

$$\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow \exists z (z \in X \wedge u \in z))$$

这样的Y是唯一的,称为X的并,记为$\bigcup X$.特别地,我们定义$X \cup Y = \bigcup \{X, Y\}$

既然在$\mathbf{A.3}$中我们已然可以定义出集合的子集与真子集,接下来我们可以考虑一个集合所有子集构成的类,对于这个类,我们认为一个集合的所有子集组成一个新的集合.

$\mathbf{A.5}$幂集公理(Pow) 对于任意集合X,存在集合Y满足$u \in Y$当且仅当$u \subset X$,即

$$\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow u \subseteq X)$$

由外延公理也可以得知这样的集合Y是唯一的,我们将其称为X的幂集(Power Set),记为$\mathcal{P}(X)$有些文献中也直接记为$P(X)$或2^X(至于为什么是2^X则需要根据序数的定义进行说明,由于本章预计不会涉及到序数,于是在此进行介绍:考虑$X \to 2 = \{0, 1\}$,我们将所有对应到1的元素取出,利用分离公理模式可以得到其为集合X的一个子集,考虑所有这样的映射,构成一个集合,其即为集合X的幂集$\mathcal{P}(X)$,不难发现$|\mathcal{P}(X)| = 2^X$)

接下来我们可以定义集合的后继

定义:对于任意集合x,集合$x \cup \{x\}$称为x的后继,一般即为$S(x)$或者x^+

$\mathbf{A.6}$(Inf)存在集合X,$\varnothing \in X$,并且对任意$x \in X$,x的后继$S(x)$也属于X

$$\exists X [\varnothing \in X \wedge \forall x (x \in X \to S(x) \in X)]$$

不难看出,$\{0, 1, 2, 3, \cdots\} \subseteq \omega$,所以无穷公理是一个集合.

这样的X称为归纳集,预设归纳集存在的用意在于萃取它的子集

$$\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \cdots\}$$

不难看出$\{0, 1, 2, 3, \cdots\} \subseteq \omega$,所以无穷公理保证了它是一个集合.

> 番外
>
> 分析的严密化揭示人们有必要去了解实数集合的结构.为了处理这个问题,Cantor曾引进关于无穷点集的一些概念.Cantor认为无穷集合的研究是如此重要,以至于他就为此而承担起了无穷集合的研究.他期望这个研究能使他清楚地区分不同的不连续点的无穷集合.
>
> 集合论的中心难点是无穷集合这个概念本身.从希腊时代以来,这样的集合很自然地引起数学家门与哲学家们的注意,而这种集合本以及看来是矛盾的性质,使得对于这种集合的理解没有任何进展.Zeno的悖论(应该是那个著名的追乌龟问题)是难点中的第一个迹象,既不是直线的无穷可分性,也不是直线作为一个由离散的点构成的无穷集合,足以对运动作出合理的结论.
>
> Aristotle也讨论过无穷集合,例如整数集合,但是他并不承认一个无穷的集合可以作为固定的整体而存在,对于他来说,集合只能是潜在无穷的(potentially infinite).
>
> 但是Proclus(Euclid的注释者)注意到圆的一根直径分圆成为两半,由于直径有无穷多个.但他使用这样的说法来解决这个矛盾,他说:任何人只能说很大很大的数目的直径或半圆,不能说一个实实在在无穷多的直径或半圆.换句话说,Proclus接受Aristotle的潜在无穷概念而不接受实无穷(actual infinity)这样就回避了两个无穷大等于一个无穷大的问题.
>
> 哪怕是Gauss也反对把一个无穷量当作实体,"这在数学中是从来不允许的.无穷只是一种说话方式,当人们确切地说到极限时,是指某些比值可以任意近地趋近它,而另一些则允许没有界限的增加"Cauchy也不承认无穷集合的存在,因为部分能同整体构成一一对应这件事在他看来是荒谬的.
>
> 但是总有人认为无穷集合必须存在,第一个作出这个尝试的人是Bolzano,在他的《无穷悖论》一书(在他死后三年才出版)中他维护了实在无穷集合的存在,并且强调了两个集合等价的概念,这就是后来叫做两个集合的元素之间的一一对应关系,这个等价概念,适用于有限集合,同样也适用于无穷集合.他注意到在无穷集合的情形,一个部分或子集可以等价于整体;他并且坚持这个事实必须接受.例如0到5之间的实数通过公式$y = 12x/5$可以与0到12之间的实数构成一一对应,虽然这第二个数集包含了第一个数集.对于无穷集合,同样可以指定一种数叫超限数,使得不同的无穷集合有不同的超限数,虽然Bolzano关于超限数的指定根据Cantor的理论来看是不正确的.

Bolzano关于无穷的研究,其哲学意义比数学意义来得多,并且没有充分弄清楚后来称之为集合的势或说集合的基数的概念.他同样遇到一些性质在他看来属于悖论.他认为,对于超限数无需建立运算(但是Cantor在他的序数理论里确确实实把$\aleph$数构造了出来),所以不需要深入研究.

接下来,有请集合论的创建者Georg Cantor登场,关于他的背景介绍在此略过.我们直接讨论他关于集合论的观点.

他认为,那些认为只有潜在实无穷集合的人是错误的.

对于Cantor来说,如果一个集合能够和它的一部分构成一一对应,它就是无穷的.他的一些集合论的概念,如集合的极限点、导集、第一型集等,是在一篇关于三角级数的文章中定义而且使用了的.一个集合称为是闭的,假如它包含了它的全部极限点(后面的正文会进行介绍);是开的,假如它的每一个点都是内点,即每一个点可以包含在一个区间内,这区间的点都属于这个集合.一个集合称为完全的,假如它是闭的并且它的每一个点都是它的极限点.

Cantor寻求像"大小(size)"这样的概念来区分无穷集合.他和Bolzano一样,认为一一对应关系是基本原则.两个能够一一对应的集合称为是等价的或具有相同的势(后来"势(Power)"这个名词改成了"基数(cardinal number)").两个集合可以具有不同的势.如果在M与N两个集合中,N能与M的某个子集构成一个一一对应,而M不可能与N的任何子集构成一一对应,就说M的势大于N的势.

数集自然是最重要的,所以Cantor用数集来阐述他关于等价或势的概念.Cantor引入了"可列"的概念,凡是能和正整数构成一一对应的任何一个集合就可以称为可列集合.这是最小的无穷集合.

在他论证了相同的势和不同的势的集合都存在之后,它继续研究集合的势这个概念并且引进了基数和序数的理论,其中超限基数(transfinite cardinal number)和超限序数(transfinite ordinal number)是惊人的创造(确实)

他认为,他的关于无穷数或超限数的理论,不同于普通所说的一个变量变得无穷小或无穷大的那个无穷概念.两个一一对应的集合具有相同的势或基数.对于有限集合来说,基数就是这个集合中元素的个数.对于无穷集合来说,要引进新的技术.自然数集合的基数就用$\aleph_0$来表示.由于实数不能和自然数构成一一对应(正文连续统假设部分有证明),实数必然有另一个基数.

接下来Cantor定义了集合基数的乘法与加法,在此不进行赘述

下一个概念便是序数的概念.它在引进一个已知集合的逐次导集的时候,造就发觉到序数概念的重要.他现在抽象地来引进这个概念,一个集合叫全序的(simply ordered),假如它的任何两个元素之间有一个确定的顺序(以后或许会详细的讲一下序关系的概念,全序也称为线序或链,因为其上任意两个元素均可比,就像排在一条链上一样).即若给定m_1和m_2,要么有m_1先于m_2,要么有m_2先于m_1即$m_1 < m_2$或$m_2 < m_1$必有一个成立.不难验证其满足传递性.

两个全序集被称作是相似的,若它们是一一对应且保留顺序(也称为保序双射,即同构),即若m_1对应于n_1,m_2对应于n_2,而$m_1 < m_2$则必然有$n_1 < n_2$.两个相似的集合具有相同的序型或序数,序数即为一个全序集M的集合顺序的序型.

Cantor考虑了正整数集合,根据它们的自然顺序,其序数用ω表示,另一方面,按照递减顺序的正整数集合$\cdots,4,3,2,1$,其序数用$^*\omega$表示正、负整数或者零所成的集合按通常的排序的顺序,其序数为$^*\omega+\omega$.

接着Cantor定义了序数的加法与乘法,两个序数的和是第一个全序集的序数加上第二个全序集的序数,顺序即按其特殊规定.例如按自然数的顺序的正整数集合之后随着五个最初的正整数所构成的集合,即

$$1,2,3,\cdots,1,2,3,4,5$$

其序数为$\omega+5$.序数的相等与不等也可以显然的给的给出定义,

现在,他引进超限序数的整个集合,这在一方面时基于它本身的价值,另一方面是为了确切地定义较大的超限基数.为了引进这些新的序数,他把全序集限制在良序集(well - order)的范围之内.若一个全序集有最小的元素,且它的每一个自己都有最小的元素,那么这个全序集就叫良序集.

序数和基数都存在着级别.第一级是所有有限的序数

$$1,2,3,\cdots$$

我们用$\mathbb{Z}_1$表示上述的第一级序数.在第二级的序数是

$$\begin{gathered}\omega,\omega+1,\omega+2,\cdots,2\omega,2\omega+1,\cdots,\\ 3\omega,3\omega+1,\cdots,\omega^2,\cdots,\omega^3,\cdots,\omega^\omega\end{gathered}$$

我们用Z_2表示,其中每一个都是基数为$\aleph_0$的集合的序数.

