

分类号 _____

密级 _____

U D C _____

编号 _____



南 华 大 学
UNIVERSITY OF SOUTH CHINA

硕士学位论文

电漂移对托卡马克中高能粒子 轨道的影响

研 究 生 姓 名： 李攀

指导教师姓名、职称： 龚学余 教授

黄千红 讲师

学 科、专业名称： 核技术及应用

研 究 方 向： 核聚变与等离子体物理

2014年12月

南华大学学位论文原创性声明

本人声明，所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了论文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得南华大学或其他单位的学位或证书而使用过的材料。与我共同工作的同志对本研究所作的贡献均已在论文中作了明确的说明。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

作者签名：

年 月 日

南华大学学位论文版权使用授权书

本人同意南华大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留学位论文，允许学位论文被查阅和借阅；学校可以公布学位论文的全部或部分内容，可以编入有关数据库进行检索，可以采用复印、缩印或其它手段保留学位论文；学校可根据国家或湖南省有关部门规定送交学位论文。对于涉密的学位论文，解密后适用该授权。

作者签名：

年 月 日

导师签名：

年 月 日

目 录

摘 要.....	I
Abstract	II
第一章 引 言.....	1
1.1 研究背景	1
1.2 国内外研究状况	2
1.3 等离子体的描述	2
1.4 聚变磁场位形的描述	4
1.5 磁场与等离子体的作用	6
第二章 带电粒子运动的物理模型.....	8
2.1 带电粒子在均匀磁场中的运动	9
2.2 带电粒子在非均匀磁场中的运动	15
第三章 电漂移作用下的高能粒子轨道.....	20
3.1 高能粒子运动轨道的研究背景	20
3.2 托卡马克磁场中高能粒子运动模型	20
3.3 托卡马克磁场中高能粒子的轨道	27
3.4 托卡马克中高能粒子轨道数值模拟	30
3.5 托卡马克位形下电漂移项的推导	32
3.6 电漂移作用下高能粒子轨道模拟	34
3.7 两种情况的结果分析与讨论	35
3.8 电场大小对高能粒子轨道偏移影响模拟	36
3.9 电场方向对高能粒子轨道偏移影响的模拟	37
第四章 结 论.....	39
4.1 结论	39
4.2 展望	39
参考文献.....	41
致 谢.....	44

摘 要

带电粒子在磁场中的运动是人们一直关注的问题,而带电粒子在托卡马克磁场中的运动轨道是磁约束聚变研究的热点问题。求解带电粒子在托卡马克磁场位形中的轨道,最主要是求解粒子的导心轨道,求解导心轨道的方法一般是利用三个运动常数和求解漂移运动方程组或者ORBIT程序里Hamilton方程组描述带电粒子的导心运动,但前两种方法,都没有考虑静电势的作用,也就是没有考虑电漂移,事实上电漂移是等离子输运的基础,考虑电漂移作用后,带电粒子的轨道图像也会有所不同。本文在考虑电漂移作用后再利用漂移运动方程组求解带电粒子的导心轨道。

在单粒子模型下,采用HL-2A装置参数,本文首先模拟出不考虑电漂移作用下,高能氖离子在托卡马克磁场中的轨道,结果表明,随着粒子初速度与磁场夹角的变大,氖离子逐渐由通行粒子变成俘获粒子,当氖离子变成俘获粒子后,随着初速度与磁场夹角的继续变大,粒子反弹点的距离变小,粒子被捕获的浅。另一方面,在考虑电漂移对氖离子运动轨道的影响之后,通过数值求解电漂移作用下漂移运动方程组,数值模拟了电漂移对氖离子运动轨道影响。模拟结果表明,电漂移会使氖离子的运动轨道出现一定程度的漂移,并且导致香蕉粒子的轨道变窄。

数值求解的程序也比较稳定,但程序的优化,以及利用三个运动常数在不忽略电漂移的情况下求解粒子轨道的工作还在进行,目前所做的工作为深入研究电漂移对托卡马克中高能粒子损失打下基础。

关键词: 导心轨道 通行粒子 俘获粒子 托卡马克 电漂移 香蕉宽度

Abstract

The movement of Charged particles in magnetic field is one issue that people widely concerned, and the trajectories of charged particles in tokamak magnetic field is one focus in magnetic confinement fusion research. The main task to get the trajectories of charged particles in tokamak is to obtain the particle guiding center orbit. There are three ways to handle this problem, one is to use the three constants, one is to solve drift motion equations, the other is solve the Hamilton's equations in OBIT code, but the first two methods ignore the role of the electrostatic potential and the electric drift effect. In fact, considering the electric drift is the basis of plasma transport, the trajectories of charged particles in tokamak will be different after including the effect of electric drift. The motion equations is solved with considering the electric drift in this paper.

Firstly, using the single particle model, the motion of deuterium ion has been simulated in HL-2A tokamak magnetic field configuration without considering electric drift. The results show that the trajectories of deuterium ion become trapped particles from passing by particles with increasing angle between the particle initial velocity and the magnetic field. The bounce point of the trapped particles will be low with increasing angle. Secondly, by solving the drift motion equations, the trajectories of deuterium ion has also been simulated after considering the effect of electric drift. The influence of the effect of electric drift to the trajectories of deuterium ion was investigated. The numerical simulation results show that the trajectories of deuterium ion is different compared to the situation ignoring electric drift. On the other hand, the banana width of trapped particle become narrower once considering the electric drift.

All the above results are in accord with the theoretical analysis and the code we developed is stable. But research work of optimization of the code and the use of the three constants is still in progress. Our present work lay a foundation for the other method to solve the particle trajectory.

Keywords: guiding center orbit; passing by particles; trapped particles; tokamak; electric drift; banana width

第一章 引言

1.1 研究背景

世界各国经济的持续发展与能量的需求有很大的联系，能源成为制约社会发展的关键问题，各国都在努力寻找高效、有利于本国发展的新能源，而聚变能量已渐渐成为人们关注的新型能量，一方面自然界所蕴藏的石油、天然气和煤其蕴藏量相当有限，另一方面主要基于聚变能的安全性，环境影响以及聚变能原材料蕴藏量丰富。聚变能量的释放主要由氘氚组合发生核反应释放能量^[1]，并且氘氚反应速度非常快，核反应产生的能量与简单的煤或者汽油燃烧相比较，聚变反应产生的能量是它们的 10^7 倍^[2]，所以很明显在反应时，氘氚燃烧所转变的有效能量，比一般的矿石燃料燃烧化学能要大很多，这也成为人们选择聚变能的一个因素。

当然，利用核聚变能发电操作起来是相当复杂的一件事情，首先要将燃料约束住一定长的时间，聚变反应才能顺利进行，所以如何约束作为燃料的高温等离子体，是十分关注的问题。而要很好的约束住等离子体，必须分析等离子体中的带电粒子在托卡马克磁场中的运动，带电粒子如果没有被磁场约束住就会损失掉，比如有可能撞击到器壁上^[3]，为了更好地约束住带电粒子，必须要模拟带电粒子在各种情况下的运动轨道，但由于等离子体是由一群带电粒子组成，追踪这群粒子是较难的一件事情，所以为了让问题变得简单，只有先考察某个带电粒子在磁场位形下的运动，再来推断一群粒子的运动。在这种单粒子模型下，数值模拟带电粒子在聚变磁场中的运动，是要做的事情。这种简化看上去虽然有点不合理，但这种最初的考虑还是很必要，是进一步研究粒子运动的基础。带电粒子在托卡马克中的运动轨道与其导心轨道有关系，所以确定粒子的轨道一个重要的方法就是计算导心轨道^[4,5]。计算粒子导心轨道的一个重要方法是求解漂移运动方程组，一般来说，为了简化，这种求解导心轨道的方法，都未考虑电漂移的影响，但是在某些情况下，比如托卡马克轴对称遭到破坏，或者各种微湍流引起等离子体产生了电场^[6]等等，电漂移不能忽略，在这种前提下，研究电漂移对高能粒子的轨道影响为进一步完善粒子轨道理论显得十分必要，对高能粒子初始轨道损失的研究也有重要意义^[3]。

1.2 国内外研究状况

目前带电粒子导心轨道模拟工作主要是应用ORBIT^[7]和GCORBI^[8]等程序来研究。ORBIT程序由White开发,采用Hamilton方程组描述粒子的导心轨道。Redi和White等人利用导心轨道程序ORBIT计算了TFTR中性束注入后的快离子损失,并分别计算了不同方向注入情况下快离子的平均损失额^[9];Putvinskij等人利用程序RLX-1计算了JET-1中性束注入后的快离子损失,在Tore Supra装置上,同样计算了中性束注入后的快离子损失。国内开展的有:高庆弟计算了HL-2A装置上环向磁场波纹度引起的高能粒子香蕉轨道偏离^[10];张杰等人在EAST装置上利用程序GCORBIT计算讨论了快离子约束^[8];李吉波等人利用ORBIT并结合平衡程序EFIT和输运程序TRANSP,讨论EAST中性束注入后的快离子损失^[11]。但在这些粒子轨道计算模拟中,电势一般都认为对粒子的作用可以忽略,也就是没有考虑电漂移。

不考虑电漂移作用求粒子的轨道,原因无非集中在几点^[12]:1、为了简化的需要,也就是上面所说的场对粒子运动的独立性;2、在考虑不同背景下粒子的轨道作用时,粒子所受的电势,相对于其它作用不是主要的,可以忽略;比如,电漂移所产生的时间效应和其它时间长度相比较很缓慢时,这是可以忽略的;3、当电场均匀恒定时,直接可以把电场的作用力表示到其它的表达式当中去。

1.3 等离子体的描述

在计算粒子的轨道之前,采用何种模型准确地描述等离子是等离子体物理的一项重要问题,不同的描述方法切入点不一样,角度也不一样,得出的结论也不一样。从等离子体较成熟的理论来看,一般研究等离子体方法有三种^[13]:单粒子描述,磁流体力学的描述和动理学的描述。

导心理论的研究源自对单粒子在磁场和电场中运动特性的研究,单粒子模型是以带电粒子为基本研究单元,通过牛顿方程描述带电粒子在电磁场中的运动。在单粒子模型中,一般认为粒子间是不发生相互作用的,在环形装置中为了维持等离子体的宏观稳定而采用磁力线旋转变换理论就是从带电粒子在环形磁场中的运动轨道研究提出来的。

磁流体模型是描述等离子体的另外一种模型,在这种模型中,等离子体中必须有很频繁地碰撞才能满足流体力学中的相关规律,才能用流体模型来研究等离

子体。流体力学中相关最基本的方程成立是有一定条件的，粒子间的碰撞必须足够频繁，粒子的分布要基本满足麦克斯韦分布。众所周知，等离子体中的如此频繁的碰撞不存在，所表现出来的更多的是单粒子行为，但巧合的是，在考虑众多其它因素的影响之后，满足这种频繁碰撞作用的条件被近似的满足了。因为在等离子体中，电子的分布函数比其碰撞率所导出的分布更接近麦克斯韦分布，这个现象一直未有令人满意的解释，但它无疑能为等离子体应用流体模型提供一个有力依据；另一方面，磁场在某种程度上也起到了碰撞的作用。

磁流体模型就是在这样的基础上建立起来之后，类似流体力学，它还需要建立一个流体的连续性方程，并在此基础上考虑其它因素的修正，另外，等离子体中的“流体元”在电磁力下的行为还需要用微分方程来描述。并且，在进行数值计算并且模拟的过程中，由于离子和电子满足各自麦克斯韦分布，必须考虑对两者分别建立独立的描述方程，即双流体方程组。双流体模型是从未遇见，也需要验证的物理模型，但基于此模型描述等离子体性质时，取得的效果却非常之好，这样一个看似有点附加性质的模型，在研究大多数等离子体问题中却非常有效，而且它和动理学理论相比较，要容易计算并且更直观得多，因此基于流体理论建立的双流体模型得到了广泛的应用。

动理学模型，动理学的研究对象是整个多粒子体系，采用的是统计知识，试图对等离子性质进行更高一级更全面更深刻的描述，为了减少自由度，采用粒子分布函数用统计物理的方法来进行描述，考察粒子的位置和速度，所以，粒子的分布函数有7个变量，通常是在六维的坐标-速度空间来描述等离子体，很多时候要考虑随时间 t 各个参量的变化。常见的问题是粒子间的相互作用对其速度状态，以及空间状态的影响。所以满足的方程是玻尔兹曼方程，温度较高的等离子体中，在粒子间二体库仑近碰撞完全可以忽略前提下，无碰撞项的玻尔兹曼方程是主要的，也叫弗拉索夫方程，这是等离子体动力学理论最重要的基本方程之一。所以一般适用于温度较高的等离子体中。当存在中性粒子碰撞，一般将带电粒子的相互作用归结为近距离和远距离两种，将远距离相互作用归结为一等效外场，并引入自洽场。将近距离作用以方程式右边的碰撞项来表示。针对不同的研究对象或研究内容，可以对碰撞项做不同的假设，形成各种有用的简化模型。

三种研究方法各有所长，单粒子和磁流体理论能够成功解释许多等离子体现

象，单粒子模型忽略粒子间相互作用，磁流体理论忽略单个粒子的活动，着重考虑整体行为。实际上，等离子体是由大量微观粒子组成的系统，因而用动理学的方法研究等离子体必定能够揭示更深刻的运动定律。显然，动理学描述是等离子体的最基本方法，单粒子和磁流体理论都可以由此得到简化。本文采用单粒子模型与数值模拟相结合的方法，对带电粒子在磁场中的运动等离子体的问题进行讨论。

