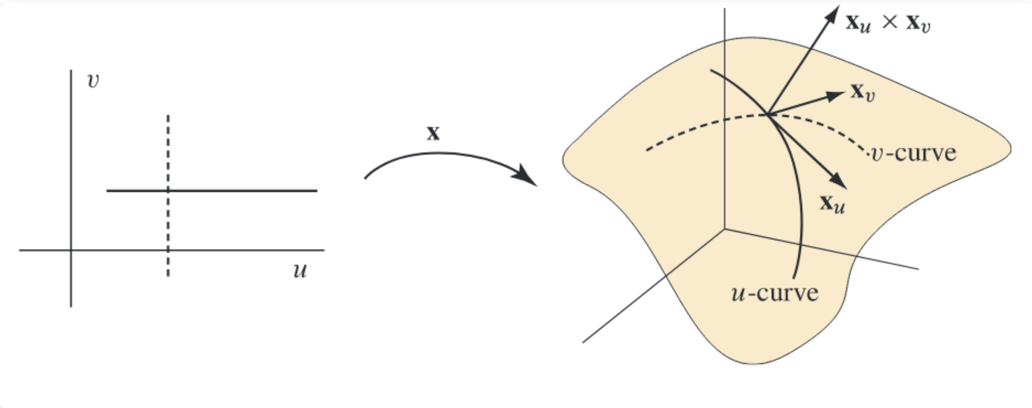
A First Course in Curves and Surfaces

Parametrized Surfaces and the First Fundamental Form

定义

记 U 是 $\mathbb{R}^2$ 上的开集，曲面就是一个函数 $\mathbf{f}: U \to \mathbb{R}^3$ (具体的定义如连续性、正则性就不详细展开了)



首先需要定义曲面上某点的切平面。令 M 为参数化正则曲面，P 是 M 上一点，选择一种参数化方式 $\mathbf{x}: U \to M \subset \mathbb{R}^3$ 有 $P = \mathbf{x}(u_0, v_0)$。我们定义 M 上 P 点处的切平面为 $\mathbf{x}_u$ 和 $\mathbf{x}_v$ 张成的子空间 $T_P M$。
切平面的单位法向量为：

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}$$

对于 $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in T_P M$，第一基本型 (the first fundamental form) 为 $\mathrm{I}_p(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{V}$ (其实就是两个向量的内积)，有如下定义：

$$E = \mathrm{I}_p(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u) = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u$$

$$F = \mathrm{I}_p(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_u = \mathrm{I}_p(\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u)$$

$$G = \mathrm{I}_p(\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v) = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v$$

可以写成对称矩阵的形式：

$$\mathrm{I}_p = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

给定 $\mathbf{U} = a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v$ 和 $\mathbf{V} = c\mathbf{x}_u + d\mathbf{x}_v \in T_P M$，有

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = \mathrm{I}_p(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = (a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v) \cdot (c\mathbf{x}_u + d\mathbf{x}_v) = E(ac) + F(ad + bc) + G(bd).$$

保距映射

对于两个曲面 M, M^*，以及对应的参数化方式 $\mathbf{x}: U \to M, \mathbf{x}^*: U \to M^*$，如果有一一对应关系 $\mathbf{f} = \mathbf{x}^* \circ \mathbf{x}^{-1}: \mathbf{x}(U) \to \mathbf{x}^*(U)$，则称这两个曲面是等距的，且两者的第一基本型是相等的。

面积计算

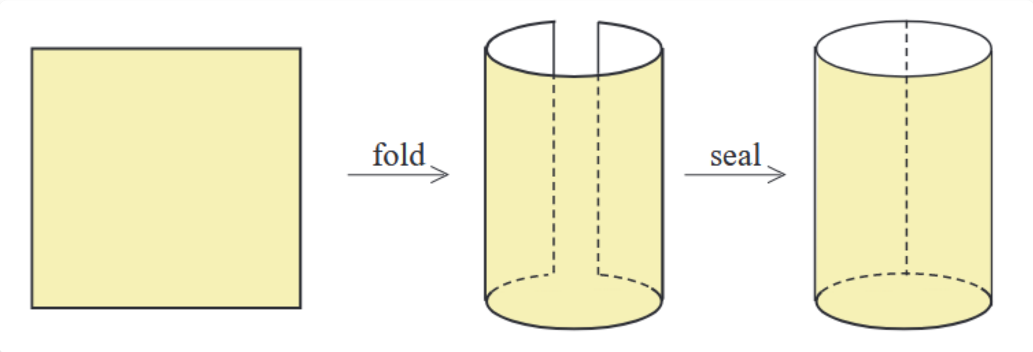
$$
\begin{aligned}
EG - F^2 &= \det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v \\ \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v & 0 \\ \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\
&= \det\left(\begin{bmatrix} | & | & | \\ \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_v & \mathbf{n} \\ | & | & | \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \begin{bmatrix} | & | & | \\ \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_v & \mathbf{n} \\ | & | & | \end{bmatrix}\right) = \left(\det\begin{bmatrix} | & | & | \\ \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_v & \mathbf{n} \\ | & | & | \end{bmatrix}\right)^2,
\end{aligned}
$$

