

等离子体物理导论

刘万东

中国科学技术大学近代物理系

2002 年 6 月

序

完成这本《等离子体物理导论》讲义，是我多年希望做的一件工作。在近代物理系 1999 级 100 余名听课及不听课同学的催促、怂恿和鼓励下，自本学期开始时起，见缝插针，辜负良多，终于完成了这一稿。

这本讲义初稿起于 1995 年酷暑，斯时我首次准备主讲此课，在框架的构建和内容的选取上，踌躇良久，最终选择了这六章内容，取案台之精华，揉入胸腹之情感，遂成。尽管用它给等离子体物理专业 1992 级、1993 级同学及相关的研究生作了讲授和演义，近几年来也对等离子体有了新的体会，但仍然不尽如意，甚至第六章的名目仍然悬而待决。

等离子体物理是一门基础物理课程。它在根本的理论体系上并没有独立的创新的特点，它依赖于电动力学、统计物理所给出的基本物理框架，它甚至在很多情况下，至少在基础课程体系内，还属于经典物理的范畴。然而，它所面对的对象几乎是宇宙的全部、人类活动的主要能区，其重要性不言而喻。等离子体物理课程涉及等离子体的基本现象，尽管物理框架的基石不能更改，但等离子体物理这一由物理基石所做的建筑已经形成了新的文化。等离子体物理对物理问题的许多处理方法，尤其是涉及集体相互作用及现象方面，对物理学甚至是其它科学都不乏借鉴之内涵。

我经常将等离子体人性化，她的许多表现酷似于我们人类，常常不需要牵强的联想，就可以用我们日常的经验，甚至是我们内心的感受来理解她的行为。等离子体中的两性，相互独立又相互扶持，平时若即若离，逃逸时则携手并肩。等离子体中的相互作用，长则绵绵，短则眈眈，远可及周天之外，近可抵唇齿之间。等离子体的集体行为，自由与束缚兼得，温和与暴虐并存。等离子体的自治禀性，可以欺之以妩媚，不可催之以强蛮，若以力，人人奋愤可兵，以弱，则诺诺列队而从。如此以陈，等离子体的每一个秉性都值得我们用诗一般的语言来渲染。电子离子，以其简洁的库仑作用，本不堪言，然一成群体，即如此绚丽，何况人乎？

先贤诫曰：人之患在好为人师，我虽常以自警，然位在此不得不为之。此讲义一出，是为邀师，诚盼无论学生先生，不吝赐教，纠我一误惠我十分并及来者，切切。

刘万东谨启

2002 年 6 月 8 日于梦园

目 录

第一章 引言.....	1
§ 1.1 等离子体的基本概念.....	1
§ 1.1.1 等离子体的定义.....	1
§ 1.1.2 等离子体的参数空间.....	2
§ 1.1.3 等离子体的描述方法.....	4
§ 1.2 等离子体重要特征和参量.....	5
§ 1.2.1 德拜屏蔽和等离子体空间尺度.....	5
§ 1.2.2 等离子体特征响应时间.....	7
§ 1.2.3 等离子体判据.....	8
§ 1.2.4 等离子体概念的推广.....	9
§ 1.3 等离子体物理发展简史及研究领.....	10
§ 1.3.1 等离子体物理发展简史.....	10
§ 1.3.2 等离子体物理主要研究领域.....	10
第二章 单粒子运动.....	13
§ 2.1 回旋运动与电漂移运动.....	13
§ 2.1.1 均匀恒定磁场中的回旋运动.....	13
§ 2.1.2 均匀电场的影响, $\vec{E} \times \vec{B}$ 漂移.....	14
§ 2.1.3 重力漂移.....	16
§ 2.2 非均匀磁场的影响, 导向中心近似.....	17
§ 2.2.1 梯度漂移.....	17
§ 2.2.2 曲率漂移.....	21
§ 2.3 非均匀电场.....	22
§ 2.4 渐变电场的影响.....	24
§ 2.5 高频电磁场的作用与有质动力.....	25
§ 2.6 绝热不变量.....	27
§ 2.6.1 磁矩不变量.....	28
§ 2.6.2 纵向不变.....	28
§ 2.6.3 磁通不变量.....	29
第三章 磁流体.....	32
§ 3.1 磁流体方程组.....	33
§ 3.1.1 普通流体动力学方程组.....	33
§ 3.1.2 洛伦兹力与麦克斯韦方程组.....	34
§ 3.1.3 磁流体封闭方程组韦方程组.....	34
§ 3.2 磁流体平衡.....	36
§ 3.2.1 磁流体力平衡条件.....	36
§ 3.2.2 磁压强和磁张力.....	37

§ 3.2.3 等离子体比压.....	39
§ 3.3 等离子体中的磁场冻结和扩散.....	40
§ 3.3.1 磁场运动方程与磁雷诺数.....	40
§ 3.3.2 磁场扩散.....	41
§ 3.3.3 磁场冻结.....	42
§ 3.4 双流体方程与广义欧姆定律.....	44
§ 3.4.1 双流体方程.....	45
§ 3.4.2 广义欧姆定律.....	46
第四章 等离子体中波动现象.....	50
§ 4.1 线性波色散关系获取方法.....	50
§ 4.1.1 方程的线性化.....	50
§ 4.1.2 求本征波动模式.....	51
§ 4.1.3 求本征模式的特征.....	52
§ 4.2 冷等离子体中的线性波.....	53
§ 4.2.1 电介质中波色散关系之一般形式.....	53
§ 4.2.2 冷等离子体介电常数.....	55
§ 4.2.3 冷等离子体波.....	58
§ 4.3 低频近似, 阿尔芬波.....	63
§ 4.3.1 阿尔芬波的色散关系.....	64
§ 4.3.2 阿尔芬波的扰动图像.....	64
§ 4.3.3 剪切阿尔芬波.....	65
§ 4.3.3 压缩阿尔芬波.....	66
§ 4.4 平行于磁场的磁流体线性波.....	67
§ 4.4.1 平行于磁场传播的波之色散关系.....	67
§ 4.4.2 朗缪尔振荡.....	67
§ 4.4.3 右旋偏振波.....	68
§ 4.4.4 左旋偏振波.....	71
§ 4.4.5 法拉第旋转.....	72
§ 4.5 垂直于磁场方向的磁流体线性波.....	73
§ 4.5.1 色散关系.....	73
§ 4.5.2 寻常波.....	73
§ 4.5.3 异常波.....	75
§ 4.6 冷等离子体波的热效应修正.....	78
§ 4.6.1 考虑热效应时波的色散关系.....	78
§ 4.6.2 无磁场等离子体近似.....	80
§ 4.6.3 磁声波.....	84
§ 4.6.4 杂混共振频率处的静电波.....	85
§ 4.6.5 静电离子回旋波.....	87

§ 4.7	漂移波.....	88
§ 4.7.1	密度梯度存在时流体线性化方程.....	88
§ 4.7.2	静电漂移波.....	89
第五章	等离子体不稳定性.....	95
§ 5.1	等离子体不稳定性概述.....	95
§ 5.2	瑞利 - 泰勒不稳定性.....	96
§ 5.2.1	不稳定性机制与图像.....	96
§ 5.2.2	简正模分析.....	98
§ 5.2.3	交换不稳定性.....	100
§ 5.3	螺旋不稳定性.....	101
§ 5.3.1	不稳定性机制与图像.....	101
§ 5.3.2	色散关系.....	102
§ 5.3.3	模式分析.....	105
§ 5.4	束不稳定性.....	108
§ 5.4.1	色散关系.....	108
§ 5.4.2	束 - 等离子体不稳定性.....	109
§ 5.4.3	二电子川流不稳定性.....	111
第六章	几个重要的等离子体概念.....	113
§ 6.1	库仑碰撞与特征碰撞频率.....	113
§ 6.1.1	两体的库仑碰撞.....	114
§ 6.1.2	库仑碰撞频率.....	116
§ 6.2	等离子体中的扩散与双极扩散.....	118
§ 6.2.1	无磁场时扩散参量.....	118
§ 6.2.2	双极扩散.....	119
§ 6.2.3	有磁场时的扩散系数.....	120
§ 6.2.4	有磁场时的双极扩散.....	122
§ 6.3	等离子体鞘层.....	122
§ 6.3.1	鞘层的概念及必然性.....	122
§ 6.3.2	稳定鞘层判据.....	123
§ 6.3.3	查尔德 - 朗缪尔定律.....	124
§ 6.4	朗道阻尼.....	125
§ 6.4.1	伏拉索夫方程.....	125
§ 6.4.2	朗缪尔波和朗道阻尼.....	126
§ 6.4.3	朗道阻尼的物理解释.....	129
§ 6.4.4	离子朗道阻尼与离子声不稳定性.....	130
§ 6.4.5	非线性朗道阻尼.....	131
附录	133

第一章 引言

§ 1.1 等离子体的基本概念

§ 1.1.1 等离子体的定义

我们首先给出等离子体 (Plasma) 的定义：等离子体是由大量带电粒子组成的非束缚态宏观体系。

等离子体的基本粒子元是正负电荷的粒子 (离子)，而不是其结合体，异类带电粒子之间是相互“自由”和独立的。等离子体粒子之间的相互作用力是电磁力，电磁力是长程的，原则上来说，彼此相互很远的带电粒子仍然感觉得到对方的存在。在相互作用的力程范围内存在着大量的粒子，这些粒子间会发生多体的彼此自洽的相互作用，结果使得等离子体中粒子运动行为在很大程度表现为集体的运动，存在集体运动是等离子体最重要的特点。

由于等离子体的微观基本组元是带电粒子。一方面，电磁场支配着粒子的运动，另一方面，带电粒子运动又会产生电磁场，因而等离子体中粒子的运动与电磁场的运动紧密耦合，不可分割。

