

磁力线为直线的磁面坐标系

石秉仁

(核工业西南物理研究院, 成都 610041)

摘要:介绍了在已知环形轴对称等离子体平衡位形的条件下, 建立磁力线为直线的坐标系的方法。该坐标系被广泛应用于托卡马克等离子体的磁流体稳定性和动理论物理问题的理论分析, 但文献中对坐标系建立方法却很少有介绍。结合几类托卡马克位形和球形环位形, 对该类坐标系的特征进行了分析。

关键词:磁面坐标系; 坐标变换; 托卡马克; 球形环

中图分类号: TL64

文献标识码: A

1 引言

在研究磁约束等离子体的宏观和动理学稳定性以及研究输运理论时, 构建适合于物理问题的坐标系是非常重要的。到目前为止, 文献中对托卡马克和球形环位形等离子体的研究, 几乎都设定磁面结构具有单一磁轴, 并且都采用以磁面为基础的坐标系。最常见的是两种磁面坐标系。一种是正交磁面坐标系, 另一种是磁力线为直线的坐标系。正交磁面坐标系被广泛应用于磁流体稳定性的分析, 但几乎所有的文献都没有介绍如何建立正交坐标系。实际上, 有关作者要达到的目的是获得基本理论方程, 例如气球模本征方程^[1], 边缘等离子体稳定性条件^[2], 剪切阿尔芬近似下的磁流体简正模方程^[3], 等等。在具体应用这些理论计算具体位形中等离子体的稳定性时, 可以采用非正交的坐标系。也就是说, 采用正交坐标系是一种过渡手段。至于磁力线为直线的坐标系, 由于其建立方法相对简单, 而且可以直接应用在具体的计算中, 被广泛应用分析和编码计算。一个具体实例是, 在关于托卡马克边缘区局域模(ELM)的理论分析程序 ELITE^[4]中, 首先用正交坐标系进行能量原理分析, 在做了若干重大

简化后, 再用磁力线为直线的坐标系写出极向模间的耦合方程组, 使之可以具体进行数值求解。

2 轴对称环形等离子体平衡位形及磁力线的旋转变换

托卡马克和球形环装置是磁约束聚变研究中最受重视的两类装置, 在许多物理问题研究中, 可以近似地将它们看成是轴对称系统。其等离子体平衡位形一般都是在轴对称圆柱坐标系 (R, ϕ, z) 中确定的。不失一般性, 引入极向磁通函数 $\psi(R, z)$, 可以将磁场写成:

$$\mathbf{B} = \nabla\psi(R, z) \times \nabla\phi + F(\psi)\nabla\phi \quad (1)$$

$$F = RB_\phi \quad (2)$$

如果等离子体压强是标量, 则 $p = p(\psi)$ 。假定函数 $\psi(R, z)$ 可以由数值方法或解析方法通过求解 Grad-Shafranov 方程及相应的边界条件而确定, 此外如果 $F(\psi)$ 亦已知, 这样平衡位形就被唯一确定。因为许多平衡物理量在磁面 $\psi(R, z) = \text{const}$ 上为常数, 所以通常选一个磁面函数为基本坐标, 这个坐标可以是 ψ 本身, 也可以取磁面截面的平均半径 $a(\psi)$ 。由于环向角坐标 ϕ 是可忽略坐标, 一般情况

收稿日期: 2014-01-16; 修订日期: 2014-07-15

作者简介:石秉仁(1937-), 男, 浙江兰溪人, 研究员, 博士研究生导师, 1959年毕业于北京大学原子能系核物理专业, 研究方向是托卡马克装置中等离子体平衡, 磁流体稳定性, 高模约束等物理问题。

下保留此坐标(但在 Hamada 坐标系中,这一坐标也需要变换为新坐标)^[5]。以磁轴为原点,引进局部极向角 θ :

$$\tan(\theta) = \frac{z(\psi, R) - z_0}{R - R_0} \quad (3)$$

式中, R_0 、 z_0 为磁轴位置。坐标系 (a, θ, ϕ) 也常用于理论分析,但它既不是正交坐标系,磁力线也不是直线。磁力线方程为:

$$\iota = \frac{d\theta}{d\phi} = \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla \theta}{\mathbf{B} \cdot \nabla \phi} = \frac{RB_\theta}{rB_\phi} \quad (4)$$

