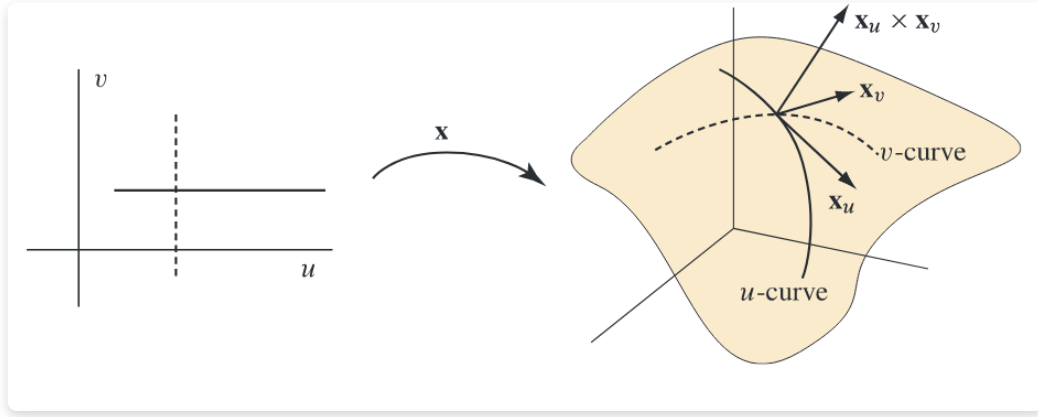


A First Course in Curves and Surfaces

Parametrized Surfaces and the First Fundamental Form

定义

记 U 是 \mathbb{R}^2 上的开集，曲面就是一个函数 $\mathbf{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ (具体的定义如连续性、正则性就不详细展开了)



首先需要定义曲面上某点的切平面。令 M 为参数化正则曲面， P 是 M 上一点，选择一种参数化方式 $\mathbf{x} : U \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ 有 $P = \mathbf{x}(u_0, v_0)$ 。我们定义 M 上 P 点处的切平面为 \mathbf{x}_u 和 \mathbf{x}_v 张成的子空间 $T_P M$ 。

切平面的单位法向量为：

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}$$

对于 $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in T_P M$ ，第一基本型 (the first fundamental form) 为 $I_p(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{V}$ (其实就是两个向量的内积)，有如下定义：

$$E = I_p(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u) = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u$$

$$F = I_p(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_u = I_p(\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u)$$

$$G = I_p(\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v) = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v$$

可以写成对称矩阵的形式：

$$I_p = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

给定 $\mathbf{U} = a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v$ 和 $\mathbf{V} = c\mathbf{x}_u + d\mathbf{x}_v \in T_P M$ ，有

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = I_p(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = (a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v) \cdot (c\mathbf{x}_u + d\mathbf{x}_v) = E(ac) + F(ad + bc) + G(bd).$$

保距映射

对于两个曲面 M, M^* , 以及对应的参数化方式 $\mathbf{x} : U \rightarrow M, \mathbf{x}^* : U \rightarrow M^*$, 如果有——对应关系 $\mathbf{f} = \mathbf{x}^* \circ \mathbf{x}^{-1} : \mathbf{x}(U) \rightarrow \mathbf{x}^*(U)$, 则称这两个曲面是等距的, 且两者的第一基本型是相等的。