1.4 聚变磁场位形的描述

本文所研究的磁场是聚变磁场，在开始研究粒子轨道之前 首先描述磁场位形，尤其是磁场在空间的描述^[13]。只有用一定的相关理论对磁场进行描述后，模拟粒子轨道才有很好的前提。根据毕奥萨伐定律只要给出电流分布，就可以求出相应的磁场分布，直观想法就是利用电流求磁场形态，但是，在等离子体的研究中，做的往往不是这种考虑。恰恰相反，根据所要求的磁场位形来求出相应的电流分布形态。当然，对于给定的磁场结构，也可以通过不同的电流形态来描述。

在许多情况下，并不研究单根的磁力线，而是对某截面的一束磁力线研究，磁通

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \iint \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (1.1)$$

只要磁通为常数，当截面沿磁力线移动时，截面往往包围的是同一束磁力线，那么磁通为常数的面叫做磁面，可见，磁面的梯度是垂直于磁场的

$$\vec{B} \cdot \nabla \psi = 0 \quad (1.2)$$

若沿着磁力线运动， $B(l)$ 将会发生变化，磁面半径也会随之发生变化

$$r(l) = \sqrt{\frac{2\psi}{B(l)}} \quad (1.3)$$

当磁场具有对称性时，磁面可以用矢势来表示

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{2\pi} \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (1.4)$$

如果在轴对称磁场中取圆截面，可以得到磁面的表达式

$$\varphi = \frac{2\pi r}{2\pi} \vec{A}_\theta = r\vec{A}_\theta \quad (1.5)$$

可见在轴对称情况下，只有 θ 分量，磁场可以用另外一个磁场表示

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \nabla \times \left(\frac{\varphi}{r} \right) \vec{\theta} \quad (1.6)$$

这样，可以引入新的坐标系—磁面坐标系，磁面坐标系在研究平衡的问题是时非常方便。

在托卡马克中，位于同一磁面中各磁力线在沿大环方向绕足够多次数后便形成磁面，托卡马克的磁面方程写成如下形式

$$\Psi_p = \frac{\mu_0 I_p R}{2\pi} \left(\ln \frac{8R}{\rho} - 2 \right) + \frac{\mu_0 I_p}{8\pi} \left[\left(\ln \frac{8R}{\rho} - 1 \right) \rho + \frac{a^2}{\rho} \left(\Lambda + \frac{1}{2} \right) \right] \cos \theta \quad (1.7)$$

式中 Λ 为库伦对数， a 和 R 分别是小半径和大半径，两者之比非常小，在一级近似下，托卡马克在通过主轴上的截面可以认为是圆，显然，托卡马克中磁面是嵌套的。这些嵌套的磁面会引起环向磁场结构的改变，捕获粒子轨道随之而发生改变，造成高能粒子轨道的改变，磁场波纹还将影响粒子跨越轨道转折点所耗费的时间，导致香蕉轨道转折点在粒子的弹跳间发生垂直跳跃，倘若这种跳跃的步幅足够大，粒子的随机波纹扩散就会形成。

在托卡马克中为了维持等离子体的平衡，还需加上垂直磁场来抵消沿大环方向等离子的扩张力，垂直磁场的表达式是

$$\psi_{\perp} = -\frac{\mu_0 I_p}{4\pi} \left(\ln \frac{8R}{\rho} + \Lambda - \frac{1}{2} \right) \rho \cos \theta \quad (1.8)$$

垂直磁场的引入导致托卡马克磁面方程新的形式为

$$\begin{aligned} \Psi_p = \frac{\mu_0 I_p R}{2\pi} \left(\ln \frac{8R}{\rho} - 2 \right) + \frac{\mu_0 I_p}{8\pi} \left[\left(\ln \frac{8R}{\rho} - 1 \right) \rho + \frac{a^2}{\rho} \left(\Lambda + \frac{1}{2} \right) \right] \cos \theta \\ - \frac{\mu_0 I_p}{4\pi} \left(\ln \frac{8R}{\rho} + \Lambda - \frac{1}{2} \right) \rho \cos \theta \end{aligned} \quad (1.9)$$

如果磁面上某条磁力线沿大环方向绕主轴若干圈后又回到原始出发点，这样的磁面叫做有理磁面，有理磁面上每一根磁力线绕大环方向绕行过程中在截面上只留下有限几个点，并不会构成一个圆。而无理磁面即是这些面上的磁力线在沿大环过程中在横截面上画上了一个大圆，构成磁通面。在托卡马克中绝大多数磁面是无理磁面。

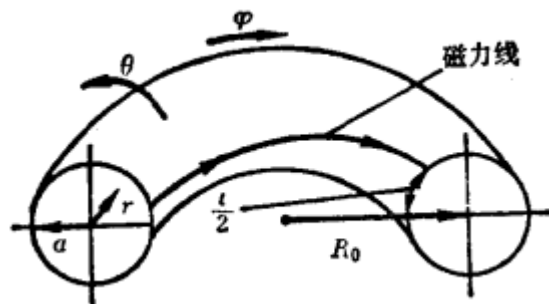


图 1.1 托卡马克磁场的转动变换

在托卡马克中还有一个需要提到的概念是旋转变换角，旋转变换角是磁力线环绕大环方向时在磁面的出发点和回到磁面时的点与磁轴与截面交点之间所构成的角，所以旋转变换角是磁面的函数，自然也是小截面半径的函数，这说明位于不同半径磁面上的磁力线从同一角向位置出发沿大环方向旋转时，回到原出发点速度是不一样的，靠里面磁力线的速度要比外面的磁力线绕行速度快。本文正是在托卡马克特殊的磁场位形下模拟电漂移对高能粒子轨道的影响。

1.5 磁场与等离子体的作用

磁场约束等离子体不是很简单的事情，而且，当粒子是高能离子时，磁场和带电粒子之间的作用更加复杂，大量的带电粒子会有集体效应并会在磁场发生各种漂移，在磁约束下，又必须要高温低密度的粒子能够长时间进行反应。所以有必要搞清楚磁场与等离子体是如何发生作用的，磁场与等离子体之间的相互作用包括以下几个方面^[14]：

首先是带电粒子在磁场中受到洛伦兹力，在该力作用下，粒子作匀速圆周运动。在磁约束聚变中，磁场强度是很大的，所以电子和离子的回旋半径都很小，且回旋方向相反，但一般的聚变装置尺度是比较大的，回旋半径和其相比可以认为较小，小到可以认为带电粒子被约束在磁力线附近区域，就像粘在磁力线附近一样，所以，从这个角度看，洛伦兹力在垂直磁场方向可以约束住带电粒子。

其次，等离子体中在施加电场之后，带电粒子会被加速，电子和离子被反向加速，通过碰撞之后，这些粒子会损失掉电场方向的速度，最后这些粒子在碰撞和损失之间达到平衡，维持一个稳定的速度。电子的速度大，因此形成等离子电流，当把这电流看成是一根根细细的电线时，根据安培力法则，通以同向电流时，两根导线之间作用力是互相吸引的力，但在等离子体边缘的那根带电细导线它所受的力是指向磁场的中心的，因为它不受边界外电流的吸引，而中间的各个电线

各自受到的力的合力因为磁场不均匀性是指向磁场中心的，所以从整体效果来看，等离子体有自收缩的效应。

等离子体还会有宏观效果——磁应力，磁应力由磁拉力和磁压力组成，磁拉力方向沿着磁力线，每一对磁拉力的合力总是垂直于磁力线的，在这个力作用下，磁力线两头绷得很紧。磁压力来自相邻的磁力线，它的方向垂直于磁力线，从磁力线密的一侧指向疏的一侧。当没有外力作用时，磁力线每一点的磁应力总是为零的，也就是拉力与压力的合力为零。如果磁力线能够连续的贯穿于等离子体内外时，那么等离子体内外都感受不到磁应力，磁应力就不能很好的约束等离子体。而对于磁约束聚变来说，总会想方设法通过磁场来控制好想要的等离子体行为，所以要想等离子体感受到磁应力，等离子体和磁场之间必须存在明确的界限。只有等离子体和磁场之间有明显的边界，等离子体所受到的磁应力就会抵消等离子体内部产生的热膨胀力，从而，等离子体被很好的约束住。但事实上，磁场和等离子体之间是会扩散的，由于扩散，两者界限将会渐渐变得模糊，所说的磁应力不复存在了，但只要扩散时间相对于约束时间在尺度上足够小就可以了。当然，还有其它利好因素，磁场穿透等离子体的时间还与等离子体电导率是密切相关的，电导率越大，扩散时间越小，在聚变约束装置中的等离子体，电导率是很高的，这就刚好满足了磁约束的要求。^[15]

本文首先给出单粒子运动的各种物理模型，然后模拟出不考虑电漂移作用下，氘离子在托卡马克磁场中的轨道，在考虑电漂移对氘离子运动轨道的影响之后，通过数值求解电漂移作用下漂移运动方程组，数值模拟出了电漂移对氘离子运动轨道，最后将两者进行对比得出结论。

第二章 带电粒子运动的物理模型

本文的工作都是在单粒子模型下所开展的，考察的等离子体是大量带电粒子所组成的，在众多带电粒子之间是存在着库伦作用力的，同时，这些粒子还常常受到外加力场的作用，带电粒子的运动要改变电磁场的性质，而磁场的改变反过来又影响粒子的运动，所以要准确处理等离子体在电场中的运动是一个十分复杂的问题。

倘若等离子体存在等离子约束的恒定磁场，一般用牛顿定律了解磁场中带电粒子的轨迹，这些带电粒子运动引起的电流和电荷密度对给定磁场的影响等问题可以忽略。因为 的目的是看微观层面上磁场是否约束住等离子体单个粒子，或者是否造成粒子与第一壁的碰撞而损失掉。

理论上，粒子运动大体分为三种类型^[16]。第一种是无碰撞行为，即粒子在时间和空间上渐变的磁场中的长程行为。带电粒子在磁场中沿着螺旋轨道绕着磁力线进行回旋运动，回旋半径通常很小。在平行于磁场方向，粒子可以自由加速运动。如果磁场线环绕其表面但不与壁相交，为了避免粒子沿平行方向的损失，除了回旋运动，粒子还存在各种漂移速度，但是漂移的方向通常不会引起粒子损失。所以很多环形结构可以约束住所有粒子。

第二种粒子运动类型是库伦碰撞，这种类型下的运动，等离子体中的粒子要靠得比较近，也就是说粒子间距离必须要在库伦势的作用范围内才会产生库伦碰撞，这类运动出现机会比较少，因为在高温等离子体中粒子靠得很近并且持续时间又比较长，能影响无碰撞轨道的情形几率很小。尽管如此，库伦碰撞依然重要，它是导致粒子和能量扩散及其类似过程的理论基础。

第三类运动是核聚变碰撞，事实上，整个问题的终极目标就是考察聚变碰撞，因为核聚变碰撞是能量的来源，但在考察粒子作用和运动时，为使问题变得简单，更何况这类碰撞的几率也不大，往往还是忽略掉核碰撞，一般把聚变碰撞看成某种程度的扰动。

总之，概括起来的话，单粒子运动层次结构如下：1、长程电磁场中的无碰撞行为；2、库伦碰撞，较少发生在粒子间近距离库伦势范围内作用；3、聚变碰撞。无碰撞行为提供了近乎完美的单粒子约束，库伦碰撞是造成输运的原因，聚变碰撞产生核能。

在单粒子模型下，由于粒子间不存在任何相互作用，因此 N 个粒子在外电磁场及其它场作用下的运动轨道就可以用一个粒子轨道描述，只是初始条件不同，如果不考虑初始条件的影响时，只需要研究单个粒子轨道就行了。例如，受控核聚变的约束途径，首先就是从带电粒子在磁场中不能完全自由运动而得到启示的，此约束装置中的磁镜，环形仿星器和托卡马克装置等都是为了克服带电粒子沿磁力线方向的自由运动而构想的，在环形装置中普遍采用旋转变换也是首先从单粒子在环形磁场中的轨道研究而定义的，并且针对于旋转变换的特点设计磁场位形。

不仅仅在解析等离子波的过程中，单粒子模型很重要，当研究由碰撞而造成的等离子体输运现象时，无论是定性上描述或者是定量上求解输运方程或动力学方程，也仍然需要依赖单粒子在复杂磁场形态中的轨道描述。

而对于磁流体，由于根本不考虑等离子体中的粒子行为，单粒子轨道描述似乎起的作用不大。然而，在高温磁化等离子体中，粒子在垂直磁场方向上可以有很大的能与磁流体元尺度相比拟的回旋运动半径，在讨论这类问题时，就必须考虑有限回旋半径带来的修正。这种修正也必须基于单粒子轨道描述。

2.1 带电粒子在均匀磁场中的运动

在均匀磁场中，带电粒子一方面可以绕磁力线作回旋运动，另一方面又可以无阻碍的沿磁力线运动而不受阻力。在恒定磁场中， \mathbf{B} 为常量，洛伦兹力方向垂直于粒子的运动速度，它对粒子不会做功，那么这样来看，粒子在磁场中运动时，粒子速度始终不变，动能守恒，在垂直方向上，粒子速度大小也保持常数而不改变，所以等离子体中带电粒子在均匀恒定的磁场环境中，粒子平行于磁场与垂直于磁场的运动相比较，两种运动是相对独立的。