这里,

$$r(\psi, \theta) = [(R - R_0)^2 + (z - z_0)^2]^{1/2} \quad (5)$$

式(5)是磁面上一点 (R, z) 到磁轴的距离,是局部的径向坐标。可以证明,即使在圆截面托卡马克中, $d\theta/d\phi$ 也不是常数。这一特征使得在稳定性分析中不能像在直圆柱位形中那样直接对 θ 进行 Fourier 展开。在托卡马克理论中,代替磁力线的旋转变换 ι , 采用安全因子:

$$q(\psi) = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{rB_\phi}{RB_\theta} d\theta = \frac{F}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{rd\theta}{R^2 B_\theta} \quad (6)$$

来进行分析。量 rB_ϕ/RB_θ 为局部安全因子。当然,在一般的环形轴对称位形中,该量沿磁力线不是常数,即磁力线在 (r, θ, ϕ) 坐标系中不是直线。

3 磁力线为直线的坐标系的构建方法

记磁力线为直线的坐标系中的极向角坐标为 ω , 现在希望找到一种变换 $\omega = \omega(\psi, \theta)$, 使 $d\omega/d\phi = f(\psi)$, 即磁力线的旋转变换率仅为磁通的函数,因此磁力线在 (ψ, ω, ϕ) 坐标系中为直线。利用安全因子的表示式(6),若定义:

$$\omega(\psi, \theta) = 2\pi \int_0^\theta d\theta' h(\psi, \theta') / \int_0^{2\pi} h d\theta \quad (7)$$

其中,

$$h(\psi, \theta) = \frac{r}{RB_\theta} = \frac{r}{R[\psi_R \cos \theta + \psi_z \sin \theta]} \quad (8)$$

这里,利用了平衡磁场与磁通函数的关系式:

$$RB_\theta = \psi_R \cos \theta + \psi_z \sin \theta \quad (9)$$

其中, $\psi_R = \partial \psi / \partial R$, $\psi_z = \partial \psi / \partial z$ 。显然,新的角向

变数 ω 以 2π 为周期。易证:

$$\frac{d\omega}{d\zeta} = \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla \omega}{\mathbf{B} \cdot \nabla \phi} = \frac{2\pi}{\int_0^{2\pi} h d\theta} = F/q \quad (10)$$

仅为磁面函数,即磁力线为直线。坐标系 (ψ, θ, ϕ) 的 Jacobian 量为:

$$J = 1/(\nabla \psi \times \nabla \omega \cdot \nabla \phi) = qR^2/F \quad (11)$$

即该量与 R^2 成正比,这是磁力线为直线坐标系的基本性质。这种变换不是唯一的,因为取其他变换使 $J = c(\psi)R^2$ [$c(\psi)$ 为任意单调函数],也可以得到磁力线为直线的结果。本文仅研究以变换式(7)、(8)为基础的坐标系。将周期函数 $h(\psi, \theta)$ 进行 Fourier 展开:

$$h(\psi, \theta) = c_0(\psi) + \sum_{n=1} c_n(\psi) \cos n\theta + \sum_{n=1} b_n(\psi) \sin n\theta \quad (12)$$

以下为分析简明起见,假定平衡位形具有上下对称性,这样上式中仅需考虑余弦项,且有:

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi h d\theta \quad (13)$$

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi h \cos n\theta d\theta \quad (14)$$

得到新极向角的显示式为:

$$\omega = \theta + \sum_{n=1} \frac{c_n}{c_0 n} \sin n\theta \quad (15)$$

直接进行验证,可以得到 Jacobian 量的表示式(11)。由

$$\nabla \omega = \left[\sum_{n=1} \left(\frac{c_n}{nc_0} \right)' \sin n\theta \right] \nabla \psi + (h/c_0) \nabla \theta \quad (16)$$

