

【文章编号】 1004-1540( 2004) 02-0134-05

# 托卡马克中高能粒子的初始轨道及其 损失研究

邬良能<sup>1</sup>, 俞国扬<sup>2</sup>, 蒋丽珍<sup>1</sup>, 韩雁冰<sup>1</sup>, 刘贵泉<sup>1</sup>

(1. 中国计量学院 理学院, 浙江 杭州 310018; 2. 中国科学院等离子体物理研究所, 安徽 合肥 230031)

【摘 要】 采用两种模型对高能粒子在托卡马克中的轨道进行了研究, 比较两者计算结果, 表明定性吻合较好, 并分析了定量上差异成因. 同时讨论了等离子体有关参数对高能粒子轨道损失的影响, 这些结果对展开高能粒子约束的研究是非常有意义的.

【关键词】 托卡马克; 高能粒子; 初始轨道; 香蕉轨道

【中图分类号】 O532 . 11      【文献标识码】 A

## The research on the first-orbit and loss of energetic particles in Tokamak

WU Liang-neng<sup>1</sup>, YU Guo-yang<sup>2</sup>, JIANG Li-zhen<sup>1</sup>, HAN Yan-bing<sup>1</sup>, LIU Gui-quan<sup>1</sup>

(1. China Jiliang University, Hangzhou 310018, China;

2. Institute of Plasma Physics, Chinese Academy of Sciences, Hefei 230031, China)

**Abstract** Based on the two models, Energetic particle's orbit in Tokamak has been investigated. The results agree well in quality with some differences in quantity. The cause of difference and The effects of plasma parameters on energetic particle's first-orbit loss have been discussed. These results are significant for research on energetic particle's confinement.

**Key words** Tokamak,; energetic particle; first-orbit; banana orbit

许多托卡马克的实验表明<sup>[1,2]</sup>,有 MHD行为时的高能带电粒子的损失远大于无 MHD行为时的损失. 实现聚变 D-T反应需将高能粒子约束到足够时间,以维持等离子体温度.粒子损失的存

在将严重影响聚变反应的自持,还会给真空器壁造成很大的负荷.因此,对高能粒子约束的研究一直是人们十分关注的课题. 高能粒子的损失主要有两条途径:一是集体损失,它是由高能离子通过

【收稿日期】 2003-12-19

【基金项目】 浙江省教育厅科研基金资助项目 (No. 20030022)

【作者简介】 邬良能 (1969- ),男,浙江宁波人,讲师.主要研究方向为等离子体、微波和微光.

驱动不稳定性影响背景等离子体造成,如由环向阿尔芬本征模(TAE)鱼骨模等,其基本图象是高能粒子激发了不稳定性,而不稳定性反过来放大了高能粒子的损失.二是单粒子的初始轨道损失,它是由于高能离子未被角向场约束住,其轨道偏离较大以致撞击器壁而损失.聚变设计中粒子约束的评估和粒子扩散的判断都依赖于长时间的粒子行为,粒子的轨道描述有着重要作用.通常认为粒子的初始轨道损失数量较少,但对高能粒子其情形就大不一样.本文就托卡马克中注入的高能粒子的初始轨道进行研究,采用两种模型分别计算了高能粒子的初始轨道,比较结果,两者定性吻合良好,又分析了两定量上差异的成因.同时探讨了等离子体参数对高能粒子的初始轨道损失的影响,结果表明托卡马克装置电流及其分布对粒子约束有较明显的影响.至于等离子体的集体效应不在本文研究之列.

## 1 物理模型

托卡马克中的磁场是由沿大环方向的磁场  $B_t^k$  和角向磁场  $B_p^k$  合成的螺旋形磁场,纵向磁场是由一系列环形线圈产生的.托卡马克中的磁场可主要表述为

$$B^k = B_t^k \hat{e}^z + B_p^k \hat{e}^\theta \quad (1-1)$$

环向磁场

$$B_t^k \propto B_0 R_0 / R = B_0 R_0 / (R_0 + x) \quad (1-2)$$

式(1-2)中  $B_0$  为磁轴  $R = R_0$  处的环向场,角向磁场  $B_p^k$  由等离子体电流决定.