等离子体与固体、液体、气体一样，是物质的一种聚集状态。常规意义上的等离子体态是中性气体中产生了相当数量的电离。当气体温度升高到其粒子的热运动动能与气体的电离能可以比拟时，粒子之间通过碰撞就可以产生大量的电离过程。对于处于热力学平衡态的系统，提高系统的温度是获得等离子体态的唯一途径。按温度在物质聚集状态中由低向高的顺序，等离子体态是物质的第四态。

通过加热的方式，物质四种状态之间可以产生转变，称为相变，我们不妨以水为例来进行说明。在一个大气压下，温度低至摄氏零度以下，水凝结成冰，此时物质的微观基本组元 (分子) 的热运动动能小于组元之间的相互作用势能，因而相互束缚，在空间的相对位置固定，这就是固体状态。当体系的温度升高至零度以上，冰融化成水，分子间的热运动能量已经与分子之间的相互作用势能相当。在体系的内部，分子基本上可以自由地移动，但在边界面上，由于存在着附加的表面束缚能，大多数分子还不具备可以克服这种表面束缚的动能，因而存在一个明显的表面，这就是液

体状态，液体的流动性表明了其内部分子的自由运动的特性。当体系的温度高至 100 摄氏度以上，水开始汽转化成蒸汽，分子间的热运动动能足以克服分子之间的相互作用势垒，包括表面的束缚能，分子因此变成彼此自由的个体，它们将占据最大可能占据的空间，这就是气体状态。当温度继续升高，分子间的热运动动能如果可以与分子的键能相当的时候，分子可以分解成原子，基本微观组元由分子变成原子并没有使物态发生本质的变化，仍然是气体状态。然而，当温度进一步增高，原子（分子）间的热运动动能与电离能相当的时候，就会产生较多的电离过程从而变成了电离气体，系统的基本组元变成了离子和电子（可以包含一定的原子和分子）。这时长程的电磁力开始起作用，体系出现了全新的运动特征，这就是等离子体状态。

并非只有完全电离的气体才是等离子体，但需要有足够高电离度的电离气体才具有等离子体性质。粗略地说，当体系中“电性”比“中性”更重要时，这一体系可称为等离子体。由于麦克斯韦（Maxwell）分布的高能尾部粒子的贡献，处于热力学平衡态的气体总会产生一定程度的电离，其电离度由沙哈（Saha）方程给出，

$$\boxed{\text{电离度}} \quad \frac{n_i}{n_0} \approx 3 \times 10^{15} \frac{T^{3/2}}{n_i} \exp(-E_i / T) \quad (1-1)$$

其中 n_i 、 n_0 分别是离子与原子的密度， T 为温度、 E_i 为电离能。在本书中，除非特别说明，我们一律采用国际单位制，但温度与能量一样，以电子伏特（eV）作单位。温度单位电子伏特与开尔文（K）的换算关系为，

$$1 \text{ eV} = 11600 \text{ K} \quad (1-2)$$

粗略一点，可以用一电子伏特与一万度作量级上地换算。通常情况下，气体的电离度极低，若取 $n_0 = 3 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$ ， $T = 0.03 \text{ eV}$ ， $E_i = 14.5 \text{ eV}$ （氮），则可算出电离度仅为 $n_i/n_0 \approx 10^{-122}$ 。

§ 1.1.2 等离子体的参数空间

宇宙中绝大多数物质处于等离子体态。地球上生物，包括人类的生存伴随着水，水可以存在的环境是地球文明得以进化、发展的热力学环境，这种环境远离等离子体物态普遍存在的状态。因而，天然的等离子体只能

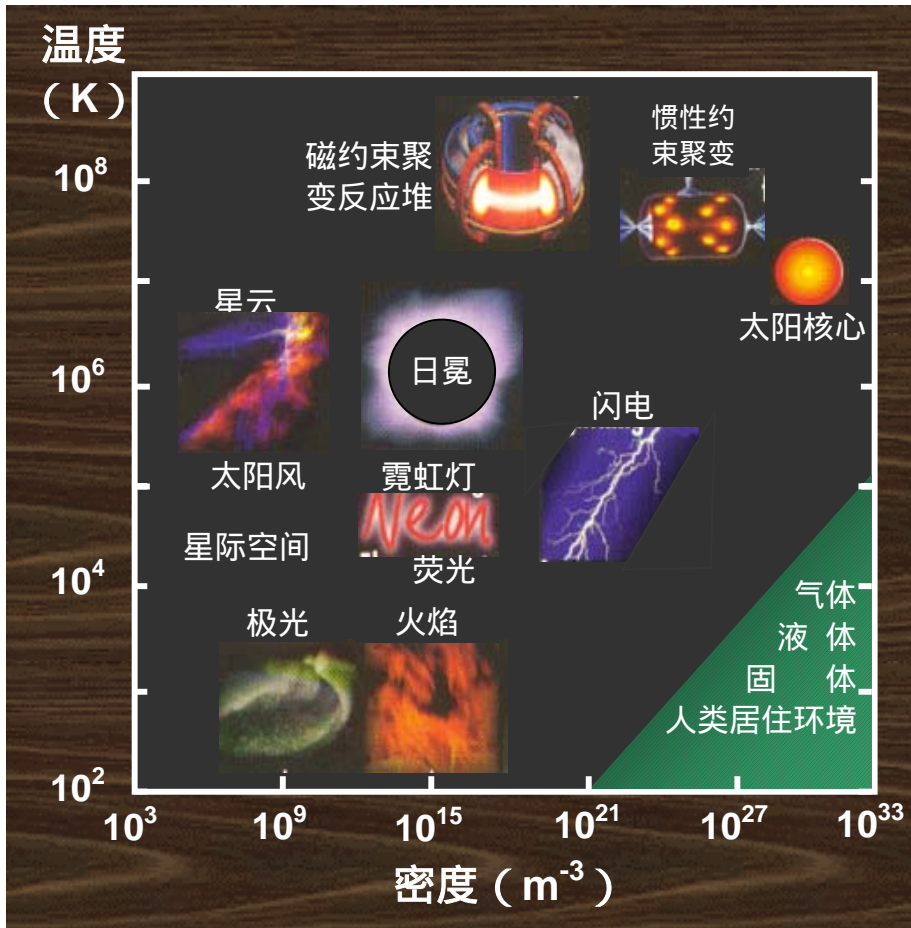


图 1.1 等离子体参数空间

存在于远离人群的地方，以闪电、极光的形式为人们所敬畏、赞叹。但是，由地球表面向外，等离子体是几乎所有可见物质的存在形式，大气外侧的电离层、日地空间的太阳风、太阳日冕、太阳内部、星际空间、星云及星团，毫无例外的都是等离子体。

地球上，人造的等离子体也越来越多地出现在我们的周围。日光灯、电弧、等离子体显示屏是日常生活中的例子，等离子体刻蚀、镀膜、表面改性、喷涂、烧结、冶炼、加热、有害物处理是等离子体几种典型的工业应用，托卡马克、惯性约束聚变、核爆、高功率微波器件、离子源等则是等离子体涉及高技术应用若干方面。

与其它三种物态相比，等离子体包含的参数空间非常宽广。若以描述物态的两个基本热力学参数，密度和温度而言，已知等离子体的密度从 10^3 m^{-3} 到 10^{33} m^{-3} 跨越了 30 个量级，温度从 10^2 K 到 10^9 K 跨越了 7 个量

级。如图 1.1 所示。

§ 1.1.3 等离子体的描述方法

尽管等离子体的参数范围十分巨大，但其描述的方法却基本上是一致的。在大多数情况下，等离子体是一个经典的、非相对论的体系。量子效应只有在粒子之间间距 ($\sim n^{1/3}$) 与粒子德布罗意波长相当时才显示出来，这对应着温度极低 (10^{-2}eV)、密度达固体 (10^{27}m^{-3}) 密度的情况。只有在有相对论粒子的等离子体（如大功率微波器件或自由电子激光中的相对论电子束）才需要考虑相对论效应。

对等离子体的描述可分为电磁场和宏观粒子体系两个部分。电磁场的行为由麦克斯韦方程组描述，对宏观粒子体系则有两种描述方式：统计力学和流体力学。

在统计力学的框架下，宏观体系的状态由粒子分布函数 $f(\bar{x}, \bar{v}, t)$ 所描述， f 是由实空间和速度空间构成的 6 维相空间中粒子的概率密度分布。由粒子数守恒可以得到 f 所满足的动力学方程，

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \bar{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} + \bar{a} \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{v}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c \quad (1-3)$$

这一方程称为玻尔兹曼 (Boltzmann) 方程。这是一种简化的表达式，它将粒子之间（运动）的关联都归纳于方程右边的碰撞项。碰撞项是此方程的关键项，对不同的体系或不同的研究内容，人们对碰撞项作不同的假设，形成各种有用的简化模型。比如伏拉索夫 (Vlasov) 模型直接令右边的碰撞项为零，但在粒子加速度中考虑了系统带电粒子本身产生的所谓自洽场的作用，即为无碰撞等离子体模型。由于等离子体中碰撞频率随温度上升而下降，伏拉索夫模型适合于高温等离子体。福克 - 普朗克 (Fokker-Planck) 碰撞项考虑了带电粒子两体之间产生小角度偏转的库仑碰撞效应，由于三体以上的多体相互之间的关联作用通常不十分重要，只有在致密的等离子体系统中才可能显示作用，这一模型在等离子体理论和数值模拟中被广泛的使用。

在流体力学的框架下，等离子体粒子体系被视为一种电磁相互作用起主导的流体。这是一个自然的描述方法，是统计描述方法的一种近似，通常称为磁流体或电磁流体力学 (MHD、EMHD)。等离子体作为流体的动力学变量有：密度、温度、速度，共有 5 个变量。可用动量方程、连续性

速度为：三维 (x, y, z)

方程及状态方程（密度温度之间的关系）封闭求解。其中外场与自洽场由场方程（麦克斯韦方程）给出，同时流体的密度、速度场用于场方程中的电荷及电流源项。所以实际的磁流体动力学方程组包含了上述的物质运动方程及场方程。