$\mathbb{Z}_2$作为上述序数构成的集合,应该也有一个基数.这个集合是不可列的,从而Cantor引入了一个新的基数$\aleph_1$作为集合$\mathbb{Z}_2$的基数,并且证明了$\aleph_1$是$\aleph_0$的后继基数.

第三级基数的序数用$\mathbb{Z}_3$表示,它们是

$$\Omega,\Omega+1,\cdots,\Omega+\Omega,\cdots$$

> 这些是良序集中基数为$\aleph_1$的集合的序数.而$\mathbb{Z}_3$这个序数的集合的基数大于$\aleph_1$,Cantor用$\aleph_2$来表示它的基数.这个序数与基数的级别可以无穷无尽地这样继续下去.

$\mathbf{A.7}$替换公理模式(Rep)给定公式$\psi(x,y)$,并且对任意x有唯一的y使得$\psi(x,y)$成立.则对任意集合A,以下集合存在

$$B=\{y:\exists x(x\in A\wedge\psi(x,y))\}$$

用公式表示就是

$$\forall A\forall x\in A\exists!y\psi(x,y)\to\exists B\forall x\in A\exists y\in B\psi(x,y)$$

首先注意到对每一公式ψ,都有一个相应的替换公理,因此与分离公理模式一样,替换公理模式代表了无穷多条公理.其次,公式$\forall x\in A\exists!y\psi(x,y)$实际上是说$\psi$表示的性质是一个函数,于是替换公理模式是说,任何集合在一个函数下的像仍然是一个集合.因为这个像的元素个数不会比原像个数多.所以它不会是一个更大的集合,一般来说引起麻烦的集合都是"大"的集合,于是替换公理模式是安全的.

$\mathbf{A.8}$正则公理(Fnd)对任意集合$x\neq\varnothing$,存在$y\in x$使得$y\cap x=\varnothing$

$$\forall x(x\neq\varnothing\to\exists y(y\in x\wedge x\cap y=\varnothing))$$

正则公理,它实际上断定的是: 对任意非空集合x,x中总有一个元素y是关系$\in$限制在x上的"最小元".也就是说,x中再也没有元素属于y了.

可以得到一个直接的推论

我们假设$x\in x$,令$\mathcal{I}=\{x\}$,则对$\mathcal{I}$的任意元素,事实上$\mathcal{I}$只有一个元素,x,都有$x\cap I=x\neq\varnothing$于是可以得知任意集合x都不属于自身.

于是不会存在无穷的从属链$x\ni x_1\ni x_2\ni\cdots$.

可以根据正则公理建立集合的层垒谱系(过于复杂,本章不讲)

$\mathbf{A.9}$选择公理(AC)设集合X的每个元素皆非空,则存在函数$g:X\to\bigcup X$使得$\forall x\in X,g(x)\in x$(称为选择函数)

选择公理中的X应该设想为一族非空集,选择函数$g(x)\in x$意味着从每个集合$x\in X$中挑出一个元素.

总结

公理集合论是当代数学的正统基础,它的表述范围之广,形式化程度之高,以至于数学本身也堪称为研究对象,诸如何谓证明,一个命题能否被证明,公理系统的一致性(无矛盾)等等都能被赋予明晰的数学内容,这类研究称为**元数学**.数学实践中平素基于自然语言的定义和论证等等,在原则上都能够改写为ZFC公理体系或其他公理体系集合论里的形式化语言,从而为其陈述和验证赋予一套坚实的基础.

集合与映射

集合的运算

基本运算

交: $A\cap B:=\{x:x\in A\wedge x\in B\}$($\wedge$代表与条件)

并: $A\cup B:=\{x:x\in A\vee x\in B\}$

差: $A\setminus B:=\{x:x\in A\wedge x\notin B\}$

对称差: $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$

并和交可以推广到一般的情形

$$\begin{aligned}\bigcup_{a\in I}A_\alpha&=\{x:\text{有}\alpha\in I,\text{使}x\in A_\alpha\}\\\bigcap_{a\in I}A_\alpha&=\{x:\text{对一切}\alpha\in I,\text{有}x\in A_\alpha\}\end{aligned}$$

其中α是集合的指标,它在某个固定的指标集I中变化.

若$S \supset B$,则称差$S \setminus B$为B关于S的余集.若包含集S已经清楚地指明或由上下文可以理解时,就简称$S \setminus B$为B的余集,记作B^c.

积集

在实分析中积集并不需要像代数一样的严格定义

代数对于笛卡尔积的定义:

定义(Cartesian积)令$\{A_i : i \in I\}$是一族以I为指标集的(非空)集合.A_i的笛卡尔积是一个由所有的$i \in I$满足$f(i) \in A_i$的$f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$构成的集合.将其记作$\prod_{i \in I} A_i$

实分析中则不需要这么严谨的定义积集,一般直接将一切有序偶(a, b)(其中$a \in A, b \in B$)所成的集合称为A与B的直积或者Cartesian积,记为$A \times B$.类似两个集的直积,可以定义多个集的直积.

映射

设A与B都是非空集.若按照一定法则f,对于A中每个元x,都存在B中一个确定的元y与x相对应,则称f为定义在A上取值于B中的一个函数或映射,记作$y = f(x)$.y称为x在映射f之下的像,对于固定的y,A中满足$y = f(x)$的所有x全体称为y的原像(使用分离公理模式可以保证成立).集A称为f的定义域,记作$\text{Dom}(f)$(domain),集B称为f的值域(image),记作$R(f)$(在映射中也经常记为$\text{Im}(f)$).若A是空集$\varnothing$,我们就规定$f(A) = \varnothing$.

也可以利用配对公理构建映射:

集合间的映射$f : X \to Y$等同于它的图形$\Gamma_f \subset X \times Y$:对每个$x \in X$,交集$\Gamma_f \cap (\{x\} \times Y)$是一个独点集(不难发现这就意味着映射是良定义的),记作$\{f(x)\}$

映射的性质

设有映射$f : A \to B$.若$f(A) = B$,即对于B中的每个元y,都存在A中的元x使得$f(x) = y$则称f是一个满射.

若$f(A)$中每个元y都存在一个唯一的元x使得$f(x) = y$,或者等价地对于A中任意两个不同的元x_1和x_2都有$f(x_1) \neq f(x_2)$,则称f是一个内射(单射)或者一一映射(不是一一对应);若f既是一个满射又是一个内射,也就是说对于B中的每一个元y,A中均存在一个唯一的元x使得$f(x) = y$,则称f是一个双射.

设映射$f : A \to B$是一一的,则对于$f(A)$中的每个元y都存在A中的唯一的元x与之对应,这样我们就得到一个$f(A)$上取值于A中的映射,称它是f的逆映射,记作$f^{-1} : f(A) \to A$.

设有映射$f : A \to B$且$B_0 \subset B$,则称A中那些项在B_0中的元的全体为B_0在映射f下的原像,记作

$$f^{-1}(B_0) = \{x : x \in A, \text{且} f(x) \in B\}$$

设A,B是两个集,若存在一个从A到B的双射f,则称A与B是一一对应,或者说A与B是对等的.

常见反例(可以当做习题)

1. 集合A,B与映射f使得$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$

   不妨考虑集合$X = \{a, b\}$,令$A = \{a\}, B = \{b\}$且

   $$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ a &\mapsto c \\ b &\mapsto c \end{aligned}$$

   其中$c \in Y$,不难得到$f|A$(f在集合A上的限制)和$f|B$,有$f(A) \cap f(B) = \{c\}$且$f(A \cap B) = f(\varnothing) = \varnothing$,证毕$\square$

   注: 但是我们不难证明$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

2. 集合A, B与映射f使得$B \subset A$而$f(A \setminus B) \neq f(A) \setminus f(B)$

   设A和B是集合X的子集,且有$B \subset A$且$B \neq A$,f是把X中的每个元映射成Y中元a的一个映射,于是有

$$f(A \setminus B)=\{a\}, f(A) \setminus f(B)=\varnothing$$

因此$f(A \setminus B) \neq f(A) \setminus f(B)$

注: 不难发现$f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B)$.

3. $f(A) \subset f(B)$不蕴含$A \subset B$的映射f.

   设A, B是X的非空子集,使A不含在B中,f是把X中的元映射成Y中某个固定元a的映射,则

$$f(A)=f(B)=\{a\}$$

   但是并没有$A \subset B$.

序关系与序数

虽然个人认为实分析并不需要序关系和序数的概念,但是由于基数和序数以及序关系存在着密不可分的联系,故此引入序关系.

依照Bourbaki的观点,序结构连同拓扑和代数结构一道组成了数学结构的三大母体.

序关系与偏序集

定义(偏序集) **偏序集** 意指资料$(P, \leq)$,其中P是集合而$\leq$是P上的二元关系(称其为偏序),满足于

- 反身性 $\forall x \in P, x \leq x$
- 传递性 $(x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow x \leq z$
- 反称性 $(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow x=y$

仅仅满足反身性以及传递性的结构称为预序集.预序集间满足$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$的映射称为保序映射.

> 一般使用$x<y$表示$x \leq y$且$x \neq y$.符号$\geq$和$>$的意思是自明的.今后谈及偏序时经常省略其中的关系$\leq$

设P, Q为偏序集,若映射$\phi: P \rightarrow Q$满足$(x<x') \Rightarrow (\phi(x)<\phi(x'))$则称$\phi$是严格增的.若$\phi: P \rightarrow Q$是双射并且$\phi$和$\phi^{-1}$均为保序映射,则称$\phi$为$P, Q$之间的同构.偏序集的 **同构类** 称为序型.偏序集的子集集成了自然的偏序结构.