托卡马克几何坐标如图 1 所示.

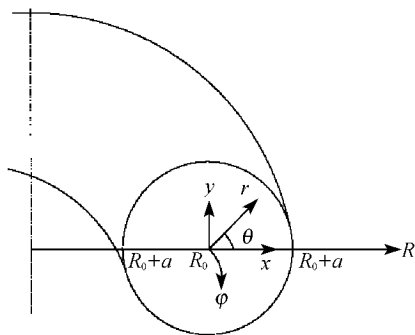


图 1 托卡马克几何坐标

等离子体电流密度可设为  $j = j_0 [1 -$

$(r/a)^n]$ ,  $a$  为小半径,  $n, k$  是非负整数. 对于实验上观察到的任何单调递减分布的等离子体电流, 只要适当调整  $n, k$  值就可匹配, 故此假设具有普遍性. 因而可导出矢势的环向分量为  $A_h =$

$$-\frac{0}{2\pi} \sum_{i=0}^k (-1)^i \frac{(r/a)^{m+2}}{m+2} C_k^i = -\frac{0}{2\pi} I F(r) \quad (1-3)$$

式(1-3)中  $C_k^i = \frac{k!}{i! (k-i)!}$ ,  $I$  为等离子体总电流,  $F(r)$  是以小半径  $a$  归一化的角向流函数. 托卡马克中离子的漂移轨道是由平行于力线运动的角向分量、磁场不均匀性引起的梯度及曲率漂移和静电势等因素引起的漂移, 这几种运动之间的

竞争决定. 粒子的运动速度<sup>[3]</sup>  $V = V_{||} \frac{B}{B} + \frac{1}{K} (V_{||}^2 + \frac{1}{2} V_{\perp}^2) \frac{B \times \nabla B}{B^2} + \frac{B \times \nabla \Phi}{B^2}$  (1-4)

式(1-4)中  $K = qB/m$  为粒子的回旋频率,  $m$  是粒子质量,  $V_{||}$ 、 $V_{\perp}$  分别是粒子平行、垂直于磁场方向的速度,  $\Phi$  为静电势. 在图 1 所示托卡马克环几何坐标下, 不考虑静电势作用, 可得在径向、角向和环向的粒子导引中心方程:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{V_{||}^2 + \frac{1}{2} V_{\perp}^2}{KR} \sin \theta + V_{||} \frac{B_r}{B} \quad (1-5)$$

$$r \frac{d\theta}{dt} = -\frac{V_{||}^2 + \frac{1}{2} V_{\perp}^2}{KR} \cos \theta + V_{||} \frac{B_\theta}{B} \quad (1-6)$$

$$R \frac{d\phi}{dt} = \frac{V_{||}^2 + \frac{1}{2} V_{\perp}^2}{KR} \frac{B_\phi}{B} \cos \theta + V_{||} \frac{B_h}{B} \quad (1-7)$$

对上述方程进行求解就可获得完整的粒子轨道, 我们关心的是粒子是否被约束在托卡马克中, 因而更关注的是粒子导心轨迹在角向截面上的投影, 这可通过对方程(1-5, 1-6)整理消去  $t$  计算给出. 上述是我们介绍的一种基于漂移运动计算粒子轨道的方法.

下面介绍另一种计算粒子轨道在托卡马克截面角向投影的方法. 由于高能粒子的运动速度很大, 其特征频率(如 TFTR 中的 3.5 MeV 的  $\alpha$  粒子的反弹频率为  $10^5 \sim 10^6$  Hz) 远大于粒子间运动的碰撞频率 ( $10^{-2}$  Hz), 因此在粒子的通行/反弹时间尺度内, 我们可以认为粒子的能量 ( $E$ ), 磁矩 ( $\mu$ ) 和环向的正则角动量  $P_h$  是运动不变量, 由这

些不变量就可完整描述高能粒子的运动轨迹<sup>[4]</sup>:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + ZeJ \quad (1-8)$$

$$- = \frac{mv^2}{2B} \quad (1-9)$$

$$P_h = mRv_h - ZeJ \quad (1-10)$$

此处  $Z$  是粒子所带电荷数;  $J$  是角向流函数.