§ 1.2 等离子体重要特征和参量

§ 1.2.1 德拜屏蔽和等离子体空间尺度

等离子体由“自由”的带电粒子组成，如同金属对静电场的屏蔽一样，对任何试图在等离子体中建立电场的企图，都会受到等离子体的阻止，这就是等离子体的德拜（Debye）屏蔽效应。相应的屏蔽层称为等离子体鞘层。

设想在等离子体中插入一电极，试图在等离子体中建立电场。在这样的电场下，等离子体中电子将向电极处移动，离子则被排斥。结果由电极所引入的电场仅局限在较小的尺度的鞘层中，如图 1.2 所示。

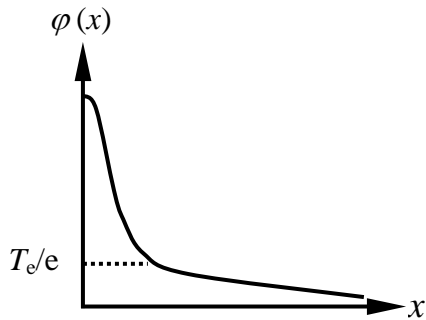


图 1.2 等离子体鞘电势分布

若等离子体的温度为零，则足够多的电子可以接近于电极（设电极表面敷以介质，表面不收集电流，也不产生复合），屏蔽层的厚度将趋于零，电场则完全被屏蔽。若等离子体的温度不是零，那么在屏蔽后电势满足 $e\phi/T_e \approx 1$ 的位置，电子可以挣脱此势阱而逃逸出，因而电势没有完全被屏蔽掉，有 T_e/e 量级的电势将延伸进入等离子体中，屏蔽层的厚度也有限。下面对这种静态的德拜屏蔽过程作一个简要的分析。静电场满足泊松（Poisson）方程，

$$\nabla^2 \phi = -\frac{e}{\epsilon_0} (n_i - n_e) \quad (1-4)$$

这里， n_i 、 n_e 分别为离子和电子的数密度，在热平衡状态下，它们满足玻尔兹曼分布，

$$n_i = n_0 \exp(-e\varphi/T_i), \quad n_e = n_0 \exp(e\varphi/T_e) \quad (1-5)$$

其中, T_i 、 T_e 是离子和电子的温度, n_0 是远离扰动电场处 (电势为零) 的等离子体密度 (电子与离子密度相等)。将 (1-5) 式代入泊松方程, 可以得到关于电势方程, 这是一个典型的非线性方程, 一般没有解析解。由 (1-5) 式可以看出, 当 $|e\varphi/T_e| \ll 1$ 时, $n_e \gg n_0$, 即电子将被捕获而大量积累, 离子则被排空, 这些电子产生的电场屏蔽了大部分的电势。如果不考虑接近于电极处电势较大的区域, 只考察电势满足 $|e\varphi/T_e| \ll 1$ 的空间, 则可以将玻尔兹曼分布作泰勒展开, 并取线性项, 于是有,

$$\nabla^2 \varphi = \left(\frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 T_i} + \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 T_e} \right) \varphi \triangleq \frac{1}{\lambda_D^2} \varphi \quad (1-6)$$

这里, 我们定义离子与电子的德拜长度 λ_{Di} 、 λ_{De} , 等离子体的德拜长度 λ_D 为,

$$\lambda_{Di,e} \triangleq \left(\frac{\varepsilon_0 T_{i,e}}{n_0 e^2} \right)^{1/2}, \quad \lambda_D \triangleq (\lambda_{Di}^{-2} + \lambda_{De}^{-2})^{-1/2} \quad (1-7)$$

在一维情况下, 上述方程的解为,

$$\varphi(x) = \varphi_0 \exp(-|x|/\lambda_D) \quad (1-8)$$

即电势将以指数衰减的形式渗透在等离子体中, 等离子体屏蔽外电场的空间尺度就是 (1-7) 式定义的德拜长度。

静态等离子体的德拜长度, 主要取决于低温成分的德拜长度。在较快的过程中, 离子不能响应其变化, 在鞘层内不能随时达到热平衡的玻尔兹曼分布, 只起到常数本底作用, 此时等离子体的德拜长度只由电子成份决定。

在等离子体中, 每一个电子或离子都具有静电库仑势, 它同样会受到邻近其它电子与离子的屏蔽, 屏蔽后的库仑势为,

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\exp(-r/\lambda_D)}{r} \quad (1-9)$$

这种屏蔽的库仑势使带电粒子对周围粒子的直接影响（两体作用）局限于以德拜长度为半径的所谓德拜球内。德拜长度是等离子体系统的基本长度单位，可以粗略的认为，等离子体由很多德拜球组成。在德拜球内，粒子之间清晰地感受到彼此的存在，存在着以库仑碰撞为特征的两体相互作用；在德拜长度外，由于其它粒子的干扰和屏蔽，直接的粒子两体之间相互作用消失，带之而来的由许多粒子共同参与的集体相互作用。换句话说，在等离子体中，带电粒子之间的长程库仑相互作用，可以分解成两个不同的部分，其一是德拜长度以内的以两体为主的相互作用，其二是德拜长度以外的集体相互作用，等离子体作为新的物态的最重要的原因来源于等离子体的集体相互作用性质。

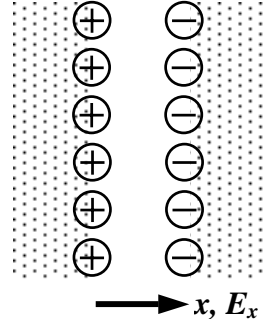


图 1.3 等离子体振荡示意图

§ 1.2.2 等离子体特征响应时间

等离子体的另一个重要特征参数是等离子体的时间响应尺度。我们已经知道，等离子体能够将任何空间的（电）干扰局域在德拜长度量级的鞘层之中。建立这种屏蔽需要一定的时间，显然，我们可以用电子以平均热速度跨越鞘层空间所需要的时间作为建立一个稳定鞘层的时间尺度，这就是等离子体对外加扰动的特征响应时间，

$$\tau_{pe} \triangleq \frac{\lambda_{De}}{v_{Te}} = \left(\frac{\epsilon_0 m_e}{n_0 e^2} \right)^{1/2} \quad (1-10)$$

如此估计的等离子体响应时间与等离子体集体运动的特征频率相关。如图 1.3 所示，若等离子体在某处（ $x = 0$ ），电子相对离子有一个整体的位移（ $x > 0$ ），则在 $x = 0$ 处将形成电场，这个电场使电子受到指向 $x = 0$ 处的静电力，电子将向 $x = 0$ 运动。由于惯性，电子将冲至 $x < 0$ 处，如此电子将产生围绕平衡位置 $x = 0$ 处的振荡。电子运动方程为，

$$n_0 m_e \frac{d^2 x}{dt^2} = -en_0 E_x = -\frac{n_0^2 e^2}{\epsilon_0} x \quad (1-11)$$

其解为简谐振荡，称为朗谬尔（Langmuir）振荡或电子等离子体振荡，振荡频率，

$$\omega_{pe} \triangleq (n_0 e^2 / \varepsilon_0 m_e)^{1/2} \quad (1-12)$$

称为（电子）等离子体频率。显然等离子体频率与等离子体响应时间互为倒数。

§ 1.2.3 等离子体判据

等离子体作为物质的一种聚集状态必须要求其空间尺度远大于德拜长度，时间尺度远大于等离子体响应时间，在此情况下，等离子体的集体相互作用起主要作用，在较大的尺度上正负电荷数量大致相当，所谓的准中性条件成立。

准中性条件曾作为等离子体判定性的标准，中文“等离子体”的含义就是正负离子相等的带电粒子系统。但事实上，即使准中性条件不成立，等离子体内部存在较强的静电场，但只要体系满足上面的时空要求，以集体相互作用为主的等离子体特征同样可以出现。

对于部分电离气体，体系中除带电粒子外，还存在着中性粒子。当带电粒子与中性粒子之间的相互作用强度同带电粒子之间的相互作用相比可以忽略时，带电粒子的运动行为就与中性粒子的存在基本无关，同完全电离气体构成的等离子体相近，这种情况下的部分电离气体仍然是等离子体。

带电粒子与中性粒子之间的相互作用形式只有近距离碰撞这一种形式，可以用碰撞频率 ν_{en} 表示其相互作用的强弱程度。带电粒子之间的相互作用则可以分成两体的库仑碰撞和集体相互作用两部分，我们可以用库仑碰撞频率 ν_{ee} 和等离子体频率 ω_p 来表征这两种作用的大小。因此，如果有，

$$\nu_{en} \ll \max(\nu_{ee}, \omega_p) \quad (1-13)$$

则中性粒子的作用可以忽略，体系处于等离子体状态。有大量中性粒子存在的情况往往是低温等离子体，通常我们可以用库仑碰撞频率来估计。带电粒子之间的库仑碰撞截面很大，在常规情况下，当电离度为 0.1% 时，实际上就可以忽略中性粒子的作用。当电离度更小时，电离气体仍然具备

一些等离子体的性质，但需要考虑中性粒子的影响。直到中性粒子的碰撞频率大大超越库仑碰撞频率和等离子体频率时，体系的等离子体特征消失，这种微弱电离的气体不再是等离子体。

德拜屏蔽是一个统计意义上的概念，这暗示了在一个德拜球中应具有足够多的粒子，如果我们引入等离子体参数，

$$\Lambda \triangleq 4\pi n_0 \lambda_D^3 \propto (T^3 / n_0)^{1/2} \quad (1-14)$$

