集合与点集

集合

集合的概念与运算

1. 解答下列问题
    1. 给定集合A,B,C试给出下述指定元素全体形成的集合的表示式
        1. 至少属于三者中两个集合的元素
        2. 属于三者之中中的两个而不属于三个集合的元素
        3. 属于三者中一个而不属于另外两个集合的元素
    2. 设r,s,t是三个互不相同的复数,且令

    $$A=\{r,s,t\},B=\{r^2,s^2,t^2\},C=\{rs,st,rt\}$$

    若有$A=B=C$试求r,s,t

[求解]

1.
    1. x至少属于三者中两个集合,于是$(x\in A\cap B)\vee(x\in B\cap C)\vee(x\in A\cap C)\Leftrightarrow(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(A\cap C)$
    2. $((x\in A\cap B)\wedge(x\notin C))\vee((x\in B\cap C)\wedge(x\notin A))\vee((x\in A\cap C)\wedge(x\notin B))$.那么,考虑对称差$\Delta$,其中$A\Delta B:(A\cup B)\setminus(A\cap B)$即$A$和$B$之间不相交的部分,那么可以得到$A\Delta B\Delta C$为$A,B,C$之间两两不相交的部分,以及三者相交部分的并,也就是我们需要排除的两种情况.于是有$((x\in A\cap B)\wedge(x\notin C))\vee((x\in B\cap C)\wedge(x\notin A))\vee((x\in A\cap C)\wedge(x\notin B))\Leftrightarrow(A\cup B\cup C)\setminus(A\Delta B\Delta C)$.
    3. $((x\in A)\wedge(x\notin B\cup C))\vee((x\in B)\wedge(x\notin A\cup C))\vee((x\in C)\wedge(x\notin A\cup B))$.我们先前考虑的对称差$A\Delta B\Delta C$表示$A,B,C$之间两两不相交的部分,以及三者相交部分的并.于是只需要对于对称差再对$A\cap B\cap C$做商集即可,即$(A\Delta B\Delta C)\setminus(A\cap B\cap C)$
2. 由于$A=B=C$,且$r,s,t\in\mathbb{C}$($\mathbb{C}$为复数域),根据题目中所给内容可以考虑$(r+s+t)^2=r^2+rs+rt+s^2+rs+st+t^2+rt+ts=(r^2+s^2+t^2)+2(rs+rt+st)$.

    而由于$A=B=C$可以得知$r+s+t=r^2+s^2+t^2=rs+rt+st$.令$k=r+s+t$可以得到$k^2=k+2k=3k$.

    解得$k=3$或$k=0$

    并且由于$A=B=C$有$rst=r^2s^2t^2=rs\times st\times rt$即$rst=1$或$rst=0$.若$rst=0$则某个元素为0(假设$t=0$)则有$C=\{r,0,0\}$产生矛盾.于是有$rst=1$.

    于是若$k=3$,则有$r+s+t=3$且$rst=1$,若想要求解出具体的值,则需要通过这两个关系构建一个方程,以r,s,t为根的方程.

    可以根据推广的韦达定理得到$r+s+t=-\frac{a_2}{a_3}=3$且$rst=-\frac{a_0}{a_3}=1$,$rs+rt+st=\frac{a_1}{a_3}=3$

    于是令$a_3=1$(写成首一多项式)可以得到$a_2=-3$,$a_1=3$且$a_0=-1$.

    那么得到对应的多项式为

    $$x^3-3x^2+3x-1=0$$

    不难发现上式即为$(x-1)^3$于是得到此时$r=s=t=1$于是有$r+s+t=0$.

    从而再使用推广的韦达定理令$a_3=1$得到$a_2=a_1=0$,$a_0=1$

    $$x^3-1=0$$

    于是得到r,s,t分别为1以及$\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$(即1的三次单位根)

例 2 试证明下列命题：

(1) 设 A,B 是全集 X 中的子集.

(i) 等式 $B=(X\cap A)^c\cap(X^c\cup A)$ 成立当且仅当 $B^c=X$.

(ii) 若对任意的 $E\subset X$，有 $E\cap A=E\cup B$，则 $A=X,B=\varnothing$.

(2) 设 $\boldsymbol{\Gamma}$ 是集合 X 中某些非空子集合形成的集合族. 若 $\boldsymbol{\Gamma}$ 对运算 $\triangle,\cap$ 是封闭的(即若 $A,B\in\boldsymbol{\Gamma}$，则 $A\triangle B\in\boldsymbol{\Gamma},A\cap B\in\boldsymbol{\Gamma}$，也说 $\boldsymbol{\Gamma}$ 是一个环)，则 $\boldsymbol{\Gamma}$ 对运算 $\cup,\setminus$ 也封闭.

(3) 设有集合 A,B,E,F.

(i) 若 $A\cup B=F\cup E$，且 $A\cap F=\varnothing,B\cap E=\varnothing$，则 $A=E$ 且 $B=F$.

(ii) 若 $A\cup B=F\cup E$，令 $A_1=A\cap E,A_2=A\cap F$，则 $A_1\cup A_2=A$.

(4) $(A\cup B\cup C)\setminus(A\cap B\cap C)=(A\triangle B)\cup(B\triangle C)$.

(5) 设 A,B 是两个集合. 若存在集合 E，使得 $A\cup E=B\cup E$ 以及 $A\cap E=B\cap E$，则 $A=B$.