在约束聚变的历史上，针对于粒子在均匀磁场中的运动，相当长一段时间的内，装置实验中出现过两类位形，直线装置为主的磁镜位形以及环形位形。环形位形磁场考虑中，磁场强度不均匀，不过更简单的是以无限长直线电流的磁场随空间位置的变化来讨论，这种电流产生的磁场位形中的磁力线是曲线。

均匀磁场对带电粒子产生的作用，是作为微扰而引入的，所谓微扰力可以是各种力，比如电场力和重力等，微扰力也可以是外电磁场随空间和时间缓慢变化

而产生的等效力，在外磁场和微扰力作用下，带电粒子的运动特点需要用牛顿方程来求解。^[17-20]

2.1.1 均匀磁场中的回旋运动

若粒子质量为 m ，电荷为 q ，磁感应强度为 B ，在洛伦兹力作用下牛顿的运动方程为：

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (2.1)$$

若令 $\vec{\omega} = q\vec{B}/m$ ，上式写成

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\omega} \times \vec{v} \quad (2.2)$$

很明显，描述方程组描述的是匀速圆周运动，角速度为 $-\vec{\omega}$ ，对于电子 $q = e$ ，角速度与 \vec{B} 同方向，对于离子 $q > 0$ ，则角速度会与 \vec{B} 反向。这样的回旋运动对等离子来说为最基本的回旋运动。回旋频率是 $\omega = qB/m$ ，回旋频率大小与粒子质量成反比，电子的质量非常小，离子的质量较大，电子的回旋频率由于质量大小不一样高于离子数量级。 ω 是等离子体物理中几个基本的时间尺度之一，常用来比较物理过程的快慢^[21]。

对于平行于磁场方向，（ B 沿 Z 轴） $dv_z/dt = 0$ ， v_z 是常数，

$$z = z_0 + v_z t \quad (2.3)$$

因此粒子在沿磁场方向上会做匀速直线运动，不会受到磁场影响，在垂直于磁场方向上的运动，有

$$\frac{dv_x}{dt} = \omega v_y \quad \frac{dv_y}{dt} = -\omega v_x \quad (2.4)$$

上式对时间求导得

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = -\omega^2 v_x \quad \frac{d^2 v_y}{dt^2} = -\omega^2 v_y \quad (2.5)$$

解为

$$v_{x, y} = v_{\perp} \cos(\omega t + \varphi_{x, y}) \quad (2.6)$$

其中 v_{\perp} 是在垂直磁场表面内做圆周运动的速度， $\varphi_{x, y}$ 为初始相位，适当选取初始条件，可以使得

$$v_x = v_{\perp} \cos \omega t, \quad v_y = -v_{\perp} \sin \omega t \quad (2.7)$$

积分可得粒子轨道

$$x - x_0 = r \sin \omega t, \quad y - y_0 = r \cos \omega t \quad (2.8)$$

式中 r 为回旋半径，大小为

$$r = \frac{mv_{\perp}}{|q|B} \quad (2.9)$$

又称拉莫尔半径，大小与粒子质量成正比，因此离子轨道半径远大于电子， (x_0, y_0) 称为回旋的中心，也就是引导中心。

拉莫尔半径是等离子体物理中几个基本空间尺度之一，常用来衡量和比较物理量沿空间变化的陡峭程度，大小与 v_{\perp} 成正比，通常取平均速率，每个自由度的热运动平均动能是 $T/2$ ，而磁场方向会有两个自由度，这样， $v_{\perp} = \sqrt{2T/m}$ 离子和电子 r 的数量级大小分别为

$$r_i(mm) = \frac{0.14T_i^{1/2}(ev)}{B(T)} \quad r_e(\mu m) = \frac{3.4T_e^{1/2}(ev)}{B(T)} \quad (2.10)$$

括号内是单位

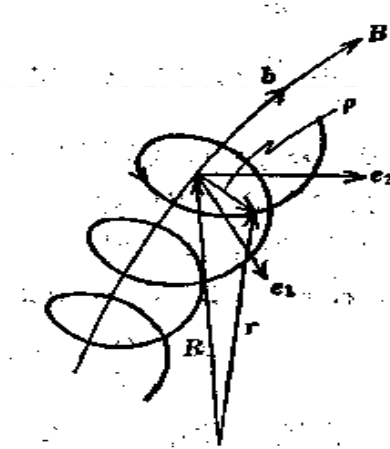


图 2.1 带电粒子在磁场中运动

综上所述，粒子轨道在垂直于磁场平面内做回旋运动，沿磁力线做匀速直线运动，带电粒子在均匀磁场中做螺旋运动，螺旋线的半径是粒子回旋半径。因此粒子的轨迹是一条绕磁感线的螺旋线，就像套在磁感线上的一个环，而环的中心，沿磁力线做匀速圆周运动。

2.1.2 等离子体中的电势

考察的是电漂移对粒子轨道的影响，但在等离子体中，电势已经不是简单的库伦势，电势产生的作用也已经有区别，所以有必要来看一下等离子体中的电

势。真空中的试验电荷在真空中会建立自己的电场，在离它 r 处距离产生电势为

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (2.11)$$

一个点电荷在等离子体中建立的电场，显然，这个试验电荷可以将异号电荷吸引过来，同时可以排斥同号电荷，于是，试验电荷周围一定空间范围内，正负电荷数量不会相等，异号电荷一旦出现过剩，产生的场就会叠加到原来建立的场，新产生场会使原来的静电势减弱，这种减弱的效果就是它们对试验电荷产生的场起到屏蔽。^[22-24]

若电子和离子都处于热平衡状态，那么，其中一个带电粒子周围的静电势满足

$$\nabla^2 \varphi(r) = -\frac{\rho(r)}{\epsilon_0} \quad (2.12)$$

$\rho(r)$ 为 r 处的电荷密度，考虑到粒子分布的球对称性，方程在球坐标系中变形为

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = \frac{e}{\epsilon_0} (n_e - \sum n_\alpha Z_\alpha) \quad (2.13)$$

势场中，服从玻尔兹曼分布的粒子数密度

$$n_e = n_{e0} \exp\left(\frac{e\varphi}{kT_e}\right), \quad n_i = n_{i0} \exp\left(1 - \frac{Z_i e \varphi}{kT_i}\right) \quad (2.14)$$

电子和离子在 $\varphi = 0$ 处的数密度分别是 n_{e0}, n_{i0} ，准中性条件 $n_{e0} = \sum n_{\alpha 0} Z_\alpha$ 满足，假设理想气体条件成立，且该带电粒子较远处时，有 $e\varphi \ll kT_e$ ， $Z_i e \varphi \ll kT_i$ 将上式展开，保留到一阶小量，则有^[25]

$$n_e = n_{e0} \left(1 + \frac{e\varphi}{kT_e} \right), \quad n_i = n_{i0} \exp\left(1 - \frac{Z_i e \varphi}{kT_i}\right) \quad (2.15)$$

将上式带入到泊松方程，利用准中性条件，最后可得

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = \frac{\varphi}{\lambda_D^2} \quad (2.16)$$

其中

$$\lambda_D = \left(\frac{n_{e0} e^2}{\epsilon_0 k T_e} + \frac{Z_i^2 e n_{i0}}{\epsilon_0 k T_i} \right)^{-1/2} \quad (2.17)$$

称为德拜半径，它是等离子物理中最重要的特征参量之一，假定离子分布不动，

可以求出电子德拜半径

$$\lambda_D = \left(\frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 k T_e} \right)^{-1/2} = 69 \left(\frac{T_e [K]}{n_e [m^{-3}]} \right)^{1/2} \quad (2.18)$$

类似的，离子德拜半径为

$$\lambda_D = \left(\frac{Z_i^2 e^2 n_{i0}}{\varepsilon_0 k T_e} \right)^{-1/2} = 69 \left(\frac{T_i [K]}{n_i [m^{-3}]} \right)^{1/2} \quad (2.19)$$

德拜势的具体表达形式为

$$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) \quad (2.20)$$

由上面分析可以知道，对于准中性条件 $L \gg \lambda_D$ ，理解如下，L为等离子体的特征尺度，因为只有在大于 λ_D 的尺度上，才能谈及此带电粒子的系统是电中性的，从这个意义上讲， λ_D 给出了带电粒子系统为等离子体的一个依据，当它的尺度比 λ_D 小，就不成其为等离子体，只是一些简单带电粒子的简单集合，只有当带电粒子整体上呈现电中性，讨论其集体行为才会有意义。

在整个考虑问题的过程中，曾假定数密度统计分布，略去了粒子独立性引起的微观起伏带来的影响，这时 $\phi(r)$ 是一个连续函数，要做到这一点，必须要求德拜球内的粒子数相当大，需要满足另外一个尺度

$$g = \frac{1}{n\lambda_D^3} \ll 1 \quad (2.21)$$

g是无量纲的，是平均势能与平均自由能之比的一个度量。如果 $g \ll 1$ ，则可以把等离子体看成理想气体。对大多数等离子体来说， $g \ll 1$ 总是满足的，集体效应起主导作用。

2.1.3 电漂移

若存在一个恒定的小电场 \vec{E} ，带电粒子的运动方程形式将发生改变，可以表示为：

$$B_t = B_{to} \left(\frac{R_0}{R_0 + r \cos \theta} \right) = B_{to} \left(1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta \right) \quad (2.22)$$

电场可分解为

$$\vec{E} = \vec{E}_{//} + \vec{E}_{\perp} \quad (2.23)$$

带电粒子沿磁场方向可以做匀加速运动，经过一段时间后，速度可以变得大，并且，电荷由于正负沿相反方向运动，一方面引起大范围电荷分离，形成电场，另一方面形成了电流，并且产生感应电场，以致磁场的形态发生改变，单粒子轨道理论不适用。粒子在平行于磁场方向做匀速运动不是考察重点，主要考察粒子垂直磁场方向的运动特点。^[26]

$$m \frac{d\vec{v}_\perp}{dt} = q(\vec{v} \times \vec{B}) + q\vec{E} \quad (2.24)$$

把粒子速度写成另外的形式

$$\vec{v}_\perp = \vec{v}'_\perp + \vec{v}_D \quad (2.25)$$

代入得到

$$m \frac{d\vec{v}'}{dt} = q(\vec{v}'_\perp \times \vec{B}) + q(\vec{v}_D \times \vec{B}) + q\vec{E} \quad (2.26)$$

因 \vec{v}'_\perp 代表回旋运动，它满足

$$m \frac{d\vec{v}'_\perp}{dt} = q(\vec{v}'_\perp \times \vec{B}) \quad (2.27)$$

于是得：

$$q(\vec{v}_D \times \vec{B}) + q\vec{E} = 0 \quad (2.28)$$

用 \vec{B} 叉乘式 (2.28)，化简后得电漂移速度

$$\vec{v}_D = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \quad (2.29)$$

由速度公式知，带电粒子漂移方向垂直于磁场和电场，与漂移速度的大小因素很少。

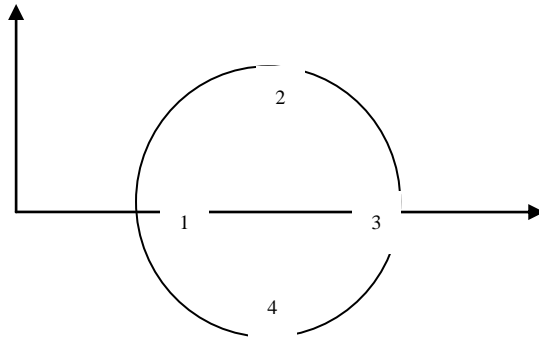


图2.2 E_\perp 对正电粒子的作用

下一步建立起 $\vec{E} \times \vec{B}$ 漂移的物理图像^[27-29]，说明垂直电场的存在如何与德拜屏蔽相互作用协调。回旋半径随着垂直速度增加而增大，考虑电场作用后，带正

电的粒子由1位置运动到2位置。电场使粒子加速，由2到3时，粒子运动变慢，又回到原来的速度。注意到轨道的上半部分，每一点的速度都比不考虑电场时的速度大，也就是说，回旋半径平均来看是增大的。轨道下半部分的平均速度比不考虑电场时要小，也就是说，平均来看，回旋半径较不考虑电场时的要小。

这是粒子带正电的情况，这种效应综合的结果显示在图3上，轨道上半部分的垂直速度大，而下半部分的垂直速度小，这样，平均回旋半径的不同导致了垂直于 \vec{E} 和 \vec{B} 的漂移，并且，漂移方向与电荷符号无关。

最后，解释垂直电场和德拜屏蔽同时存在的原因^[29]。有两种考虑方法。首先注意到电子和粒子具有相同的漂移的速度，这个速度相当于一个不引起电流的宏观流体的流速， $\vec{E} \times \vec{B}$ 漂移速度可以写成 $\vec{E}_{\perp} + \vec{\mu}_{\perp} \times \vec{B} = 0$ 。在低频的电磁理论里，在以速度 $\vec{\mu}_{\perp}$ 运动到流体的电场和磁场能够通过关系 $\vec{E}'_{\perp} = \vec{E}_{\perp} + \vec{\mu}_{\perp} \times \vec{B}$ 和 $\vec{B}' = \vec{B}$ 变换到随着流体运动的坐标系。因此在流体静止的坐标系中， $\vec{E}'_{\perp} = 0$ ，这和德拜屏蔽原理是一致的。