则要求，

$$\Lambda \gg 1 \quad (1-15)$$

等离子体参数也是粒子平均动能与粒子间平均势能之比的一个量度。理想气体对应与粒子之间的势能为零，而晶体离子之间的势能远大于动能。通常情况下等离子体参数是一个大量，等离子体中粒子的直接相互作用可以忽略。在极稠密的或温度极低的等离子体中，等离子体参数可以小于、甚至远小于 1，这种等离子体称为强耦合等离子体，已经不是常规等离子体的范畴。稠密的强耦合等离子体的例子有惯性约束聚变的核心等离子体、白矮星天体等离子体、金属固体等离子体等。温度低的强耦合等离子体典型例子是极低温度的非中性等离子体，因为在常规等离子体中较低的温度必然导致正负离子间的复合。

§ 1.2.4 等离子体概念的推广

等离子体概念可以推广，但核心内涵是集体行为起支配作用的宏观体系，如，

非中性等离子体：在宏观上非电中性的宏观体系，若由电子或离子单一荷电成分组成，则称之为纯电子或纯离子等离子体。非中性等离子体存在着很强的自电（磁）场，自场对其平衡起重要作用。

固态等离子体：金属中的电子气、半导体中的自由电子与空穴在一定程度上具有等离子体特征。

液态等离子体：电解液中的正负离子是自由的，具有等离子体特征。

天体物理中的星体：如果将万有引力与库仑力等价，则在天体尺度中，由星体构成的体系可视为一种等离子体。

夸克 - 胶子等离子体：将强相互作用与电磁相互作用作类比，某些概念可用于粒子物理领域。

§1.3 等离子体物理发展简史及研究领域

§ 1.3.1 等离子体物理发展简史

1835 年，法拉第 (M. Faraday)，研究了气体放电基本现象，发现放电管中发光亮与暗的特征区域。

1879 年，克鲁克斯 (W. Crookes) 提出“物质第四态”来描述气体放电中产生的电离气体。

1902 年，克尼理 (A. E. Kennelly) 和赫维塞德 (O. Heaviside) 提出电离层假设，解释短波无线电在天空反射的现象。

1923 年，德拜 (P. Debye) 提出等离子体屏蔽概念。

1925 年，阿普勒顿 (E. V. Appleton) 提出电磁波在电离层中传播理论，并划分电离层。

1928 年，朗缪尔 (I. Langmuir) 提出等离子体集体振荡等重要概念。

1929 年，汤克斯 (L. Tonks) 与朗缪尔 (I. Langmuir) 首次提出“Plasma”一词。

1937 年，阿尔芬 (H. Alfvén) 指出等离子体与磁场的相互作用在空间和天文物理学中起重要作用。

1952 年，美国受控热核聚变的“Sherwood”计划开始，英国、法国、苏联也开展了相应的计划。

1958 年，人们发现等离子体物理是受控热核聚变研究的关键，开展广泛的国际合作。

1950-1980 年代，受控热核聚变研究和空间等离子体的研究使现代等离子体物理学建立起来。

1980 年起，低温等离子体的广泛应用使等离子体物理与科学达到新的高潮。

§ 1.3.2 等离子体物理主要研究领域

等离子体物理涉及的领域比较宽广，具有很强的学科交叉性，有广泛的应用背景。其相对独立的研究和应用领域包括三个重要方面，受控热核聚变等离子体物理、空间与天体等离子体物理、低温等离子体物理与应用。具体介绍留待以后补充。

思考题

- 1.1 电离气体一定是等离子体吗？反过来呢？
- 1.2 试就高温、低温、高密度、低密度等离子体各举一例。
- 1.3 德拜屏蔽效应一定要有异性离子存在吗？
- 1.4 用电子德拜长度表示等离子体的德拜长度的前提是什么？
- 1.5 由于德拜屏蔽，带电粒子的库仑势被限制在德拜长度内，这是否意味着粒子与德拜球外粒子无相互作用？为什么？
- 1.6 对于完全由同一种离子构成的非中性等离子体，能够有德拜屏蔽的概念吗？
- 1.7 常规等离子体具有不容忍内部存在电场的禀性，这是否意味着等离子体内部不可能存在很大的电场，为什么？
- 1.8 在电子集体振荡的模型中，若初始时不是所有电子同时产生移动而是部分电子，则振荡频率会如何变化？
- 1.9 粒子之间的碰撞是中性气体中粒子相互作用的唯一途径，在等离子体中也如此吗？粒子间能量动量交换还有什么途径？
- 1.10 受控任何聚变的最终目标是什么？有哪两种基本的实现途径？
- 1.11 利用打靶的方法可以很容易地实现核聚变反应，为什么以能源为目的的核聚变研究不能采用这种方法？
- 1.12 低温等离子体环境下可以实现常规化学方法无法实现的化学过程，其物理原因何在？
- 1.13 作为物质第四种存在形式，对等离子体体系的时空尺度有何要求？
- 1.14 等离子体是绝大多数物质的存在形式，为什么我们感觉不是这样？
- 1.15 固态、液态、气态之间有明确的相变点，气态到等离子体态有这样的相变点吗？

练习题

- 1.1 计算常温（300K）一大气压下气体的粒子数密度。
- 1.2 温度为 1eV 的系统，粒子的平均热运动能量是多少？
- 1.3 计算气体温度分别为 0.1eV、0.5eV、1eV、5eV 时，1 个大气压下热平衡状态下气体的电离度。
- 1.4 证明，在电势为 $\varphi(x)$ 的一维电场中的带电粒子，函数

$f(w) = f\left(mv^2/2 + q\phi(x)\right)$ 满足伏拉索夫方程稳定解。

- 1.5 证明，等离子体中若粒子的平均动能远大于粒子间的平均势能，则德拜球内等离子体数远大于 1。
- 1.6 若在密度为 10^{20}m^{-3} 的等离子体中，有 1% 电荷分离 1mm，求分离区域内的电场。
- 1.7 考虑半径为 a 、无限长的、均匀的等离子体柱，初始时离子和电子的密度均为 n ，若将所有电子在垂直于轴的径向上作一位移小位移 ξ ，其后电子将发生振荡，求振荡频率。
- 1.8 计算温度为 1eV 时，满足强耦合等离子体条件（比如 $\Lambda = 10$ ）的密度为多高？当密度为 10^{12}m^{-3} 时，温度要多低？

第二章 单粒子运动

等离子体是由带电粒子组成的系统，电磁相互作用是支配系统运动的决定作用。研究等离子体体系的第一步就是考虑单个带电粒子在给定的电磁场中的行为，即所谓的单粒子运动状态。应用单粒子运动模型，我们必须有两个假设，其一是忽略带电粒子之间的相互作用，其二是忽略带电粒子本身对电磁场的贡献。完全由单粒子运动来描述的体系（如加速器中）不是等离子体系统，因为这与“集体现象”起主导作用这一等离子体的关键特征相矛盾。然而，单粒子运动是等离子体微观运动的本质，对单粒子运动的分析是等离子体物理的基础，可以给出许多等离子体物质运动重要的图像。

§ 2.1 回旋运动与电漂移运动

§ 2.1.1 均匀恒定磁场中的回旋运动

在均匀、恒定的外磁场中，一个质量为 m ，电量为 q 的带电粒子运动方程为，

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{m} \vec{v} \times \vec{B} \quad \text{或} \quad \frac{d}{dt} \left(\vec{v} + \frac{q}{m} \vec{B} \times \vec{r} \right) = 0 \quad (2-1)$$

其解为，

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega}_c \times \vec{r} \quad (2-2)$$

其中，

$$\vec{\omega}_c \triangleq -\frac{q\vec{B}}{m} \quad (2-3)$$

称为粒子回旋频率。由（2-2）式描述的运动可分成平行于磁场及垂直于磁场方向的运动。通过选择 \vec{r} 的坐标原点，可以将初始速度 \vec{v}_0 的垂直于磁场方向的分量化为零，于是垂直于磁场方向的运动速度为，

$$\vec{v}_\perp = \omega_c \times \vec{r} \quad (2-4)$$

这是以 $\bar{\omega}_c$ 为角频率的圆周运动，即回旋运动。

因此，在恒定磁场中，带电粒子的运动可分解成沿磁场方向的自由运动和绕磁场的回旋运动，其轨迹为螺旋线。由理论力学课程可知，一般运动可视为角动量 $\vec{J} = m\vec{v} \times \vec{r}$ 绕 \vec{B} 作拉莫 (Larmor) 进动，进动的角频率称为拉莫频率，

$$\bar{\omega}_L \triangleq -q\vec{B}/2m = \bar{\omega}_c/2 \quad (2-5)$$

带正电荷的粒子回旋运动方向与负电粒子方向相反，带正电粒子的回旋运动与磁场构成左手螺旋，负电粒子为右手螺旋。不同荷质比的粒子回旋频率不同，显然，电子回旋频率远大于离子回旋频率，下面是值得记忆的电子回旋频率表达式，

$$f_{ce} = \frac{\omega_{ce}}{2\pi} \simeq 28B \quad (2-6)$$

其中磁场单位为特斯拉 (T)，频率的单位为 10^9 Hz (GHz)。尽管拉莫频率与回旋频率最初的定义不同，但在等离子体物理中，常常将回旋频率称为拉莫频率，回旋运动称为拉莫运动。

粒子回旋运动的轨道半径称为拉莫半径，与粒子的垂直于磁场的运动速度相关，若粒子的垂直速度为 v_\perp ，则拉莫半径为，

$$r_L \triangleq v_\perp / \omega_c = mv_\perp / |q| B \quad (2-7)$$

带电粒子的回旋运动会产生磁场，无论是电子还是离子，它们的回旋运动所产生的磁场总是与外加磁场方向相反，所以回旋运动具有逆磁的特征。等离子体由带电粒子构成，因而是一种逆磁介质。带电粒子的回旋运动可视为一个电流环，相当于一个磁偶极子，这个磁偶极子的磁矩为，

$$\vec{\mu} = (\pi r_L^2) \left(\frac{q\bar{\omega}_c}{2\pi} \right) = -\frac{mv_\perp^2}{2B} \left(\frac{\vec{B}}{B} \right) \triangleq -\frac{W_\perp}{B} \left(\frac{\vec{B}}{B} \right) \quad (2-8)$$