既然偏序集中有大小的概念,自然就存在着一条链上极大元和极小元的概念,对于一个偏序集的子集存在上界与下界的概念

我们依照如下方式定义它们.

定义: 设$P' \subset P$,而P是预序集.

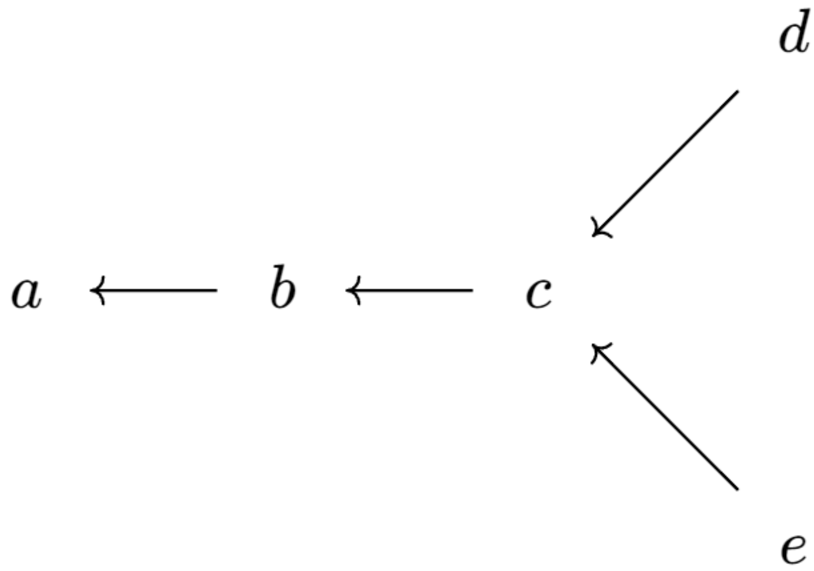
- 称$x \in P$是P的极大元,如果不存在满足$x<y$的元素$y \in P$
- 称$x \in P$是P'的上界(注意,此处是P')如果对于每个$x' \in P'$都有$x' \leq x$
- 称$x \in P$是P'的上确界,如果x是其上界,而且对每个上界$x' \in P'$满足$x' \leq x$

同理,不难定义出极小元,下界和下确界,仅仅需要把上面的$\leq$换成$\geq$.对于偏序集P,根据反称性,其子集P'的上确界或下确界若存在则是唯一的,分别即为$\sup P'$和$\inf P'$

若偏序集P是非空的,并且对任何的$x, y \in P$子集$\{x, y\}$都有上界,则称P是 **滤过序集**.

全序

不难发现序关系其实可以表现为一张有向图,比如



上图就是一种序关系,其中$\rightarrow$可以视为$\leq$,于是不难发现,在这种关系下,我们无法确定d和e之间的大小关系,那么能够确定两两元素之间的大小关系的偏序集也就具有了一定的特殊性,不难发现其构造应当像一条链子或者线一样.

定义(全序集) 若偏序集P中的任一对元素x,y皆可以比大小(即:要么有$x\leq y$要么有$y\leq x$)则称P是**全序集**.全序集又称作线序集或者链.

显然有全序集是滤过的.

良序

接下来考虑全序集$\mathbb{Z}_{\geq 0}$与$\mathbb{Z}$,不难发现它们仍有区别,取$\mathbb{Z}_{\geq 0}$的任意子集$\mathbb{Z}_n$都存在一个最小元$a\geq 0$,但是对于$\mathbb{Z}$,取其子集$\{x\in\mathbb{Z},x<0\}$可以得知该子集是没有最小元的,于是对于全序集仍然可以作一个划分.

定义(良序集,Cantor)全序集P满足下述性质便可以称为良序集:每个P的非空子集都有极小元.

接下来研究良序集的性质:

设P为良序集,映射$\phi:P\rightarrow P$严格增,则对每个$x\in P$都有$\phi(x)\geq x$(由严格增的定义可以推导出,其证明方式为$\phi(\phi(z))<\phi(z)<z$,取z为极小元便可以得到$\phi(z)<z$,但是由于z为极小元,于是有$\phi(z)=z$),特别地,

1. 可以得到P没有非平凡的自同构(由于P的每个子集均有极小元,若P不为良序集可以通过将P中的元素前移一位实现)
2. 对于任意的$x\in P$,不存在从P到$P_{<x}:=\{y\in P:y<x\}$的同构(若存在则存在$\phi:P\rightarrow P_{<x}$,其必然为P到自身的严格增映射并且满足$\phi(x)<x$,但是由于P没有非平凡的自同构,于是不成立)

形如$P_{<x}$的子集继承了P的良序,称作P的一个前段,记作$P[x]$.

既然得到了前段的定义,我们也就可以考虑两个良序集$(W_1,<_1),(W_2,<_2)$之间的同构了

引理: 若$(W_1,<_1)$和$(W_2,<_2)$同构,则它们之间的同构是唯一的.

[证明]

设W_1和W_2之间存在两个同构f,g接下来令$h=g^{-1}\circ f:W_1\rightarrow W_1$不难发现$h$也是同构并且有$h=\mathrm{id}_{W_1}$即$h$为恒等映射,于是自然有$g=f$

定理(良序集基本定理) 如果$(W_1,<_1)$和$(W_2,<_2)$为良序集,则以下的条件恰有一个成立(在不构成混淆的时候$<_1$和$<_2$均使用$<$代替

1. W_1和W_2同构
2. W_1与W_2的前段同构
3. W_2与W_1的前段同构

[证明]

定义$f\subset W_1\times W_2$

$$f=\{(x,y)\in W_1\times W_2:W_1[x]\text{同构于}W_2[y]\}$$

不难发现若存在$W_1[x_1]$与$W_1[x_2]$与$W_2[y]$同构则由于同构为双射,设$f:W_1[x_1]\to W_2[y]$,$g:W_1[x_2]\to W_2[y]$,接着考虑$g^{-1}\circ f$得到$W_1[x_1]$与$W_1[x_2]$之间的同构,由于$W_1[x_1]$和$W_1[x_2]$都是W_1的前段,于是其本质上为W_1到自身的同构,即为恒等映射,即有$x_1=x_2$

于是同理可以推出f是一个映射(若$W_1[x]$同构于$W_2[y_1]$和$W_2[y_2]$则有$y_1=y_2$)于是f是一个单射(从而我们可以双向考虑).

其次若h是$W_1[x']$到$W_2[f(x')]$的同构,显然有$h|W_1[x]$是到$W_2[h(x)]$的同构,显然有$f(x)=h(x)<_2 f(x')$于是得到$x<_1 x'$蕴含$f(x)<_2 f(x')$

不难发现f的定义域$\mathrm{Dom}(f)$是W_1的前段.且有$R(f)$是W_2的前段.

于是f是由W_1的一个前段$\mathrm{Dom}(f)$到W_2的一个前段$R(f)$的同构.

因此我们可以考虑以下三种情况

- 假设$\mathrm{Dom}(f)\neq W_1$,则$\mathrm{Dom}(f)=W_1[w]$是W_1的一个真前段.假设$R(f)\neq W_2$则存在$w'\in W_2$使得$R(f)=W_2[w']$因此f为$W_1[w]$与$W_2[w']$的同构.于是有$w\in\mathrm{Dom}(f)=W_1[w]$即$w<w$,造成矛盾,于是可以得到3.成立
- 假设$\mathrm{R}(f)\neq W_2$,则可以得出$\mathrm{Dom}(f)=W_1$
- 若有$\mathrm{Dom}(f)=W_1$,$R(f)=W_2$则可以得到f为W_1到W_2的同构.

由于W_1到W_2的同构是唯一的,于是得知三种情况至多只有一种成立□

序数

在无穷公理的番外中,我们提到了Cantor对于序数的定义

> 两个全序集被称作是相似的,若它们是一一对应且保留顺序(也称为保序双射,即同构),即若m_1对应于n_1,m_2对应于n_2,而$m_1<m_2$则必然有$n_1<n_2$.两个相似的集合具有相同的序型或序数,序数即为一个全序集M的集合顺序的序型.

但是若按照这么来看,若我们考虑集合的属于关系作为包含关系,则可以得到一个"所有集合的集合"(Cantor当时并没有考虑到这些),这显然是一个真类,于是我们必须将序数作为一个类而非集合来看待,那么对于所有序数所构成的类$\mathbf{On}$,即我们需要操作"类的类",但是我们可以从良序集中挑选出一个标准的良序集,从而可以得到更精确的描述

定义 (序数,$\mathrm{von\ Neumann}$) 如果一个集合α的每个元素都是α的子集(换言之$\alpha\subset\mathcal{P}(\alpha)$),则称$\alpha$为**传递的**,若传递集$\alpha$对于所有的$x<y\overset{\text{定义}}{\iff}x\in y$构成一个良序集,则称$\alpha$为序数.

若α为一个序数,接下来验证$\alpha\sqcup\{\alpha\}$也是一个序数.

首先,由于α为一个序数,于是有$\alpha\subset\mathcal{P}(\alpha)$,对于$\alpha\sqcup\{\alpha\}$有$\forall x\in\alpha\sqcup\{\alpha\}\Rightarrow x\in\mathcal{P}(\alpha)$或$x=\alpha$,不难发现$\mathcal{P}(\alpha)\subset\mathcal{P}(\alpha\sqcup\{\alpha\})$并且$\alpha\in\mathcal{P}(\alpha\sqcup\{\alpha\})$于是得到$\alpha\sqcup\{\alpha\}$也是一个序数.