由流面近似

$$J = -R_0 A_h = -\frac{0IR_0}{2} F(r) \quad (1-11)$$

$R_0$  是磁轴半径. 不失一般性, 假定高能离子初始位置在赤道面上  $R = R_0$  处, 此时仰角  $\lambda = \cos^{-1}(V_{11}/v)$ , (即  $B$  与  $V$  的夹角). 同样不计静电势作用, 在前述托卡马克磁位形下,  $B_t \gg B_p$ , 导得:

$$P_h \pm mRv_h - ZeJ \pm mv[R(R - R_0 \sin^2 \lambda)]^{1/2} + \frac{0IR_0 Ze F(r)}{2\pi} \quad (1-13)$$

由于  $P_h$  守恒为不变量, 故有

$$F(r) \pm s[R(R - R_0 \sin^2 \lambda)]^{1/2} = \text{constant} \quad (1-14)$$

式 (1-14) 中,  $s = \frac{2\pi mv}{Ze_0 IA}$ ,  $A = R_0/a$  是托卡马克径向比, 式中所有长度量都以小半径  $a$  归一, 等式左边第二项前面“+”、“-”号的选择取决于粒子的运动相对于电流的方向. 当  $\vec{v} \cdot \vec{j}^k > 0$  时 (同向), 取“-”号; 当  $\vec{v} \cdot \vec{j}^k < 0$  时 (即反向), 取“+”号. 对方程 (1-14) 求解就可得粒子轨道在角向截面上的投影.

## 2 两种方法的计算结果比较

我们从不同途径介绍了两种方法计算托卡马克中高能粒子的运动轨道, 现给出计算结果并进行比较. 计算参数选用 TFTR  $R_0 = 2.48 \text{ m}$ ,  $a = 0.85 \text{ m}$ ,  $I = 1.8 \text{ MA}$ ,  $j = j_0[1 - (r/a)^2]^2$ ,  $B_t = 5.0 \text{ T}$ .

图 2(a)、2(b) 给出能量  $E = 3.5 \text{ MeV}$  的  $\text{T}$  粒子经过点  $x/a = 0.3$ , 仰角不同 (a):  $\lambda = 130^\circ$ ; (b):  $\lambda = 105^\circ$  的两种典型轨道: 通行轨道和捕获轨道. 图 2 中折点线所示为求解漂移运动方程 (1-5, 1-6, 1-7) 得到的粒子导心轨迹, 实线所示为基于守恒量求解方程 (1-14) 得到的粒子轨道在角向截面上的投影.