§ 2.1.2 均匀电场的影响， $\vec{E} \times \vec{B}$ 漂移

若电场 \vec{E} 、磁场 \vec{B} 同时存在，则带电粒子的运动方程为，

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega}_c \times \vec{v} + \frac{q}{m} \vec{E} \quad (2-9)$$

分解成与 \vec{B} 平行和垂直方向的分量方程，

$$\begin{cases} \frac{d\vec{v}_{\parallel}}{dt} = \frac{q}{m} \vec{E}_{\parallel} \\ \frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt} = \vec{\omega}_c \times \vec{v}_{\perp} + \frac{q}{m} \vec{E}_{\perp} \end{cases} \quad (2-10)$$

平行于磁场的分量方程给出了简单的匀加速运动，对于垂直分量方程，可以作伽利略变换，

$$\vec{v}_{\perp} = \vec{v}_c + \vec{v}'_{\perp} \quad (2-11)$$

于是有，

$$\frac{d\vec{v}'_{\perp}}{dt} = \vec{\omega}_c \times \vec{v}'_{\perp} + \vec{\omega}_c \times \vec{v}_c + \frac{q}{m} \vec{E}_{\perp} \quad (2-12)$$

若取，

$$\vec{\omega}_c \times \vec{v}_c + \frac{q}{m} \vec{E}_{\perp} = 0 \quad (2-13)$$

则 (2-12) 式可化为，

$$\frac{d\vec{v}'_{\perp}}{dt} = \vec{\omega}_c \times \vec{v}'_{\perp} \quad (2-14)$$

这又是一个单纯的回旋运动方程。所以，在恒定电磁场中，粒子的运动可视为回旋运动和回旋运动中心匀速运动的合成，粒子回旋运动的中心称为导向中心。用 $\vec{\omega}_c$ 叉乘 (2-13) 式，可以解出导向中心的运动速度，

$$\vec{v}_c = \frac{q\vec{\omega}_c \times \vec{E}_{\perp}}{m\omega_c^2} = \frac{\vec{E}_{\perp} \times \vec{B}}{B^2} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \quad (2-15)$$

在有电场存在的情况下，粒子的运动形式发生了变化。一般而言，运动的主体仍然是周期性的回旋运动，但回旋运动的导向中心不再固定，而是作相对较慢的平动，这种平动称为漂移运动。由于电场存在而产生的漂移运动称为电漂移，或直接呼之为 $\vec{E} \times \vec{B}$ 漂移。电漂移速度为，

$$\vec{v}_{DE} = \vec{E} \times \vec{B} / B^2 \quad (2-16)$$

电漂移运动与粒子种类无关，是等离子体整体的平移运动。由于漂移运动垂直于磁场，我们必须对磁场在垂直方向上可以约束带电粒子的简单图像进行重新审视。

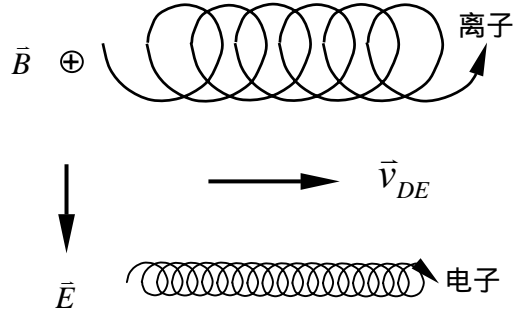


图 2.1 电漂移物理图像

电漂移运动同时也与电场垂直，平均而言电场并不对粒子做功（ \vec{E}_\perp 部

分），这是在有磁场下应用电场加速带电粒子需要考虑的问题。

电漂移运动的图像如图 2.1 所示，由于电场的作用，粒子在回旋运动过程中，当运动方向与电场力的方向相同时，会受到加速，运动轨迹的曲率半径将会增加，反之其曲率半径则会减小，因而在一个周期后粒子的运动轨迹不会闭合，这样就形成了漂移运动。电子和离子的回旋运动的旋转方向相反，但受到的电场力方向也相反，结果电漂移运动的方向是一致的。

§ 2.1.3 重力漂移

$\vec{E} \times \vec{B}$ 漂移与粒子电荷、种类无关，不会引起等离子体中不同成分的相对运动，也不会引起电荷分离的效应。但如果作用力不是电力，比如是重力，则漂移的图像有所不同。形式上，我们仅将 $q\vec{E}$ 换成 $m\vec{g}$ ，则可直接获得由重力产生的漂移速度，

$$\vec{v}_{DG} = \frac{m\vec{g} \times \vec{B}}{qB^2} \quad (2-17)$$

重力漂移方向与电荷相关，电子与离子漂移方向相反，这种漂移有产生空间电荷分离的趋势，进而产生电场或者电流，使得磁场约束等离子体的性能发生重要的变化。

实际上，由于引力相互作用远小于电磁相互作用，地球对物体的重力场在绝大多数等离子体问题中可以忽略，重力引起的漂移也是如此。这里

突出了重力，是因为它代表了一类非电力外场，其漂移运动性质与电场力完全不同。

§ 2.2 非均匀磁场的影响，导向中心近似

§ 2.2.1 梯度漂移

当磁场不均匀时，严格求解粒子运动方程非常困难，但在弱不均匀的情况下，我们可以用导向中心近似方法来处理。磁场在空间的弱不均匀性可表达为，

$$\left| (\vec{r}_0 \cdot \nabla) \vec{B} \right|_0 \ll \left| \vec{B}_0 \right| \quad (2-18)$$

这里 \vec{r}_0 表示粒子作回旋运动的位矢， \vec{B}_0 表示在引导中心处的场强，下标“0”表示在导向中心处取值。上式的意义为，在粒子回旋运动轨道之内，磁场的相对变化是一个小量。这时，我们可以认为粒子运动还保持着回旋运动的基本特征，但有一些小偏差。

在导向中心处将磁场作空间泰勒 (Taylor) 展开：

$$\vec{B}(\vec{r}) \approx \vec{B}_0 + (\vec{r}_0 \cdot \nabla) \vec{B} \Big|_0 \triangleq \vec{B}_0 + \vec{B}_1 \quad (2-19)$$

则粒子运动方程为，

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{m} \left[\vec{v} \times \vec{B}_0 + \vec{v} \times (\vec{r}_0 \cdot \nabla) \vec{B} \Big|_0 \right] \quad (2-20)$$

同时，按上面假定，运动速度亦可分成在磁场 \vec{B}_0 下的回旋运动速度 \vec{v}_0 和一阶微扰量 \vec{v}_1 之和，

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1 \quad (2-21)$$

其中，

$$\vec{v}_0 = \vec{\omega}_c \times \vec{r}_0 = -\frac{q\vec{B}_0 \times \vec{r}_0}{m} \quad (2-22)$$

是粒子的回旋运动速度，则在忽略了二阶小量 $\vec{v}_1 \times \vec{B}_1$ 后，(2-20) 式可写成，

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{m}(\vec{v} \times \vec{B}_0) + \frac{q}{m} \left[\vec{v}_0 \times (\vec{r}_0 \cdot \nabla) \vec{B} \right]_0 \quad (2-23)$$

此式最后一项提供了形式上的外力项，但此项与粒子回旋运动 \vec{r}_0 相关，是一个随时间变化的量。若对其在回旋轨道上作平均，就可以获得一等效的净作用力，

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \left\langle q\vec{v}_0 \times [(\vec{r}_0 \cdot \nabla) \vec{B}]_0 \right\rangle = \frac{q^2}{m} \left\langle [(\vec{r}_0 \cdot \nabla) \vec{B}]_0 \times (\vec{B}_0 \times \vec{r}_0) \right\rangle \\ &= \frac{q^2}{m} \left\langle \left\{ \vec{r}_0 \cdot [(\vec{r}_0 \cdot \nabla) \vec{B}]_0 \right\} \vec{B}_0 - \left\{ \vec{B}_0 \cdot [(\vec{r}_0 \cdot \nabla) \vec{B}]_0 \right\} \vec{r}_0 \right\rangle \triangleq \bar{F}_{\parallel} + \bar{F}_{\perp} \end{aligned} \quad (2-24)$$

取局域直角坐标系，令，

$$\vec{r}_0 = r_0(\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y), \quad \vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z \quad (2-25)$$

则平行方向的力为，

$$\begin{aligned} \bar{F}_{\parallel} &= \frac{q^2}{m} \left\langle \left\{ \vec{r}_0 \cdot [(\vec{r}_0 \cdot \nabla) \vec{B}]_0 \right\} \vec{B}_0 \right\rangle \\ &= \frac{r_0^2 q^2 \vec{B}_0}{m} \left\langle \left[\sin^2 \theta \frac{\partial B_x}{\partial x} + \cos^2 \theta \frac{\partial B_y}{\partial y} + \sin \theta \cos \theta \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) \right]_0 \right\rangle \\ &= \frac{q^2 r_0^2 \vec{B}_0}{2m} \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \right)_0 = - \frac{q^2 r_0^2 \vec{B}_0}{2m} \frac{\partial B_z}{\partial z} \Big|_0 = - \mu \frac{\partial B_z}{\partial z} \Big|_0 \vec{e}_z \end{aligned} \quad (2-26)$$

注意到，在引导中心处， $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ ，同时由于经过平均后所有的场量都是在导向中心处取值，可以取消“0”的下标，故上式也可写成，

$$\bar{F}_{\parallel} = - \frac{\mu}{B} [(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}]_{\parallel} = - \frac{\mu}{2B} (\nabla B^2)_{\parallel} = - \mu (\nabla B)_{\parallel} \quad (2-27)$$

