第一章　事件与概率

第2节　样本空间与事件

李 娟

Email: juanlisdu@163.com

山东大学(威海)　数学与统计学院

一、样本空间

授课要求：1. 熟练地写出样本空间和随机事件；

2. 熟悉事件间的关系及运算。

从本节开始，我们将逐步引进概率论的基本概念，样本空间与事件是最基本的两个概念。

一、样本空间(sample space)

1、随机试验(试验，trial)：若一试验满足：

(1) 在相同的条件下可以重复进行(可重复性)；

(2) 有多种可能发生的结果，并且事先能明确试验的所有可能结果；

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会发生(事先未知哪一结果发生)；

则称此试验为**随机试验**。

以后提到的试验均指随机试验。

我们是通过随机试验来研究随机现象的。例如：掷硬币，抛骰子，灯泡寿命等等。

2、样本空间

对于随机试验，尽管在每次试验之前不能预知试验的结果，但试验的所有可能结果组成的集合是已知的。将随机试验E的所有可能结果组成的集合称为E的**样本空间**(sample space)，记为Ω。样本空间的元素，即E的每个结果，称为**样本点**(sample point)，记为ω。

注：1. 样本点为随机试验的每一个可能的结果。

2. 因为随机试验的所有结果是明确的，从而所有的样本点也是明确的，进而Ω为明确的。

注1：样本空间可分为：

(1) 有限样本空间 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$；

(2) 可列样本空间 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n, \cdots\}$；

(3) 无限样本空间 $\Omega = (a, b)$。

2、样本空间

下面举一些例子。

例1：在研究英文字母使用情况时，把样本空间选为 $\Omega = \{空格, A, B, \cdots, Z\}$ 是适宜的，这个样本空间只有有限个样本点，是比较简单的样本空间。

例2：观察一小时中落在地球上某一区域的粒子数，可能的结果一定是非负整数，而且很难指定一个数作为它的上界，这样，可以把样本空间取为 $\Omega = \{0, 1, 2, \cdots\}$。这个样本空间含有无穷个样本点，但这些样本点可以依照某种次序排列出来，以后我们将称它的点数为可列个。

例3：讨论某地区的气温时，我们自然把样本空间取为 $\Omega = (-\infty, \infty)$，或 $\Omega = [a, b]$。这个样本空间包含有无穷多个样本点，它们充满一个区间，不是一个可列集。

例4：考察地震震源时，可以把样本点取为 (x, y, z)，其中 x表示震源的经度，y表示纬度，z表示深度。这时，样本空间是三维空间中某一区域。

例5：金融分析师把道·琼斯指数作为研究对象，每日的指数涨跌用一条曲线 $x(t)$，$0 \le t \le T$ 表示，作为一个样本点，这时样本空间是函数空间，这类样本空间是随机过程(stochastic process)理论的研究对象。

例①：E_1:将一枚硬币抛掷三次，观察正面H，反面T出现的情况。样本空间 Ω_1。

E_2:将一枚硬币抛掷三次，观察出现正面的次数。样本空间 Ω_2。

从以上例子可以看出，随着时间的不同，样本空间可以相当简单，也可以十分复杂。

2、样本空间

在今后讨论中，经常把样本空间认为是预先给定的。当然对于一个实际问题或一个随机现象，如何用一个恰当的样本空间来描述它也很值得研究。但是在概率论的研究中，一般都假定样本空间是给定的。这是必要的抽象，这种抽象使我们能更好地把握住随机现象的本质，而且得到的结果能广泛地应用。

2、样本空间

事实上，一个样本空间可以概括各种实际内容很不相同的问题：例如只包含两个样本点的样本空间既能作为掷硬币出现正、反面的模型，也能用于产品检验中出现“合格品”及“废品”，又能用于气象中“下雨”与“不下雨”，以及公共事业排队现象中“有人排队”与“无人排队”等等。尽管问题的实际内容如此不同，但有时却能归结为相同的概率模型。我们后面常以摸球等作为例子也是由于这个原因，它能使问题的本质更为突出。

