# 红黑树算法的层层剖析与逐步实现

----

**作者 July 二零一零年十二月三十一日**

本文主要参考：算法导论第二版
本文主要代码：参考算法导论。
本文图片来源：个人手工画成、算法导论原书。
推荐阅读：**Leo J. Guibas** 和 **Robert Sedgewick** 于**1978**年写的关于红黑树的一篇论文。
--------------------------------------------------------------

1. **1**、教你透彻了解红黑树
2. **2**、红黑树算法的实现与剖析
3. **3**、红黑树的 **c** 源码实现与剖析
4. **4**、一步一图一代码，**R-B Tree**
5. **5**、红黑树插入和删除结点的全程演示
6. **6**、红黑树的 **c++**完整实现源码

---------------------------------------------------------------

引言：

昨天下午画红黑树画了好几个钟头，总共10页纸。
特此，再深入剖析红黑树的算法实现，教你如何彻底实现红黑树算法。

经过我上一篇博文，"教你透彻了解红黑树"后，相信大家对红黑树已经有了一定的了解。
个人觉得，这个红黑树，还是比较容易懂的。
不论是插入、还是删除，不论是左旋还是右旋，最终的目的只有一个：
即保持红黑树的5个性质，不得违背。

再次，重述下红黑树的五个性质：
一般的，红黑树，满足一下性质，即只有满足一下性质的树，我们才称之为红黑树：
1）每个结点要么是红的，要么是黑的。
2）根结点是黑的。
3）每个叶结点，即空结点（NIL）是黑的。
4）如果一个结点是红的，那么它的俩个儿子都是黑的。
5）对每个结点，从该结点到其子孙结点的所有路径上包含相同数目的黑结点。

抓住了红黑树的那5个性质，事情就好办多了。

如，
1.红黑红黑，要么是红，要么是黑；
2.根结点是黑；
3.每个叶结点是黑；
4.一个红结点，它的俩个儿子必然都是黑的；
5.每一条路径上，黑结点的数目等同。

五条性质，合起来，来句顺口溜就是：（1）红黑 （2）黑 （3）黑 （4&5）红->黑 黑。

本文所有的文字，都是参照我昨下午画的**十张纸**（即我拍的照片）与算法导论来写的。

希望，你依照此文一点一点的往下看，看懂此文后，你对红黑树的算法了解程度，一定大增不少。

ok，现在咱们来具体深入剖析红黑树的算法，并教你逐步实现此算法。

此教程分为10个部分，每一个部分作为一个小节。且各小节与我给的十张照片一一对应。

## 一、左旋与右旋

先明确一点：为什么要左旋?

因为红黑树插入或删除结点后，树的结构发生了变化，从而可能会破坏红黑树的性质。

为了维持插入、或删除结点后的树，仍然是一颗红黑树，所以有必要对树的结构做部分调整，从而恢复红黑树的原本性质。

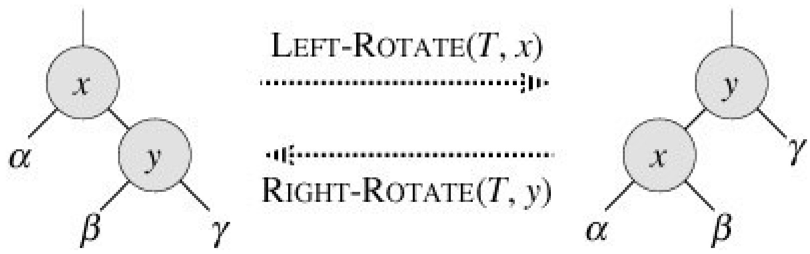
而为了恢复红黑性质而作的动作包括：

结点颜色的改变(重新着色)，和结点的调整。

这部分结点调整工作，改变指针结构，即是通过左旋或右旋而达到目的。

从而使插入、或删除结点的树重新成为一颗新的红黑树。

ok，请看下图：




如上图所示，‘找茬’

如果你看懂了上述俩幅图有什么区别时，你就知道什么是“左旋”，“右旋”。

在此，着重分析左旋算法：

左旋，如图所示（左->右），以 x->y 之间的链为“支轴”进行，

使 y 成为该新子树的根，x 成为 y 的左孩子，而 y 的左孩子则成为 x 的右孩子。

算法很简单，还有注意一点，各个结点从左往右，不论是左旋前还是左旋后，结点大小都是从小到大。

左旋代码实现，分三步（注意我给的注释）：

The pseudocode for LEFT-ROTATE assumes that right[x] ≠ nil[T] and that the root's parent is nil[T].

```
LEFT-ROTATE(T, x)
y ← right[x]                    Set y.
right[x] ← left[y]                        //开始变化，y 的左孩子成为 x 的右孩子

if left[y]   ！ =nil[T]

then p[left[y]] <- x

p[y] <- p[x]                              //y 成为 x 的父母
if p[x] = nil[T]

   then root[T] <- y

   else if x = left[p[x]]
          then left[p[x]] ← y
          else right[p[x]] ← y
left[y] ← x                   //x 成为 y 的左孩子（一月三日修正）
```