根据我们先前的说法,将其称为α的一个后继,再根据Peano公理中的类似定义,记$\alpha+1=\alpha^+:=\alpha\sqcup\{\alpha\}$.不难看出它是大于$\alpha$的最小序数.若$\alpha$不是任何序数的后继,则称$\alpha$为极限序数.

接下来得到序数的几个性质:

1. 若α为序数,则α的所有元素都是序数,所以由$\alpha=\{\beta:(\beta<\alpha)\wedge(\beta\text{为序数})\}$

   由于α为序数,于是α是传递的,于是$\beta\subset\alpha$,于是若$x\in y\in\beta$有$y\in\alpha$于是有$x\in\alpha$.于是得到$x,y,\beta\in\alpha$由于α为一个关于$\in$的良序集,于是不难得到β是传递集,于是不难得到β是α的一个前序,即β也是序数.□
2. 如果α是序数,且$B\subset\alpha$是传递集,则B是序数,且$B\in\alpha$.特别地,对于任意序数α,β若$\beta\subsetneq\alpha$则$\beta\in\alpha$.

3.

基数

引入

我们把互相对等的集合归于同一类,不对等的集不属于同一类,对这样的每类集予以一个记号,称这个记号为这一类集中每个集合的势(在代数中称为基数).集合A的势记为$|A|$.于是相互对等的集合具有相同的势,即$|A|=|B|$.

不难发现$|A|\leq|B|$等价于A到B的某个子集之间存在一个单射.

若集合A与B不对等,但集合B对等于集合A的某个子集,则称A的势大于B的势,或B的势小于A的势,记为$|A|>|B|$或$|B|<|A|$.

凡是与自然数集对等的集合称为可数集,这时我们认为其基数为$\aleph_0$(叫做阿列夫-0).易见,A为可数集的充要条件是A的元可以排列成无穷序列的形式

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$$

任何区间中的一切有理数所成的集合是可数的;任何区间中的一切代数数所成的集合也是可数的(enumerable).

至于有理数可列的证明我们引用Cantor对于有理数可列的证明

考虑如下形式的有理数排列

$$\begin{array}{cccccccc}
\frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{2}{1} & & \frac{3}{1} & \rightarrow & \frac{4}{1} & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
\frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & \cdots & & \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & \\
\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & \cdots & & & & \\
 & \swarrow & & & & & & \\
\frac{1}{4} & \cdots & & & & & & \\
\downarrow & & & & & & & \\
\vdots & & & & & & &
\end{array}$$

需要注意的是,那些在同一条对角线方向的分式,其分子与分母的和相同.现在我们从$\frac{1}{1}$开始随着箭头所指的方向依次指定1对应于$\frac{1}{1}$,2对应于$\frac{2}{1}$,3对应于$\frac{1}{2}$,4对应于$\frac{1}{4}$,即按照箭头的顺序进行排列.不难发现每一个有理数必将在某一步中对应于被指定的有限的正整数.于是上面列出的有理数集合(其中有些不知出现一次,比如$\frac{1}{1}$和$\frac{2}{2}$)与正整数集合构成了一个一一对应,于是有$|\mathbb{Q}|\leq|\mathbb{N}|=\aleph_0$,接下来不难构建一个$\mathbb{N}$到$\mathbb{Q}$的映射,即一个嵌入映射$n\mapsto n$.于是得到有理数集合$\mathbb{Q}$是可列的.

连续统假设和实数集基数

若A为有限集或可数集,则称A为至多可数集.若集合A的基数大于可数集的基数,则称其为不可数集.例如区间$[0,1]$为不可数集(我们将在下面进行证明(.若集合A对等于区间$[0,1]$,则称集合A具有连续统的势.记$|A|=\aleph$(由于Cantor最初称这个集合的基数为c,于是有很多文献也称其为c.注意不是$\aleph_1$))

为什么我们要区分$\aleph$和$\aleph_1$呢?这便涉及到Cantor的连续统假设.

在介绍连续统假设前,我们先介绍一下Dedekind分割.

> Dedekind是在直线划分的启发下来定义无理数的.他注意到把直线上的点划分为两类,使一类的每一个点位于另一类中每一个点的上方,就必有且仅有一个点产生这个划分.这一事实使得直线是连续的.对于直线来说,这是一个公理.他把这个思想运用到数系上来,Dedekind说,让我们考虑任何一个吧有理数系分成两类的划分,它使得第一类中任一数小于第二类中的任一数.他吧有理数系的这样一个划分叫做一个分割(cut).如果用A_1与A_2来表示这两类,则(A_1,A_2)表示这分割.在一些分割中,或者A_1有个最大的数,或者A_2有个最小的数;这样的而且只有这样的分割是由一个有理数确定的.

> 但是存在着不是由有理数确定的分割,加入我们把所有的负有理数以及非负的且平方小于2的有理数放在第一类,把剩下的有理数放在第二类,则这个分割就不是由有理数确定的.通过每一个这样的分割,"我们创造出一个新的无理数α来,它是完全由这个分割确定的.我们说,这个数α对应于这个分割,或产生这个分割" 从而对应于每一个分割存在唯一的一个有理数或无理数.
>
> Dedekind在引进无理数时所用的语言,留下一些不完善的地方.他说无理数α对应于这个分割,又为这个分割所定义.但他没有说清楚α是从哪里来的.他应当说,无理数α不过就是这一个分割.事实上,Heinrich Weber告诉过Dedekind这一点,而Dedekind在1888年的一封信中却回答说,无理数α并不是分割本身而是某些不同的东西,它对应于这个分割而且产生这个分割,同样,虽然有理数产生分割,它和分割是不一样的.他说,我们有创造这种概念的脑力.
>
> 他接着给出一个分割(A_1, A_2)小于或大于另一分割(B_1, B_2)的定义.在定义了不等关系之后,他指出实数具有三个可以证明的性质:
>
> 1. 若$\alpha > \beta$,$\beta > \gamma$则$\alpha > \gamma$.
> 2. 若α和γ是两个两两不相同的实数,则存在着无穷多个数位于α和γ之间.
> 3. 若α是任一个实数,则实数全体可以分为A_1和A_2两类,每一类含有无穷多个实数,A_1中的每一个数都小于α,而A_2中的每一个数都大于α,数α本身可以指定任一类.实数类现在就具有连续性,他把这个性质表达为:如果实数全体的集合被划分为A_1和A_2两类,使A_1中每一个数小于A_2中所有的数,则必有且只有一个数α产生这个划分.
>
> 他接着定义实数的运算.分割(A_1, A_2)和(B_1, B_2)的加法是这样定义的:设c是任一有理数,如果有a_1属于A_1,b_1属于B_1,使得$a_1 + b_1 \geq c$我们就把c放在类C_1中.所有其他的有理数都放在类C_2中.这两类数C_1和C_2构成一个分割(C_1, C_2),因为C_1中的每一个数小于C_2中每一个数.这个分割(C_1, C_2)就是(A_1, A_2)和(B_1, B_2)的和.他说,其他的运算可以类似地定义.他现在就能建立加法和乘法结合与交换等性质.虽然Dedekind的无理数理论,经过上面指出的一些少量修改之后,是完全符合逻辑的,但是Cantor认为分割在分析中的出现并不自然而加以批评.
>
> Dedekind分割的现代定义如下所示
>
> 定义(Dedekind分割)如果集合$A \subset \mathbb{Q}$满足:
>
> 1. $A \neq 0$且$A \neq \mathbb{Q}$
> 2. A是向下封闭的:若$p \in A$且$q < p$则$q \in A$
> 3. A没有极大元:如果$p \in A$则存在$q \in A, p < q$
>
> 就称A是一个Dedekind分割.全体Dedekind分割的集合记为$\mathbb{R}$,$\mathbb{R}$的元素又称为实数.

我们认为实数集$\mathbb{R}$是连续的(参见前文所介绍的Dedekind分割,由于实数中任意一个数都可以构成分割,并且直线中任意一个点都可以由分割作出,并且直线必然是连续的,于是我们可以得出Dedekind分割可以推导出实数集是连续的,而有理数集是稠密的)并且不难得到实数集与$[0, 1]$之间存在一个一一对应,构建映射(即常见的sigmoid函数,这在我们的神经网络中经常用到,其表达式为$\frac{1}{1+e^{-x}}$).即可得到$(0, 1)$与$\mathbb{R}$之间的一一对应.不难得到$(0, 1)$与$[0, 1]$之间的一个一一对应(将$(0, 1)$中所有的有理数以某种排列$r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$的形式排列然后$0 \mapsto r_1$,$1 \mapsto r_2$,$r_1 \mapsto r_3$,$r_2 \mapsto r_4$,$r_3 \mapsto r_5$,$\cdots$,$r_n \mapsto r_{n+2}$,$\cdots$其中左侧为$[0, 1]$,右侧为$(0, 1)$得到这显然是一个一一对应).

> 同样地,我们对于稠密性可以将有理数集$\mathbb{Q}$看做一个全序集进行更进一步的定义.即
>
> 定义(稠密性) 全序集$(X, <)$是稠密的,如果它至少有两个元素,并且对于任意的$a, b \in X$,如果$a < b$,则存在$x \in X$满足$a < x < b$
>
> 这也是历史上在Dedekind分割出现前对于连续性的定义(那时人们认为有理数是连续的)

接下来我们考虑$[0, 1]$和$\mathbb{N}$,即验证$[0, 1]$是不可数集.