注2：样本空间的元素是由试验的目的所确定的。

例如：在E_1和E_2中同是一枚硬币连抛三次，由于试验的目的不一样，其样本空间也不一样。

注3：在概率论的研究中，一般都假定样本空间是给定的。这是必然的抽象。

注4：一个样本空间可以概括各种实际内容很不相同的问题。

二、事件

集合：所谓给定一个点的集合S，是指对于任何一个点 ω，都可以确定它是不是属于S。如果是，则记为 $\omega \in \mathrm{S}$；如果不是，则记为 $\omega \in \mathrm{S}$，或者 $\omega \notin \mathrm{S}$。

按照这种定义，单个点也是一个点集。习惯上还约定不包含任何点的集合也是一个点集，称为空集，记为 $\emptyset$。

二、事件

1. 基本事件：随机试验的每一个可能的结果，或者说，由一个样本点组成的单点集。

例如：Ω_1中有8个基本事件，Ω_2中有4个基本事件。

2. 复杂(复合)事件：由多个基本事件组成，相对于基本事件，称它为复杂事件。

例如：E_1中，A={仅出现两次正面}=$\{HHT, HTH, THH\}$

为复杂事件。

3. (随机)事件：在一定条件下可能发生也可能不发生的事件称为随机事件。以 $A, B, C, \cdots$ 表示。或者，称试验E 的样本空间Ω的子集为E的随机事件，简称事件。在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一事件**发生**。

例如：E_1中，A={仅出现两次正面}为随机事件。

4. 必然事件：在每次试验中必然出现的事件叫做必然事件。

注：样本空间Ω为必然事件。

5. 不可能事件：必然不出现的事件叫做不可能事件，用$\emptyset$表示。

例如：E_1中事件B=$\{$出现4次正面$\}$=$\emptyset$.

注：必然事件与不可能事件本来没有不确定性，也就是说它们不是随机事件，但为了今后讨论方便，把它们也当作一种特殊的随机事件。

例②：以掷硬币为例，构造基本事件、必然事件、不可能事件及样本空间。

例③：写出下列随机事件的样本空间及表示下列事件的样本点的集合：

5件不同产品中有1件次品，从中任取两件得一件次品。

例6：口袋中装有4只白球和2只黑球。我们考虑依次从中摸出两球所有可能出现的事件。若对球进行编号，4只白球分别编为1,2,3,4号，2 只黑球编为5,6号。如果用数对(i,j)表示第一次摸得 i 号球，第二次摸得 j号球，则可能出现的结果是

$$\begin{gathered}(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)\\(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\\(3,1),(3,2),(3,4),(3,5),(3,6)\\(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(4,6)\\(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5)\\(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)\end{gathered}\qquad(*)$$

把这30个结果作为样本点，则构成了样本空间。

二、事件

在这个问题中，这些样本点是我们感兴趣的事件；但是我们也可以研究下面另外一些事件：

A：第一次摸出黑球；

B：第二次摸出黑球；

C：第一次及第二次都摸出黑球。

后面这些事件与前面那些事件的不同处在于这些事件是可以分解的，例如为了A出现必须而且只需下列样本点之一出现：

$$(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5)$$

$$(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)$$

前面的30个事件由单个样本点构成；后面这三个事件，每一个事件都是由若干个样本点构成的，总之，它们都是样本点的某个集合。

三、事件的计算

在一个样本空间中显然可以定义不止一个事件。概率论的重要研究课题之一就是希望从简单事件的概率推算出复杂时间的概率。在实际生活中，往往要求我们同时考察几个在同样条件下的事件以及它们之间的联系。详细地分析事件之间的关系，不仅帮助我们更深刻地认识事件的本质，而且可以大大简化一些复杂事件的概率计算。

三、事件的计算

下面就讨论事件间的关系及事件的运算，先讨论两个事件A与B之间的关系。

1、事件间的关系：

例④： 从标号为 $1,2,\cdots,10$的球中任取一球，则 $\Omega=\{1,2,\cdots,10\}$，其中 i={取到标号为i的球}，$i=1,2,\cdots,10$。

1、事件间的关系

(1)导致：

若事件A发生则事件B一定发生，则称A导致B，记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$。或称A被包含于B，亦或称事件B包含了事件A。$i.e.$, A 中的每一个样本点都包含在B中。

例：{6}⊂{取到标号为偶数的球}.