第二种方法稍显微妙，等离子体存在小的垂直电场，这将涉及自洽等离子体模型的发展和求解。定性的说，这种电场的产生是因为垂直于磁场的电子和离子受到此约束不能自由留到那个，不能屏蔽局部可能产生的电荷不平衡。可以证明，这些不平衡是电子和粒子回旋半径不同的结果，由此产生大小为 $e\phi \sim T$ 的电势。

[30-31]

总的说来，在带电粒子运动的导心论中， $\vec{E} \times \vec{B}$ 漂移是横越磁场的基本漂移之一。

2.2 带电粒子在非均匀磁场中的运动

磁场不均匀分两种，一种磁力线笔直，但各点疏密程度不一样，也就是各点磁场强度不相等。另外一种磁力线虽然处处均匀分布，但磁力线确是弯曲的。这两种情况会导致漂移。

在非均匀磁场中带电粒子运动非常复杂，磁场本身的空间分布会对带电粒子的运动发生作用，如何描述磁场的非均匀性，即磁场的空间变化率，是磁场的矢量导数来决定，假设磁场中那一点为原点，Z轴与坐标原点B方向重合，即 $B_x(0) = B_y(0) = 0$ ， $B_z(0) = B$ ，由于磁场的非均匀性，原点附近有不同方向的其他分量，每个分量都可以随着x, y, z中一个改变而改变。所以磁场矢量导数是个

张量^[32-34]

$$\nabla \vec{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{B}_x}{\partial x} & \frac{\partial \vec{B}_y}{\partial x} & \frac{\partial \vec{B}_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \vec{B}_x}{\partial y} & \frac{\partial \vec{B}_y}{\partial y} & \frac{\partial \vec{B}_z}{\partial y} \\ \frac{\partial \vec{B}_x}{\partial z} & \frac{\partial \vec{B}_y}{\partial z} & \frac{\partial \vec{B}_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

式中9个分量为四类，分别为

$$\text{散度项: } \frac{\partial \vec{B}_x}{\partial x} \quad \frac{\partial \vec{B}_y}{\partial y} \quad \frac{\partial \vec{B}_z}{\partial z}$$

$$\text{梯度项: } \frac{\partial \vec{B}_z}{\partial x} \quad \frac{\partial \vec{B}_z}{\partial y}$$

$$\text{曲率项: } \frac{\partial \vec{B}_x}{\partial z} \quad \frac{\partial \vec{B}_y}{\partial z}$$

$$\text{剪切项: } \frac{\partial \vec{B}_x}{\partial y} \quad \frac{\partial \vec{B}_y}{\partial x}$$

对于托卡马克磁场，磁场存在梯度和曲率

$$\nabla \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial \vec{B}_z}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial \vec{B}_z}{\partial y} \\ \frac{\partial \vec{B}_x}{\partial z} & \frac{\partial \vec{B}_y}{\partial z} & 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{b} = \frac{\vec{B}}{B}$ 表示磁力线的单位矢量，空间曲线方向发生相应的变化时，切线矢量

的增量来表示曲率 $\frac{d\vec{b}}{dl} = \frac{1}{R_c}$ ，其中 R_c 为曲率半径，故 \vec{R}_c 曲率半径矢量方向由曲

率中心指向曲线， $\frac{d\vec{b}}{dl}$ 曲率矢量方向是由曲线上该点指向曲率中心， $(\vec{b} \cdot \nabla)$ 表示

沿磁力线方向的方向导数算符，这样一来，有

$$\begin{aligned} \frac{\vec{R}_c}{R_c} &= -(\vec{b} \cdot \nabla) \vec{b} \\ -(\vec{b} \cdot \nabla) \vec{b} &= \frac{d\vec{b}}{dl} \end{aligned}$$

粒子的速度分为三部分，平均与磁场的分量垂直于磁场的分量和漂移速度

$$\vec{v} = \vec{v}_{//}\vec{b} + \vec{v}_{\perp} + \vec{v}_D$$

导引中心在平行于磁场方向上的速度是

$$v_{//} = \sqrt{\frac{2}{m}(W - q\phi - \mu B)} \quad (2.30)$$

ϕ 是静电势，在不存在静电势作用下，粒子在不均匀磁场中将不断进行平行能量和垂直能量间转换。

漂移运动速度由下式表示

$$\vec{v}_{D\perp} = \frac{\vec{F}_G \times \vec{B}}{qB^2} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} + \vec{b} \times \left[\frac{\mu \nabla B + mv_{//}^2 (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{b} + mv_{//}^2 \frac{\partial \vec{b}}{\partial t}}{qB} \right] \quad (2.31)$$

在垂直方向上引导中心所受的力表示为

$$\vec{F}_G = q\vec{E} - \mu \nabla B - mv_{//}^2 (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{b} - mv_{//}^2 \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} \quad (2.32)$$

2.2.1 带电粒子的梯度漂移

磁场不均匀性可以用磁场梯度表示，方向由弱指向强。磁场越强，拉莫尔半径越小，磁场越弱，拉莫尔半径越大，所以必然会引起漂移运动。

假定没有电场，磁场的方向是均匀的，但是磁场的大小不均匀，并且磁感应强度的梯度于磁场方向垂直， $\nabla B \perp \vec{B}$ ，即磁感线是直的，但磁感线的疏密有变化。这种情况下回旋中心的漂移运动可由物理图像直观地给出。设磁场沿Z方向，梯度沿y方向，则回旋轨道的上半圆的磁感线比下半圆密，回旋半径比下半圆小，离子的回旋方向与电子的回旋方向不同。^[35]

对于非均匀磁场，可以将磁感应强度在回旋中心展开成

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + (\vec{r} \cdot \nabla) \vec{B}_0 + \dots$$

或写成分量形式

$$B_z = B_0 + y \left(\frac{\partial B_0}{\partial y} \right) + \dots$$

其中 B_0 是回旋中心所在点的磁场强度， \vec{r} 是位置矢量。假定了弱非均匀性，忽略展开的高阶项，则在洛伦兹力下的方程为

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B}_0 + q\vec{U} \times (\vec{r} \cdot \nabla) \vec{B}_0 \quad (2.33)$$

其中 $\vec{v} = \vec{v}_c + \vec{v}_D$ ，根据回旋中心漂移近似，回旋速度 \vec{v}_c 满足方程

$$m \frac{d\vec{v}_c}{dt} = q\vec{v}_c \times \vec{B}_0 \quad (2.34)$$

即这是局域的拉莫尔回旋，是零阶近似，而漂移运动是对运动方程 (2.3.3) 在一个回旋周期内的平均，也就是说把局域回旋运动的速度和位矢代入 (2.33) 进行平均。因为 $\langle \vec{v}_c \rangle = 0$ ，平均的洛伦兹力是^[36]

$$\langle \vec{F} \rangle = q \langle \vec{v}_c \times (\vec{r}_c \cdot \nabla) \vec{B}_0 \rangle$$

这里已经忽略了高阶小量，将回旋运动的速度和位矢

$$\begin{aligned} v_{cx} &= v_{\perp} \cos \omega_c t \\ v_{cy} &= -v_{\perp} \sin \omega_c t \\ x_c &= r_c \sin \omega_c t \\ y_c &= r_c \cos \omega_c t \end{aligned} \quad (2.35)$$

代入平均可得

$$\langle F_x \rangle = 0$$

定义磁矩

$$\mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2B} \quad (2.36)$$

则有

$$\langle F_y \rangle = -\mu \frac{\partial B}{\partial y} \quad (2.37)$$

将 $\langle \vec{F} \rangle$ 代入任意力场漂移速度表达式，则梯度引起的漂移

$$\vec{v}_{\nabla B} = \frac{\langle \vec{F} \rangle \times \vec{B}}{qB^2} = -\frac{1}{2} \frac{v_{\perp} r_c}{B} \frac{\partial B}{\partial y} \vec{e}_x \quad (2.38)$$

因为坐标方向是任意取的，则可将上式一般化成

$$\begin{aligned} \langle \vec{F} \rangle &= -\mu \nabla B \\ \vec{v}_{\nabla B} &= \frac{1}{2} v_{\perp} r_c \frac{\vec{B} \times \nabla B}{B^2} \end{aligned} \quad (2.39)$$

由上式可见，梯度漂移速度的方向与磁感应强度及其梯度的方向垂直，数量级为

$\frac{v_{\nabla B}}{v_{\perp}} \sim \frac{r_c \nabla B}{B} \sim \frac{r_c}{L} \ll 1$ ，与回旋半径成正比，离子的漂移速度和漂移方向和电子都不同。

2.2.2 带电粒子的曲率漂移

磁场的非均匀性除了存在梯度，一般还有磁场的弯曲。梯度相当于横向不均匀性，而弯曲则相当于纵向不均匀性。若磁力线的曲率半径是个常数，由于磁力线是弯曲的，带电粒子必然受一个惯性力作用，在这个力的作用下粒子产生的漂移称为曲率漂移，这种漂移也跟电荷有关，电子和离子漂移方向相反。

在以它作为原点的坐标系中，带电粒子将感受到一个惯性离心力的作用

$$\vec{F} = \frac{mv_{\parallel}^2}{R_c} \vec{e}_r \quad (2.40)$$

这个力产生一个漂移速度

$$\vec{v} = \frac{\vec{F} \times \vec{B}}{qB^2} = \frac{mv_{\parallel}^2}{qB^2} \frac{\vec{R}_c \times \vec{B}}{R_c^2} \quad (2.41)$$

叫做曲率漂移速度，粒子电荷不同，漂移方向不同。

磁场弯曲时 ∇B 的计算如下，磁场沿 θ 方向， ∇B 沿 r 方向， r 与 θ 方向垂直，则 $\nabla \times \vec{B}$ 沿 z 方向，真空中 $\nabla \times \vec{B} = 0$ ，于是有 $(\nabla \times \vec{B})_z = \partial(rB_{\theta})/\partial r$ 。因此 $B_{\theta} \propto 1/r$ ，亦即 $|B| \propto 1/R_c$ ，有 $\nabla|B|/|B| = -R_c/R_c^2$ ，代入梯度漂移公式得：

$$\vec{v}_{\nabla B} = -v_{\perp} r_c \vec{B} \times \vec{R}_c / 2B^2 R_c^2 = mv_{\perp}^2 \vec{R}_c \times \vec{B} / 2qB^2 R_c^2 \quad (2.42)$$

则总的漂移速度为：

$$\vec{v}_{\vec{R}_c} + \vec{v}_{\nabla B} = \frac{m\vec{R}_c \times \vec{B}}{qB^2 R_c^2} (v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2 / 2) \quad (2.43)$$

第三章 电漂移作用下的高能粒子轨道

3.1 高能粒子运动轨道的研究背景

实现聚变反应需要将高能粒子约束到足够时间以维持足够温度，所以高能粒子的损失会严重影响到聚变反应的进行，还会给托卡马克器壁带来很重的负荷。粒子的损失分为两条途径：一是集体损失，它是由高能粒子通过驱动不稳定性影响造成。二是单粒子的初始轨道损失，它是由于高能粒子未被角向磁场约束住，致使轨道偏离撞击器壁损失。通常认为粒子的初始轨道损失数量较少，但对于托卡马克中高能粒子就不太一样，所以确定高能粒子在托卡马克中的运动轨道是很重要的问题。

在众多的文献资料中，要确定粒子的轨道，一般只要确定粒子的导心轨道，确定粒子的导心轨道，无论是利用漂移运动方程组求解还是利用三个运动常数求解，静电势的作用都未做考虑，也就是电漂移项的作用未做考虑，事实上，不考虑电漂移的作用并不是认为电漂移不重要，相反电漂移的作用非常重要，而且不得不考虑。由于不同场所决定的速度都是各自独立的，首先把这些速度分别以控制变量的方法求出来，然后再把这些速度以矢量法则叠加起来，最后求得总的漂移速度。就得到各种漂移作用下的粒子轨道。

在本文中，首先模拟计算出不考虑电漂移作用的氘离子轨道，再模拟计算出考虑电漂移作用后的氘离子轨道，最后将两者做对比，得出差异，并对差异进行分析。

3.2 托卡马克磁场中高能粒子运动模型

在简单的环形磁场区域中，带电粒子不会局域在一个区域，有可能在各种力的作用下损失掉，要想有限体积的等离子体保持在平衡态，需要一些补救方法，为了更清楚的了解托卡马克位形，先细致考虑带电粒子在简单环形磁场中的运动特点。

电场的电漂移

$$\vec{v}_E = c \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \quad (3.1)$$

这个电漂移的作用对于等离子体的研究非常重要，它是构成磁流体运动和微观粒子输运的基础。

而对于通电螺旋管建立起来的简单的环形闭合磁场,靠近圆环内侧的磁场较强,外侧的较弱,由于磁力线不是直线的,管内的带电粒子梯度漂移和曲率漂移漂移速度是

$$\vec{v}_{\vec{R}_c} + \vec{v}_{\nabla B} = \frac{m}{q} \frac{\vec{R}_c \times \vec{B}}{R_c^2 B^2} \left(v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} v_{\perp}^2 \right) \quad (3.2)$$