其中,一撇表示对 ψ 求导,可以写出逆变形式的度规因子的表示式为:

$$g^{\psi\psi} = (\nabla \psi)^2 = R^2 B_p^2 \quad (17)$$

$$g^{\psi\omega} = \nabla \psi \cdot \nabla \omega = \sum_{n=1} \left(\frac{h}{nc_0} \right)' \sin n\theta R^2 B_p^2 + \left(\frac{h}{c_0} \right) \nabla \psi \cdot \nabla \theta = g^{\omega\psi} \quad (18)$$

$$g^{\omega\omega} = (\nabla \omega)^2 = \left[\sum_{n=1} \left(\frac{h}{nc_0} \right)' \sin n\theta \right]^2 R^2 B_p^2 + \left(\frac{h}{c_0 r} \right)^2 + 2 \left(\frac{h}{c_0} \right) \left[\sum_{n=1} \left(\frac{h}{nc_0} \right)' \sin n\theta \right] \nabla \psi \cdot \nabla \theta \quad (19)$$

$$\nabla \psi \cdot \nabla \theta = (-\psi_R \sin \theta + \psi_z \cos \theta) / r \quad (20)$$

$$g^{\phi\phi} = (\nabla \phi)^2 = 1 / R^2 \quad (21)$$

$$g^{\psi\phi} = g^{\omega\phi} = g^{\phi\psi} = g^{\phi\omega} = 0 \quad (22)$$

上述坐标系的共变基坐标为:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\psi &= J \nabla \omega \times \nabla \zeta \\ &= c_0 R^2 \left[\sum_{n=1} \left(\frac{C_n}{nc_0} \right)' \sin n\theta \right] \nabla \psi \times \nabla \zeta \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} &+ (hR^2) \nabla \theta \times \nabla \zeta \\ \mathbf{e}_\omega &= J \nabla \zeta \times \nabla \psi = J \mathbf{B}_p \end{aligned} \quad (24)$$

$$\mathbf{e}_\zeta = J \nabla \psi \times \nabla \omega = (hR^2) \nabla \psi \times \nabla \theta \quad (25)$$

可以看到, 上述基矢量满足条件: $\mathbf{e}_\psi \cdot \nabla \psi =$

$$\mathbf{e}_\omega \cdot \nabla \omega = \mathbf{e}_\zeta \cdot \nabla \zeta = 1。$$

按照矢量分解原则, 可以得到平衡磁场的逆变分量为:

$$B^\psi = \mathbf{B} \cdot \nabla \psi = 0 \quad (26)$$

$$B^\zeta = \mathbf{B} \cdot \nabla \zeta = F / R^2 \quad (27)$$

$$B^\omega = \mathbf{B} \cdot \nabla \omega = F / R^2 q \quad (28)$$

而共变分量为:

$$\begin{aligned} B_\psi &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_\psi \\ &= c_0 R^2 \left[\sum_{n=1} \left(\frac{C_n}{nc_0} \right)' \sin n\theta \right] \left[B_p^2 + (hR/r) \mathbf{B}_p \cdot \mathbf{e}_r \right] \end{aligned} \quad (29)$$

$$B_\omega = \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_\omega = J B_p^2 \quad (30)$$

$$B_\zeta = \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_\zeta = F h R^2 B_0 / r = F \quad (31)$$

4 磁力线为直线坐标系中的坐标线图

Soloviev 位形

虽然许多有关磁约束等离子体物理, 尤其是研究等离子体稳定性的文献和书籍中广泛应用磁力线为直线的坐标系, 但罕有画出坐标线图的, 因而读者对这类坐标系的特征难以有直观的了解。要画出坐标线图, 一定要结合具体的平衡位形, 而且要对变换式(15)进行反变换。通常只能通过数值计算才能完成。

下面以 Soloviev 类型的位形为例, 给出解析平衡解^[6]:

$$\psi = \frac{\psi_b}{y_b} \left\{ \frac{4}{E^2} [1 + (1-D)y] \frac{z^2}{R_0^2} + y^2 \right\} \quad (32)$$

$$y = R^2 / R_0^2 - 1 \quad (33)$$

其中, 参量 E 与拉长比有关, D 与三角变形率有关, 而取不同的 y_b 可以获得不同环径比的位形。引入一个新的极向角变数 u :

$$R = R_0 \sqrt{1 + y_\psi \cos u} = R_0 f_1 \quad (34)$$

$$z = \frac{ER_0}{2} \frac{y_\psi \sin u}{\sqrt{1 + (1-Q)y_\psi \cos u}} = \frac{ER_0}{2} \frac{y_\psi \sin u}{\sqrt{f_2}} \quad (35)$$