12 p[x] ← y

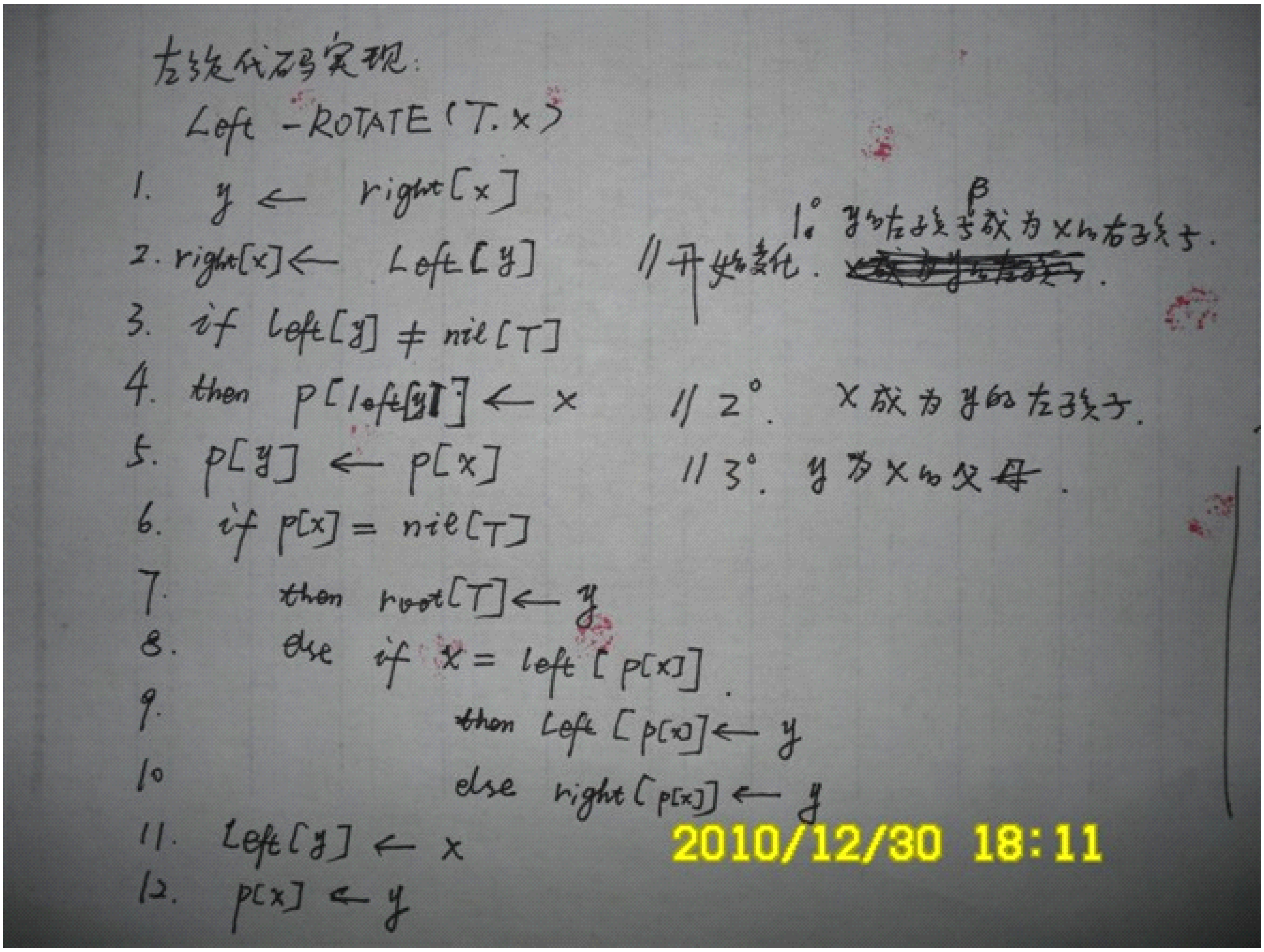
//注，此段左旋代码，原书第一版英文版与第二版中文版，有所出入。

//个人觉得，第二版更精准。所以，此段代码以第二版中文版为准。

左旋、右旋都是对称的，且都是在 O（1）时间内完成。因为旋转时只有指针被改变，而结点中的所有域都保持不变。

最后，贴出昨下午关于此右旋算法所画的图：

左旋（第2张图）：

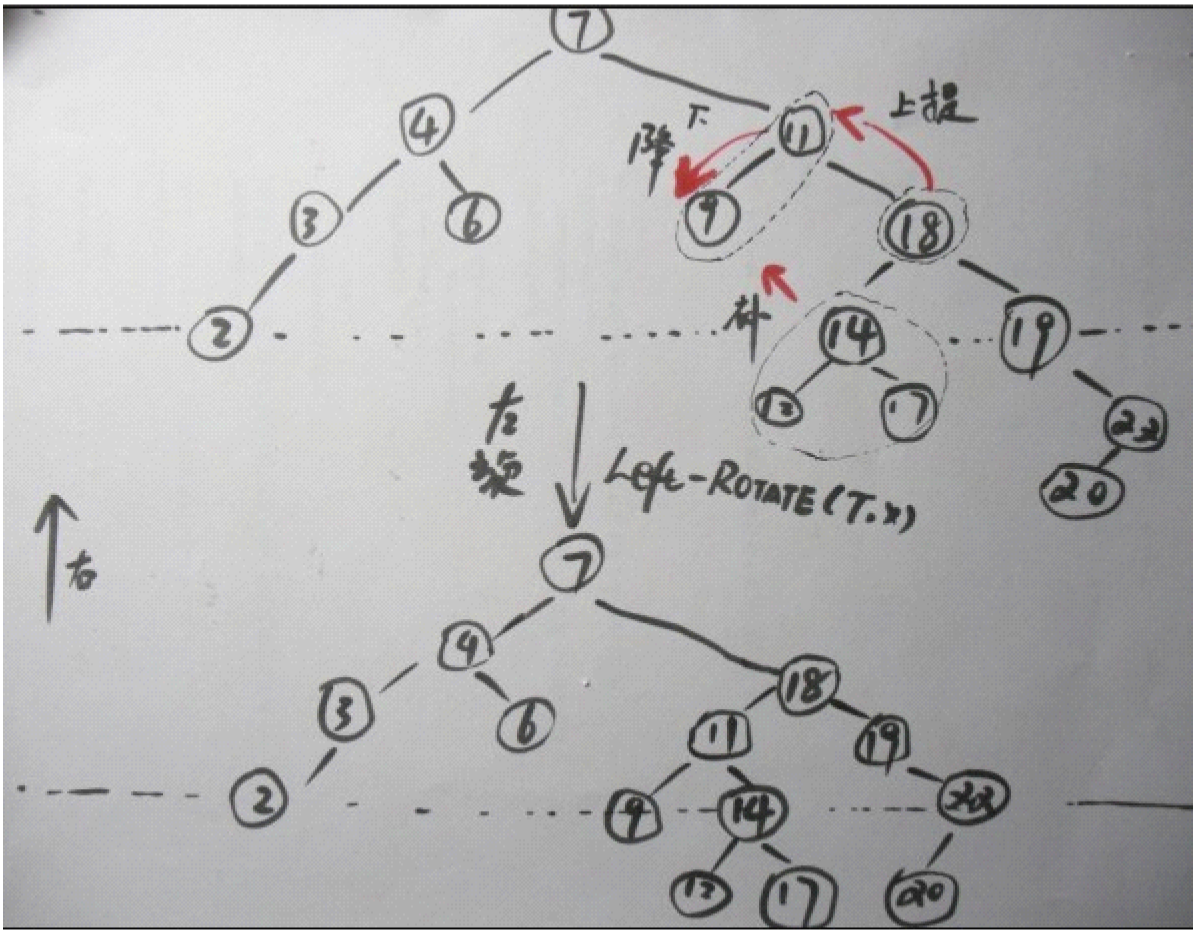



//此图有点 bug。第4行的注释移到第11行。如上述代码所示。（一月三日修正）

二、左旋的一个实例

不做过多介绍，看下副图，一目了然。

LEFT-ROTATE(T, x)的操作过程（第3张图）：




---------------------

提醒，看下文之前，请首先务必明确，区别以下俩种操作：

1.红黑树插入、删除结点的操作

//如插入中，红黑树插入结点操作：RB-INSERT(T, z)。

2.红黑树已经插入、删除结点之后，

为了保持红黑树原有的红黑性质而做的恢复与保持红黑性质的操作。

//如插入中，为了恢复和保持原有红黑性质，所做的工作：RB-INSERT-FIXUP(T, z)。

ok，请继续。

三、红黑树的插入算法实现

```
RB-INSERT(T, z)      //注意我给的注释...
 1   y ← nil[T]                          // y  始终指向  x  的父结点。
 2   x ← root[T]                       // x  指向当前树的根结点，
 3   while x ≠ nil[T]
 4           do y ← x
 5               if key[z] < key[x]                 //向左，向右..
 6                   then x ← left[x]
 7                   else x ← right[x]              //  为了找到合适的插入点，x  探路跟踪路径，直到 x 成为 NIL  为止。
 8   p[z] ← y                 // y 置为  插入结点 z  的父结点。
 9   if y = nil[T]
10       then root[T] ← z
11       else if key[z] < key[y]
12                   then left[y] ← z
13                   else right[y] ← z         //此  8-13行，置 z  相关的指针。
14   left[z] ← nil[T]
15   right[z] ← nil[T]                    //设为空，