垂直方向的力为，

$$\begin{aligned}
\vec{F}_\perp &= -\frac{q^2}{m} \left\langle \left\{ \vec{B}_0 \cdot \left[(\vec{r}_0 \cdot \nabla) \vec{B} \right]_0 \right\} \vec{r}_0 \right\rangle \\
&= -\frac{q^2 r_0^2 B_0}{m} \left\langle \left(\sin \theta \frac{\partial B_z}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial B_z}{\partial y} \right) (\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y) \right\rangle \quad (2-28) \\
&= -\mu \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial B_z}{\partial y} \vec{e}_y \right)_0 = -\mu \left(\frac{\partial B}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial B}{\partial y} \vec{e}_y \right)_0
\end{aligned}$$

或写成矢量形式，

$$\vec{F}_\perp = -\mu (\nabla B)_\perp \quad (2-29)$$

在弱不均匀的磁场中，粒子运动仍然具有回旋运动的基本特征，但由于磁场的非均匀性，粒子在一个回旋运动周期内，会经历不同的磁场，粒子感受的磁场实际是在变化的，因而粒子可以感受到附加的力。综合 (2-27) 与 (2-29) 式，非均匀磁场引起的附加力为，

$$\vec{F} = -\mu (\nabla B) \quad (2-30)$$

由两个同轴的相隔一定距离的电流环产生的磁场位形如图 2.2 所示。其磁场在沿磁场的方向（称为纵向）上存在梯度，在两电流环之间磁场较弱，在环的位置磁场较强，这种类型的磁场称为磁镜场。在磁镜场位形下，会出现纵向的等效力 $\vec{F}_\parallel = -\mu (\nabla B)_\parallel$ ，力的方向由强场区指向弱场区，如图 2.2 所示。当带电粒子由弱场区向强场区运动时，粒子的平行速度将减小，若在足够强的磁场处平行速度减少至零，则粒子将被反射。对粒子而言，强场处相当于反射镜面，这就是磁镜场称谓的来源。在如图所示的磁镜场中，一部分粒子由于此力而被约束于两较强的场区。地球磁场是天然的磁镜系统，它约束捕捉带电粒子形成了范阿伦带。

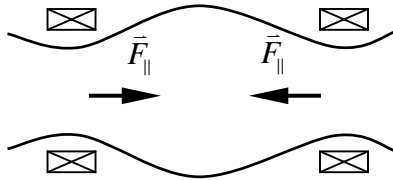


图 2.2 磁镜场对粒子的捕获

在一个静态的磁场中，磁场并不能与粒子交换能量，但若粒子在反射时，磁镜的“镜面”相互接近，则磁场可以传递能量给被捕捉的粒子，使粒子的能量提高而得到加速。这一机制称为费米（Fermi）加速机制，是费米为解释高能宇宙线的形成机理而提出的一种解释。

非均匀磁场的等效力的垂直分量同样可以产生漂移运动，称为梯度漂移。梯度漂移速度为，

$$\vec{v}_{D\nabla B} = -\frac{(\mu \nabla_{\perp} B) \times \vec{B}}{qB^2} = \frac{W_{\perp} \vec{B} \times \nabla B}{qB^3} \quad (2-31)$$

梯度漂移与电荷相关，有引起电荷分离的趋势。梯度漂移的物理图像是，粒子在强场区的回旋半径比弱场区小，在不均匀的磁场中，回旋运动轨迹不再闭合，造成等效的移动，如图 2.3 所示。

我们可以证明在磁

场梯度较小的情况下，带电粒子的磁矩 μ 在运动过程中不变，即磁矩是一个运动不变量。在这种弱变化情况下，带电粒子所受到的力由 (2-30) 式给出，这个力也就是带电粒子回旋运动所形成的磁矩为 $\vec{\mu}$

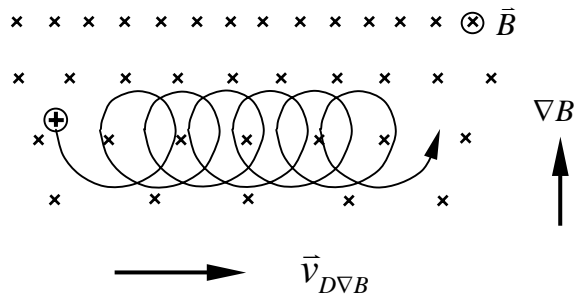


图 2.3 梯度漂移物理图像

的磁偶极子在非均匀磁场中所受的力。由电动力学课程可知，一般的磁偶极子在外磁场中受力为，

$$\vec{F} = \nabla(\vec{\mu} \cdot \vec{B}) = -\nabla(\mu B) = -\mu \nabla B - B \nabla \mu \quad (2-32)$$

比较 (2-30) 和 (2-32) 式，有，

$$B \nabla \mu = 0 \quad \text{或} \quad \nabla \mu = 0 \quad (2-33)$$

即磁矩为常数。这表明了尽管带电粒子由于漂移可以从较强的磁场运动到较弱的磁场区域，或者反之，但会保持磁矩不变。

根据磁矩的不变性我们可以考察一下被磁镜场反射的条件。参考图 2.2，设粒子从磁场为 B_0 的弱场区向强场区运动，则其平行方向的能量将产生变化，

$$\frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 = \frac{1}{2} m v_{\parallel 0}^2 - \int \mu \frac{\partial B}{\partial z} dz = \frac{1}{2} m v_{\parallel 0}^2 + \mu(B_0 - B) \quad (2-34)$$

注意到在上式最后一步中，我们应用了磁矩不变的条件。若粒子的平行方向的动能减小至零，则将产生反射，故反射点的磁场为，

$$B = \frac{mv_0^2}{2\mu} = \left(\frac{v_0}{v_{0\perp}} \right)^2 B_0 \quad \text{或} \quad \frac{B_0}{B} = \left(\frac{v_{0\perp}}{v_0} \right)^2 \triangleq \sin^2 \theta \quad (2-35)$$

其中 θ 是在弱场处粒子运动轨迹与磁场方向的夹角。因此，对一个确定的磁镜场来说，只有 θ 足够大的粒子才能够被约束， θ 小的粒子将沿磁力线逃出，在速度空间上，不能被磁镜场约束的区域是一个锥体，称为损失锥。损失锥是粒子的逃逸的通道，在磁镜场中约束的粒子通过相互碰撞改变速度，不断进入损失锥区域而逃逸。同时由于损失锥的存在，磁镜场约束的粒子的速度分布一定是各向异性的，也不可能达到热力学平衡的麦克斯韦分布，由此而产生的所谓的损失锥不稳定性进一步损害了磁镜的实际约束效果性能。

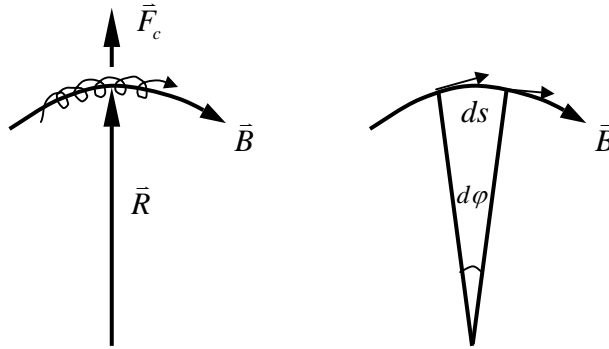


图 2.4 曲率漂移几何关系

§ 2.2.2 曲率漂移

若磁力线是弯曲的，而粒子又具有平行速度时，粒子将会感受到惯性离心力，因而也会产生相应的漂移运动，这称为曲率漂移。惯性离心力可表示为，

$$\vec{F}_c = \frac{mv_{\parallel}^2}{R} \vec{R} \quad (2-36)$$

其中 \bar{R} 为曲率半径，方向由磁力线凹的一面指向凸的一面，如图 2.4 所示。因为 $d\varphi = |d\bar{B}/B|$ 、 $\bar{R} \parallel -d\bar{B}^{\perp}$ ，我们有，

$$\frac{\bar{R}}{R^2} = \frac{d\varphi}{ds} \left(\frac{\bar{R}}{R} \right) = -\frac{1}{B} \frac{d\bar{B}}{ds} = -\frac{(\bar{B} \cdot \nabla) \bar{B}}{B^2} = -\frac{\nabla B}{B} \quad (2-37)$$

所以，

$$\bar{F}_c = -2W_{\parallel} \frac{\nabla B}{B} \quad (2-38)$$

其中 W_{\parallel} 是粒子的平行方向的动能。于是，我们可以获得相应的曲率漂移速度，

$$\bar{V}_{DC} = \frac{\bar{F}_c \times \bar{B}}{qB^2} = \frac{2W_{\parallel}}{qB^3} \bar{B} \times \nabla B \quad (2-39)$$

一般来说，若磁力线是弯曲的，其磁场必然是非均匀的，故曲率漂移一定伴随着梯度漂移。结合 (2-31) 式，由磁场不均匀性所引起的总漂移速度可以写成，

$$\bar{V}_D = \frac{W_{\perp} + 2W_{\parallel}}{qB^4} [\bar{B} \times (\nabla B)] \quad (2-40)$$

简单的约束带电粒子的想法是将磁力线造成闭合的环形，如同加速器中的磁场形态，带电粒子将沿始终沿着磁力线运动。然而，这种磁场位形中，一定存在着曲率漂移，这种漂移最终会使粒子离开磁场约束区域。对于由大量的电子、离子构成的等离子体系统，曲率和梯度漂移还会以另一种方式削弱磁场的约束性能。由于漂移将使电子与离子分别向相反方向（如上、下两个方向）运动，其结果会产生电荷分离而形成电场（垂直方向），如果没有另外的措施消除这种电场，则新生的电场所产生的电漂移会使等离子体整体地向外漂移，最终破坏约束。

¹ 假设沿磁力线方向磁场强度不变。若有变化，则会引起磁镜场效应，与横越磁场的漂移运动性质不同。

§ 2.3 非均匀电场

我们再来考察电场非均匀效应，假设磁场是均匀的。这时，除去简单的电漂移外，还应出现新的运动。若非均匀电场对粒子轨道影响不大，粒子运动的主体还是快速的回旋运动，可以应用导向中心近似。将电场按导向中心坐标展开，

$$\bar{E} = \bar{E}_0 + (\bar{r}_0 \cdot \nabla) \bar{E} \Big|_0 + \frac{1}{2} (\bar{r}_0 \bar{r}_0 : \nabla \nabla) \bar{E} \Big|_0 \quad (2-41)$$