这里, 引入了一个新的磁面坐标 $y_\psi = y_b \sqrt{\psi / \psi_b}$ 。

现在安全因子可以表示为:

$$q(y_\psi) = \frac{FEy_b^2 R_0}{8\pi \psi_b} \int_0^\rho \frac{du}{(1 + y_\psi \cos u) \sqrt{1 + (1-D)y_\psi \cos u}} \quad (36)$$

对应于式(8)中的函数的形式简化为:

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{(1 + y_\psi \cos u) \sqrt{1 + (1-D)y_\psi \cos u}} \\ &= c_0(y_\psi, D) + \sum_{n=1} c_n(y_\psi, D) \cos nu \end{aligned} \quad (37)$$

发现该函数与拉长比没有关系。由式(36)、(37)得到

$$q = F c_0 (E y_b^2 R_0 / 4)。$$

当 $y_\psi \ll 1$, 上述 Fourier 系数可以通过近似展开而求得。一般情况下则可以通过数值积分求得, 磁力线为直线的坐标系中的极向角变换为:

$$\omega = u + \sum_{n=1} \left(\frac{C_n}{nc_0} \right) \sin nu \quad (38)$$

坐标线 $\omega = \text{const}$ 需要通过反变换求得, 一般需要通过数值方法来确定。图 1 为圆截面托卡马克位形中磁力线为直线的坐标图 ($A = 4.79$, $E = 1$, $D = 0$)。可以看到, 坐标线 $\omega = \text{const}$ 与局部极坐标中的 $\theta = \text{const}$ 比较接近。图 2 为 D-形截面托卡马克的坐标线图 ($y_b = 0.625$, $E = 1.6$, $D = -0.59$), 可以看到, 极向坐标线有向 D-形顶部汇聚的倾向。

近年来对具有反 D-形位形托卡马克产生很大的兴趣, 因为这类位形可能改变偏滤器靶板上的热负载使之更适合反应堆条件。图 3 为这类位形的坐标线图, 其中的极向坐标线也向顶部汇聚。