我们依旧采用Cantor的证明方法(因为过于经典),我们先假定0与1之间的实数是可列的.那我们把每一个这样的实数写成无穷小数(1写成$0.9999\cdots$,$\frac{1}{2}$写成$0.4999\cdots$等).假如它们是可列的,那么我们可以对于每一个$\mathbb{N}$中的正整数n指定一个实数,即

$$\begin{aligned}
1 &\leftrightarrow 0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots \\
2 &\leftrightarrow 0.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots \\
3 &\leftrightarrow 0.a_{31}a_{32}a_{33}\cdots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

于是我们可以定义某个在0与1之间的实数如下:令$b = 0.b_1b_2b_3\cdots$,观察上式对角线上的元素,若$a_{kk} = 1$则$b_k = 9$,若$a_{kk} \neq 1$则$b_k = 1$于是不难发现由于其任意一个元素都无法再上式中找到对应,有其不属于上表中所列的任何一个实数,即$\mathbb{N}$到$[0, 1]$的映射只能是一个单射.即$|\mathbb{N}| < |[0, 1]|$

由于$|\mathbb{R}| = |[0,1]|$于是可以得到$|\mathbb{R}| > \aleph_0$.

于是不难发现对$\mathbb{R}$有其并不可列,并且由于$\mathbb{R}$是连续的,我们将$|\mathbb{R}|$称为一个连续统的势.

接下来考虑有理数集$\mathbb{Q}$的幂集$\mathcal{P}(\mathbb{Q})$,根据有理数的稠密性(也可以使用Dedekind分割得到)可以得知存在一个映射$\mathbb{R} \hookrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Q})$(即对于任意一个实数$r$将其映射到$\{x \in \mathbb{Q} : x < r\}$,根据有理数的稠密性得到对于任意实数$r_1$,$r_2$之间至少会存在一个有理数$x$,这就保证了其为一个单射),于是得到$|\mathbb{R}| \le \mathcal{P}(\mathbb{Q}) = 2^{\aleph_0}$.

考虑$[0,1]$区间与Cantor三分集

$$C := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^{-n} : \forall n, a_n = 0\text{或}2 \right\}$$

不难发现这是一个三进制表示,即对于任意一个n都有a_n为0或2,于是C可以写为$a_1a_2\cdots a_n\cdots$的形式,由于其每个元素均为0或2,我们将2替换为1,于是可以得到一个一一对应$\mathbb{N} \to 2 = \{0,1\}$,每一个这样的映射代表$C$中的一个元素,不难验证这是一个一一映射,即$|C| = 2^{\aleph_0}$,由于$[0,1]$包含Cantor集$C$于是可以得到

$$|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$$

由于$\aleph_0$是最小的无穷基数(具体参见无穷序数ω的推理),不难发现$2^{\aleph_0} > \aleph_0$于是得到$2^{\aleph_0}$是一个比$\aleph_0$大的无穷基数,这也意味着我们可以构建一些比$\aleph_0$更大的无穷基数.我们将比$\aleph_0$大但是比其他无穷基数小的无穷基数记为$\aleph_1$同理推广出$\aleph_2$,$\aleph_3$等.

不难发现$\aleph_1 \le 2^{\aleph_0}$,但是我们一直无法构建出一个比$2^{\aleph_0}$含有更少基数的集合使其大于$\aleph_0$于是Cantor做了一个假设即$\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$,将其称为连续统假设(continuum hypothesis).但是当时无论Cantor无论如何努力,都无法证明其是否成立.在1900年的国际数学会议上,Hilbert将这个问题列入了著名的23问中.但是Godel通过他的不完备性定理认为Cantor的连续统假设不可证明.(为了不爆掉读者的脑袋,在此对于不完备性定理不进行赘述)

性质

1. 设$A_2 \subset A_1 \subset A_0$.且$|A_2| = |A_0|$则有$|A_1| = |A_0|$

   若$|A_2| = |A_0|$则在A_2与A_0之间可以构建一个双射,又犹豫$A_2 \subset A_0$于是不难发现$A_2 = A_0$于是自然可以得到$A_1 = A_0$自然有$|A_1| = |A_0|$
2. 设$|A_1| \le |A_2|$, $|A_2| \le |A_3|$,则$|A_1| \le |A_3|$

   根据先前所述,得到$f : A_1 \hookrightarrow A_2, g : A_2 \hookrightarrow A_3$于是可以得到$g \circ f : A_1 \hookrightarrow A_3$于是得到$|A_1| \le |A_3|$
3.

$\mathbb{R}^1$中的序列与子集的一些基本概念和性质

这部分是实分析中最为常用的关于集合部分的内容.

敛散性与Cauchy收敛准则

实数序列$\{x_n\}$被认为是收敛的,如果存在一个实数x,使得对任意的$\varepsilon > 0$,存在正整数N,当$n > N$时,就有

$$|x_n - x| < \varepsilon$$

这时称序列$\{x_n\}$收敛于x,而称x为$\{x_n\}$的极限,记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x\text{或}x_n \to x(n \to \infty)$$

若$\{x_n\}$不是收敛的,那我们称它是发散的.

Cauchy收敛准则

设$\{x_n\}$是一个实数序列,若对任意的$\varepsilon > 0$,存在正整数N使得当$n > N$时,$m > N$时,有

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

则称$\{x_n\}$是一个Cauchy序列.

增减序列与上下极限

数列的极限

若$\forall k \in \mathbb{N}$,$x_k \le x_{k+1}$,则称$\{x_k\}$是**递增序列**,这时定义$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_{k\ge1}\{x_k\}$.

若$\forall k \in \mathbb{N}$,$x_k \ge x_{k+1}$,则称$\{x_k\}$是**递减序列**,这时定义$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_{k\ge1}\{x_k\}$.

由给定的数列$\{x_n\}$,产生递减序列$y_k = \sup_{n\ge k}\{x_n\}$和递增序列$z_k = \inf_{n\ge k}\{x_k\}$,由此定义数列的上、下极限:

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} y_k = \inf_{k\ge1}\{y_k\} = \inf_{k\ge1}\{\sup_{n\ge k} x_n\}$$
$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} z_k = \inf_{k\ge1}\{z_k\} = \sup_{k\ge1}\{\inf_{n\ge k} x_n\}$$

基本性质

1. $\lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow x = x_1 + \sum_{k=1}^{\infty}(x_{k+1} - x_k)$

   由数列极限的定义可以直接得出

2. $\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n = a$

   由数列极限和上下极限的定义，$\limsup_{n\to\infty} x_n = \inf_{k\ge1}\{\sup_{n\ge k} x_n\}$,$\liminf_{n\to\infty} x_n = \sup_{k\ge1}\{\inf_{n\ge k} x_n\}$于是若有$\lim_{n\to\infty} x_n = a$,则由Cauchy收敛准则可以得知，给定正整数$N$，对于任意的$\varepsilon > 0$，若$n > N, m > N$则有

   $$|x_m - x_n| < \varepsilon$$

   于是对于$\inf_{k\ge1}\{\sup_{n\ge k} x_n\}$有对于$k$增大时$\sup_{n\ge k} x_n$单调递减，并且在$k > N$时有$\sup_{n\ge k} x_n \le \sup_{n\ge N} x_n$根据数列极限的定义可以立即推知$|\sup_{n\ge k} x_n - a| < \varepsilon$.不难得出$\limsup_{n\to\infty} x_n = \inf_{k\ge1}\{\sup_{n\ge k} x_n\} = a$同理可以得到$\liminf_{n\to\infty} x_n = \sup_{k\ge1}\{\inf_{n\ge k} x_n\} = a$

3. $\liminf_{n\to\infty}\{-x_n\} = \limsup_{n\to\infty}\{x_n\}$

   欲证明此式，即证明$\sup_{k\ge1}\{\inf_{n\ge k} -x_n\} = -\inf_{k\ge1}\{\sup_{n\ge k} x_n\}$,不难发现$\inf_{n\ge k} -x_n = -\sup_{n\ge k} x_n$,于是可以得到以下推论$\sup_{k\ge1}\{\inf_{n\ge k} -x_n\} = \sup_{k\ge1}\{-\sup_{n\ge k} x_n\}$再使用先前所得到的性质可以得到$\sup_{k\ge1}\{-\sup_{n\ge k} x_n\} = -\inf_{k\ge1}\{\sup_{k\ge n} x_n\}\Box$

4. $x_n \le y_n \Rightarrow \liminf_{n\to\infty} x_n \le \liminf_{n\to\infty} y_n; \limsup_{n\to\infty} x_n \le \limsup_{n\to\infty} y_n$

   不难发现只需要证明$\liminf_{n\to\infty} x_n \le \liminf_{n\to\infty} y_n$的情况即可，$\limsup$的情况可以类似证明.接下来证明$\liminf$的情况.欲证$\liminf_{n\to\infty} x_n \le \liminf_{n\to\infty} y_n$即证明$\sup_{k\ge1}\{\inf_{n\ge k} x_n\} \le \sup_{k\ge1}\{\inf_{n\ge k} y_n\}$由于$x_n \le y_n$于是不难得出对于任意的$k$均有$\inf_{n\ge k} x_n \le \inf_{n\ge k} y_n$于是自然有$\sup_{k\ge1}\{\inf_{n\ge k} x_n\} \le \sup_{k\ge1}\{\inf_{n\ge k} y_n\}\Box$

5. 若$x_n > 0$,则$\limsup_{n\to\infty}\{\frac{1}{x}\} = \frac{1}{\liminf_{n\to\infty}\{x_n\}}$