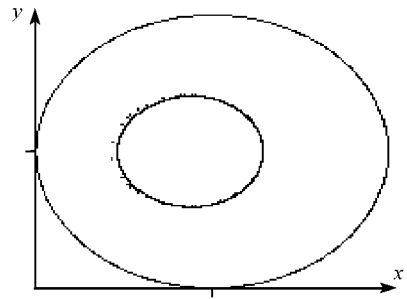


图 2(a)  $\text{T}$  粒子轨道角向投影,  $\lambda = 130^\circ$

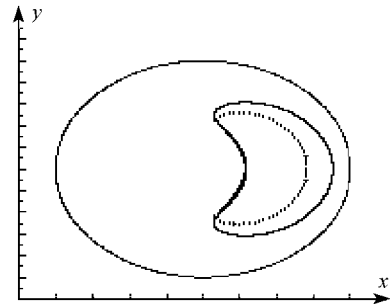


图 2(b)  $\text{T}$  粒子轨道角向投影,  $\lambda = 105^\circ$

由于托卡马克具有特殊的磁位形结构, 其环内侧磁场强, 环外侧磁场弱, 粒子在其中沿磁力线的运动类似于磁镜中运动. 当粒子从环的外侧运动到内侧时, 其环向速度减少, 具有较大的初始垂直磁场速度与初始平行磁场速度之比值的粒子被反射回来, 结果发现粒子被捕获在力线的某一部分, 位于两个强磁场区域. 这种粒子导引中心的轨迹在等离子体截面上的投影具有香蕉形状, 因而这种捕获轨道也被称为香蕉轨道, 如图 2(b) 所示. 与此同时那些具有较小的初始垂直磁场速度与初始平行磁场速度之比值的粒子能穿越强磁场区, 其轨道为通行轨道, 如图 2(a) 所示.

为便于叙述, 将求解漂移运动方程 (1-5, 1-6, 1-7) 得粒子运动轨迹的方法称方法 1, 基于守恒量求方程 (1-14) 得粒子导心轨迹的方法称方法 2, 从图 2 可以看到, 两种方法计算的粒子轨道定性上基本一致, 但定量上有稍微差异. 图 2(a) 所示, 对于通行粒子, 两者计算结果吻合较好; 而对捕获粒子, 图 2(b) 所示, 两者在结果上是有差异的, 现对此成因分析. 两种计算方法采用的模型不同, 方法 1 是通过求解微分方程获得粒子导心轨迹在角向上的投影, 采用的是变步长龙格

-库塔法,将误差控制在一定范围内求解.方法 2 包含了环向正则角动量守恒这一条件,而方法 1 无此条件.方法 2 是通过求解方程代数方程 (1-14) 获得粒子轨迹,计算过程如下:任一给定  $x$ , 让  $r$  逐步递增,在一定相对精度范围内满足方程 (1-14) 就得到一对应的  $x, r$  值.我们选定的相对精度为  $10^{-5}$ ,较为精确.由于该方程是个高阶函数,存在多根可能性,就这一情况我们展开研究,发现在程序设计中改变相对精度为  $10^{-4}$  时,粒子轨道几乎不变;进一步减小精度,轨道轮廓变化也近似与前述一致.我们又对程序设计作改动,在同样的精度下获得  $r$  的最小值和最大值,比较轨道计算结果发现得到的粒子轨道几乎重合.因此我们完全有充分理由说明在我们的方法 2 计算程序中已排除了多解可能性,保证了数值解的精确性.方法 1 采用变步长龙格-库塔法求微分方程,必须作误差分析.误差来源可分为:舍入误差和截断误差.舍入误差是由计算机的有效位数引起的.因计算机中遇到的数据可能位数很多,有时甚至是无穷小数,而计算机受到机器字长的限制,必须舍入成一定位数,这就引进舍入误差.截断误差是指采用计算的方法从理论上来说是近似的方法,有一定的误差.我们采用的龙格-库塔法,每积分一步,其截断误差为  $O(\Delta t^5)$ ,其中  $\Delta t$  为积分步长.显然只要将积分步长缩小,就可减小截断误差.由于我们现在研究粒子轨道,考虑的是在一定  $\theta$  坐标范围内  $r$  变化情况,减小步长虽能提供单步精度,但积分步数将增加,这样误差在积分过程中传递的问题将显得比较突出,我们称之为误差传播.关于龙格-库塔法中的误差传播, BUTCHER 已作了详述的理论研究<sup>[5]</sup>.我们试着对有解析解的微分方程进行计算,发现对稍简单的方程,只要将单步误差控制在  $10^{-5}$  内,那么在 1 000 步之内,总的误差不超过  $10^{-3}$ .然而误差还依赖于方程的复杂程度.如果复杂程度增加(如前步运算结果多次出现在下步运算中出现),则误差传播较为突出.幸而我们经过在不同精度下的运算,结果表明计算中不存在严重的误差传播问题.因而实际计算时我们将单步误差控制在  $10^{-5}$  内,步长极限  $10^{-3}$ .这样总体误差不超过  $10^{-3}$ .方法 1 和方法 2 出发的途径不同,但描述的是同一物理图象,它们的计算结果在误差范围内是相近的.图 2(a) 通行