下标“0”表示在导向中心处取值。我们在此保留了二次展开项，这是因为后面将看到，一次项的平均效果为零。令粒子速度取下面形式：

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{v}_{DE} + \bar{v}_1 = \bar{v}' + \bar{v}_{DE} \quad (2-42)$$

其中 \bar{v}_0 为回旋运动， \bar{v}_{DE} 为零阶电漂移， \bar{v}_1 为新的扰动速度。运动方程变为¹，

$$\frac{d\bar{v}'}{dt} = \frac{q}{m} (\bar{v}' \times \bar{B}) + \frac{q}{m} \bar{E}_{\parallel} + \frac{q}{m} \left[(\bar{r}_0 \cdot \nabla) \bar{E} + \frac{1}{2} (\bar{r}_0 \bar{r}_0 : \nabla \nabla) \bar{E} \right]_0 \quad (2-43)$$

上式最后一项是新的扰动力项，与回旋运动相关。如同前面的处理方式一样，对此项作回旋轨道平均。采用当地直角坐标系，有，

$$\begin{aligned} \bar{F} &= q r_0 \left\langle \left(\sin \theta \frac{\partial \bar{E}}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial \bar{E}}{\partial y} \right)_0 \right\rangle \\ &+ \frac{1}{2} q r_0^2 \left\langle \left(\sin^2 \theta \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial x^2} + \cos^2 \theta \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial y^2} + \sin 2\theta \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial x \partial y} \right)_0 \right\rangle \quad (2-44) \\ &= \frac{1}{4} q r_0^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial y^2} \right)_0 = \frac{1}{4} q r_0^2 \nabla_{\perp}^2 \bar{E} \end{aligned}$$

与零阶电场力合并，我们得到在弱不均匀的电场下，粒子受力的表达式，

$$\bar{F}_E = q \left(1 + \frac{r_0^2}{4} \nabla_{\perp}^2 \right) \bar{E} \quad (2-45)$$

¹ 注意： $\bar{v}_{DE} \times \bar{B} = -\bar{E}_{\perp}$

相应的漂移速度为，

$$\bar{v}_{DE} = \left(1 + \frac{r_0^2}{4} \nabla_{\perp}^2 \right) \frac{\bar{E} \times \bar{B}}{B^2} \quad (2-46)$$

由电场的非均匀性引起的电漂移修正的结果，使得粒子的电漂移与粒子种类相关。由（2-46）可以看出，这种相关与拉莫半径有关，拉莫半径越大，由不均匀性引起的效果越大，这种与拉莫半径相关的效应称为有限拉莫半径效应。

由于电子和离子的拉莫半径不同，故电漂移可以引起电荷分离。电荷分离会产生电场，如果新产生的电场增强了原来的电场，则可导致一种不稳定性（漂移不稳定性）。

§ 2.4 渐变电场的影响

若电场是缓慢变化的，则电漂移速度将随时变化。以漂移速度作变换的坐标系将不再是惯性系，由此可以出现相应的惯性力。粒子的运动方程为，

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{q}{m} \left(\bar{E}(t) + \bar{v} \times \bar{B} \right) \quad (2-47)$$

作变换，

$$\bar{v} = \bar{v}' + \bar{v}_{DE} = \bar{v}' + \frac{1}{B^2} \left(\bar{E}(t) \times \bar{B} \right) \quad (2-48)$$

不失一般性，假设 $\bar{E}_{\parallel} = 0$ ，有，

$$\frac{d\bar{v}'}{dt} = \frac{q}{m} \left(\bar{v}' \times \bar{B} \right) - \frac{d\bar{v}_{DE}}{dt} \quad (2-49)$$

也即出现了惯性力 $-m d\bar{v}_{DE}/dt$ ，将会引起新的漂移，其漂移速度为，

$$\bar{v}_{DP} = -\frac{m}{qB^2} \frac{d\bar{v}_{DE}}{dt} \times \bar{B} = -\frac{m}{qB^4} \left(\frac{d\bar{E}}{dt} \times \bar{B} \right) \times \bar{B} = \frac{m}{qB^2} \frac{d\bar{E}_{\perp}}{dt} \quad (2-50)$$

新的漂移与粒子种类相关，漂移位移的方向与电场一致，这与介质的极化过程相同，故称为极化漂移。大量的单个粒子的极化漂移可产生宏观

的极化电流，

$$\bar{J}_P = ne(\bar{v}_{iDE} - \bar{v}_{eDE}) = \frac{n(m_i + m_e)}{B^2} \frac{d\bar{E}_\perp}{dt} = \frac{\rho}{B^2} \frac{d\bar{E}_\perp}{dt} \quad (2-51)$$

这里假定了电子与离子的密度相等，均为 n ， ρ 为等离子体质量密度。

极化电流的出现使等离子体在垂直于磁场的方向上的行为类似于普通的电介质，若外电场是周期变化的，角频率为 ω ，则可以求出极化强度，

$$\bar{P} = i \frac{\bar{J}_P}{\omega} = i \frac{\rho}{\omega B^2} \frac{d\bar{E}_\perp}{dt} = \frac{\rho}{B^2} \bar{E}_\perp \quad (2-52)$$

由此可以得到等离子体的介电常数，

$$\varepsilon = 1 + \frac{\rho}{\varepsilon_0 B^2} \quad (2-53)$$

极化漂移的机制是粒子在电场作用下的初始加速过程，当其速度上提高到 $\bar{v} \times \bar{B}$ 力起作用的时候，这种加速过程就停止了，极化漂移因而也称为起动漂移。

§ 2.5 高频电磁场的作用与有质动力

前面我们用引导中心近似来处理了比回旋运动慢得多的慢变化外力场，这是一种可以普遍应用的方法，下面我们将借用到高频电磁场下粒子的运动问题，即所谓的振荡中心近似。

在谐振电场（电磁波）的作用下，粒子的运动方程为，

$$\frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \frac{q}{m} \bar{E} e^{-i\omega t} \quad (2-54)$$

其振荡解为，

$$\bar{r}_0 = -\frac{q}{m\omega^2} \bar{E} e^{-i\omega t} \quad (2-55)$$

这时，我们再考虑在空间不均匀电磁场作用下的粒子运动，

$$\frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \frac{q}{m} \left(\bar{E}(\bar{r}) + \frac{d\bar{r}}{dt} \times \bar{B}(\bar{r}) \right) e^{-i\omega t} \quad (2-56)$$

将粒子的运动分成在振荡中心作高速振荡运动及振荡中心的相对慢的运动之和 $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}_1$ 。同时将电磁场在振荡中心处展开，(2-56) 方程可以按展开级分开，其零级项提供了振荡解 (2-55) 式，一级项方程为，

$$\ddot{\vec{r}}_1 = \frac{q}{m} \left[(\vec{r}_0 \cdot \nabla) \vec{E}|_0 + (\dot{\vec{r}}_1 + \dot{\vec{r}}_0) \times \vec{B} \right] \quad (2-57)$$

其中下标“0”表示在振荡中心处取值，同时为了简洁，已将时间的简谐因子归并到 \vec{E} 和 \vec{B} 中。对振荡运动进行平均，由于 $\langle \dot{\vec{r}}_1 \times \vec{B} \rangle = \dot{\vec{r}}_1 \times \langle \vec{B} \rangle = 0$ ，故有，

$$\ddot{\vec{r}}_1 = \frac{q}{m} \left[\left\langle (\vec{r}_0 \cdot \nabla) \vec{E}|_0 \right\rangle + \left\langle \dot{\vec{r}}_0 \times \vec{B} \right\rangle \right] \quad (2-58)$$

代入 \vec{r}_0 的表达式，

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_1 &= -\frac{q^2}{m^2 \omega^2} \left[\left\langle (\vec{E} \cdot \nabla) \vec{E} \right\rangle + \left\langle \dot{\vec{E}} \times \vec{B} \right\rangle \right] \\ &= -\frac{q^2}{m^2 \omega^2} \left[\left\langle \nabla \frac{E^2}{2} \right\rangle - \left\langle \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) \right\rangle + \left\langle \dot{\vec{E}} \times \vec{B} \right\rangle \right] \\ &= -\frac{q^2}{m^2 \omega^2} \left[\left\langle \nabla \frac{E^2}{2} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) \right\rangle \right] \\ &= -\frac{q^2}{m^2 \omega^2} \nabla \frac{\langle E^2 \rangle}{2} \triangleq \frac{1}{m} \bar{f}_p \end{aligned} \quad (2-59)$$

其中，

$$\bar{f}_p = -\frac{q^2}{m \omega^2} \nabla \frac{\langle E^2 \rangle}{2} \quad (2-60)$$

称为作用在单个粒子上的有质动力 (Ponderomotive force)。注意到，由于以上所有的电场量均在振荡中心处取值，故略去了下标。

有质动力是空间非均匀的高频电磁场对带电粒子的等效力，是电磁场压强的作用力 (电磁场能量密度能的梯度为压力，后面的课程中我们将看到磁压力的作用)，由于带电粒子与电磁场的强烈耦合，电磁场压力可以施加在带电粒子上，这就是有质动力来源。在现在的激光光场强度很大的情况下，有质动力有时起着重要的作用。

有质动力的方向与电荷正负无关，总是指向电场强度减弱的方向。但对电子的作用远大于离子，这并不表明电子在此力的作用下可以抛开离子而独自行动，等离子体的准电中性保证了电子和离子不能够发生较大的分离。因而，不管外界的力最初施加于等离子体中的哪一个成份，最终都是施加于等离子体本身。所以单位体积等离子体所受的有质动力为，

$$\bar{F}_p = - \left(\frac{n_e q_e^2}{m_e \omega^2} + \frac{n_i q_i^2}{m_i \omega^2} \right) \nabla \frac{\langle E^2 \rangle}{2} = - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \nabla \left(\frac{\epsilon_0}{2} \langle E^2 \rangle \right) \quad (2-61)$$