16   color[z] ← RED                        //将新插入的结点 z 作为红色
17   RB-INSERT-FIXUP(T, z)      //因为将 z 着为红色，可能会违反某一红黑性质，
                                                         //所以需要调用 RB-INSERT-FIXUP(T, z) 来保持红黑性质。
```

17 行的 **RB-INSERT-FIXUP(T, z)** ，在下文会得到着重而具体的分析。

还记得，我开头说的那句话么，

是的，时刻记住，不论是左旋还是右旋，不论是插入、还是删除，都要记得恢复和保持红黑树的5个性质。

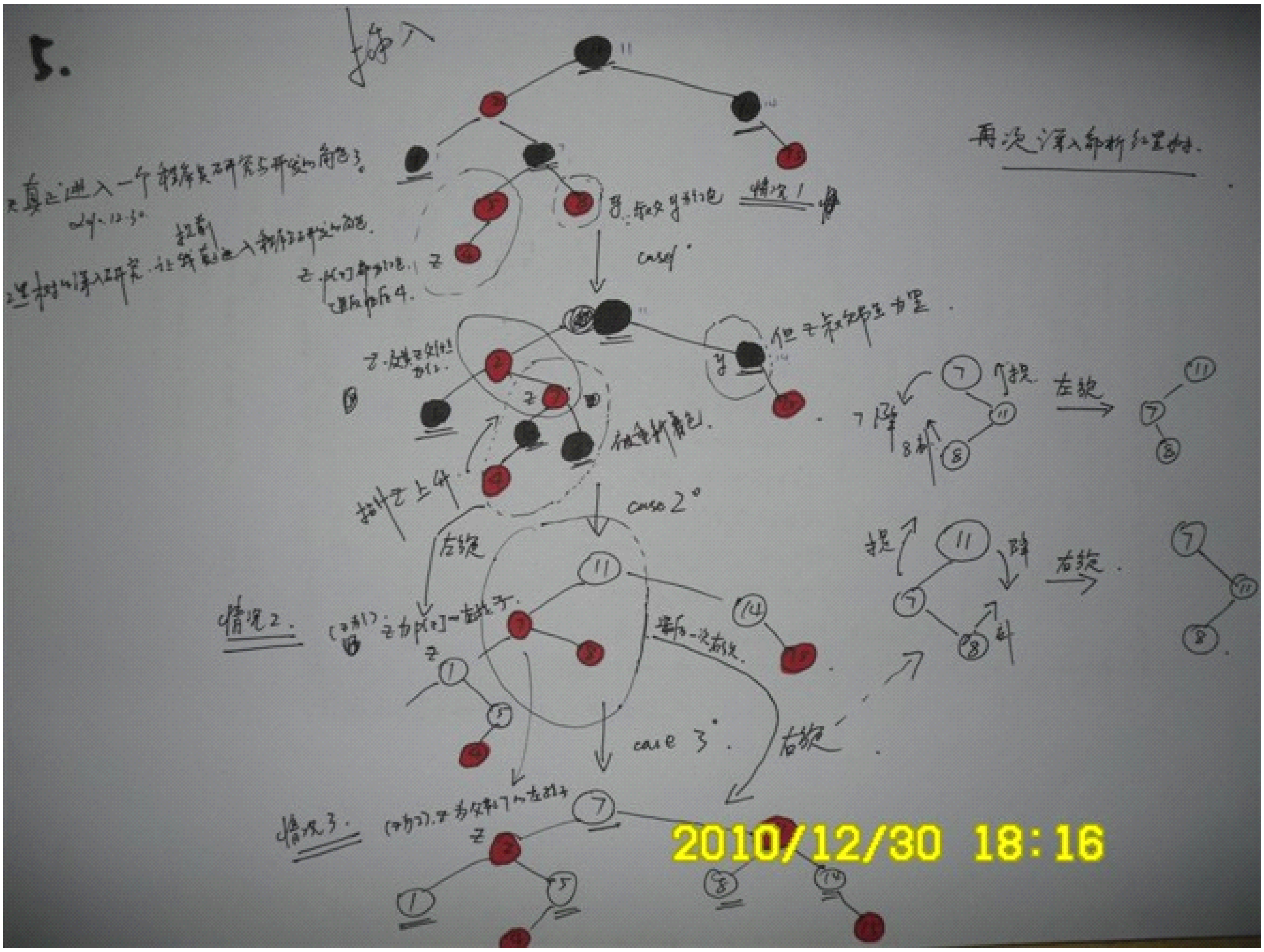
四、调用 **RB-INSERT-FIXUP(T, z)**来保持和恢复红黑性质

```
RB-INSERT-FIXUP(T, z)
while color[p[z]] = RED
        do if p[z] = left[p[p[z]]]
                 then y ← right[p[p[z]]]
                          if color[y] = RED
```

```
        then color[p[z]] ← BLACK                          Case 1
             color[y] ← BLACK                             Case 1
             color[p[p[z]]] ← RED                         Case 1
             z ← p[p[z]]                                  Case 1
        else if z = right[p[z]]
                then z ← p[z]                             Case 2
                     LEFT-ROTATE(T, z)                    Case 2
                color[p[z]] ← BLACK                       Case 3
                color[p[p[z]]] ← RED                      Case 3
                RIGHT-ROTATE(T, p[p[z]])                  Case 3
    else (same as then clause
            with "right" and "left" exchanged)
color[root[T]] ← BLACK
```