粒子计算结果吻合较好,体现了上述精神.然而图 2(b) 对香蕉轨道的计算,两种方法获得的结果有些偏离,从图上可以看出粒子反弹之前两种计算轨迹吻合较好,偏离发生在反弹之后,弹跳点的选择决定了它们的偏离.两种模型的近似处理及计算方法不同,确定的弹跳点位置多少有些不同,最终导致以此点为基础的粒子反弹轨道偏离.这两种方法描述物理图象是等效的,前面的分析已能保证我们以后研究结果的合理性和精确性.

### 3 高能粒子初始轨道损失因素的讨论

前节我们介绍了两种方法计算粒子导心轨迹,两种描述方法是等同的,采用何种方法一般视具体研究问题方便决定.下面我们就等离子体参数对粒子约束影响进行探讨.这里我们用方法 2 数值求解,给出结果.选用前托卡马克 TFTR 参数 ( $R_0 = 2.48 \text{ m}$ ,  $a = 0.85 \text{ m}$ ,  $B_t = 5.0 \text{ T}$ ,  $I = 1.8 \text{ MA}$ ,  $j = j_0 [1 - (r/a)^2]^2$ ).

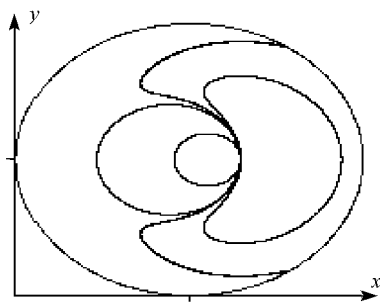


图 3 对应不同仰角粒子轨道的角向投影,过点  $x/a = 0.3, E = 3.5 \text{ MeV}$ ,  $I = 1.8 \text{ MA}$ ,  $j = j_0 [1 - (r/a)^2]^2$

图 3 给出能量  $E = 3.5 \text{ MeV}$  的 T 粒子经过点  $x/a = 0.3$ , 不同仰角  $\lambda = 50^\circ, 105^\circ, 115^\circ, 130^\circ$  时的导心轨迹在角向上的投影.  $0^\circ \leq \lambda < 90^\circ$  为同向粒子 ( $\vec{v} \cdot \vec{j}^k > 0$ ),  $90^\circ < \lambda \leq 180^\circ$  的粒子为反向粒子 ( $\vec{v} \cdot \vec{j}^k < 0$ ).比较图 3 中的同向、反向粒子的轨道,可以看到同向通行粒子的轨道偏离远小于反向粒子的轨道偏离.由图显示仰角不同的粒子可被分别表征为通行粒子和香蕉粒子.仰角  $\lambda = 50^\circ$  的同向粒子通行轨道偏离最小,仰角  $\lambda = 105^\circ$  的粒子香蕉轨道较胖,仰角  $\lambda = 115^\circ$  时粒子

在完成初始漂移轨道之前已撞击限制器,粒子没有被约束住而损失,如此的粒子损失称为初始轨道损失.

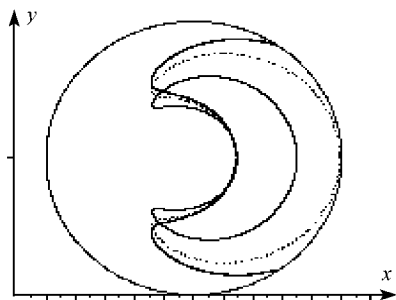


图 4 不同能量 (1.0 MeV, 2.5 MeV, 3.5 MeV) 的 T 粒子在仰角  $\lambda = 105^\circ$  时轨道角向投影,  $I = 1.8$  MA,  $j = j_0 [1 - (r/a)^2]^2$

图 4 表示的是不同能量 (1.0 MeV, 2.5 MeV, 3.5 MeV) 的 T 粒子同一仰角  $\lambda = 105^\circ$  在其它参数与图 3 相同条件下的轨道角向投影. 能量为 1.0 MeV 和 2.5 MeV 的 T 粒子被约束在托卡马克中, 而 3.5 MeV 的 T 粒子却撞击器壁损失, 显见随粒子的能量增大, 粒子的轨道偏离程度增加, 高能粒子的初始轨道损失情形比较严重.