可以看到 $EG - F^2$ 的值是 $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{n}$ 围成的平行六面体的体积的平方，而 $\mathbf{n}$ 是单位法向量，所以这就是 $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$ 围成区域的平方，因此有

$$
EG - F^2 = \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|^2 > 0
$$

可以通过二重积分来计算曲面面积：

$$
\int_U \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| dudv = \int_U \sqrt{EG - F^2} dudv
$$



如图这个例子，将一张纸卷成圆柱体，面上每一个点都有对应关系，因此两者的第一基本型以及面积是相同的。

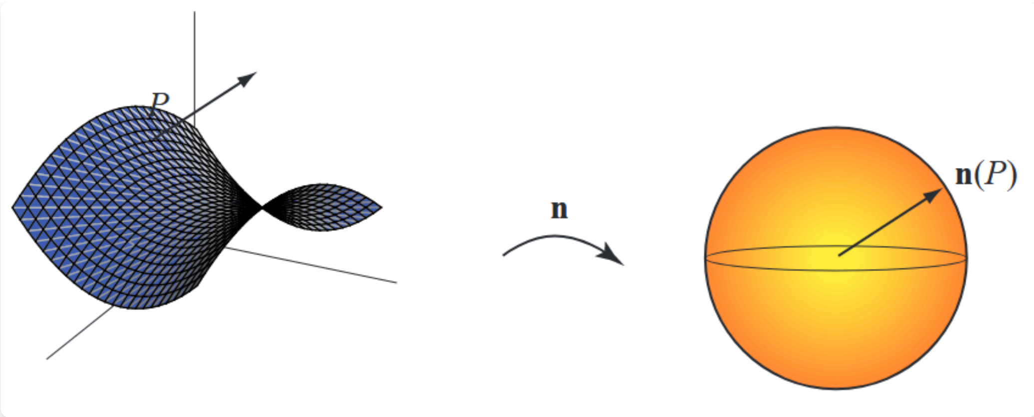
保角映射

当且仅当 $E = G$ 且 $F = 0$ 时参数化方式 $\mathbf{x}(u, v)$ 是保角映射。(证明可见 https://www.bilibili.com/video/BV1oT4y1D7HT?spm_id_from=333.788.videopod.episodes&vd_source=5a666e99cac2434ec89673bca4c90abc&p=15)

The Gauss Map and the Second Fundamental Form

高斯映射

给定参数化正则曲面 M，函数 $\mathbf{n}: M \to \Sigma$ 为 $p \in M$ 赋值 $\mathbf{n}(P)$，这成为高斯映射 (Gauss map)。



第二基本型

为了了解 M 在 P 点的弯曲程度，首先要去关注 M 上不同曲线在 P 处的曲率。最简单的做法是先找到 P 点切平面 T_PM，其法向量为 $\mathbf{n}(P)$，然后再在切平面上找一个单位向量 $\mathbf{V} \in T_PM$，这两个向量构成的平面与 M 相交会得到一条曲线。记 $\boldsymbol{\alpha}$ 为这样得到的弧长参数化曲线，且有 $\boldsymbol{\alpha}(0) = P, \boldsymbol{\alpha}'(0) = \mathbf{V}$，因为这是一条平面 (由 $\mathbf{n}(P)$ 和 $\mathbf{V}$ 张成的平面) 曲线，所以曲线在 P 处的主法向量会是 $\pm\mathbf{n}(P)$。对于 0 附近的 s 有 $(\mathbf{n} \circ \boldsymbol{\alpha})(s) \cdot \mathbf{T}(s) = 0$，两边求导，就会有 $(\mathbf{n} \circ \boldsymbol{\alpha})'(s) \cdot \mathbf{T}(s) + (\mathbf{n} \circ \boldsymbol{\alpha})(s) \cdot \mathbf{T}'(s) = 0$，因此有

$$\pm\kappa(P) = \kappa\mathbf{N} \cdot \mathbf{n}(P) = \mathbf{T}'(0) \cdot \mathbf{n}(P) = -\mathbf{T}(0) \cdot (\mathbf{n} \circ \boldsymbol{\alpha})'(0) = -D_{\mathbf{V}}\mathbf{n}(P) \cdot \mathbf{V}$$