//第4张图略：

五、红黑树插入的三种情况，即 **RB-INSERT-FIXUP(T, z)**。操作过程（第5张）：




//这幅图有个小小的问题，读者可能会产生误解。图中左侧所表明的情况2、情况3所标的位

置都要标上一点。

//请以图中的标明的 case1、case2、case3为准。一月三日。

## 六、红黑树插入的第一种情况（**RB-INSERT-FIXUP(T, z)**代码的具体分析一）

为了保证阐述清晰，重述下 RB-INSERT-FIXUP(T, z)的源码：

```
RB-INSERT-FIXUP(T, z)
 1 while color[p[z]] = RED
 2       do if p[z] = left[p[p[z]]]
 3             then y ← right[p[p[z]]]
 4                  if color[y] = RED
 5                     then color[p[z]] ← BLACK                    Case 1
 6                          color[y] ← BLACK                       Case 1
 7                          color[p[p[z]]] ← RED                   Case 1
 8                          z ← p[p[z]]                            Case 1
 9                     else if z = right[p[z]]
10                             then z ← p[z]                       Case 2
11                                  LEFT-ROTATE(T, z)              Case 2
12                             color[p[z]] ← BLACK                 Case 3
13                             color[p[p[z]]] ← RED                Case 3
14                             RIGHT-ROTATE(T, p[p[z]])            Case 3
15             else (same as then clause
                        with "right" and "left" exchanged)
16 color[root[T]] ← BLACK
```

//case1表示情况1，case2表示情况2，case3表示情况3.

ok，如上所示，相信，你已看到了。

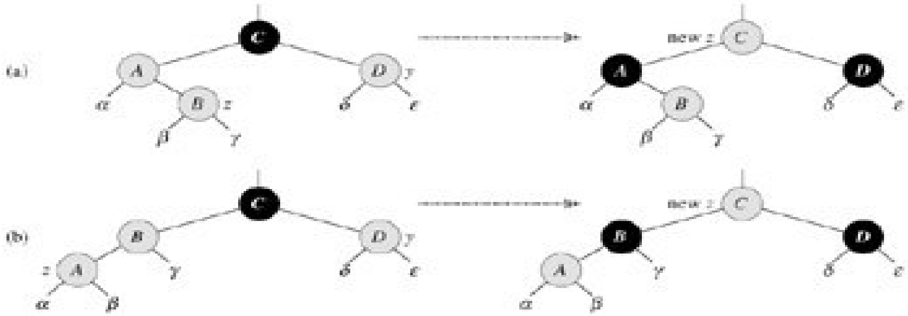
咱们，先来透彻分析红黑树插入的第一种情况：

插入情况1，z 的叔叔 y 是红色的。

第一种情况，即上述代码的第5-8行：

```
 5                     then color[p[z]] ← BLACK                    Case 1
 6                          color[y] ← BLACK                       Case 1
 7                          color[p[p[z]]] ← RED                   Case 1
```