由上式知,由于正负电荷漂移方向不同,所以引起正负电荷的分离,这些电荷将建立起一个电场E,于是管中带电粒子同时还要受到一个电漂移,它也使带电粒子向管壁运动。综合所述,在简单圆环形磁场位形中,运动着的带电粒子总要跑向管壁,也就是说,简单圆环磁场不能有效地把带电粒子约束在一个有限的空间区域。

圆环形磁场不能有效约束带电粒子的主要原因是因为这种磁场的磁力线是一个简单的圆周,粒子在圆环形磁场中的漂移运动方向始终相同,于是,粒子连续的趋向管壁的同侧,这样粒子最终要离开中心区域而跑到壁中去,在存在漂移运动的情况下,如何使粒子保持在中心区域附近呢?一个有限的办法就是把圆环磁场改成非圆环磁场。原来在沿大环方向的圆环磁场上叠加小环方向的磁场产生合乎要求的合磁场。这时,粒子沿磁力线运动,相对于中心,其漂移方向发生改变,有时离开中心去,有时有趋向中心轴,在垂直于中心轴的某一界面来看,粒子只在中心附近运动,而不是飘向管壁,按照上述思想建立的典型磁场位形就是托卡马克。

在环形磁场位形中,分析带电粒子在具有旋转变换下运动特点,磁力线沿大环运动时,也绕极向运动,绕大环方向一周后,磁力线并不回到出发点。在垂直于磁轴的某一截面来看,一条磁力线与截面多次相交的交点位置分布于磁轴与该截面交点的上下左右。以电子为例,当它沿磁力线运动时,每次穿过该截面时的位置各不相同。当磁力线在磁轴上方,电子向上漂,电子离开磁轴而去,当磁力线转到磁轴下方时,它也向上漂不过这时电子接近磁轴。这样粒子的漂移导致引导中心在磁轴附近的运动,而不会导致粒子定向地向管壁某一侧运动,亦不会带来等离子体整体的位移。带电粒子基本上保持在靠近在磁轴附近的区域,粒子也就被环形磁场约束住了。当然这里要求粒子沿大环运动足够快,同时转动变换角足够大,这样粒子向着和离开磁轴的漂移平均的说才会抵消,但是沿磁力线运动非常缓慢的粒子还是要损失掉。

在上述托卡马克位形中，对于一条磁力线，沿着大环方向进动时，所以磁力线有的部分环绕在大环外侧，有的部分处在大环内侧，经过的区域，有的地方磁场强，有的地方磁场弱，看成存在某种程度上的磁镜结构，磁场位形的这一特点将影响带电粒子沿磁力线的运动行为，在这种磁场位形中运动的粒子可以分为两大类。一类称为通行粒子，速度矢量与磁场夹角较小。另一类是捕获粒子，速度矢量与磁场夹角大，不通过强磁场区，只能沿磁力线在两个强磁场区域构成局部的磁镜间来回运动，其引导中心在轨道截面的投影是香蕉形状，为香蕉粒子。

在经典力学中，为了求出粒子在力场中的运动规律，一般需要解微分方程。但是，如果存在运动不变量，求解粒子轨道就变得简单。在等离子体中，也希望找到一些不变量，依靠这些不变量在讨论较为复杂的运动时，能给出粒子运动的一些性质。

一般说来，一个系统在运动时，它的有关参量是不断变化的，于是，描述系统发展一些物理量也随时间改变，然而存在这样一些情况，对于一定条件下的系统的发展，一些物理量按某种方式的组合，在系统参数缓变的情况下，近似的保持不变，这样一些量称为浸渐不变量或绝热不变量。这里的浸渐不变意味着变化非常慢，显然这种不变量不是运动常数，然而由于浸渐不变性，它们对于研究系统的发展非常有用。^[37]

3.2.1 通行粒子的运动

由于托卡马克磁场位形的特殊性，粒子在其磁场运动的特殊性，必须研究通行粒子和俘获粒子的运动特性，对于通行粒子，感兴趣的是它的偏离磁面的距离，带电粒子漂移速度

$$\vec{v}_{DD} \approx \frac{mv_T^2}{qBR} \vec{e} \quad (3.3)$$

其中 $v_T = \sqrt{\frac{T}{m}}$ 是粒子热速度，一般更关心粒子轨道在坐标面的投影，引进的 x, y 坐标系，和 r, θ 坐标系，磁面的小圆圆心是坐标原点。

$$\frac{dx}{dt} = v_{//} \frac{B_\theta}{B} \frac{y}{r} \quad (3.4)$$

$$\frac{dy}{dt} = -v_{//} \frac{B_\theta}{B} \frac{x}{r} + v_{DB} \quad (3.5)$$

以 dy 乘 (3.4)，以 dx 乘 (3.5)，后者减前者有

$$\frac{B_\theta}{B} \frac{1}{r} (x dx + y dy) = \frac{v_{DB}}{v_{//}} dx \quad \text{或} \quad \frac{dr}{dx} = \frac{v_{DB}}{v_{//}} \frac{B}{B_\theta} = a_0 \quad (3.6)$$

其中 $v_{//}$ 可以认为是常数，因此 a_0 也是常数当 $a_0 \ll 1$ 时，积分上述此式，并略去含 a_0^2 的项，可以求得

$$r = r_0 + a_0 x = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.7)$$

或者

$$x^2 + y^2 = r_0^2 + 2r_0 a_0 x + a_0^2 x^2 \approx r_0^2 + 2r_0 a_0 x \quad (3.8)$$

即

$$(x - a_0 r_0)^2 + y^2 = r_0^2 (1 + a_0^2) \approx r_0^2 \quad (3.9)$$

这近似是一个圆的方程，圆心相对于0点向右移动 $a_0 r_0$ 处在点 $(a_0 r_0, 0)$ ，所以通行粒子也是被很好的约束住。

对于粒子投影在xy平面上，沿逆时针回转的情形，可以推出

$$\frac{dr}{dx} = -\frac{v_{DB}}{v_{//}} \frac{B}{B_\theta} = -a_0 \quad (3.10)$$

$$(x + a_0 r_0)^2 + y^2 = r_0^2 \quad (3.11)$$

$a_0 r_0$ 可以近似表示为

$$a_0 r_0 = \frac{v_{DB}}{v_{//}} \frac{B}{B_\theta} r_0 \approx q r_C \quad (3.12)$$

安全因子值在2-3的时候，通行粒子漂移面中心相对此面中心的漂移约为粒子回旋半径的2到3倍。

对于通行粒子，偏离磁面距离最大时

$$dr = -\frac{v_{//}^2 + \frac{1}{2} v_{\perp}^2}{\Omega v_{//}} q(r) \sin \theta d\theta \quad (3.13)$$

积分得到

$$\begin{aligned} \int_0^\pi dr &= -\int_0^\pi \frac{v_{//}^2 + \frac{1}{2} v_{\perp}^2}{v_{//}} q(r) \sin \theta d\theta \\ &\approx -\int_0^\pi \frac{q(r)}{\Omega} v_{//} \sin \theta d\theta = -\frac{2q(r)}{\Omega} v_{//} \end{aligned} \quad (3.14)$$

所以最大偏离距离

$$\Delta r = \frac{-2q(r)}{\Omega} v_{//} \quad (3.15)$$

粗略的估计，通行粒子在径向偏离磁面的最大距离数量级是回旋半径的几倍。

3.2.2 捕获粒子的运动

而对于俘获粒子，感兴趣的是香蕉粒子轨道的宽度表达式，如果没有漂移，捕获粒子轨道投影还是一段圆弧，考虑漂移后，回到方程

$$\frac{dr}{dx} = \pm \frac{v_{DB}}{v_{//}} \frac{B}{B_\theta} \quad v_0^2 = v_{//}^2 + v_\perp^2 = \text{常数} \quad (3.16)$$

这里 $v_{//}$ 不是常数，在 $B = B_M$ 处， $v_{//} = 0$ ， $\frac{W_\perp}{B}$ 不变

$$\frac{\frac{1}{2}mv_\perp^2}{B} = \frac{\frac{1}{2}mv_0^2}{B_M} \quad (3.17)$$

于是

$$v_{//} = \sqrt{v_0^2 - v_\perp^2} = v_0 \sqrt{1 - \frac{B}{B_M}} \quad (3.18)$$

考虑到 $B \approx B_\varphi \approx B_0 \left(1 - \frac{x}{R_0}\right)$ 于是

$$v_{//} = v_0 \sqrt{\frac{x - x_M}{R_0 - x_M}} \approx v_0 \sqrt{\frac{x - x_M}{R_0}} \quad (3.19)$$

将此式代入有

$$\frac{dr}{dx} = \pm \frac{v_{DB} B}{B_\theta} \frac{\sqrt{R_0}}{v_0 \sqrt{x - x_M}} \quad (3.20)$$

积分， B 、 B_θ 是常数， $B_\theta \approx B$

$$r - r_0 = \pm \frac{2v_{DB}B_0}{v_0 B_\theta} \sqrt{R_0(x - x_M)} \quad (3.21)$$

其中 $x = r_0 \cos \theta$, $x_M = r_0 \cos \theta_M$ ， θ_M 是转折点的方位角

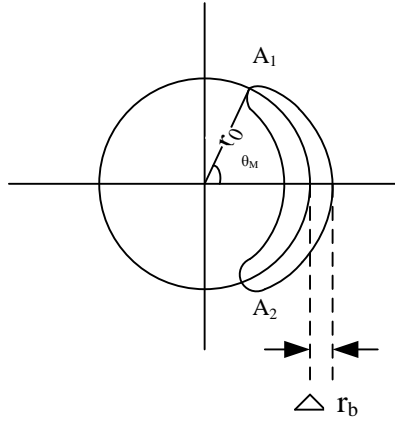


图3.1 捕获粒子的香蕉轨道

磁面圆弧的最大偏离在 $\theta = 0$ 处

$$\Delta r_b = \frac{2v_{DB}B_0}{v_0B_\theta} \sqrt{R_0r_0(1 - \cos \theta_M)} \quad (3.22)$$

上述结果近似表为

$$\begin{aligned} \Delta r_b &= \pm \frac{2 \frac{mv_T^2}{qB_0R} B_0}{v_TB_\theta} \sqrt{R_0r_0(1 - \cos \theta_M)} \\ &= 2 \frac{mv_T}{qB_\theta} \sqrt{\frac{r_0}{R_0}(1 - \cos \theta_M)} = 2r_{C,\theta} \sqrt{\varepsilon(1 - \cos \theta_M)} \\ &\approx 2r_{C,\theta} \sqrt{\varepsilon} = 2qr_C / \sqrt{\varepsilon} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Δr_b 叫做香蕉宽度，大约是回旋半径的10倍。

对于俘获粒子，反弹轨道在小截面的投影是香蕉形状，该类粒子定义为香蕉粒子，香蕉宽度是很重要的指标

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{q(r)v_\perp^2}{2\Omega v_\parallel} \sin \theta \quad (3.24)$$

而

$$v_\parallel = \sqrt{\frac{2}{m}(W - \mu B)} \quad (3.25)$$

$$B \approx B_o \left(1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta \right) \quad (3.26)$$

因此可以得到

$$\begin{aligned}
\frac{dv_{\parallel}^2}{d\theta} &= -\frac{2\mu}{m} \frac{dB(\theta)}{d\theta} \approx -\frac{2\mu B_0}{m} \frac{d}{d\theta} \left(1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta \right) \\
&= -\frac{2\mu B_0}{m} \frac{r}{R_0} \sin \theta \\
&= -v_{\perp}^2 \frac{r}{R_0} \sin \theta
\end{aligned} \tag{3.27}$$

(3.27) 可以改写成

$$\sin \theta d\theta = -\frac{R_0}{v_{\perp}^2 r} dv_{\parallel}^2 \tag{3.28}$$

(3.28) 代入 (3.24) 得到

$$dr = -\frac{q(r)v_{\perp}^2}{2\Omega v_{\parallel}} \sin \theta d\theta = \frac{q(r)R_0}{\Omega r} dv_{\parallel} \tag{3.29}$$

将 $\Omega = qB/m$, $q(r) = rB/R_0 B_p$ 代入 (3.29), 并定义 $\Omega_p = qB_p/m$ 为极向回旋频率, 可以得到

$$dr = \frac{1}{\Omega_p} dv_{\parallel} \tag{3.30}$$

积分后得到

$$r = r_0 + \frac{v_{\parallel}}{\Omega_p} \tag{3.31}$$

托卡马克中的捕获粒子香蕉宽度是回旋半径的10倍左右, 是等离子体小截面半径的十分之一, 所以捕获粒子也是被约束住了的。

再计算求出捕获粒子的所占份额, 环形磁场的临界角 θ_c 有

$$\sin \theta_c = \sqrt{\frac{B_m}{B_M}} = \sqrt{\frac{1}{\eta}} \tag{3.32}$$

由公式得

$$B_M \approx B_0 \left(1 + \frac{r_0}{R_0} \right) \quad B_m \approx B_0 \left(1 - \frac{r_0}{R_0} \right) \tag{3.33}$$

令 $\frac{r_0}{R_0} = \varepsilon$, 则得

$$\sin \theta_c = \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \tag{3.34}$$

又根据逃逸锥所占立体角的份额是 $P = 1 - \cos \theta_c$ ，故捕获粒子在全部粒子所占份额是

$$f = 1 - P = \cos \theta_c = \sqrt{1 - \frac{B_m}{B_M}} = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon}} \approx \sqrt{2\varepsilon}$$