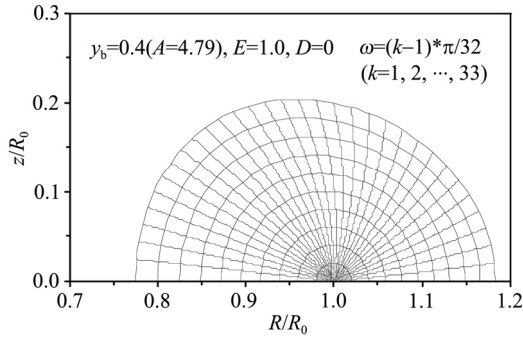


图 1 圆截面托卡马克位形中磁力线为直线的坐标线

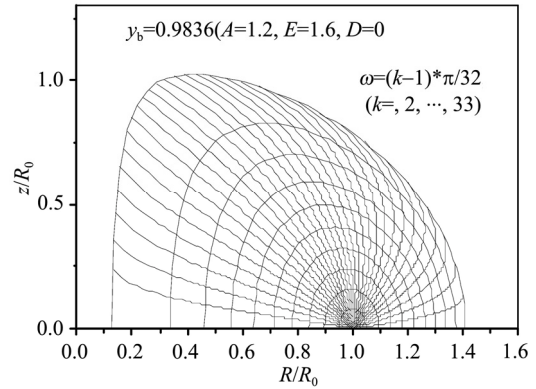


图 4 球形环位形中磁力线为直线的坐标线图

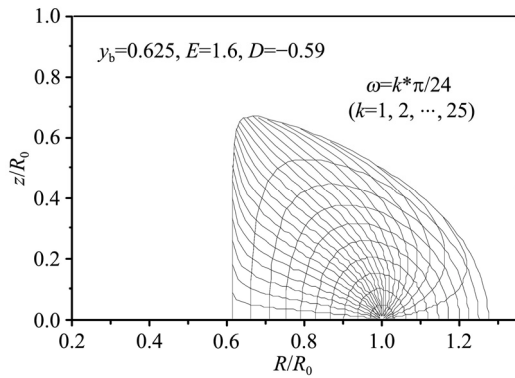


图 2 D-形截面托卡马克的坐标线

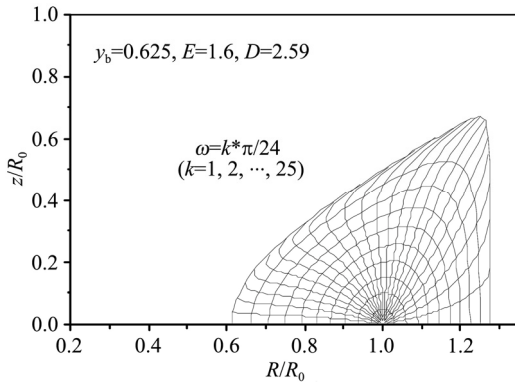


图 3 具有反 D-形截面的托卡马克位形中的坐标线图

最后, 图 4 为球形环位形($A=1.2$, $E=1.6$, $D=0$)的坐标线图。尽管在该位形中取三角变形参数 $D=0$, 但由于环径比较大, 该位形仍有一定的 D-形特征。

5 磁力线为直线坐标系中的坐标线图: 偏滤器位形^[7]

上述建立磁力线为直线的坐标系的方法对偏滤器位形中的分界面本身是不适用的, 但可以看到, 除了分界面本身, 对内部的磁面, 仍然可以采用该方法。这里引入一类用半解析方法构建的偏滤器位形^[7]。选用由平衡解:

$\psi(R, z) = g_1(R/R_0) + cg_0(R/R_0)\cos k(z/R_0)$ (38)

描述的偏滤器位形。其中, $g_1(x), g_0(x)$ 分别是为下面的常微分方程的解:

$$g_1'' - g_1'/x + (\eta\beta x^2 + \eta\alpha x - k^2)g_1 = 0 \quad (39)$$

$$g_0'' - g_0'/x + (\eta\beta x^2 + \eta\alpha x)g_0 = 0 \quad (40)$$

其中, $x = R/R_0$, $y = z/R_0$, 参数 k 与拉长度有关, 系数 c 的选取由分界面处的磁通值决定, 而与压强梯度 $[p'(\psi)]$ 及反磁特征 $[F^2(\psi)]$ 有关的两个参数取值取为 $\eta\alpha = -5$, $\eta\beta = 50$ 。函数 $g_0(x), g_1(x)$ 需通过数值方法求出, 它们满足边界条件:

$$g_1(x_1) = g_0(x_2) = 0, \quad g_1'(x_1) = g_0'(x_2) = 1 \quad (41)$$

当取 $k=4$, $x_1=0.4$, $x_2=0.44$, 令分界面磁通 $\psi_s = 0$, 确定 $c=0.66$, 该平衡位形如图 5 所示^[7]。

比起直接由求解 Grad-Shafranov 方程得到平衡位形的数值解, 由式(38)确定的偏滤器位形不仅比较简单, 而且解的精确度很高。在此半解析解的基础上建立磁力线为直线的坐标系需完成下述步骤:

a. 在若干个磁面上通过求解式(38)得到局部极坐标系中的径向变数 $r = r(\psi, \theta)$ 。简述为: 取任一磁面, 设其在中平面的两个交点为 x_i, x_0 , 将区间 $l = x_i - x_0$ 分成 m 等分, 对应于点 $x_i = x_0 +$

$(i-1)l/m$, 有 $y_i = \frac{1}{k} \cos^{-1} \left[\frac{\psi - g_1(x_i)}{cg_0(x_i)} \right]$, 然后用式

(3)、(5)计算得到 r_i 、 θ_i , 用式(8)简述 $h(\psi, \theta_i)$;

b. 将函数 $h(\psi, \theta)$ 进行 Fourier 分解, 得到对应于各个磁面上的 c_0, c_n 组合, 为得到精确的结果, 取 $n=40$;

c. 由式(15)得到 (ω, θ) 的一一对应关系, 然后通过反变换求得 $\omega = \text{const}$ 对应的各组 (ψ, θ) , 即极向角变数的坐标线。图 5 为上面所列位形的坐标线图。