8 z ← p[p[z]] Case 1




如上图所示，a：z 为右孩子，b：z 为左孩子。

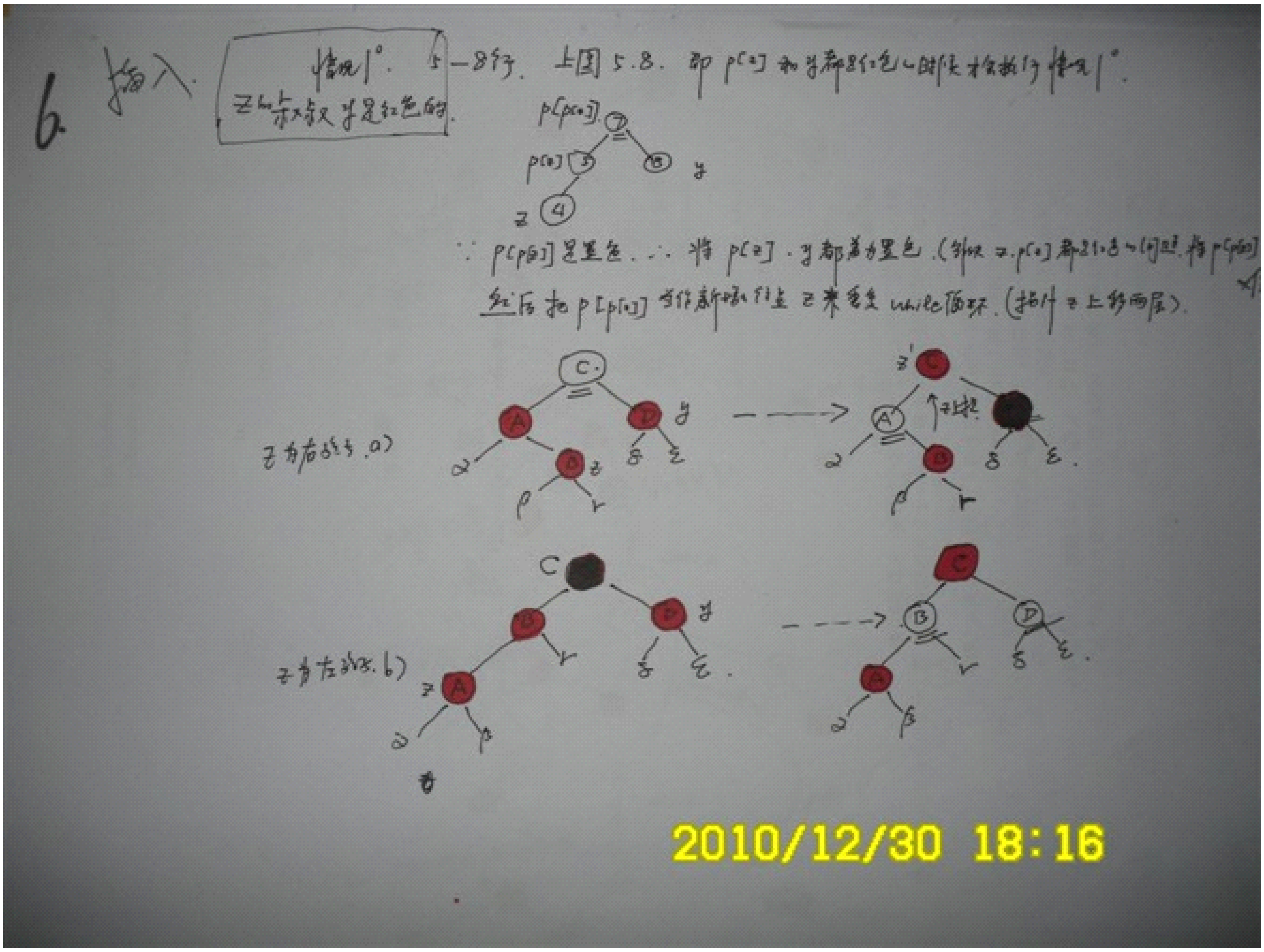
只有 p[z]和 y（上图 a 中 A 为 p[z]，D 为 z，上图 b 中，B 为 p[z]，D 为 y）都是红色的时候，才会执行此情况1.

咱们分析下上图的 a 情况，即 z 为右孩子时

因为 p[p[z]]，即 c 是黑色，所以将 p[z]、y 都着为黑色（如上图 a 部分的右边），

此举解决 z、p[z]都是红色的问题，将 p[p[z]]着为红色，则保持了性质5.

ok，看下我昨天画的图（第6张）：



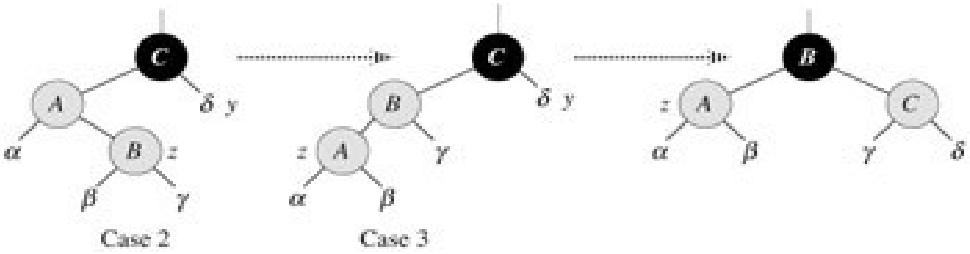

红黑树插入的第一种情况完。

七、红黑树插入的第二种、第三种情况

插入情况2：z 的叔叔 y 是黑色的，且 z 是右孩子

插入情况3：z 的叔叔 y 是黑色的，且 z 是左孩子

这俩种情况，是通过 z 是 p[z]的左孩子，还是右孩子区别的。




参照上图，针对情况2，z 是她父亲的右孩子，则为了保持红黑性质，左旋则变为情况3，此时 z 为左孩子，

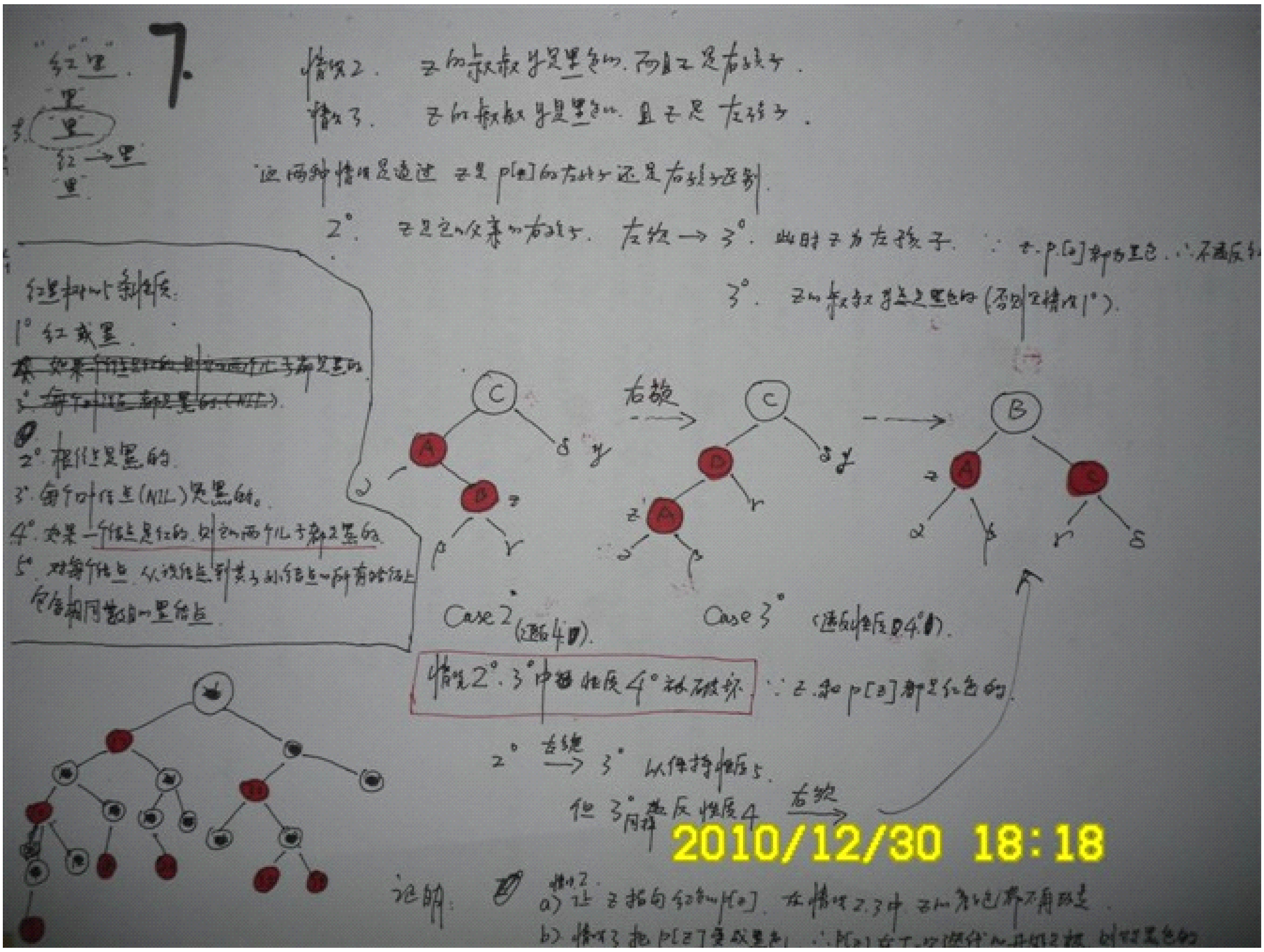
因为 z、p[z]都为黑色，所以不违反红黑性质（注，情况3中，z 的叔叔 y 是黑色的，否则此种情况就变成上述情况1 了）。