面积计算

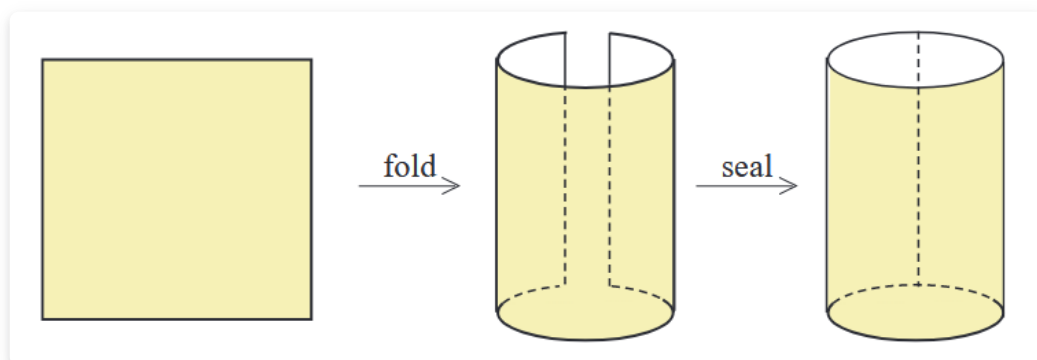
$$\begin{aligned} EG - F^2 &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v \\ \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v & 0 \\ \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} | & | & | \\ \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_v & \mathbf{n} \\ | & | & | \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} | & | & | \\ \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_v & \mathbf{n} \\ | & | & | \end{bmatrix} \right) = \left(\det \begin{bmatrix} | & | & | \\ \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_v & \mathbf{n} \\ | & | & | \end{bmatrix} \right)^2, \end{aligned}$$

可以看到 $EG - F^2$ 的值是 $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{n}$ 围成的平行六面体的体积的平方, 而 \mathbf{n} 是单位法向量, 所以这就是 $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$ 围成区域的平方, 因此有

$$EG - F^2 = \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|^2 > 0$$

可以通过二重积分来计算曲面面积:

$$\int_U \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| du dv = \int_U \sqrt{EG - F^2} du dv$$



如图这个例子, 将一张纸卷成圆柱体, 面上每一个点都有对应关系, 因此两者的第一基本型以及面积是相同的。

保角映射

当且仅当 $E = G$ 且 $F = 0$ 时参数化方式 $\mathbf{x}(u, v)$ 是保角映射。(证明可见

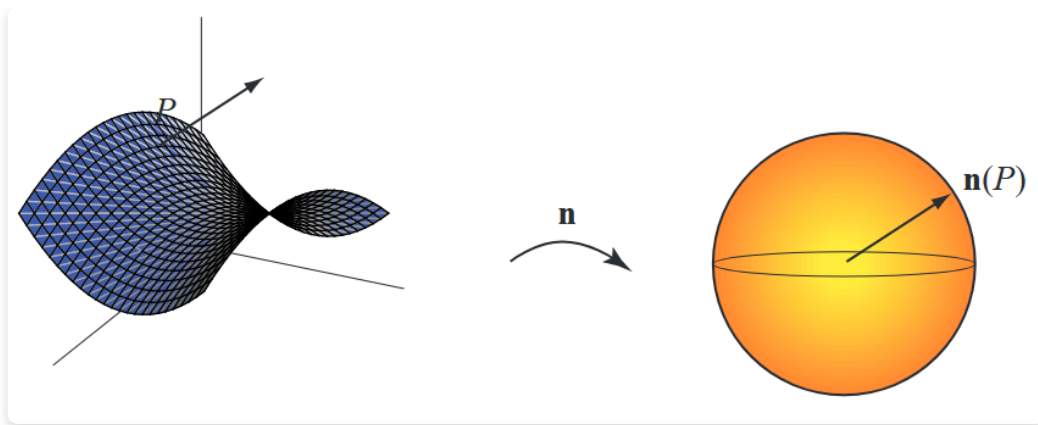
[https://www.bilibili.com/video/BV1oT4y1D7HT?](https://www.bilibili.com/video/BV1oT4y1D7HT?spm_id_from=333.788.videopod.episodes&vd_source=5a666e99cac2434ec89673bca4c90abc&p=15)

[spm_id_from=333.788.videopod.episodes&vd_source=5a666e99cac2434ec89673bca4c90abc&p=15\)](https://www.bilibili.com/video/BV1oT4y1D7HT?spm_id_from=333.788.videopod.episodes&vd_source=5a666e99cac2434ec89673bca4c90abc&p=15)

The Gauss Map and the Second Fundamental Form

高斯映射

给定参数化正则曲面 M , 函数 $\mathbf{n} : M \rightarrow \Sigma$ 为 $p \in M$ 赋值 $\mathbf{n}(P)$, 这成为高斯映射 (Gauss map)。