注1°：可用文(氏)图来表示；

2°：$A \subset B \iff \forall\omega \in A$, 必有 $\omega \in B$；

3°：规定对任一事件A，$\emptyset \subset A \subset \Omega$；

4°：若 $A \subset B$, $B \subset C$, 则 $A \subset C$。

(2)相等： 若 $A \subset B$，且$B \subset A$，则称A与B相等(或等价)，记为 $A = B$。等价的两个事件同时发生，因此可看作是一样的。

例： $\{$取到标号为偶数的球$\} = \{2,4,6,8,10\}$.

(3)和事件： 称A和B中至少有一个发生的事件为事件A 和事件B的和事件，记为 $A \bigcup B$，或称为A与B 的并。

例： $\{$取到标号为1的球$\} \bigcup \{2\} = \{1,2\}$。

注1°：可用文(氏)图来表示；

2°：$A \bigcup B \iff$ A、B中至少有一个发生

$\iff$ A发生，B不发生；或A不发生，B 发生；

或A、B都发生；

3°：若 $A \subset B$，则$A \bigcup B = B$；

4°：$A \bigcup B = \{\omega |\ \omega \in A$ 或 $\omega \in B\}$。

1、事件间的关系

推广：$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 或 $A_1 \bigcup A_2 \bigcup \cdots \bigcup A_n$ 为n个事件 $A_1, \cdots, A_n$ 的和事件，称为 $A_1, \cdots, A_n$ 的并，表示$A_1, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生；

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的和事件，表示 $A_1, \cdots, A_n, \cdots$ 中至少有一个事件发生，定义：

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \lim_{n\to\infty} \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

例如：一人进行科学试验，直到试验成功为止，若A 表示试验成功，A_i表示试验第i次才成功，则显然有：

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

(4)积事件：

称A与B都发生的事件为A与B的积事件，记为$A\bigcap B$ 或 AB，称它为A与B的交。

例： A={标号≤ 3}，B={偶数}，则 $AB = A\bigcap B = \{2\}$.

注1°：可用文(氏)图来表示;

2°：$A\bigcap B \ \subset \ A(B) \ \subset \ A\bigcup B$；

3°：若$A\subset B$，则$A\bigcap B = A$；

4°：$A\Omega = A$； $A\emptyset = \emptyset$；

5°：$A\bigcap B$ 表示所有同时属于A 及B的样本点的集合，

$i.e.$, $A\bigcap B = \{\omega|\ \omega\in A$且 $\omega\in B\}$；

6°：AB发生$\Longleftrightarrow$ A, B 同时发生。

推广：称 $A_1A_2\cdots A_n$ 或 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ 为n个事件 $A_1,\cdots,A_n$ 的积事件，表示 $A_1,\cdots,A_n$ 同时发生；

$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的积事件，表示 $A_1,\cdots,A_n,\cdots$ 同时发生，定义：

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \lim_{n\to\infty}\bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

(5)差事件：

称事件A发生而事件B不发生的事件为事件A与B的差事件，记为 $A-B$，称之为A与B的差。当且仅当 A发生 B不发生时事件$A-B$发生。

例： A={标号≤ 3}，B={偶数}，则

$$A-B=\{1,3\},\ B-A=\{4,6,8,10\}。$$

注1°：可用文(氏)图来表示；

2°：$A-A=\emptyset$; $A-\emptyset=A$; $A-\Omega=\emptyset$;