ok，我们已经看出来了，情况2，情况3都违反性质4（一个红结点的俩个儿子都是黑色的）。

所以情况2->左旋后->情况3，此时情况3同样违反性质4，所以情况3->右旋，得到上图的最后那部分。

注，情况2、3都只违反性质4，其它的性质1、2、3、5都不违背。

好的，最后，看下我画的图（第7张）：




八、接下来，进入**红黑树的删除**部分。

```
RB-DELETE(T, z)
if left[z] = nil[T] or right[z] = nil[T]
    then y ← z
    else y ← TREE-SUCCESSOR(z)
if left[y] ≠ nil[T]
    then x ← left[y]
    else x ← right[y]
p[x] ← p[y]
if p[y] = nil[T]
    then root[T] ← x
    else if y = left[p[y]]
```

```
                then left[p[y]] ← x
                else right[p[y]] ← x
if y 3≠ z
    then key[z] ← key[y]
         copy y's satellite data into z
if color[y] = BLACK                      //如果 y 是黑色的，
    then RB-DELETE-FIXUP(T, x)      //则调用 RB-DELETE-FIXUP(T, x)
return y                  //如果 y 不是黑色，是红色的，则当 y 被删除时，红黑性质仍然得以保持。不做操作，返回。

                          //因为：1.树种各结点的黑高度都没有变化。2.不存在俩个相邻的红色结点。

                          //3.因为入宫 y 是红色的，就不可能是根。所以，根仍然是黑色的。
```

ok，第8张图，不必贴了。

## 九、红黑树删除之4种情况，RB-DELETE-FIXUP(T, x)之代码

```
RB-DELETE-FIXUP(T, x)
while x ≠ root[T] and color[x] = BLACK
    do if x = left[p[x]]
          then w ← right[p[x]]
               if color[w] = RED
                  then color[w] ← BLACK                        Case 1
                       color[p[x]] ← RED                       Case 1
                       LEFT-ROTATE(T, p[x])                    Case 1
                       w ← right[p[x]]                         Case 1
               if color[left[w]] = BLACK and color[right[w]] = BLACK
                  then color[w] ← RED                          Case 2
                       x ← p[x]                                Case 2
                  else if color[right[w]] = BLACK
                          then color[left[w]] ← BLACK          Case 3
                               color[w] ← RED                  Case 3
                               RIGHT-ROTATE(T, w)              Case 3
                               w ← right[p[x]]                 Case 3
                        color[w] ← color[p[x]]                 Case 4
                        color[p[x]] ← BLACK                    Case 4
                        color[right[w]] ← BLACK                Case 4
                        LEFT-ROTATE(T, p[x])                   Case 4
```

```
                x ← root[T]                                  Case 4
        else (same as then clause with "right" and "left" exchanged)
color[x] ← BLACK
```