3.3 托卡马克磁场中高能粒子的轨道

托卡马克磁场由大环方向的纵场和角向磁场合成的螺旋磁场组成，角向磁场克服了等离子体朝向器壁的漂移，表示为

$$\vec{B} = B_t \vec{e}_\varphi + B_p \vec{e}_\theta \quad (3.35)$$

定义磁场的单位矢量

$$\vec{b} = \frac{\vec{B}}{B} = \frac{B_p}{B} \vec{e}_\theta + \frac{B_t}{B} \vec{e}_\varphi \quad (3.36)$$

一般的， $B_t \gg B_p$

$$\vec{b} = \frac{\vec{B}}{B} = \frac{B_p}{B} \vec{e}_\theta + \frac{B_t}{B} \vec{e}_\varphi = \frac{B_p}{B} \vec{e}_\theta + \vec{e}_\varphi \quad (3.37)$$

在托卡马克中，磁场显然不均匀，假设磁轴处磁场为 B_{t0} ，则在环坐标系中，托卡马克磁场近似表示为

$$B \approx B_t = B_{t0} \left(\frac{R_0}{R_0 + r \cos \theta} \right) = B_{t0} \left(1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta \right) \quad (3.38)$$

托卡马克磁场位形如图3.2所示

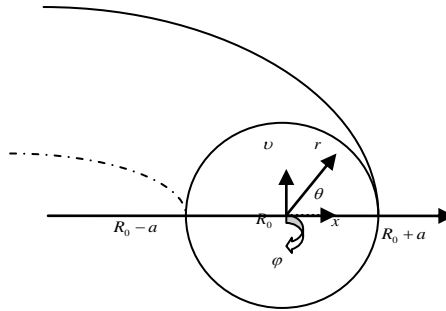


图3.2 托卡马克几何坐标图

一般地， $r/R_0 \ll 1$ ，若将总磁场展开，发现在极向角为零时，磁场是最弱的。极向角往 $\pm \pi$ 变化时，磁场渐渐变大，所以带电粒子在托卡马克中还是会遇到两个强磁场区域，这样一来， $v_{||}$ 足够大的粒子也就是通行粒子能够穿越强磁场区

域， v_{\parallel} 足够小的粒子遇到强磁场区域时，速度太小就不会通过，被反射回来，被捕获在两个强磁场区域，不能绕环一周，导引中心的轨迹在等离子体截面上的投影具有香蕉形状，叫做香蕉粒子。

对于托卡马克中带电粒子回旋的部分，由于频率高，所以实质上，导引中心的运动是重点，导引中心的运动包括平行于磁场和垂直于磁场两种运动。

$$\frac{d\vec{x}_c}{dt} = v_{\parallel}\vec{b} + \vec{v}_D \quad (3.39)$$

为简单起见，忽略电势和引力，且对于缓变磁场 $\partial\vec{b}/\partial t = 0$ ，将 v_{\parallel} 和 \vec{v}_D 写成如下形式

$$\begin{aligned} v_{\parallel} &= \sqrt{\frac{2}{m}(W - \mu B)} \\ \vec{v}_D &= \frac{\vec{b} \times [\mu \nabla B + m v_{\parallel}^2 (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{b}]}{m \Omega} \end{aligned} \quad (3.40)$$

在托卡马克中曲率可以近似表示为

$$(\vec{b} \cdot \nabla) \vec{b} \approx \frac{\nabla B}{B} \quad (3.41)$$

\vec{v}_D 可以表示为

$$\vec{v}_D = \frac{\vec{b} \times \nabla B}{B \Omega} \left(\mu + \frac{m v^2}{B} \right) \quad (3.42)$$

将

$$\mu = \frac{m v_{\perp}^2}{2B} \quad (3.43)$$

代入上式

$$\vec{v}_D = \frac{\vec{b} \times \nabla B}{B \Omega} \left(v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{B} \right) \quad (3.44)$$

在环坐标下有：

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_{\varphi} \quad (3.45)$$

$$\nabla B = \frac{\partial B}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial B}{\partial \theta} \vec{e}_{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial B}{\partial \varphi} \vec{e}_{\varphi} \quad (3.46)$$

将托卡马克磁场代入

$$\nabla B = \frac{B_0}{R_0} (-\cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta) \quad (3.47)$$

$$\frac{\nabla B}{B} = \frac{\nabla B}{B_0} = \frac{1}{R_0} (-\cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta) \quad (3.48)$$

将 (3.48) 代入 (3.44) 得到

$$\begin{aligned} \vec{v}_D &= \frac{1}{\Omega} \left(v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{B} \right) \left(\vec{e}_\varphi + \frac{B_p}{B} \vec{e}_\theta \right) \times \left(\frac{1}{R_0} (-\cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta) \right) \\ &= \frac{1}{\Omega R_0} \left(v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{B} \right) \left(-\sin \theta \vec{e}_r - \cos \theta \vec{e}_\theta + \frac{B_p}{B} \cos \theta \vec{e}_\varphi \right) \end{aligned} \quad (3.49)$$

导引中心方程

$$\frac{d\vec{x}_G}{dt} = v_{\parallel} \vec{b} + \frac{1}{\Omega R_0} \left(v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right) \left(-\sin \theta \vec{e}_r - \cos \theta \vec{e}_\theta + \frac{B_p}{B} \cos \theta \vec{e}_\varphi \right) \quad (3.50)$$

在托卡马克中，用径向、极向和环向的单位向量去点乘 (3.50) 式，便得到径向、极向和环向的导引中心方程，而粒子的速度可以表示为

$$\vec{v} = v_{\parallel} \frac{\vec{B}}{B} + \frac{1}{\Omega} \left(v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} v_{\perp}^2 \right) \frac{\vec{B} \times \nabla B}{B^2} + \frac{\vec{B} \times \nabla \phi}{B^2} \quad (3.51)$$

Ω 是回旋频率， ϕ 为电势，方程第一项为平行磁场的分量，第二项是曲率漂移和梯度漂移合并的形式，方程右边第三项是电漂移的形式。

忽略静电势作用的引导中心方程分别用环坐标单位向量点乘导引中心方程，得到忽略电漂移作用下径向、极向和环向的导引中心方程

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= -\frac{v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} v_{\perp}^2}{\Omega R_0} \sin \theta + v_{\parallel} \frac{B_r}{B} \\ r \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} v_{\perp}^2}{\Omega R_0} \cos \theta + v_{\parallel} \frac{B_p}{B} \\ R \frac{d\varphi}{dt} &= -\frac{v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} v_{\perp}^2}{\Omega R_0} \frac{B_p}{B} \cos \theta + v_{\parallel} \frac{B_\varphi}{B} \end{aligned} \quad (3.52)$$

在极向和环向的漂移速度远小于往复运动速度，因此

$$r \frac{d\theta}{dt} \approx \frac{B_p}{B} v_{\parallel} \quad (3.53)$$

$$R_0 \frac{d\varphi}{dt} \approx v_{\parallel} \quad (3.54)$$

上式除以 $r \frac{d\theta}{dt}$ 得到

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{B}{B_p} \cdot \frac{r}{R_0} = q(r) \quad (3.55)$$

$q(r)$ 是安全因子，又

$$\varphi(t) = q(r)\theta(t) \quad (3.56)$$

若粒子沿大环方向绕行一周，在极向绕行 $q(r)$ 周

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \frac{v_{//}^2 + \frac{1}{2}v_{\perp}^2}{\Omega R_0} \sin \theta \cdot \frac{B}{B_p v_{//}} = -\frac{v_{//}^2 + \frac{1}{2}v_{\perp}^2}{\Omega v_{//}} q(r) \sin \theta \\ &= \frac{v_{Dr} R_0 q(r)}{v_{//}} \end{aligned} \quad (3.57)$$

式中 v_{Dr} 是偏离磁面的径向偏移，分母表示极向的往复运动。

3.4 托卡马克中高能粒子轨道数值模拟

高能粒子轨道研究的思路依然是首先给出了漂移运动的物理模型，本文采用 HL-2A 装置参数，用求解漂移运动方程组的方法，计算高能粒子轨道。首先计算了氘离子的轨道，再计算电漂移作用后的氘离子轨道，再对不同两种情况下粒子轨道出现的明显差异进行讨论。

出发方程是

$$\vec{v} = v_{//} \frac{\vec{B}}{B} + \frac{1}{\Omega} \left(v_{//}^2 + \frac{1}{2} v_{\perp}^2 \right) \frac{\vec{B} \times \nabla B}{B^2} + \frac{\vec{B} \times \nabla \phi}{B^2} \quad (3.58)$$

忽略静电势作用后可得径向、角向和环向的粒子导引中心方程

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= -\frac{v_{//}^2 + \frac{1}{2}v_{\perp}^2}{\Omega R} \sin \theta + v_{//} \frac{B_r}{B} \\ r \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{v_{//}^2 + \frac{1}{2}v_{\perp}^2}{\Omega R} \cos \theta + v_{//} \frac{B_{\theta}}{B} \\ R \frac{d\varphi}{dt} &= -\frac{v_{//}^2 + \frac{1}{2}v_{\perp}^2}{\Omega R} \frac{B_{\theta}}{B} \cos \theta + v_{//} \frac{B_{\varphi}}{B} \end{aligned} \quad (3.59)$$

计算假定粒子为氘离子，计算参数选用环截面位形 HL-2A 装置参数， $R_0 = 1.65\text{m}$ ， $a = 0.4\text{m}$ ， $B_{\varphi 0} = 2.8\text{T}$ ， $W = 15\text{KeV}$ 。通过数值求解导心方程组

(3.59)，得到初速度与磁场夹角不同情况下高能粒子的通行轨道和捕获轨道。

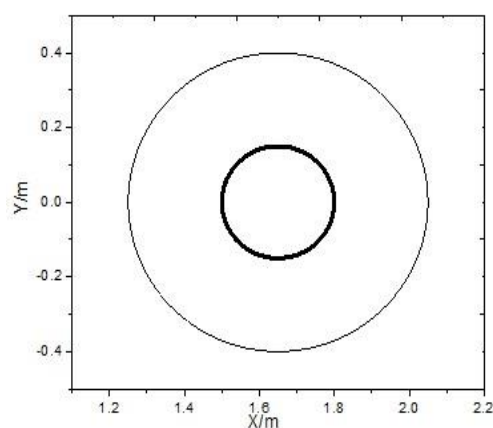


图3.3 初速度与磁场的夹角为 20° ，初始点在 $\rho=0.15m$ 时，
氦离子的运动轨迹

由图3.3可知道，当初速度与磁场的夹角为 20° ，氦离子为通行粒子，很明显此时，氦离子可以顺利通过强磁场区域，而不被反射回来。

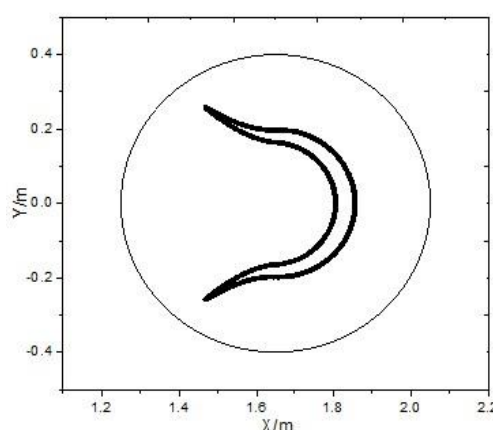


图3.4 初速度与磁场的夹角为 60° ，初始点在 $\rho=0.15m$ 时，
氦离子为捕获粒子

由图3.4可知道，当初速度与磁场的夹角为 60° ，初始点在 $\rho=0.15m$ 时，氦离子为捕获粒子，也就是此时氦离子不能通过强磁场区域，成为通常所定义的香蕉粒子，从图上可以看出香蕉有一定宽度，且被捕获的较深(即反弹点距离较近)。

为了看出随着初速度与磁场夹角增大俘获粒子被俘获程度的区别，在此基础上，再分别模拟出不同夹角的下氦离子的轨道

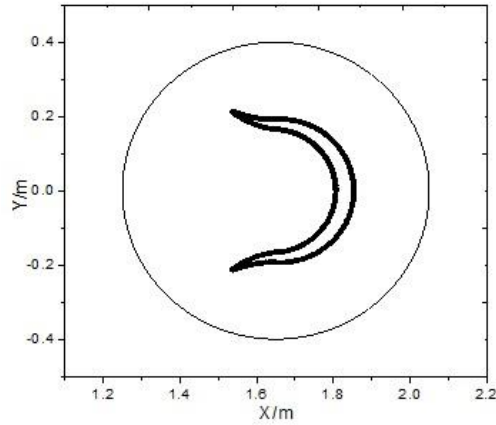


图3.5 初速度与磁场的夹角为 65° ，初始点在 $\rho=0.15\text{m}$ 时，
氖离子的运动轨迹

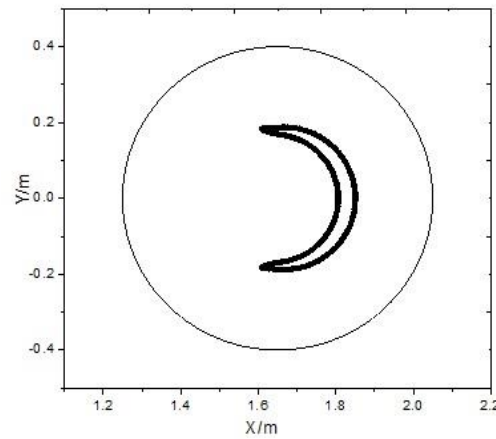


图3.6 初速度与磁场的夹角为 70° ，初始点在 $\rho=0.15\text{m}$ 时，
氖离子的运动轨迹

图3.4与图3.5比较可知道反弹点的位置不一样，这与 v_{\parallel} 和 v_{\perp} 相对大小有关，由于在反弹点的位置， $v_{\parallel}=0$ ，速度与磁场夹角越小， $v_{\parallel}=v\cos\theta$ 越大，粒子在托卡马克中走得越远。当初速度与磁场的夹角分别是 65° 和 70° 时，氖离子都是俘获粒子。从图3.3-图3.6可以看出，随着初速度与磁场夹角变大，（也就是随着 v_{\parallel} 减小），通行粒子逐渐变成俘获粒子，并且由于夹角的不同，捕获粒子被捕获的深度变得不一样，（即两个反弹点的距离也不一样）。夹角越小，粒子越接近于通行粒子，并且捕获粒子走得越远。