   由于$\limsup_{n\to\infty}\{\frac{1}{x}\} = \inf_{k\ge1}\{\sup_{n\ge k}\frac{1}{x_n}\}$于是我们只需要证明$\inf_{k\ge1}\{\sup_{n\ge k}\frac{1}{x}\} = \frac{1}{\sup_{k\ge1}\{\inf_{n\ge k} x_n\}}$由于$\sup_{n\ge k}\frac{1}{x_n}$相当于$\frac{1}{\inf_{n\ge k} x_n}$于是不难得到$\inf_{k\ge1}\{\sup_{n\ge k} x_n\} = \inf_{k\ge1}\{\frac{1}{\inf_{n\ge k} x_n}\}$接着再一次使用刚刚得到的结论可以得出$\inf_{k\ge1}\{\frac{1}{\inf_{n\ge k} x_n}\} = \frac{1}{\sup_{k\ge1}\{\inf_{n\ge k} x_n\}}\Box$

6. 设$\{x_{n_k}\}$是$\{x_n\}$的任一收敛子列，则有$\liminf_{n\to\infty}\{x_n\} \le \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \le \limsup_{n\to\infty}\{x_n\}$

不难发现上式等价于$\lim_{k\to\infty} z_k \le \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \le \lim_{k\to\infty} y_k$于是其等价于证明
$\inf_{j\ge k}\{x_{n_j}\} = z_{n_k} \le \sup_{k\ge 1}\{z_{n_k}\} \le x_{n_k} \le \inf_{k\ge 1}\{y_k\} \le y_{n_k} = \sup_{j\ge k}\{y_{n_j}\}$根据上式直接可以得到公式成立□

7. $\inf_{n\ge j}\{x_n\} \le \liminf_{n\to\infty}\{x_n\} \le \limsup_{n\to\infty}\{x_n\} \le \sup_{n\ge m}\{x_n\}, \forall j, m \in \mathbb{N}$

   不难发现该式等价于$z_j \le \lim_{n\to\infty} z_k \le \lim_{n\to\infty} y_k \le y_k$不难发现$\{z_k\}$的单调递增性以及$y_K$的单调递减性配合性质6保证了其成立□

8. $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\varepsilon > 0, \exists n_0\text{使得}\forall n \ge n_0, x_n < x + \varepsilon \\ \forall\varepsilon > 0, \forall n_0, \exists n \ge n_0, \text{使得}x_n > x - \varepsilon \end{cases}$

   ($\Rightarrow$)由于$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} y_k$于是若有$\limsup_{n\to\infty} x_n = x$则有对于任意的$\varepsilon > 0$,$\exists N$对于$k > N$有$|y_k - x| < \varepsilon$即$|\sup_{n\ge k} x_n - x| < \varepsilon$于是可以得到$x - \varepsilon < \sup_{n\ge k} x_n < x + \varepsilon$即取$n_0 = k$得到$\forall n \ge n_0$,$x_n < x + \varepsilon$并且由于$\sup_{n\ge k} x_n > x - \varepsilon$于是对于任意的$n_0 := k$都至少存在一个$n \ge n_0$使得$x_n > x - \varepsilon$.

   ($\Leftarrow$)的情况只需要根据前文的结论进行反推，不难发现若满足左侧两个条件则满足$\sup_{n\ge k} x_n < x + \varepsilon$切$x - \varepsilon < \sup_{n\ge k} x_n$自然得到$\lim_{k\to\infty} y_k = x$即$\limsup_{n\to\infty} x_n = x$ □类似的，还有$\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} \forall\varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \ge n_0, x_n > x - \varepsilon \\ \forall\varepsilon > 0, \forall n_0, \exists n \ge n_0, x_n < x + \varepsilon \end{cases}$其证明方式与前文几乎一致，故不过多赘述

9. $$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n \le &\liminf_{n\to\infty}\{x_n + y_n\} \le \limsup_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n \\ \le &\limsup_{n\to\infty}\{x_n + y_n\} \le \limsup_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n\end{aligned}$$

   该性质的证明需要分成若干步骤进行.

   1. $$\liminf_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n \le \liminf_{n\to\infty}\{x_n + y_n\}$$

      即证明

      $$\sup_{k\ge 1}\{\inf_{n\ge k} x_n\} + \sup_{k\ge 1}\{\inf_{n\ge k} y_n\} \le \sup_{k\ge 1}\{\inf_{n\ge k}\{x_n + y_n\}\}$$

      由三角不等式可知$\inf_{n\ge k}\{x_n + y_n\} \ge \inf_{n\ge k} x_n + \inf_{n\ge k} y_n$(其原因是$x_n + y_n$取到下界时,$x_n$和$y_n$不一定同时为下界,于是其大于等于$x_n$的下界与$y_n$下界之和)更进一步不难得出$\sup_{k\ge 1}\{\inf_{n\ge k} x_n + \inf_{n\ge k} y_n\} \le \sup_{k\ge 1}\{\inf_{n\ge k}\{x_n + y_n\}\}$由于左式为$\sup_{k\ge 1}\{\inf_{n\ge k} x_n + \inf_{n\ge k} y_n\}$的形式,不难发现其即为$\sup_{k\ge 1}\{\inf_{n\ge k} x_n\} + \sup_{k\ge 1}\{\inf_{n\ge k} y_n\}$此式证毕.

   2. $$\liminf_{n\to\infty}\{x_n + y_n\} \le \limsup_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n$$

      即证$\sup_{k\ge 1}\{\inf_{n\ge k}\{x_n + y_n\}\} \le \inf_{k\ge 1}\{\sup_{n\ge k} x_n\} + \sup_{k\ge 1}\{\inf_{n\ge k} y_n\}$成立,由于$\sup_{n\ge k} x_n + \inf_{n\ge k} y_n \ge \inf_{n\ge k}\{x_n + y_n\}$于是自然可以得到$\inf_{k\ge 1}\{\sup_{n\ge k} x_n\} + \sup_{k\ge 1}\{\inf_{n\ge k} y_n\} \ge \liminf_{n\to\infty}\{x_n + y_n\}$

   3. $$\limsup_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n \le \limsup_{n\to\infty}\{x_n + y_n\}$$

      即证$\inf_{k\ge 1}\{\sup_{n\ge k} x_n\} + \sup_{k\ge 1}\{\inf_{n\ge k} y_n\} \le \inf_{k\ge 1}\{\sup_{n\ge k}\{x_n + y_n\}\}$由于$\sup_{n\ge k}\{x_n + y_n\} \ge \sup_{n\ge k} x_n + \inf_{n\ge k} y_n$于是可以得知上式成立.

   4. $$\limsup_{n\to\infty}\{x_n + y_n\} \le \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n$$

      不难发现该式证明和1.的证明无异

   自此,我们证明了

   $$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n \le &\liminf_{n\to\infty}\{x_n + y_n\} \le \limsup_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n \\ \le &\limsup_{n\to\infty}\{x_n + y_n\} \le \limsup_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n\end{aligned}$$

   □

10. 与9类似,可以得到

$$
\begin{aligned}
(\liminf_{n\to\infty} x_n)(\liminf_{n\to\infty} y_n) \leq \liminf_{n\to\infty}\{x_n y_n\} \leq (\limsup_{n\to\infty} x_n)(\liminf_{n\to\infty} y_n) \\
\leq \limsup_{n\to\infty}\{x_n y_n\} \leq (\limsup_{n\to\infty} x_n)(\limsup_{n\to\infty} y_n)
\end{aligned}
$$

证明从略

关于集环的讨论

对称差性质

于是对于对称差运算，有:

$$
A\Delta B = (A\cup B) - (A\cap B) = (B\cup A) - (B\cap A) = B\Delta A
$$

于是有对称差运算满足交换律.

$$
\begin{aligned}
A\Delta(B\Delta C) &= (A\cup(B\Delta C)) - (A\cap(B\Delta C)) \\
&= (A\cup((B\cup C)-(B\cap C))) - (A\cap((B\cup C)-(B\cap C))) \\
&= A\cup B\cup C - A\cup B\cap C - (A\cap B\cup C - A\cap B\cap C) \\
&= ((A\cup B)-(A\cap B))\Delta C \\
&= (A\Delta B)\Delta C
\end{aligned}
$$

于是有对称差运算满足结合律.

对称差构成群

于是若对于所有的$A,B\in\mathfrak{R}$有Δ对其封闭，即$A\Delta B\in\mathfrak{R}$

则有其对于Δ构成一个半群.

那么其是否存在一个幺元呢?

若$\forall A\in\mathfrak{R}$有$A\Delta e = A$(由于对称差运算具有交换性，于是满足右幺元即可)

$$
\begin{gathered}
A\Delta e = (A\cup e)\setminus(A\cap e) = A \\
x\in A\cup e \wedge x\notin A\cap e \\
\Downarrow \\
e\cap A = \varnothing, e\cup A = A
\end{gathered}
$$

即$e=\varnothing$;

于是$\mathfrak{R}$对Δ构成了一个幺半群.

接下来验证其是否能够构成一个群

$$
\begin{gathered}
A\Delta A' = (A\cup A') - (A\cap A') = \varnothing \\
\Downarrow \\
A\cup A' = A\cap A' \Rightarrow A' = A
\end{gathered}
$$

于是对称差构成一个群

交集构成一个含幺半群

显然有并集满足结合律

于是对于$\mathfrak{R}$,若其对于$\cap$封闭，则其也构成一个半群(需要证明结合律和单位元)

由于对于交集来说对于$\mathfrak{R}$而言$\bigcup_{X\in\mathfrak{R}} X$是其幺元，所以其构成一个含幺半群，若$X\notin\mathfrak{R}$，则其只为半群.