关于最后一个等式，$\mathbf{T}(0)$ 是曲线切向量即 $\mathbf{V}$，$(\mathbf{n} \circ \boldsymbol{\alpha})'$ 是 $\mathbf{n}(P)$ 关于曲线切向量方向上的导数，也就是 $\mathbf{V}$ 方向上的方向导数 $D_{\mathbf{V}}\mathbf{n}(P)$。

形算子

对于任意的 $\mathbf{V} \in T_PM$ 以及方向导数 $D_{\mathbf{V}}\mathbf{n}(P) \in T_PM$，定义线性变换 $S_P : T_PM \to T_PM$:

$$S_P(\mathbf{V}) = -D_{\mathbf{V}}\mathbf{n}(P)$$

这是一个对称的线性变换，也就是说对于任意的 $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in T_PM$，有

$$S_P(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{V} = \mathbf{U} \cdot S_P(\mathbf{V})$$

S_P 被称为 P 点的形算子 (shape operator)。
对于 $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in T_PM$，第二基本型 (the second fundamental form) 为

$$\mathrm{II}_P(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = S_P(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{V}$$

对于方向 $\mathbf{V}$ 构成的平面上的曲线的曲率，有

$$\pm\kappa = -D_{\mathbf{V}}\mathbf{n}(P) \cdot \mathbf{V} = S_P(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{V} = \mathrm{II}_P(\mathbf{V}, \mathbf{V})$$

根据 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_v = 0, 0 = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_v)_u = \mathbf{n}_u \cdot \mathbf{x}_v + \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{vu}$，有

$$l = \mathrm{II}_P(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u) = -D_{\mathbf{x}_u}\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_u = \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{n}$$

$$m = \mathrm{II}_P(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) = -D_{\mathbf{x}_u}\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_v = \mathbf{x}_{vu} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{n} = \mathrm{II}_P(\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u)$$

$$n = \mathrm{II}_P(\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v) = -D_{\mathbf{x}_v}\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_v = \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{n}$$

可以将其写为矩阵形式：

$$\mathrm{II}_p = \begin{bmatrix} l & m \\ m & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{n} & \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{n} & \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{n} \end{bmatrix}$$

跟第一基本型一样，对于 $\mathbf{U} = a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v$ 和 $\mathbf{V} = c\mathbf{x}_u + d\mathbf{x}_v \in T_P M$ 有

$$\mathrm{II}_P(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = l(ac) + m(bc + ad) + n(bd)$$

如果 $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$ 是 $T_P M$ 的单位正交基 (类似保角变换证明)，那么矩阵 II_P 就是形算子 S_P。对于更一般的情况 S_P 有

$$\mathrm{I}_P^{-1}\mathrm{II}_P = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} l & m \\ m & n \end{bmatrix}$$

令

$$S_P = \mathrm{I}_P^{-1}\mathrm{II}_P = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

S_P 会有两个特征值，记为 $k_1(P), k_2(P)$。
可以先求 S_P 的特征多项式 $p(t) = \det(S_P - tI) = t^2 - (a + c)t + (ac - b^2)$，因此有

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(a + c - \sqrt{\Delta})$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(a + c + \sqrt{\Delta})$$

其中 $\Delta = (a - c)^2 + 4b^2 \geq 0$。

$$\lambda_1(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) = S_P(\mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \cdot S_P(\mathbf{v}_2) = \lambda_2(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)$$

当 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 时，有 $\mathbf{v}_1$ 与 $\mathbf{v}_2$ 正交。
根据之前的推导，我们有

$$\pm\kappa = -D_{\mathbf{V}}\mathbf{n}(P) \cdot \mathbf{V}$$

曲率恰好是特征值。
将 S_P 的特征值称为主曲率 (principal curvatures)，对应的特征向量称为主方向 (principal directions)。

欧拉公式

令 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 是 P 点主方向上的单位向量，对应的主曲率为 k_1, k_2，对于向量 $\mathbf{V} = \cos\theta\mathbf{e}_2 + \sin\theta\mathbf{e}_2$，有 $\mathrm{II}_P(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = k_1\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta$
主曲率的乘积称为高斯曲率 (Gaussian curvature)：$K = \det S_P = k_1 k_2$；主曲率的平均值称为平均曲率 (mean curvature)：$H = \frac{1}{2}\mathrm{tr}S_P = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$。
如果 $H = 0$ 称 M 是最小曲面 (minimal surface)；如果 $K = 0$ 称 M 为平面 (flat surface)。