3.5 托卡马克位形下电漂移项的推导

考虑电漂移作用后，漂移运动方程组需要进行新的变形，环坐标下静电势作用引起的电漂移可表示为：

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi \quad (3.60)$$

$$\vec{v} = v_{\parallel}\frac{\vec{B}}{B} + \frac{1}{\Omega}\left(v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2}v_{\perp}^2\right)\frac{\vec{B}\times\nabla B}{B^2} + \frac{\vec{B}\times\nabla\phi}{B^2} \quad (3.61)$$

等离子体中离子的漂移轨道是由平行于磁场的分量、磁场不均匀性引起的梯度及曲率漂移和电漂移因素引起的电漂移这几种运动决定。粒子运动速度可表示为 Ω 为回旋频率， $\Omega = qB/m$ ， m 是质量， v_{\parallel} 和 v_{\perp} 分别代表平行、垂直磁场的速度，有 ϕ 的项为电漂移项。

代入到 (3.61) 式可得到

$$\begin{aligned} \frac{\vec{B}\times\nabla\phi}{B^2} &= \frac{\vec{b}\times\nabla\phi}{B} \\ &= \frac{\left(\frac{B_p}{B}\vec{e}_\theta + \vec{e}_\varphi\right) \times \left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi\right)}{B} \\ &= \left(\frac{B_p}{rB^2\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} - \frac{1}{rB}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)\vec{e}_r + \frac{\partial\phi}{B\partial r}\vec{e}_\theta - \frac{B_p}{B^2}\frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{e}_\varphi \end{aligned} \quad (3.62)$$

用 \vec{e}_r , \vec{e}_θ , \vec{e}_φ 点乘方程 (3.62) 得到电漂移在环坐标的三个分量：

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \left(\frac{B_p}{rB^2\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} - \frac{1}{rB}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) \\ r\frac{d\theta}{dt} &= \frac{\partial\phi}{B\partial r} \\ R\frac{d\varphi}{dt} &= -\frac{B_p}{B^2}\frac{\partial\phi}{\partial r} \end{aligned} \quad (3.63)$$

将 (3.63) 分别附加到 (3.59) 便得到考虑电漂移作用后的径向，角向，环向的导心方程：

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= -\frac{v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2}v_{\perp}^2}{\Omega R}\sin\theta + v_{\parallel}\frac{B_r}{B} + \left(\frac{B_p}{rB^2\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} - \frac{1}{rB}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) \\ r\frac{d\theta}{dt} &= -\frac{v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2}v_{\perp}^2}{\Omega R}\cos\theta + v_{\parallel}\frac{B_\theta}{B} + \frac{\partial\phi}{B\partial r} \\ R\frac{d\varphi}{dt} &= -\frac{v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2}v_{\perp}^2}{\Omega R}\frac{B_\theta}{B}\cos\theta + v_{\parallel}\frac{B_\varphi}{B} - \frac{B_p}{B^2}\frac{\partial\phi}{\partial r} \end{aligned} \quad (3.64)$$

得到的方程组（3.64）就是考虑电漂移后新的漂移运动方程组，通过和原来没有考虑电漂移项相比较，发现新的漂移运动方程组，在径向，极向和环向都增加了不同的项。

3.6 电漂移作用下高能粒子轨道模拟

通过求解方程组（3.64）可得到考虑电漂移情况下氘离子的轨迹，电场大小为 $(6.7 \times 10^9 \text{ v/m}, 6.7 \times 10^9 \text{ v/m}, 6.7 \times 10^9 \text{ v/m})$ ，如下图：

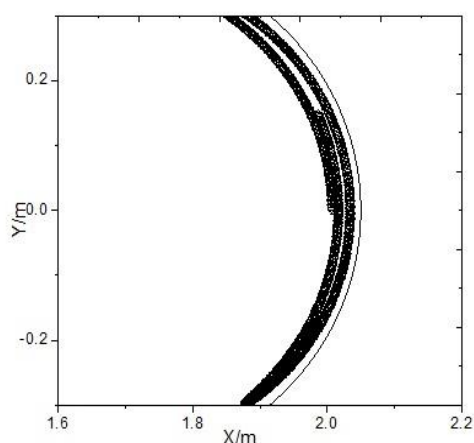


图3.7 初速度与磁场夹角为 70° ，初始点在 $\rho=0.35\text{m}$ 时，
考虑了电漂移后的氘离子的运动轨迹（磁面内侧）

图3.7表示的是磁面内侧的情况，发现在磁面内侧，高能粒子轨道有明显的偏移，轨迹不再闭合。为了进一步了解差异，有必要在磁面外侧通过数值模拟得到粒子的轨迹，图3.8表示磁面外侧氘离子的运动轨迹，在磁面外侧，氘离子的轨迹同样发生偏移，且偏移方向和磁面内侧氘离子的偏移方向一致。

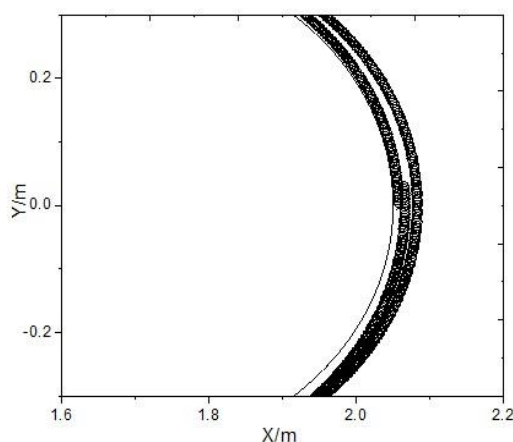


图3.8 初速度与磁场夹角为 70° ，初始点在 $\rho=0.35\text{m}$ 时，
考虑了电漂移后的氘离子的运动轨迹（磁面外侧）

图3.7和图3.8表明，在电漂移的影响下，无论是在磁面外侧还是内侧，氘离子的运动轨迹都发生了向外的漂移。

3.7 两种情况的结果分析与讨论

为了更直观地很好的观察两种轨迹的差异，把未考虑电漂移作用氘离子的轨道和考虑电漂移后氘离子的轨道相比较

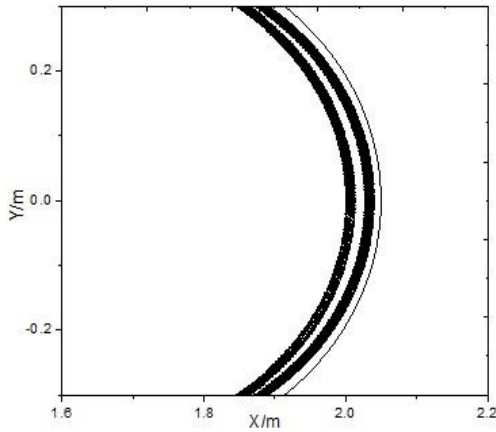


图3.9. 初速度与磁场的夹角为 70° ，初始点在 $\rho=0.35\text{m}$ 时，
未考虑电漂移的氘离子的运动轨迹

从图 3.9 可以看到，未考虑电漂移作用前，右半圆是封闭闭合的轨道，粒子轨道是典型的香蕉轨道。

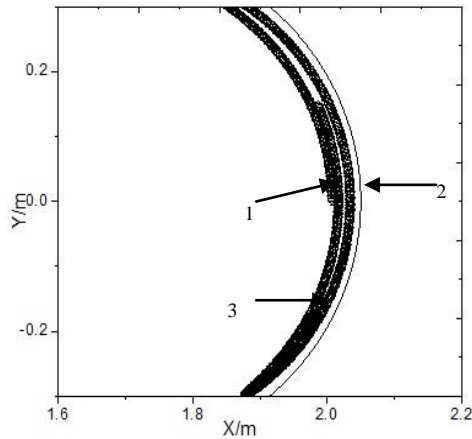


图3.10 初速度与磁场夹角为 70° ，初始点在 $\rho=0.35\text{m}$ 时，
考虑了电漂移后的氘离子的运动轨迹

从图3.10可以看到，考虑电漂移的作用后，粒子轨道不再闭合，图3.10中粒子先从箭头1所指图像向上出发，然后沿着箭头2所指图像向下，再沿着箭头3所

指图像向上运动，1、3两轨迹已经不重合，也就是说氘离子轨道发生了漂移，香蕉宽度变窄。

香蕉宽度变窄的原因理论分析如下：

平行于磁场的引导中心的速度在引入电漂移后表示为^[9]：

$$v_{//} = \sqrt{\frac{2}{m}(W - q\phi - \mu B)} \quad (3.65)$$

W 是粒子总能量， μ 为磁矩，此式是由能量守恒推出来的速度表达式

对于香蕉宽度 有：

$$\Delta r = \frac{2v_{//0}}{\Omega_p} \quad (3.66)$$

其中 $\Omega_p = qB_p/m$ 是极向的粒子回旋频率，在 $\theta = 0$ 处， $v_{//} = v_{//0}$ 。

由 (3.65) (3.66) 可知，在引入电漂移作用后， $v_{//}$ 变小，导致香蕉宽度 Δr 变小。数值模拟结果和理论分析一致。

3.8 电场大小对高能粒子轨道偏移影响模拟

为了更深入了解托卡马克中电漂移对高能粒子轨道的影响，有必要在改变电场的大小情况下，来比较数值模拟图像的差异。将程序中电场变为 $(5.7 \times 10^9 \text{ v/m}, 5.7 \times 10^9 \text{ v/m}, 5.7 \times 10^9 \text{ v/m})$ ，得到如图3.11（磁面内侧）和图3.12（磁面外侧）

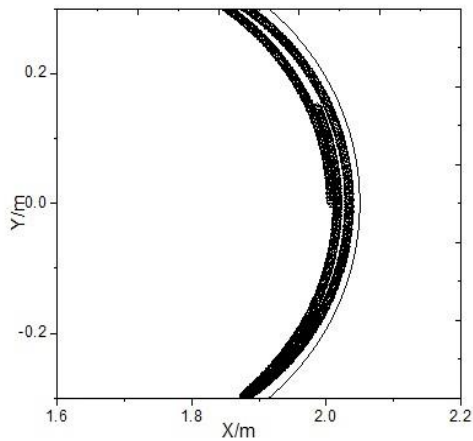


图 3.7 未改变电场大小前磁面内侧
氘离子运动轨迹

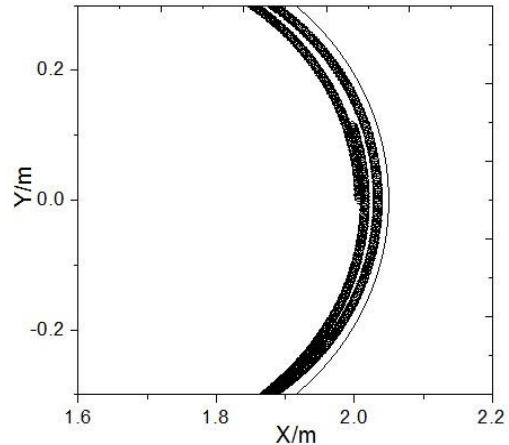


图 3.11 电场变小后，磁面内侧
氘离子运动轨迹

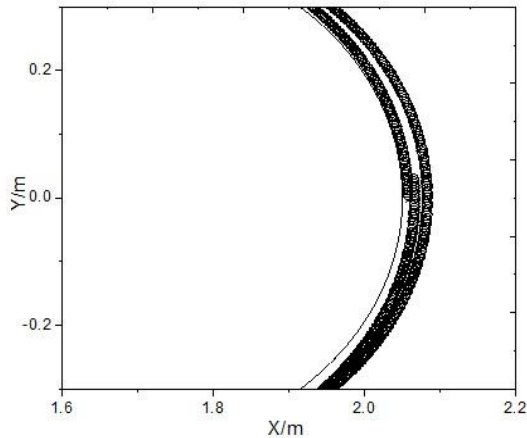


图 3.8 未改变电场大小前磁面外侧
氦离子运动轨迹

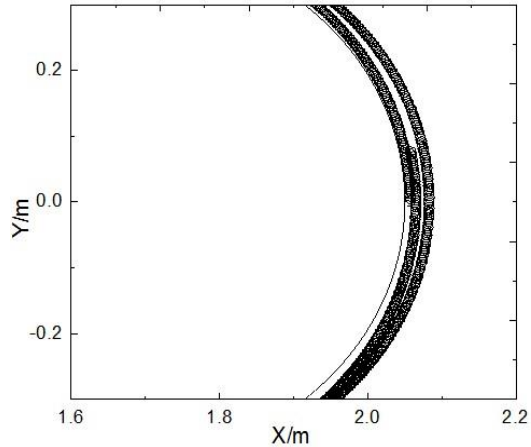


图 3.12 电场变小后，磁面外侧
氦离子运动轨迹

通过比较，发现无论是在内侧还是在外侧，高能粒子轨道漂移方向依然向外，轨道宽度随着电场变小而变宽。

根据 (3.65) 和 (3.66) 知 $v_{||}$ 的大小和电场大小的变化相反，电场变大， $v_{||}$ 变小，电场变小， $v_{||}$ 变大，而 $v_{||}$ 与香蕉宽度的变化是一致的，故电场大小的变化，会引起香蕉宽度相应的变化。