集环

集环定义

首先回顾环的概念(出自李文威的《代数学方法——基础架构》)

定义(**环**)：(含幺)环是一组资料$(R,+,\cdot)$，其中

1. $(R,+)$是Abel群，二元运算用加法符号记作$(a,b)\mapsto a+b$，加法幺元记为0，称之为R的加法群
2. 乘法运算$\cdot : R\times R\to R$简记为$a\cdot b = ab$满足下述性质：对于所有的$a,b,c\in R$,
   - $a(b+c)=ab+ac,(b+c)a=ba+ca$(分配律，或曰双线性)
   - $a(bc)=(ab)c$(乘法结合律)
3. 存在元素$1\in R$使得对于所有的$a\in R$均有 $a\cdot 1=a=1\cdot a$称作R的(乘法)幺元

除去和幺元相关的性质得到的$(R,+,\cdot)$称为无幺环.

于是观察$\mathfrak{R}$，若我们能够证明其满足分配律，则其成为一个环

$$\begin{aligned}
A\cap(B\Delta C) &= A\cap((B\cup C)\setminus(B\cap C))\\
&= A\cap(B\cup C)\setminus A\cap(B\cap C)\\
&= (A\cap B)\cup(A\cap C)\setminus(A\cap B)\cap(A\cap C)\\
&= (A\cap B)\Delta(A\cap C)\\
(A\Delta B)\cap C &= ((A\cup B)\setminus(A\cap B))\cap C\\
&= A\cup B\cap C\setminus A\cap B\cap C\\
&= (A\cap C)\cup B\setminus(A\cap C)\cap B\\
&= (A\cap C)\cup(B\cap C)\setminus(A\cap C)\cap(B\cap C)\\
&= (A\cap C)\Delta(B\cap C)
\end{aligned}$$

于是$\mathfrak{R}$形成一个环.

于是我们可以给出集环的概念：

集环：其元素本身是某些集的任何集称为集族(也就是一族集合所构成的集合$X=\{X_1,X_2,\cdots\}$，$X_1,X_2,\cdots$也为集合).如果没有相反的说明，我们研究这样的集族，即它的任一元素都是某个固定集X的一个子集.我们用$\mathfrak{R}$来表示这个集族.对于我们来说，一般比较感兴趣满足某些确定的封闭条件的集族.

定义1(**集环**) 设$\mathfrak{R}$为非空集族，若其满足:由$A\in\mathfrak{R},B\in\mathfrak{R}\Rightarrow A\Delta B\in\mathfrak{R}\wedge A\cap B\in\mathfrak{R}$，则称$\mathfrak{R}$为环.

其构成环的证明过程前文已经叙述.

因为对于任何A与B均有

$$\begin{aligned}
A\cup B &= (A\Delta B)\Delta(A\cap B)\\
A\setminus B &= A\Delta(A\cap B)
\end{aligned}$$

[证明]

并集运算

$$
\begin{array}{rcl}
A \cup B & := & \{x : x \in A \vee x \in B\} \\
(A \Delta B) \Delta (A \cap B) & = & ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \Delta (A \cap B) \\
& = & ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B) \setminus ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \cap (A \cap B) \\
& = & (A \Delta B) \cup (A \cap B) \setminus (A \Delta B) \cap (A \cap B) \\
& = & A \cup B \setminus (A \Delta B) \cap (A \cap B) \\
& = & A \cup B \setminus \varnothing \\
& = & A \cup B
\end{array}
$$

差集运算

$$
\begin{array}{rcl}
A \Delta (A \cap B) & = & (A \cup (A \cap B)) \setminus (A \cap (A \cap B)) \\
& = & \{x : x \in A \cup (A \cap B) \wedge x \notin (A \cap B)\} \\
& = & \{x : x \in A \wedge x \notin B\} \\
& = & A - B
\end{array}
$$

由此我们证明了对于任何A,B均有其差集和并集运算封闭与环$\mathfrak{R}$.□

由于$A \cap B$和$A \cup B$可以作为一个新的$\mathfrak{R}$中的集合，于是可知环对于形如

$$C = \bigcap_{i=1}^{n} A_i, D = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

的任何有限并与交都是封闭的.

由于$A \setminus A = \varnothing$于是$\varnothing \in \mathfrak{R}$，不难发现仅由空集组成的集族是最小的环.

设$\mathfrak{S}$(哥特字体的S)为集族，如果$E \in \mathfrak{S}$且对于任意$A \in \mathfrak{S}$，下式

$$A \cap E = A$$

成立，则E叫做$\mathfrak{S}$的单位.

不难发现对于$\forall A \in \mathfrak{S}$有$E \supset A$，即其为包含一切其他集的最大集.

对于有单位的集，其作为一个环便是一个含幺环.这种集环我们称为**集代数**.

集环性质

不难从集环的定义中得知以下定理

定理 1：任何集环的交$\mathfrak{R} = \bigcap_\alpha \mathfrak{R}_\alpha$是一个环

[证明]

对于$A, B \in \bigcap_\alpha \mathfrak{R}_\alpha$有对于任意的$\alpha$，$A, B \in \mathfrak{R}_\alpha$.

由于$A \Delta B$和$A \cap B$都属于$\mathfrak{R}_\alpha$

于是有它们属于$\mathfrak{R}$，即$\mathfrak{R}$是一个环□

定理 2 : 对于任何非空集族$\mathfrak{S}$存在且仅存在一个环$\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$，它包含$\mathfrak{S}$并且属于包含$\mathfrak{S}$的任何环$\mathfrak{K}$(哥特字体的K)中

[证明]

环$\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$由族$\mathfrak{S}$唯一确定，于是对于族$\mathfrak{S}$不妨构建一个“单位”$X := \cup_{A \in \mathfrak{S}} A$,于是对于任意的$A \in \mathfrak{S}$有$A \subset X$，考虑集合$X$的幂集$\mathcal{P}(X)$，其显然可以构成一个环，于是可以设$\Sigma := \{\mathfrak{K} : \mathfrak{K}\text{是}\mathcal{P}(X)\text{的子环，并且有}\mathfrak{K} \supset \mathfrak{S}\}$，记$\mathfrak{B} := \bigcap_{\mathfrak{K} \in \Sigma} \mathfrak{K}$,由定理1可知$\mathfrak{B}$是一个集环并且它属于任何包含$\mathfrak{S}$的$\mathfrak{K}$中□

事实上，对于任意的包含了$\mathfrak{S}$的环$\mathfrak{R}^*$,交$\mathfrak{R}=\mathfrak{R}^*\cap\mathcal{P}(X)$是$\Sigma$中的环，从而有$\mathfrak{S}\subset\mathfrak{R}(\mathfrak{S})\subset\mathfrak{R}\subset\mathfrak{R}^*$，于是$\mathfrak{R}(\mathfrak{S})\subset\mathfrak{R}^*$ 确实满足了极小性的要求。这个环叫做$\mathfrak{S}$上的极小环或者称其为$\mathfrak{S}$生成环并将其记作$\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$.

集半环

事实上，在许多问题中，例如测度论和概率论的公理系统中，除了环的概念起着重要作用，还有更一般的集半环的概念.

半环概念

定义2(**集半环**) : 如果集族$\mathfrak{S}$包含空集$\varnothing$，它关于交是封闭的，并且具有如下性质：由$\mathfrak{S}$中的A和$A_1\subset A$就可以得到形如$A=\bigcup_{k=1}^{n}A_k$的A的表达式，其中A_k是$\mathfrak{S}$中两两不相交的集合，首项是给定集合A_1.则称$\mathfrak{S}$为半环(semi\setminus ring).

对于任一组两两不相交的集合$A_1,A_2,\cdots,A_n$的并集是已知集合A,我们就把这个并称为一个集合A的有限分解式.

任一集环$\mathfrak{R}$都是半环,因为如果A与$A_1\subset A$属于R则成立如下分解式

$$A=A_1\cup(A\setminus A_1)$$

由于集环$\mathfrak{R}$对于差集运算封闭，于是任一集环都是半环.

通过上述定义不难得出以下性质：

[引理1] 设集合$A_1,A_2,\cdots,A_n$,A属于半环$\mathfrak{S}$,其中集合A_i两两不相交并且包含于A,这时，可以把集合$A_{n+1},\cdots,A_s\in\mathfrak{S}$添加到一组集$A_i(i=1,2,\cdots,n)$上使得集$A$的有限分解式为

$$A=\bigcup_{k=1}^{s}A_k(s\geq n)$$

[证明]

采用数学归纳法对其进行证明.

当$n=1$时，由半环的定义可知$A=\bigcup_{k=1}^{s}A_k$成立.