ok，很清楚，在此，就不贴第9张图了。

在下文的红黑树删除的4种情况，详细、具体分析了上段代码。

**十、红黑树删除的4种情况**

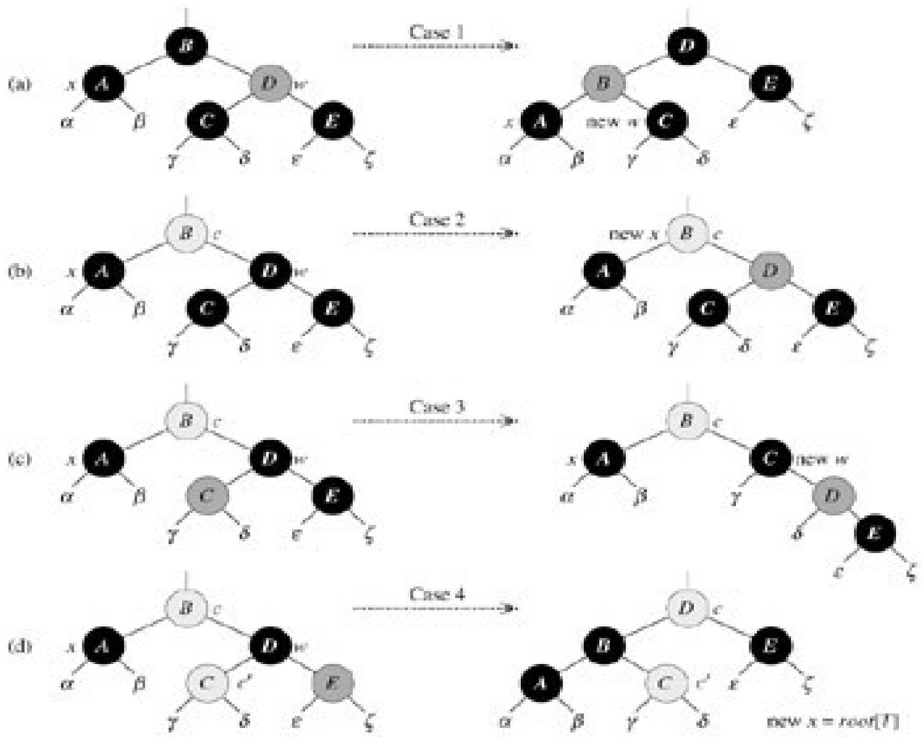
情况1：x 的兄弟 w 是红色的。

情况2：x 的兄弟 w 是黑色的，且 w 的俩个孩子都是黑色的。

情况3：x 的兄弟 w 是黑色的，w 的左孩子是红色，w 的右孩子是黑色。

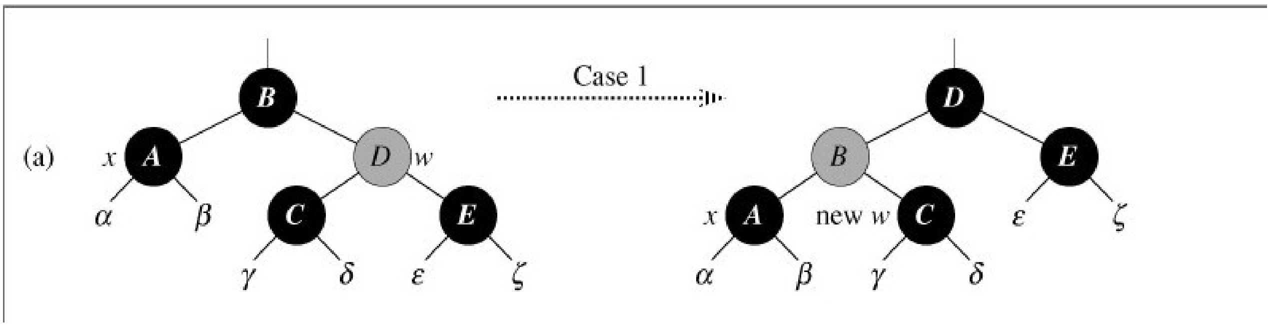
情况4：x 的兄弟 w 是黑色的，且 w 的右孩子时红色的。

操作流程图：



ok，简单分析下，红黑树删除的4种情况：

**针对情况1**：x 的兄弟 w 是红色的。



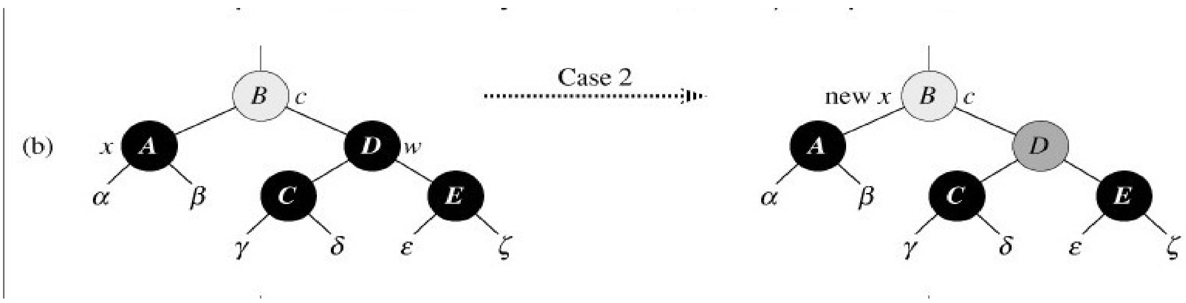

```
then color[w] ← BLACK                Case 1
     color[p[x]] ← RED               Case 1
     LEFT-ROTATE(T, p[x])            Case 1
     w ← right[p[x]]                 Case 1
```

对策：改变 w、p[z]颜色，再对 p[x]做一次左旋，红黑性质得以继续保持。

x 的新兄弟 new w 是旋转之前 w 的某个孩子，为黑色。

所以，情况1转化成情况2或3、4。

**针对情况2**：x 的兄弟 w 是黑色的，且 w 的俩个孩子都是黑色的。




```
then color[w] ← RED                  Case 2
     x <-p[x]                        Case 2
```

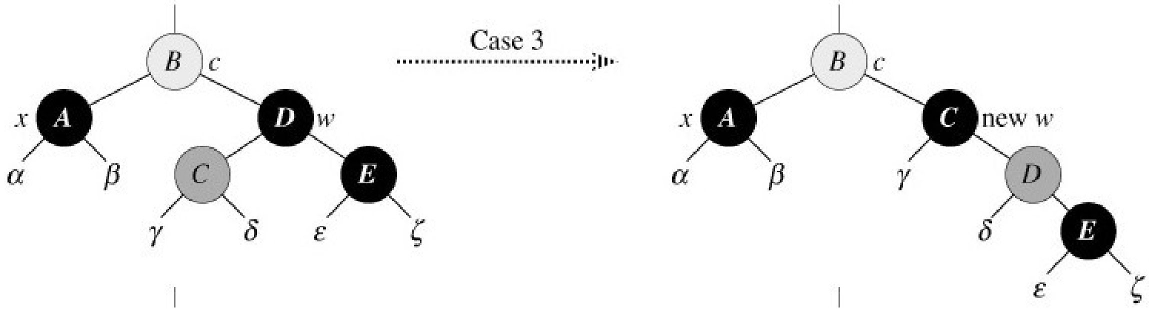
如图所示，**w 的俩个孩子都是黑色的**，

对策：因为 w 也是黑色的，所以 x 和 w 中得去掉一黑色，最后，w 变为红。

p[x]为新结点 x，赋给 x，x<-p[x]。

**针对情况3：**x 的兄弟 w 是黑色的，w 的左孩子是红色，w 的右孩子是黑色。

(c)




```
then color[left[w]] ← BLACK          Case 3
     color[w] ← RED                  Case 3
     RIGHT-ROTATE(T, w)              Case 3
     w ← right[p[x]]                 Case 3
```