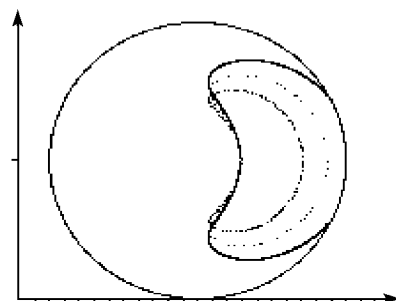


图 5 3.5 MeV 的 T 粒子在三种不同电流分布下 ( $j = j_0 [1 - (r/a)^2]$ ;  $j = j_0 [1 - (r/a)^2]^2$ ;  $j = j_0 [1 - (r/a)^2]^4$ ) 的轨道角向投影

改变等离子体电流分布形状, 保留其它参数不变, 数值计算粒子轨道得到随电流分布由平坦变成尖陡, 粒子的轨道偏离减小. 图 5 给出了初始仰角  $\lambda = 105^\circ$  能量为 3.5 MeV 的 T 粒子在三种不同电流分布下 ( $j = j_0 [1 - (r/a)^2]$ ;  $j = j_0 [1 - (r/a)^2]^2$ ;  $j = j_0 [1 - (r/a)^2]^4$ ) 的轨道角向投影.

其中对应平坦分布电流 ( $j = j_0 [1 - (r/a)^2]^2$ ) 情形下, 造成了粒子初始轨道损失, 而电流分布较尖情形下 ( $j = j_0 [1 - (r/a)^2]^4$ ), 捕获轨道宽度相对较小, 因此尖而陡的电流分布有助于减少初始轨道损失.

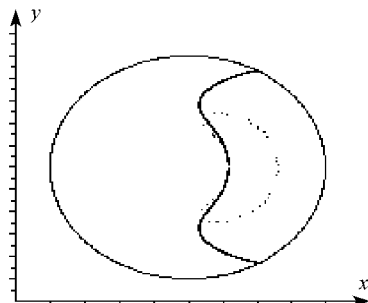


图 6 (a) 3.5 MeV 的 T 粒子在仰角  $\lambda = 105^\circ$  时轨道角向投影,  $j = j_0 [1 - (r/a)^2]^4$ ; 折点对应电流  $I = 2.0$  MA; 实线对应电流  $I = 1.0$  MA.

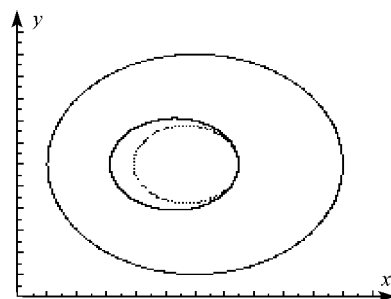


图 6 (b) 3.5 MeV 的 T 粒子在仰角  $\lambda = 150^\circ$  时轨道角向投影,  $j = j_0 [1 - (r/a)^2]^4$ ; 折点对应  $I = 2.0$  MA; 实线对应  $I = 1.0$  MA.

改变等离子体总电流, 其它条件一致情形下, 对同一粒子的轨道计算结果表明: 随等离子体电流的增加, 粒子沿轨道运动的偏离减小. 图 6(a)、(b) 给出了电流分布为  $j = j_0 [1 - (r/a)^2]^4$  下 3.5 MeV 的 T 粒子经过  $x/a = 0.3$  点在总电流 1.0 MA 和 2.0 MA 时的香蕉轨道和通行轨道, 图中虚点表示的是电流为 2.0 MA 下的粒子轨道, 实线所示粒子轨道对应电流 1.0 MA. 比较两种情形得到, 增大等离子体电流能减少快离子的初始轨道损失, 有助于高能粒子的约束. 此结论与 FTR 放电电流达 MA 级的实验结果一致.