3°：若$A-B=\{\omega |\ \omega\in A,$ 且$\omega\notin B\}$。

(6)互斥(互不相容)：

若事件A与B不能同时发生，则称事件A与B为互斥(互不相容的)，即$A\bigcap B=\emptyset$。

例： A={奇数}，B={偶数}，则 $A\bigcap B=\emptyset$。

注1°：可用文(氏)图来表示；

2°：$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots\}$中样本点 $\omega_1,\omega_2,\cdots$ 为互不相容的；

3°：约定：对于互不相容的事件A 与B，称它们的并为和，

记作 $A+B$。

(7)对立事件(逆事件)：

称“A不发生”的事件为事件A的对立事件，或为A的逆事件，记为 $\overline{A}$。$\overline{A}$ 表示A不发生。

例： A={偶数}，$\overline{A}$={奇数}={1,3,5,7,9}。

注1°：可用文(氏)图来表示；

2°：$\overline{A}$发生$\Longleftrightarrow$ A不发生；

3°：A与$\overline{A}$对立，$\Longleftrightarrow$ $A\bigcup\overline{A}=\Omega$, $A\overline{A}=\emptyset$;

4°：$\overline{A}=\Omega-A=\{\omega|\ \omega\notin A\}$;

5°：$\overline{\overline{A}}=A$, $i.e.$, A与$\overline{A}$ 互为对立事件；

例：必然事件与不可能事件互为对立事件。

6°：对立事件必互斥，但反之不对。

例：$\{1\}\bigcap\{2\}=\emptyset$, $i.e.$,{1}与{2}为互斥的，但不为对立事件。

例⑤：设 A, B, C 是同一样本空间中的三个事件，试用 A, B, C 的关系式表示下列各事件：

(1) A发生：

(2) 只有A发生：

(3) A, B, C 三个事件中恰有一个发生：

(4) A, B, C 三个事件中至少有一个发生：

(5) A, B, C 三个事件中至多有一个发生：

(6) A, B, C 三个事件中至少有两个发生：

(7) A, B, C 三个事件中恰好有两个发生：

(8) A, B, C 三个事件中至多有两个发生：

(9) A发生而B与C都不发生：

(10) A与B都发生而C不发生：

构造必然事件：

不可能事件：

2、事件间的运算

关于事件运算的顺序作如下约定：先进行逆的运算，再进行交的运算，最后才进行并或差的运算。这与数式运算中，先函数，再乘除，后加减的约定相似。

设 A, B, C 为事件。

(1) 交换律：$A \bigcup B = B \bigcup A$, $A \bigcap B = B \bigcap A$;

(2) 结合律：

$$A \bigcup (B \bigcup C) = (A \bigcup B) \bigcup C, \ A \bigcap (B \bigcap C) = (A \bigcap B) \bigcap C;$$

(3) 分配律：

$$(A \bigcup B) \bigcap C = (A \bigcap C) \bigcup (B \bigcap C),$$

$$(A \bigcap B) \bigcup C = (A \bigcup C) \bigcap (B \bigcup C);$$

分配律可以推广到有限或可列的情形，$i.e.$,

$$A \bigcap (\bigcup_i A_i) = \bigcup_i (A \bigcap A_i), \ A \bigcup (\bigcap_i A_i) = \bigcap_i (A \bigcup A_i)$$

(4) $A-B=A\bigcap\overline{B}$;

(5) De Morgan(德摩根)定理(对偶原则):

$\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcap\overline{B}$, $\overline{A\bigcap B}=\overline{A}\bigcup\overline{B}$.

推广: $\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$, $\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}$.

本质上只需要两种运算:“交与逆”或“并与逆”,不过定义4种运算自有其方便之处。

因为$A\bigcup B=\overline{\overline{A}\bigcap\overline{B}}$, $A\bigcap B=\overline{\overline{A}\bigcup\overline{B}}$, $A-B=A\bigcap\overline{B}=\overline{\overline{A}\bigcup B}$.