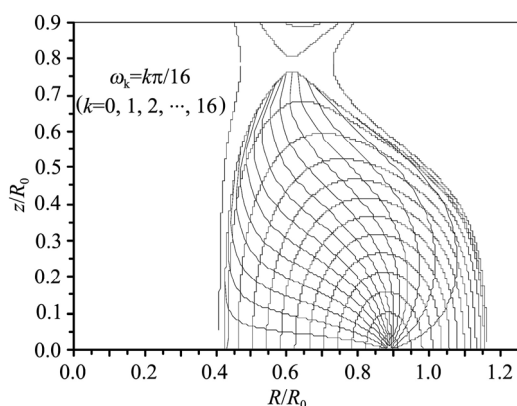


图 5 具有分界面的托卡马克位形在分界面内部建立磁力线为直线的坐标系

从图 5 中可以看到, 偏滤器位形的坐标线特征, 它们向 X-点区域汇聚得非常厉害。尤其是靠近分界面的区域更为突出。坐标线的密集反映的是物理上该区域等离子体对稳定性的贡献很大^[8, 9]。在稳定性计算中, 要求将该区域的坐标线分得很细, 否则会产生很大的误差。

6 结束语

建立磁力线为直线的坐标系是托卡马克理论研究的基础性技巧。本文介绍了一种方法, 同时给出若干位形实例中的具体坐标图。补充了文献和有关书籍中没有显示坐标图的不足, 从这些坐标线图中可以看出一个平衡位形的物理特征。

很多中国学者对本文介绍的建立磁力线为直线的坐标系这一基本理论手段知之甚少, 这又成为他们进一步学习和研究工作的障碍。在陈骝教授建议下, 本人在 2008 年的蔡诗东等离子体物理系列讲座中对此问题进行讲课。本文是讲课材料的整理和补充, 主要补充了一些坐标线图。

参考文献:

- [1] Connor J W, Hastie R J, Taylor J B. High mode number stability of an axisymmetric toroidal plasma [J]. Proc. Roy. Soc. (London) Ser. A, 1979, 365: 1-14.
- [2] Connor J W, Hastie R J, Wilson H R, et al. Magneto-hydrodynamic stability of tokamak edge plasmas [J]. Phys. Plasmas, 1998, 5: 2687-2700.
- [3] 石秉仁. 环形轴对称等离子体的理想磁流体简正模方程 [J]. 核聚变与等离子体物理, 1993, 13(1): 1-8.
- [4] Wilson R H, Snyder P B, Huysmans G T A, et al. Numerical studies of edge localized instabilities in tokamaks [J]. Phys. Plasmas, 2002, 9: 1277-1286.
- [5] Coronado M, Galindo Trejo J. Calculation of Hamada coordinates for a large-aspect ratio tokamak [J]. Phys. Fluids B, 1990, 2: 530-535.
- [6] Shi Bingren. General equilibrium property of spherical torus configurations with large triangularity [J]. Plasma Phys. Contr. Fusion, 2004, 46: 1105-1114.
- [7] Shi Bingren. Simple semi-analytic toroidally symmetric equilibria with natural D-shape separatrix [J]. Plasma Phys. Contr. Fusion, 2007, 50: 085006.
- [8] Webster A J, Gimblett C G. Magnetohydrodynamic stability at a separatrix. I. Toroidal peeling modes and the energy principle [J]. Phys. Plasmas, 2009, 16: 082502.
- [9] Shi Bingren. Growth rate of peeling mode in the near separatrix region of diverted tokamak plasma [J]. Chin. Phys. B, 2014, 23: 015202.

Magnetic coordinates with straight field lines

SHI Bing-ren

(Southwestern Institute of Physics, Chengdu 610041)

Abstract: A method for constructing the magnetic coordinates in which the magnetic field lines are straight is described. This coordinate system is widely used in the magnetohydrodynamic stability and kinetic physics analysis and calculations for tokamak plasmas, however, there is less detailed description about its construction in literatures. Here we describe the basic features of this coordinates for several kinds of tokamak and spherical torus configurations.

Key words: Magnetic surface coordinates; Coordinate transformation; Tokamak; Spherical torus