3.9 电场方向对高能粒子轨道偏移影响的模拟

电场大小的改变，影响了高能粒子轨道偏移，当电场的方向反向时，电场为 $(-6.7 \times 10^9 \text{ v/m}, -6.7 \times 10^9 \text{ v/m}, -6.7 \times 10^9 \text{ v/m})$ 时，高能粒子轨道的偏移情况如下

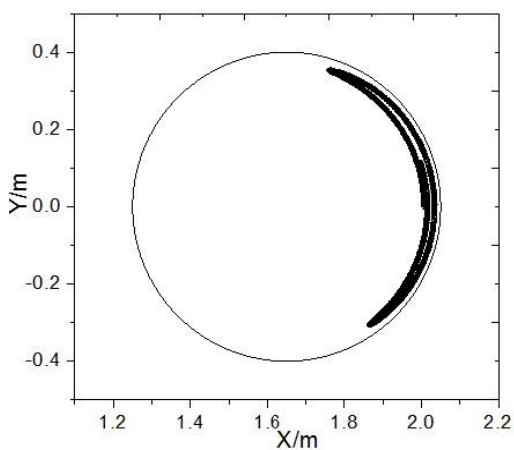


图3.13未改变电场方向前，磁面内侧
氦离子运动轨迹

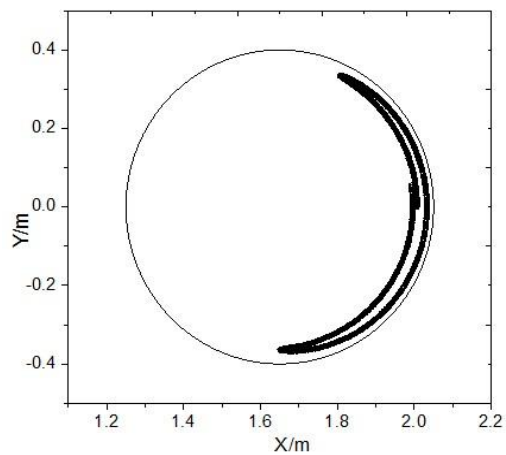


图3.14电场方向改变后，磁面内侧
氦离子运动轨迹

比较图3.13和图3.14，发现氦离子轨道偏移方向发生了明显改变，并且导致轨道宽度发生明显变化。这说明，在考虑电漂移后，电场的方向会成为高能粒子轨道

损失的因素。

第四章 结 论

4.1 结论

本文采用求解漂移运动方程组的方法计算氘离子轨道,模拟了氘离子在托卡马克等离子体中的运动轨道,特别考虑电漂移作用对氘离子运动轨道的影响。1、在HL-2A装置参数下,数值模拟了氘离子在托卡马克磁场中的轨道,得到了不同初始发射角下通行粒子和香蕉粒子轨道图像,发现香蕉粒子的反弹点随着夹角的增大,反弹点距离变近,粒子被捕获的深。2、考虑电漂移后,发现与未考虑电漂移情况相比,无论是在磁面外侧还是内侧,粒子的轨道都向外场侧有了一定偏移,粒子轨道的偏移会引起电荷密度分布的改变,而在讨论高能粒子损失的情况下,粒子的初始轨道损失对电流密度分布是十分敏感的,所以粒子轨道偏移对高能粒子的约束的改善具有重要意义。3、考虑电漂移后,香蕉粒子的宽度有一定程度的变窄,变窄的香蕉轨道对捕获粒子是有实际意义的,因为香蕉轨道宽度变窄对快离子的损失是限制的,这种情况对于在边界区域的粒子是利好的,让粒子得到很好的约束,不易撞击到器壁上。相反,若是香蕉轨道宽度变宽,高能粒子撞击到器壁的几率变大,这对于高能粒子的约束是不利的。4、根据模拟出来的结果,电场的大小的变化,也会引起香蕉宽度相应的变化,电场变小,香蕉宽度变宽,电场变大,香蕉宽度变小。5、电场方向反向时,高能粒子轨道偏移方向发生改变,轨道宽度也发生明显改变。

本文的数值模拟结果与给出的理论推导一致,在等离子电荷局部不平衡等偏离电中性的环境下,用漂移运动方程组求解粒子轨道的过程中,电漂移是不能忽略的,这些工作对于在需要考虑电漂移的情况下准确模拟出粒子的运行轨道具有很重要意义。

4.2 展望

研究带电粒子在托卡马克中的运动轨道,计算粒子的导心轨道是中心环节,无论是计算快离子损失,还是追踪粒子的轨道,计算带电粒子的导心轨道是一个重要步骤。确定粒子的导心轨道有几个方向,一个是求解与导心运动有关的方程组,比如Hamilton方程组和在漂移理论建立起来的漂移方程组,另一个就是在粒子的运动过程中用不变量来描述导心运动,比如利用磁矩守恒,能量守恒,正则

动量守恒这些守恒关系来计算导心轨道。在这些计算求解的过程中，计算方法的不同或者计算结果精度不一样都可能会引起差异，而在这些差异的背后，也对应一定的物理机制。

另外，由于磁场的特性，描述粒子轨道的行为主要目的还是用来研究粒子的损失以及托卡马克在运行过程中产生的不稳定模，比如阿尔芬本征模，甚至，各种微观不稳定性所带来的粒子轨道的差异。接下来的工作，仍然要在这种漂移图像的指导下去寻找各种物理机制，比如说，了解到考虑电漂移粒子的图像后，就知道如果粒子的香蕉轨道宽度变窄，很有可能是系统中由于各种原因引起电场产生的，有利于了解更深刻粒子的运行。

参考文献

- [1] 石秉仁. 磁约束聚变原理与实践[M]. 北京, 原子能出版社, 1999.
- [2] 胡希伟. 等离子体理论基础[M]. 北京大学出版社, 2006. 1.
- [3] 郭良能, 愈国扬, 托卡马克中高能粒子的初始轨道极损失研究[J].2004.
- [4] Xu wei, Wan Baonian, zhou Qian et, al. Study of particle behaviour at the edge in HT-7 Tokamak[J]. Chin. Phys. Soc. 2004 , 13(1): 1510-1515.
- [5] Tobita K,Tani K, Kusama Y et al. Ripple induced fast ion loss and related effects in JT-60U[M]Nuclear Fusion. 1995, 35(12):1585-1591 .
- [6] T. Kurki-Suoniol et al, Fast ion power loads on ITER first wall structures in the presence of NTMs and microturbulence[J].Nuclear Fusion, 2011, 51(8):0029-5515.
- [7] White R B,Boozer A H, Rapid guiding center calculation[J].Phys.fluids 1995,2(8): 2915-2919.
- [8] 张杰, 罗家融等.中型托卡马克中粒子约束[J].物理学报,2006, 55 (03): 1077-1082.
- [9] Redi MH ,Zarnstorff M C, White R B, etal,Collisional stochastic ripple diffusion of alpha particle and beam ions on TFTR[J].Nucl.Fusion,1995,35(10).2915-2919.
- [10] 高庆弟.托卡马克环向磁场波纹引起的粒子香蕉轨道偏离[J].核工业西南物理研究院年报.2003, 1:77-80.
- [11] 李吉波. EAS中性束注入快离子损失研究[J]. 核聚变与等离子体物理,2011,31 (3):213-218.
- [12] M. Kaan Öztürk. Trajectories of charged particles trapped in Earth's magnetic field [J]. 2012, 80: 0002-9505.
- [13] 朱士尧. 等离子体物理基础[M]. 科学出版社, 1983 年 10 月第一版, 96-100.
- [14] 朱士尧. 等离子体物理基础[M]. 科学出版社, 1983年10月第一版, 18-20.
- [15] W.M.Stacey,Jr.Fusion. Plasma Analysis[M],John Wiley and Sons,New York, 1981.
- [16] Goldston R J,Rutherford P H.Introduction to Plasma Physics[M] Bristol: IoP.Publishing Ltd., 1995.
- [17] Boyd T J M , Sanderson J J.The Physics of Plasmas[M] . Cambridge:Cambridge

- University Press, 2003.
- [18] Kruer W L . The Physics of Laser Plasma Interactions[M]. Redwood City : Addison--Wesley Publishing Company , 1988.
- [19] Lieberman M A , Lichtenberg A J. Principles of Plasma Discharges and Materials Processing[M]. New York : John Wiley & Sons , 1994.
- [20] Roth J R . Industrial Plasma Engineering[M]. Bristol :IOP Publishing Ltd ,1995
- [21] Hutchinson I H.Principles of Plasma Diagnostics[M].Cambridge:Cambridge University Press , 2002.
- [22] Kivelson M G , Russell C T . Introduction to Space Physics[M]. Cambridge : Cambridge University Press , 1995.
- [23] Hasegawa A , Sato T .Space Plasma Physics[M].Vol . 1. Berlin : Springer – Verlag , 1989.
- [24] Parks G K . Physics of Space Plasma ----- An Introduction[M]. 2 nd ed . Redwood City : Addison –Wesley Publishing Company , 2004.
- [25] Chen F F . 林光海, 译。等离子体物理学导论[M]. 北京: 人民教育出版社, 1980.
- [26] P.C. de Vries, K.M. Rantamäki, E. Asp, Plasma rotation and Momentum Transport Studies at JET[J]. Plasma Phys. 2006, 48(12):1693-1708.
- [27] M.C.R.Andrade and G.O.Ludwig, Comparison of bootstrap current and plasma conductivity models applied in a self-consistent equilibrium calculation for tokamak plasmas[J]. Nucl.Fusion, 2005, 45(1):0029-5515.
- [28] J.S.deGrassie, D.R.Baker, K.H.Burrell, et al, Toroidal rotation in neutral beam heated discharges in DIII-D[J], Nucl.Fusion, 2003, 43(2):142-156 .
- [29] Jeffrey P. Freidberg, Plasma Physics and Fusion Energy[M]. New York. Cambridge University Press, 2007.
- [30] N.Asakura;R.J et al, Toroidal rotation and ion heating during neutral beam injection in PBX-M[J],Nuclear Fusion,1993, 33(8):1165-1184.
- [31] 徐家鸾, 金尚宪. 等离子体物理学[M]. 北京, 原子能出版社, 1981.
- [32] 宫本健郎 (日) , 金尚宪译. 热核聚变等离子体物理学[M]. 北京, 科学出版

社, 1981.

- [33] V A Yavorskij, K Schoepf. Analytical models of axisymmetric toroidal magnetic Fields with non-circular flux surfaces[J].plasma phys.Control.Fusion 2001,43:249-269.
- [34] 邱励俭. 聚变能及其应用[M]. 科学技术出版社, 2008.
- [35] 刘大刚. 带电粒子与场相互作用中粒子模拟方法研究[D]. 成都, 电子科技大学, 2008.
- [36] 周俊. 电磁粒子模拟方法及其应用研究[D]. 成都, 电子科技大学, 2009.

致 谢

时光荏苒，三年研究生生涯如梭即逝。三年的时间只是人生岁月之流中的一段浅洼，却因着耕耘者的付出而呈现不同绚烂。回首往事，思绪万千，有生活的起伏、有学习的欢乐、有科研的艰辛、有追求的执着、有同学的鼓励、有恩师的教诲、有亲人的期盼。虽不说十分炫丽，但毕竟是我人生中不可或缺的章节。

在此论文完成之际，首先要感谢我的**导师龚学余老师**三年来对我的严加管教，龚老师以其崇高的人格和儒者的宽容平和潜移默化的影响了我，龚老师作为学校领导，每日承担着许多繁杂的事务工作，但这些并未影响他对学术的热爱和执着，也未影响他对我学习、生活的指导、鼓励和帮助。导师在平日工作的务实作风都将是追求的目标和学习的榜样。

感谢我的副导师黄千红老师，本论文是在路老师的悉心指导下完成的。黄老师在科研创新上的孜孜以求，严肃认真、实事求是的治学风格，刻苦钻研、献身科学的实干精神，值得我终生学习。从论文的选题、定稿都凝聚着黄老师的辛勤汗水和心血。正是因为你的悉心指导才有我今天的进步。

当然，还要感谢所有关心和支持过我的同学和朋友，特别要感谢我的父母给予的理解和支持，这是我最大的欣慰和动力。

我坚信，这些都将成为我今后人生之路中最珍贵的东西，有了它，今后的路我会走得更加坦然，更加坚定。