2、事件间的运算

事件间的关系及运算与集合论中或布尔(Boole,1815-1864)代数中集合的关系及运算是完全相似的，而且这个相似性在建立概率论的严格数学基础时非常重要。不过，我们应该强调另一面，就是要学会用概率论的语言来解释这些关系及运算，并且会用这些运算来表示各种事件。

例7：若 A, B, C 是三个事件，则

(1) 所有这三个事件都发生可以表示为：ABC；

(2) 这三个事件恰好发生一个可以表示为：

$$\overline{B}A\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}C\overline{B};$$

(3) 这三个事件恰好发生两个可以表示为：

$$AB\overline{C}+\overline{A}BC+A\overline{B}C;$$

(4) 这三个事件中至少发生一个可以表示为：$A\bigcup B\bigcup C$ 或 $\overline{B}A\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}C\overline{B}+AB\overline{C}+\overline{A}BC+A\overline{B}C+ABC$；

还有一种看似复杂的表示法：$\overline{\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}}$，正是对偶公式，今后很有用。

(5) A发生而B与C都不发生：$\overline{B}A\overline{C}$或 $A-B-C$ 或 $A-(B\bigcup C)$;

(6) A与B都发生而C不发生：$AB\overline{C}$或 $AB-C$或 $AB-ABC$.

2、事件间的运算

我们用例6来说明这些关系，$(*)$中30种可能结果就是样本点全体，它们构成必然事件Ω。

A记第一次摸得黑球，则它由第5行及第6行的10个样本点构成；这时$\overline{A}$表示第一次摸得白球，它由第一行至第四行的20个样本点构成。显然A与$\overline{A}$互不相容，而且$A+\overline{A}=\Omega$。

B记第二次摸得黑球，它由下列10个样本点构成：

$$(1,5),(1,6),(2,5),(2,6),(3,5)$$

$$(3,6),(4,5),(4,6),(5,6),(6,5)$$

事件$A\bigcup B$表示第一次或第二次中至少有一次摸得黑球，它包含下列18个样本点：

$$(1,5),(1,6),(2,5),(2,6),(3,5),(3,6)$$

$$(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4)$$

$$(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)$$

事件AB表示两次都摸得黑球，它由下列两个样本点组成：$(5,6),(6,5)$，这是A 与B共同包含的样本。因此$C=AB$。

事件$A-B$表示第一次摸得黑球而第二次摸出白球，包含了$(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4)$ 样本点。

四、有限样本空间

我们先考虑只有有限个样本点的样本空间，这种样本空间称为有限样本空间，这是最简单的样本空间，研究它有助于深入研究更为复杂的样本空间。

若Ω为有限样本空间，其样本空间为 $\omega_1, \cdots, \omega_n$，此时可以把Ω的任何子集都当作事件。这时，样本点作为单点集，当然是事件。在这种样本空间中引进概率，只要对每个样本点 ω_i，给定一个数与它对应，此数称为 ω_i 的概率，并记之为 $P(\omega_i)$，它是非负的，而且满足：$P(\omega_1) + P(\omega_2) + \cdots + P(\omega_n) = 1$。

这样，我们对样本点定义了概率，用它来度量每个样本点出现的可能性的大小。由此出发，我们不难定义更为一般的事件的概率。

四、有限样本空间

定义1.2.1

任何事件A的概率$P(A)$是A中各种样本点的概率之和。

注1：按照此定义，显然有$P(\Omega)=1$，$0\leq P(A)\leq 1$；

如在例6中，若定义每个样本点出现的概率均为$\frac{1}{30}$(这相当于假定各个球外形完全一样，并且摸球是随机的，各个球被摸到的机会均等)，则得：

$$P(A)=\frac{10}{30},\ P(B)=\frac{10}{30},\ P(C)=\frac{2}{30},$$
$$P(A\bigcup B)=\frac{18}{30},\ P(A-B)=\frac{8}{30},\ \cdots$$

注2：把上面做法推广到有可列个样本点的样本空间是不难的，这种空间称为离散样本空间。但是当把上面做法推广到不可列个样本点的场合，则会遇到实质性的困难，对于这种一般场合的讨论，以后将逐渐展开。