**w** 为黑，其左孩子为红，右孩子为黑

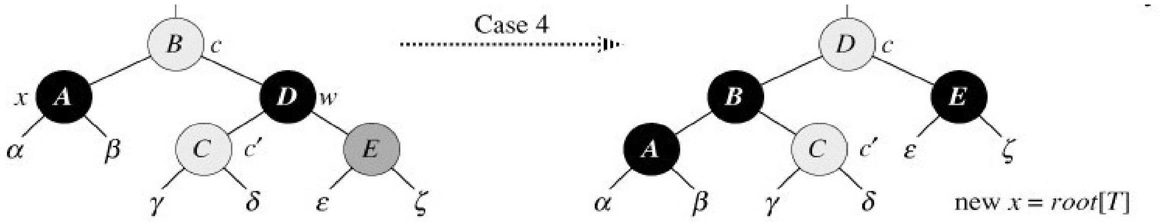
对策：交换 w 和和其左孩子 left[w]的颜色。 即上图的 D、C 颜色互换。:D。

并对 w 进行右旋，而红黑性质仍然得以保持。

现在 x 的新兄弟 w 是一个有红色右孩子的黑结点，于是将情况3转化为情况4.

**针对情况4：**x 的兄弟 w 是黑色的，且 w 的右孩子时红色的。

(d)



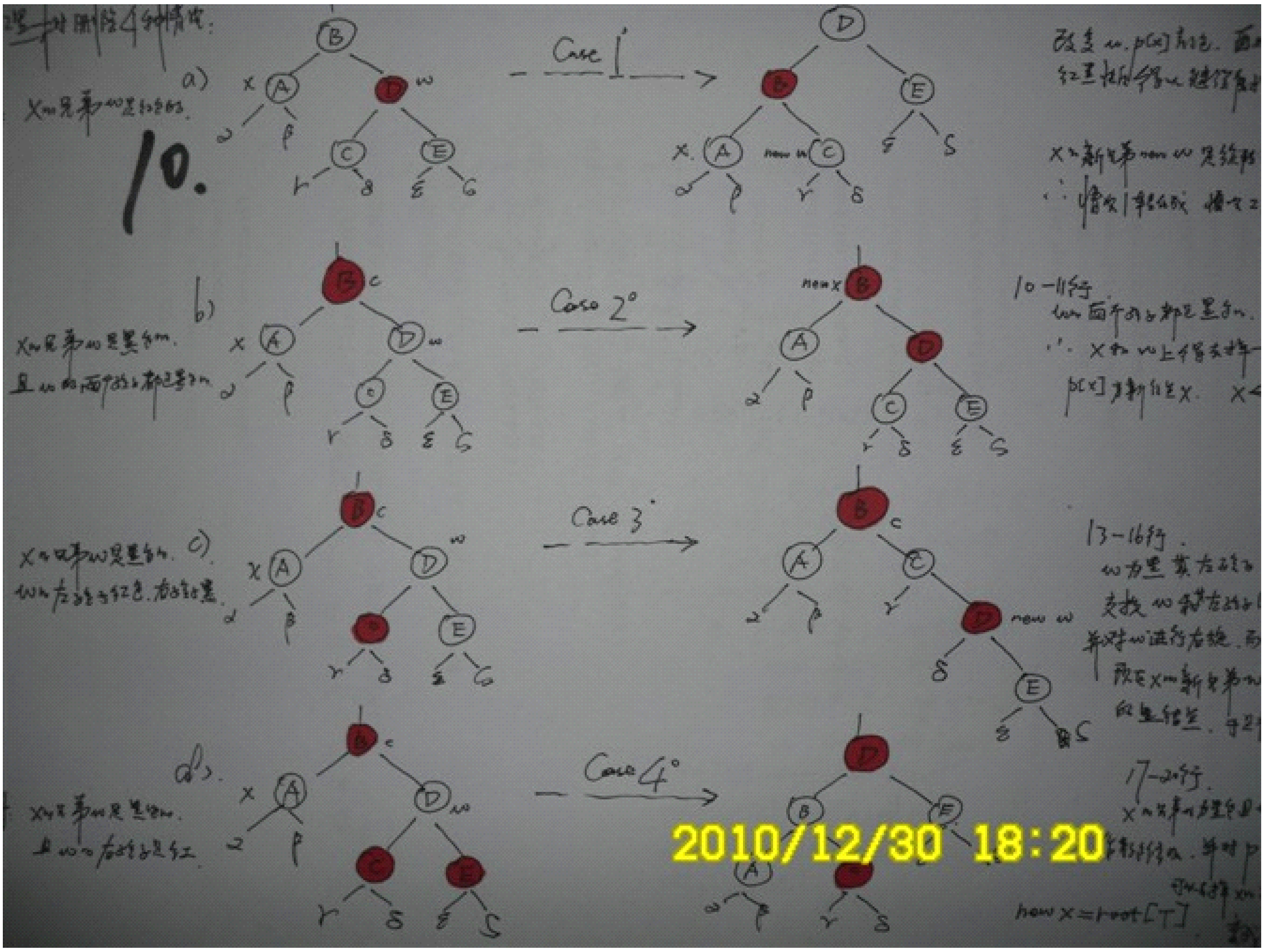

```
color[w] ← color[p[x]]               Case 4
color[p[x]] ← BLACK                  Case 4
color[right[w]] ← BLACK              Case 4
LEFT-ROTATE(T, p[x])                 Case 4
x ← root[T]                          Case 4
```

**x** 的兄弟 **w** 为黑色，且 **w** 的右孩子为红色。

对策：做颜色修改，并对 p[x]做一次旋转，可以去掉 x 的额外黑色，来把 x 变成单独的黑色，此举不破坏红黑性质。

将 x 置为根后，循环结束。

最后，贴上最后的第10张图：




ok，红黑树删除的4中情况，分析完成。

结语：只要牢牢抓住红黑树的5个性质不放，而不论是树的左旋还是右旋，
不论是红黑树的插入、还是删除，都只为了保持和修复红黑树的5个性质而已。

顺祝各位， 元旦快乐。完。

July、二零一零年十二月三十日。

------------------------------------------------------

扩展阅读：***Left-Leaning Red-Black Trees***, Dagstuhl Workshop on Data Structures, Wadern, Germany, February, 2008.
直接下载：http://www.cs.princeton.edu/~rs/talks/LLRB/RedBlack.pdf