假定对于$n=m-1$时成立，接下来讨论对于$n=m$时

对于$n=m-1$时有

$$A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{m-1}\cup B_1\cup\cdots\cup B_q$$

并且有$B_1,\cdots,B_q\in\mathfrak{S}$,于是对于$A_m\subset A$，记$B_{p_1}:=A_m\cap B_p\subset B_p(p=1,2,\cdots,q)$，于是由半环的定义可知对于$B_p$有

$$B_p=\bigcup_{k=1}^{n_p}B_{p_k}$$

于是对于所有的B_p进行如上分解可得

$$A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{m-1}\cup\bigcup_{p=1}^{q}(\bigcup_{k=1}^{n_p}B_{p_k})$$

并且由于A_i两两不相交，于是有$B_{p_1}\cap A_i=\varnothing$以及$\bigcup_{p=1}^{q}B_{p_1}=A_m\cap(A-\cup_{i=1}^{m-1}A_i)$右式无非就是$A_m$于是可以得知

$$A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{m-1}\cup A_m\cup\bigcup_{p=1}^{q}(\bigcup_{k=2}^{n_p}B_{p_k})$$

接下来令$A_{m+p}:=\bigcup_{k=2}^{n_p}B_{p_k}$即可得知对于$n=m$的情况也成立，于是由数学归纳法知引理成立□

[引理2] 任一有限个属于半环$\mathfrak{S}$的一组集合$A_1,\cdots,A_n$均可在$\mathfrak{S}$上找到有限个两两不相交的一组集$B_1,\cdots,B_t$，使得对于每一个A_k都可表为某些集合B_s的如下形式的无交并

$$A_k=\bigcup_{s\in M_k}B_s$$

[证明]

还是使用数学归纳法证明其合理性：

对于$n=1$时，取$t=1,B_1=A_1$即可

假设对于$n=m-1$时成立，接下来讨论对于$n=m$时'

于是对于A_1到A_{m-1}都存在$B_1,B_2,\cdots,B_t$使得

$$A_k=\bigcup_{s\in M_k}B_s$$

于是对于集合A_m，令$B_{s_1}:=A_m\cap B_s$

由于B_s两两不相交，于是B_{s_1}两两不相交并且包含于A_m，于是由引理1可以得知可以添加一族集合$B'_p\in\mathfrak{S}$使得

$$A_m=\bigcup_{s=1}^{t}B_{s_1}\cup\bigcup_{p=1}^{q}B'_p$$

由于$B_{s_1}\subset B_s$于是还有

$$B_s=B_{s_1}\cup B_{s_2}\cup\cdots\cup B_{s_{f_s}},B_{s_j}\in\mathfrak{S}$$

成立，于是由于

$$A_k=\bigcup_{s\in M_s}B_s=\bigcup_{s\in M_s}\bigcup_{j=1}^{f_s}B_{s_j},k=1,2,\cdots,m-1$$

于是我们可以利用交集运算(即对于相交处取交集，然后利用引理1进行填补，得到交集和无交的部分)构造两两不相交的B_{s_j}和B'_p.

这样的B_{s_j}和B'_p恰好为我们所需要的满足引理条件的集合□

半环生成环

在我们先前对于集环的讨论中可以得知任一集族$\mathfrak{S}$都存在一个包含$\mathfrak{S}$的唯一极小环，即$\mathfrak{S}$生成环，但是真正的去构造$\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$却很复杂，但是在$\mathfrak{S}$作为半环的前提下，或许对其的构造会变得比较简单.

假设$\mathfrak{S}$是一个半环，取A在半环$\mathfrak{S}$上具有有限分解式

$$A=\bigcup_{k=1}^{m}A_k$$

这样的集合生成的族$\mathfrak{Z}$,具有如下性质

对于$A,B\in\mathfrak{Z}$有

$$A=\bigcup_{i=1}^{n}A_i,B=\bigcup_{j=1}^{m}B_j$$

于是对于$C_{ij}:=A_i\cap B_j$由于半环对于交运算的封闭性，有$C_{ij}\in\mathfrak{S}$

并且由于$C_{ij}\subset A_i,C_{ij}\subset B_j$，并且不难得到$\bigcup_i C_{ij}\subset B_j$，$\bigcup_j C_{ij}\subset A_i$

于是由引理1可知如下分解式成立

$$
\begin{aligned}
A_i &= \bigcup_j C_{ij} \cup \bigcup_{k=1}^{r_i} D_{ik} \\
B_j &= \bigcup_i C_{ij} \cup \bigcup_{l=1}^{s_j} E_{jl}
\end{aligned}
$$

其中有$D_{ik}, E_{jl} \in \mathfrak{S}$.于是不难发现对于$A$有$A \supset \bigcup_{i,j} C_{ij}$,$B \supset \bigcup_{i,j} C_{ij}$并且 $D_{ik} \cap E_{jl} = \varnothing$

于是不难发现有 $A \cap B = \bigcup_{i,j} C_{ij}$并且$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \bigcup_i \bigcup_{k=1}^{r_i} D_{ik} \cup \bigcup_j \bigcup_{l=1}^{s_j} E_{jl}$.

于是不难得知$A \cap B, A \Delta B \in \mathfrak{Z}$

于是有$\mathfrak{Z}$对于交集与对称差运算封闭，即由集环的定义可知这是一个环.

对于其他包含$\mathfrak{S}$的环，显然有其包含$C_{ij}, D_{ik}, E_{jl} \in \mathfrak{S}$即其包含$\mathfrak{Z}$.

于是有$\mathfrak{Z}$还是包含$\mathfrak{S}$的最小环，即其为$\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$

于是我们得出以下定理：

[定理3] 若$\mathfrak{S}$是一个半环，那么$\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$与在集合$A_k \in \mathfrak{S}$上具有有限分解式

$$
A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k
$$

的集合A所组成的族$\mathfrak{Z}$一致.

σ 代数

σ环与δ环

在测度论中，我们经常使用到可列个集合的交与并，但是这无论是在集环还是集代数都没有进行定义的.

于是我们扩充集环的定义使其包含交于并.

对于并集，我们称其为σ环，其严格定义如下：

定义(σ环) 如果集环中包含任一序列$(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$并且包含

$$
S = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n
$$

则称这样的集环为σ环.

同理，我们可以对于交集进行讨论，对于交集，我们称其为δ环，其严格定义如下

定义(δ环)如果集环中包含任一序列$(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$并且包含

$$
S = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n
$$

则称这样的集环为δ环.

推广为集代数

不难发现对于σ环和δ环，其本质都是集环，当其具备单位E时都可以变为一个含幺交换环，即集代数，于是具有单位的σ环和δ环分别称为σ代数和δ代数，但是由于

$$
\begin{aligned}
\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n &= E \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} (E - A_n) \\
\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n &= E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (E - A_n)
\end{aligned}
$$

得知σ代数与δ代数可以互相转化，于是由于我们经常使用并集运算(测度就是直接由并集同态定义的)于是我们称其为σ代数.

对于σ代数有严格定义如下：

设X为一非空集合，假设有一族集合$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$,若$\mathcal{F}$满足以下条件

- $X \in \mathcal{F}$
- $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
- $A_n \in \mathcal{F}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

则称$\mathcal{F}$为X的σ代数

如果有一集族$\mathfrak{S}$，那么至少应该存在一个包含该族的σ代数，事实上，令

$$X = \bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A$$

并且研究其幂集$\mathfrak{B} := \mathcal{P}(X)$可知$\mathfrak{B}$是包含$\mathfrak{S}$的$\sigma$代数，若$\widetilde{\mathfrak{B}}$是包含$\mathfrak{S}$的任意$\sigma$代数，而$\widetilde{X}$是其单位，那么对于任一$A \in \mathfrak{S}$有$A \in \widetilde{X}$从而有$X = \bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A \subset \widetilde{X}$，若$\widetilde{X} = \bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A = X$则称$\sigma$代数$\mathfrak{B}$(关于族$\mathfrak{S}$)是不可约的.换句话说，不可约的$\sigma$代数对于任何不属于任一$A \in \mathfrak{S}$的点都是不包含的.

[定理 4] 对于任何非空集族$\mathfrak{S}$都存在(关于该族)不可约的σ代数$\mathfrak{B}(\mathfrak{S})$,它包含$\mathfrak{S}$并且属于任何包含$\mathfrak{S}$的$\sigma$代数中.

[证明] 考虑$X = \bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A$，有$\mathcal{P}(X)$显然是包含$\mathfrak{S}$的$\sigma$代数，由此证明存在性，接下来的步骤与定理2完全一致，想看详细步骤可以看概率论笔记中概率空间部分的证明.

集族与映射

设$y = f(x)$是在集合M下定义的且在集合N中进行取值的函数(测度就是一个这样的函数)，并且设$\mathfrak{M} := \mathcal{P}(M)$是集合$M$的子集所构成的集族，我们用$f(\mathfrak{M})$表示所有属于$\mathfrak{M}$的集$A$的象$f(A)$组成的族.此外，设$\mathfrak{N}$是包含在$N$中的某一集族，$f^{-1}(\mathfrak{N})$是属于$\mathfrak{N}$的集$A$的一切原象$f^{-1}(A)$组成的族.

习题

1. 若$\mathfrak{N}$是环，则$f^{-1}(\mathfrak{N})$也是环
2. 若$\mathfrak{N}$是代数，则$f^{-1}(\mathfrak{N})$也是代数
3. 若$\mathfrak{N}$是σ代数，则$f^{-1}(\mathfrak{N})$也是σ代数
4. $\mathfrak{R}(f^{-1}(\mathfrak{N})) = f^{-1}(\mathfrak{R}(\mathfrak{N}))$
5. $\mathfrak{B}(f^{-1}(\mathfrak{N})) = f^{-1}(\mathfrak{B}(\mathfrak{N}))$

[证明]

只证1.后面的内容同理可证

若$\mathfrak{N}$是环，则其关于对称差，交集，差和并集封闭.

于是对于$A, B \in \mathfrak{N}$，考虑$f^{-1}(A)$和$f^{-1}(B)$

$$
\begin{array}{ccc}
f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) & = & \{f^{-1}(x) : f^{-1}(x) \in f^{-1}(A) \wedge f^{-1}(x) \in f^{-1}(B)\} \\
x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B & \Rightarrow & f^{-1}(x) \in f^{-1}(A) \wedge f^{-1}(x) \in f^{-1}(B) \\
 & \Downarrow & \\
f^{-1}(A \cap B) \supseteq f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) & \wedge & f^{-1}(A \cap B) \subseteq f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \\
 & \Downarrow & \\
f^{-1}(\mathfrak{N}) \ni f^{-1}(A \cap B) & = & f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)
\end{array}
$$

同理证Δ即可.