(下转第 148 页)

的激光波长来记录可以免去两次曝光的问题.但感光材料对 540 nm 的敏感度很差成为现实问题,也许今后会有这个波长的感光材料出现,另外采用 514.5 nm 激光波长可克服感光材料问题,但这种波长离红光较远,红色成份衰减仍然很大,使合成彩色全息图色彩偏蓝.

### 3 结 论

本文对用单色激光器制作二维彩色全息图得出以下结论:

(1) 组成彩色全息图的各个彩虹全息图的狭缝宽度应 6~10 mm 为好,由此要求记录彩虹全息图的参考光与全息片法线夹角应大于等于  $60^\circ$ .

(2) 记录彩色全息图三基色信息的彩虹全息图三狭缝位置应准确确定  $x, z$  两个坐标,不能简单地仅由狭缝间距决定,位置坐标公式由 (13) 和 (14) 式给出.

(3) 要注意再现狭缝光波长不同于记录光波

长而引起的再现像亮度衰减的现象.当用 633 nm 或 442 nm 激光记录这种彩色全息图时应采用改变参考光角度的两次曝光方法来消除再现彩色像的蓝色或红色成份缺少的现象.

### 【参 考 文 献】

- [1] BETON S A. Hologram reconstruction with extended light source JOSA[J], 1969, 59(11): 1545-1547.
- [2] 梁万国. 彩虹全息图的假彩色编码方法[J]. 光学技术, 1997(6): 5-7.
- [3] 杨耕兴. 三维漫射体真彩色合成似狭缝彩虹全息术[J]. 应用激光, 1996, 16(1): 6-8.
- [4] 刘 艺. 单波长激光实现三维真彩色彩虹全息图的记录[J]. 电子科技大学学报, 1998, 27(6): 635-637.
- [5] 郭怀海. 双体视真彩色彩虹全息图[J]. 激光杂志, 2000, 17(2): 49-51.
- [6] 钱昌吉. 彩色全息图颜色误差分析[J]. 应用激光, 1998, 18(3): 118-122.
- [7] 伊卡琳. 工程光学. 胡淑琴译. 重庆: 西南师范大学出版社[M]. 1990. 3.

(上接第 138 页)

至此我们讨论了高能粒子初始轨道损失的有关因素,在参数一定的托卡马克装置中,高能粒子的初始轨道损失对电流密度分布十分敏感,等离子体放电电流增大将改善粒子约束,如此的物理图象比较直观,因为相应的角向磁场增强,有助于将粒子约束在力线上,轨道偏离小,不易损失.当然,如果托卡马克装置径向比变化,高能粒子的初始轨道损失范围也将变化,这是显见的.上述结论对全面了解粒子的轨道行为是十分有意义的,但仅是定性的,至于进一步有关定量的初始轨道损失区域研究,我们将在另一文进行.

### 【参 考 文 献】

- [1] ZW EBEN S J, DARROW D S, HERRM ANN HW, et al. Alpha particle loss in the TFTR DT experiments[J]. Nuclear Fusion, 1995, 35(8): 893-917.
- [2] WEISEN H, BERGSAKER H, CAMPBELL D J, et al. Boundary ion temperature and ion orbit losses in JET[J]. Nuclear Fusion, 1991, 31(12): 2247-2269.
- [3] MIYAMOTO K. Plasma physics for Nuclear Fusion[M]. Cambridge MIT press, 1976.
- [4] SCHMIDT G. Physics of High Temperature Plasmas[M]. New York: Academic press, 1979.
- [5] BUTCHER K. The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations[M]. New York: John & Sons Press, 1987.