第二基本型

为了了解 M 在 P 点的弯曲程度，首先要去关注 M 上不同曲线在 P 处的曲率。最简单的做法是先找到 P 点切平面 $T_P M$ ，其法向量为 $\mathbf{n}(P)$ ，然后再在切平面上找一个单位向量 $\mathbf{V} \in T_P M$ ，这两个向量构成的平面与 M 相交会得到一条曲线。记 α 为这样得到的弧长参数化曲线，且有 $\alpha(0) = P, \alpha'(0) = \mathbf{V}$ ，因为这是一条平面（由 $\mathbf{n}(P)$ 和 \mathbf{V} 张成的平面）曲线，所以曲线在 P 处的主法向量会是 $\pm \mathbf{n}(P)$ 。对于 0 附近的 s 有 $(\mathbf{n} \circ \alpha)(s) \cdot \mathbf{T}(s) = 0$ ，两边求导，就会有 $(\mathbf{n} \circ \alpha)'(s) \cdot \mathbf{T}(s) + (\mathbf{n} \circ \alpha)(s) \cdot \mathbf{T}'(s) = 0$ ，因此有

$$\pm \kappa(P) = \kappa \mathbf{N} \cdot \mathbf{n}(P) = \mathbf{T}'(0) \cdot \mathbf{n}(P) = -\mathbf{T}(0) \cdot (\mathbf{n} \circ \alpha)'(0) = -D_{\mathbf{V}} \mathbf{n}(P) \cdot \mathbf{V}$$

关于最后一个等式， $\mathbf{T}(0)$ 是曲线切向量即 \mathbf{V} ， $(\mathbf{n} \circ \alpha)'$ 是 $\mathbf{n}(P)$ 关于曲线切向量方向上的导数，也就是 \mathbf{V} 方向上的方向导数 $D_{\mathbf{V}} \mathbf{n}(P)$ 。

形算子

对于任意的 $\mathbf{V} \in T_P M$ 以及方向导数 $D_{\mathbf{V}} \mathbf{n}(P) \in T_P M$ ，定义线性变换 $S_P : T_P M \rightarrow T_P M$ ：

$$S_P(\mathbf{V}) = -D_{\mathbf{V}} \mathbf{n}(P)$$

这是一个对称的线性变换，也就是说对于任意的 $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in T_P M$ ，有

$$S_P(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{V} = \mathbf{U} \cdot S_P(\mathbf{V})$$

S_P 被称为 P 点的形算子 (shape operator)。

对于 $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in T_P M$ ，第二基本型 (the second fundamental form) 为

$$\Pi_P(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = S_P(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{V}$$

对于方向 \mathbf{V} 构成的平面上的曲线的曲率，有

$$\pm \kappa = -D_{\mathbf{V}} \mathbf{n}(P) \cdot \mathbf{V} = S_P(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{V} = \Pi_P(\mathbf{V}, \mathbf{V})$$

根据 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_v = 0, 0 = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_v)_u = \mathbf{n}_u \cdot \mathbf{x}_v + \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{vu}$ ，有

$$l = \Pi_P(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u) = -D_{\mathbf{x}_u} \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_u = \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{n}$$

$$m = \Pi_P(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) = -D_{\mathbf{x}_u} \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_v = \mathbf{x}_{vu} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{n} = \Pi_P(\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u)$$

$$n = \Pi_P(\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v) = -D_{\mathbf{x}_v} \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_v = \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{n}$$

可以将其写为矩阵形式：

$$\Pi_P = \begin{bmatrix} l & m \\ m & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{n} & \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{n} & \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{n} \end{bmatrix}$$

跟第一基本型一样，对于 $\mathbf{U} = a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v$ 和 $\mathbf{V} = c\mathbf{x}_u + d\mathbf{x}_v \in T_P M$ 有

$$\Pi_P(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = l(ac) + m(bc + ad) + n(bd)$$

如果 $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$ 是 $T_P M$ 的单位正交基 (类似保角变换证明)，那么矩阵 Π_P 就是形算子 S_P 。对于更一般的情况 S_P 有

$$\mathbf{I}_P^{-1} \Pi_P = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} l & m \\ m & n \end{bmatrix}$$