Author：Liu Jian

Time：2021-09-05

> 相关章节：2.3.5

Robbins-Monro algorithm

已知 $p(z,\theta)$，求 $f(\theta)=\mathbb{E}_{z|\theta}[z]=\int zp(z|\theta)\mathrm{d}z=0$ 的解 θ^*.

假设:

1. the conditional variance of z is finite so that $\mathbb{E}_{z|\theta}[(z-f)^2]<\infty$;
2. without loss of generality, consider the case where $f(\theta)>0$ for $\theta>\theta^*$ and $f(\theta)<0$ for $\theta<\theta^*$;

则由如下递推公式得到的序列 $\{\theta^{(N)}\}$ 依概率收敛于 θ^* :

$$\theta^{(N)}=\theta^{(N-1)}-a_{N-1}z(\theta^{(N-1)})$$

where $z(\theta^{(N)})$ is an observed value of z when θ takes the value $\theta^{(N)}$，也就是说若记 $z_{N+1}=z(\theta^{(N)})$，则$z_{N+1}\sim p(z|\theta^N)$. The coefficients $\{a_N\}$ represent a sequence of positive numbers that satisfy the conditions:

$$\lim_{N\to\infty}a_N=0$$

$$\sum_{N=1}^{\infty}a_N=\infty$$

$$\sum_{N=1}^{\infty}a_N^2<\infty$$

Note that the first condition $\lim_{N\to\infty}a_N=0$ ensures that the successive corrections decrease in magnitude so that the process can converge to a limiting value. The second condition $\sum_{N=1}^{\infty}a_N=\infty$ is required to ensure that the algorithm does not converge short of the root, and the third condition $\sum_{N=1}^{\infty}a_N^2<\infty$ is needed to ensure that the accumulated noise has finite variance and hence does not spoil convergence.

Sequential MLE

By definition, the maximum likelihood solution θ_{ML} is a stationary point of the log likelihood function and hence satisfies:

$$-\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\ln p_{model}(x_n|\theta)\right\}\Bigg|_{\theta_{ML}}=0$$

其中 $x_n\sim p_{real}(x)$，$p_{model}(x|\theta)$ 是人为设定的函数形式已知的概率分布，θ 为待定参数.

当 $N\to\infty$ 时，θ_{ML} 即为如下方程的解:

$$\mathbb{E}_{x\sim p_{real}(x)}\left[-\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p_{model}(x|\theta)\right]=0$$

记

$$z=g(x,\theta)=-\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p_{model}(x|\theta)$$

则方程进一步可改写为：

$$\mathbb{E}_{z\sim p_{real}(z|\theta)}[z]=0$$

其中，$p_{real}(z|\theta)$ 由如下过程给出：给定 θ，采样 $x\sim p_{real}(x)$，接着通过映射 $g(x,\theta)$ 即得到 z。接下来，即可应用 Robbins-Monro algorithm 求解上述方程：

$$\begin{aligned}\theta^{(N)}\quad &=\theta^{(N-1)}-a_{N-1}z(\theta^{(N-1)})\\ &=\theta^{(N-1)}-a_{N-1}z_N\\ &=\theta^{(N-1)}-a_{N-1}g(x_N,\theta^{(N-1)})\\ &=\theta^{(N-1)}-a_{N-1}\tfrac{\partial}{\partial\theta^{(N-1)}}[-\ln p_{model}(x_N|\theta^{(N-1)})]\end{aligned}$$

注意，$x_N\sim p_{real}(x)$ 而不是 $x_N\sim p_{model}(x|\theta^{(N-1)})$，也就是真实样本。上式即为 sequential MLE 的计算公式。

若 $p_{model}(x|\theta)$ 取高斯分布：

$$p_{model}(x|\theta)=p_{model}(x|\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

这里我们只考察均值而假设方差已知，可得：

$$z=g(x,\mu)=-\frac{x-\mu}{\sigma^2}$$

取 $a_{N-1}=\sigma^2/N$，则：

$$\mu^{(N)}=\mu^{(N-1)}+\frac{1}{N}(x_N-\mu^{(N-1)})$$

其中，$x_N\sim p_{real}(x)$。可以看到，上式与直接通过 MLE 得到的计算公式相同。

进一步，若 $p_{real}(x)$ 真的是高斯分布：

$$p_{real}(x)=\mathcal{N}(x|\mu_*,\sigma_*^2)$$

又 $z=g(x,\mu)=-\frac{x-\mu}{\sigma^2}$，已知 $p_{real}(z|\mu)$ 也服从高斯分布。此时，方程 $\mathbb{E}_{z\sim p_{real}(z|\mu)}[z]=0$ 可解析求解：

$$\mathbb{E}_{z\sim p_{real}(z|\mu)}[z]=-\frac{\mu_*-\mu}{\sigma^2}=0$$

$$\Downarrow$$

$$\mu=\mu_*$$

又由 Robbins-Monro algorithm 可知上面得到的 $\{\mu^{(N)}\}$ 依概率收敛于方程 $\mathbb{E}_{z\sim p_{real}(z|\theta)}[z]=0$ 的解，即 μ_*。这就表明，若真实分布也为高斯分布，我们求得的 $\{\mu^{(N)}\}$ 确为真实均值 μ_*。