[证明]

(1)

1. $B=(X\cap A)^c\cap(X^c\cup A)$由于$X^c=\varnothing$于是$X^c\cup A=A.X\cap A=A$于是$B=A^c\cap A=\varnothing$于是有$B^c=X$
2. $E\cap A=E\cup B$取$E=X$得到$A=X$,取$E=\varnothing$得到$\varnothing=B$

(2)

即证$\cup$和$\setminus$两种运算可以由Δ和$\cap$表示

$$\begin{aligned}
A\cup B &:= \{x:x\in A\vee x\in B\}\\
(A\Delta B)\Delta(A\cap B) &= ((A\cup B)\setminus(A\cap B))\Delta(A\cap B)\\
&= ((A\cup B)\setminus(A\cap B))\cup(A\cap B)\setminus((A\cup B)\setminus(A\cap B))\cap(A\cap B)\\
&= (A\Delta B)\cup(A\cap B)\setminus(A\Delta B)\cap(A\cap B)\\
&= A\cup B\setminus(A\Delta B)\cap(A\cap B)\\
&= A\cup B\setminus\varnothing\\
&= A\cup B
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A\Delta(A\cap B) &= (A\cup(A\cap B))\setminus(A\cap(A\cap B))\\
&= \{x:x\in A\cup(A\cap B)\wedge x\notin(A\cap B)\}\\
&= \{x:x\in A\wedge x\notin B\}\\
&= A\setminus B
\end{aligned}$$

(3)

1. $A\cup B=F\cup E$且$A\cap F=\varnothing$且$B\cap E=\varnothing$于是 $(x\in A\cup B)\Leftrightarrow(x\in A)\vee(x\in B)\Leftrightarrow((x\in F)\vee(x\in E))\wedge(F\cap A=E\cap B=\varnothing)$从而$A\subset E$,$B\subset F$且包含符号可以反向,得到 $A=E,B=F$.
2. $(A\cap E)\cup(A\cap F)=A\cap(E\cup F)=A\cap(A\cup B)=A$

(4)

$$(A\cup B\cup C)\setminus(A\cap B\cap C)=\{x:x\in(A\cup B\cup C)\wedge x\notin(A\cap B\cap C)\}$$

不难发现其为$A\cup B\cup C$中挖去$A\cap B\cap C$那部分,根据我们先前所提到的Δ运算可以得到$A\Delta B$表示$A\cup B$除去$A\cap B$的部分,而$B\Delta C$表示$B\cup C$除去$B\cap C$的部分,于是得到 $(A\Delta B)\cup(B\Delta C)\Leftrightarrow((A\cup B)\setminus(A\cap B))\cup((B\cup C)\setminus(B\cap C))=((A\cup B)\cup(B\cup C))\setminus((A\cap B)\cap(B\cap C))=(A\cup B\cup C)\setminus(A\cap B\cap C)$

(5)

若有$A\cup E=B\cup E$且$A\cap E=B\cap E$,

由于$A=(A\cap E)\cup(A\cap E^c)=(B\cap E)\cap(A\cap E^c)$,

于是只需要证明$B\cap E^c=A\cap E^c$

由于$A\cup E=E\cup(A\cap E^c)$且$B\cup E=E\cup(B\cap E^c)$且有$E\cap(A\cap E^c)=\varnothing=E\cap(B\cap E^c)$得到$A\cap E^c=B\cap E^c$.

例 3 试证明下列命题：

(1) 设有集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{10}\}$，其中 $a_i(1\leqslant i\leqslant 10)$是一个两位数，则存在分解 $A=B\cup C$ 满足：$B\cap C=\varnothing$，使得 B 中所有元素的数值和与 C 中所有元素的数值和相等.

(2) 设 E 是由 n 个元素形成的集合. $E_1,E_2,\cdots,E_{n+1}$ 是 E 的非空子集，则存在 r,s 个不同指标：

$$i_1,i_2,\cdots,i_r;\quad j_1,j_2,\cdots,j_s,$$

使得 $E_{i_1}\cup\cdots\cup E_{i_r}=E_{j_1}\cup\cdots\cup E_{j_s}$.

(3) 设 E 是由某些有理数形成的集合，且满足

(i) 若 $a\in E,b\in E$，则 $a+b\in E,ab\in E$；

(ii) 对任一有理数 r，恰有下述关系之一成立：

$$r\in E,\quad -r\in E,\quad r=0,$$

则 E 是全体正有理数形成的数集.

(1)

由于A的所有子集共有$|\mathcal{P}(A)|=2^{10}=1024$个,而10个两位数的数值和必然小于$10\times 100=1000<1024$于是必然会有两个集合的数值和相等,取出它们除去重复的部分记为B,C即可.

(2)

对于$E_1,\cdots,E_{n+1}$中任取若干个作并集得到所有可能为$2^{n+1}-1$个(即$\{1,2,\cdots,n+1\}$到$\{0,1\}$的映射个数2^{n+1}再减去空集的情况1)

而E的非空子集数为$|\mathcal{P}(E)|-1=2^n-1<2^{n+1}-1$,而前文的并集必然也为$E$的非空子集,于是必然会有相同的.

(3)

若$r\neq 0$则有(ii)可知$r\in E$或$-r\in E$并且不可能同时发生.但是无论如何都有$r^2=(-r)^2\in E$.于是得到$1\in E$.由于(i)我们可以对1使用递归原理得到$\mathbb{Z}_{\geq 0}\subset E$.

由于所有的有理数r都有(ii)成立,于是我们可以考虑$\frac{1}{n}$必然由$(\frac{1}{n})^2=\frac{1}{n^2}\in E$,再考虑正整数$mn$得到$mn\times\frac{1}{n^2}=\frac{m}{n}\in E$即$\mathbb{Q}\subset E$.由于$E$是有理数构成的集合,于是有$E\subset\mathbb{Q}$即$E=\mathbb{Q}$.