有质动力起作用的一个重要现象是强激光束在等离子体中的自聚焦现象。由于激光束中心处的强度比边缘处大，处于激光束中的等离子体所感受的有质动力方向向外，因而激光束内部的等离子体密度将低于光束外，甚至形成中空结构。由于等离子体的折射率小于真空折射率，密度越大，折射率越小，这样中空分布的等离子体对激光束是一个起到汇聚的作用，边缘处的光线将折向中心，产生了所谓的自聚焦现象，如图 2.5 所示。

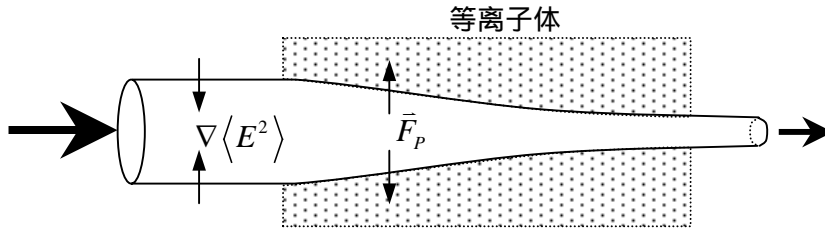


图 2.5 等离子体中强激光束的自聚焦现象

在有质动力的作用下，等离子体受到加速可以获得定向的能量。但这种定向能量是由等离子体随电磁场振动的能量转换而来。由 (2-59) 式定向运动方程，可以得到，

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{r}_1^2 + \frac{q^2}{m \omega^2} \frac{\langle E^2 \rangle}{2} \right) = 0 \quad (2-62)$$

或，

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{r}_1^2 + \frac{1}{2} m \langle \dot{r}_0^2 \rangle \right) = 0 \quad (2-63)$$

即振荡运动的平均动能与定向运动动能之和为常量，不随时间变化。

§ 2.6 绝热不变量

当系统存在一个周期运动时，若涉及此周期运动的广义坐标和广义动量为 q 、 p ，则对此周期运动的作用量积分，

$$J = \oint pdq \quad (2-64)$$

为运动常数。

若系统参数缓慢变化，则运动将不严格地保持周期性，但运动常数并不改变，这就是所谓的绝热不变量。这里我们不去严格证明这一定理，但利用相空间轨道作一点说明。

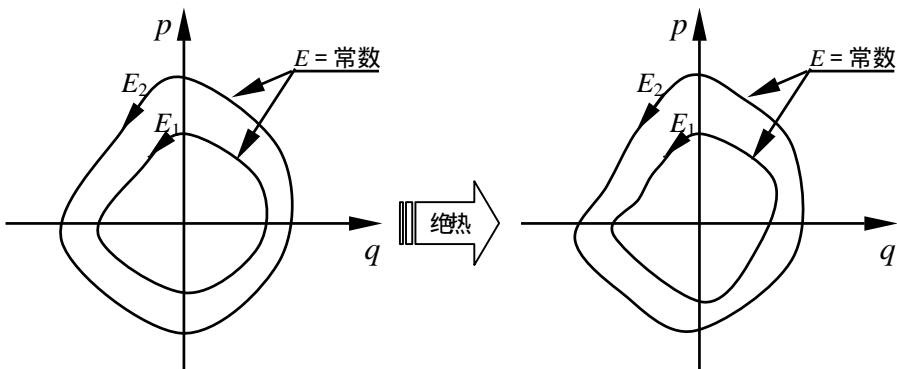


图 2.6 相空间绝热不变量图示

参照图 2.6，在系统的相空间，周期运动的轨迹为一闭合回路，作用量积分即为此闭合回路的面积。同时这一轨迹，也应是系统的等能量线，处于不同的初始能量的系统在相空间的轨迹将相互嵌套。当系统参数缓变时，周期轨道会产生形变，但如果是绝热过程，系统的能量则不变，等能量线中包含的系综数目不变，再根据刘维定理，相空间系综密度是不可压缩的，因而等能量线，也就是相空间轨迹包围的面积只能不变。

下面我们指出在电磁场中，单粒子运动所涉及的几个绝热不变量。

§ 2.6.1 磁矩不变量

第一个周期运动就是粒子的回旋运动，回旋运动的作用量积分为，

$$\oint pdq = \oint mv_{\perp} \cdot r_L d\theta = 2\pi mv_{\perp} r_L = 2\pi \frac{mv_{\perp}^2}{|\omega_c|} = 4\pi \frac{m}{|q|} \mu \quad (2-63)$$

所以，如果粒子的荷质比不变，则回旋运动所对应的绝热不变量实际上就是磁矩。也就是说磁矩是绝热不变的。

绝热的条件要求系统参数缓变，缓变的意思变化的时间相对于周期运动的周期是小量。磁矩不变要求参数变化角频率远小于回旋频率。反过来说，要想改变磁矩，必须破坏绝热缓变条件。

§ 2.6.2 纵向不变量

考虑在被磁镜场中俘获的粒子的运动，它们将在两个强场的转折点处反弹。因而出现第二个周期运动，运动的坐标是沿磁力线的路径，动量即是粒子的平行动量。下面这一积分，

$$J = \int_a^b v_{\parallel} ds \quad (2-64)$$

正比于运动量积分，因而是绝热不变量，称为纵向不变量。

地磁场是一个天然的磁镜场，地球磁场所捕获的粒子，除去回旋运动、两极间的反弹运动外，还会产生横越磁力线的漂移运动。如果磁场是对称的，粒子绕地球漂移一周后仍然会回到同一磁力线上。若地球磁场有变化时，以上两种周期运动的不变量保证了仍然可以回到相同的磁力线。因为磁矩不变量保证了反弹运动的转折点处的磁场强度不变，而纵向不变量又保证了两转折点之间的磁力线长度不变，在同一子午面上相同场强之间磁力线长度，没有两条是相等的，因此，粒子在漂移一周后，回到的一定是出发时的磁力线。

§ 2.6.3 磁通不变量

上面考虑的漂移运动同样是一个周期运动，也存在相应的绝热不变量，与之相联系的是漂移面所包含的磁通，可以称为磁通不变量。对于地球磁场来说，漂移运动的周期太长，地球环境磁场的变化时间不满足缓变条件，这一不变量没有实际应用的价值。

思考题

- 2.1 (2-16) 式在磁场趋于零时，会得到漂移速度无穷大的结果，这合理吗？如何解释？

- 2.2 电漂移与重力漂移的最重要的差别是什么？
- 2.3 从粒子运动轨道图像分析（参考图 2.1），考察粒子的电漂移速度为什么与下列因素无关，（1）电荷的正负、（2）粒子质量、（3）粒子的速度。
- 2.4 磁力线弯曲的磁场一定是不均匀的，反过来呢？
- 2.5 试分析“镜面”相互接近系统如何传递能量给所捕获的粒子。
- 2.6 若电子、离子的温度相等且各向同性，其等效磁矩之比为多少？
- 2.7 对磁镜场约束的带电粒子，若缓慢地增强磁场，则粒子的垂直能量会增加，磁场本身不会对粒子做功，那么粒子是如何得到能量的？
- 2.8 本章中所处理的粒子在电磁场中的运动可以分成回旋运动与漂移运动的合成，对哪些情况我们要求漂移运动的速度远小于回旋运动速度，哪些情况则不需要这样的假设？
- 2.9 绝热不变量的条件是什么？具体到电子磁矩绝热不变的条件为何？
- 2.10 若磁场不随时间变化，但是不均匀的，那么磁矩绝热不变的缓变条件是什么？
- 2.11 从粒子引导中心近似的方法体会当体系存在两种时间尺度差别较大的运动时的处理方法。

练习题

- 2.1 若利用频率 2.45GHz 的工业标准微波源来加热磁场中的电子，磁场应为何强？
- 2.2 将一电子放入正交的电磁场中，若电子初始时静止，求电子的运动轨迹，并求到达稳定状态时电子获得的能量，并证明回旋运动和漂移运动所拥有的能量相同。
- 2.3 设两竖直放置的无限大平板之间存在等离子体，磁场为水平方向且平行于平板，重力将引起漂移并产生电荷分离，进而产生电场。若电荷到达平板处将在平板上积累，等离子体在 $t = 0$ 时产生后密度维持不变求在此电场作用下的粒子的漂移运动情况。
- 2.4 由两个半径为 a ，相距为 $2a$ 的同轴电流环组成的磁镜场，证明，若轴上中心处粒子速度满足， $v_{\parallel}^2 < \left(\sqrt{2} + \sqrt{10}/25 - 1\right)v_{\perp}^2$ ，则将被系统捕获。假设满足粒子回旋半径远小于 a 。
- 2.5 在托卡马克环状磁场位形中，磁场的空间变化形式为 $dB/dR \approx B/R$ ，若粒子速度分布是各向同性的，试比较粒子的曲率漂移和梯度漂移的

大小。

- 2.6 在均匀的磁场 \vec{B} 中，只有电子被约束其中，称为非中性等离子体。若电子是均匀的，密度为 n ，半径为 a ，证明，电子等离子体将作刚性旋转，并求其旋转速度。
- 2.7 若一直线磁化等离子体装置中（柱对称）的磁场强度为 0.1T ，实验测得密度分布为 $n = n_0 \exp\left[\exp(-r^2/a^2) - 1\right]$ ，其中 $a = 0.1\text{m}$ ， $n_0 = 10^{16}\text{m}^{-3}$ 。氙离子温度为 0.1eV ，电子温度为 2eV 。假设电子密度满足玻尔兹曼分布。求（1）最大的电漂移速度；（2）由地球重力引起的重力漂移速度；（3）氙离子的拉莫半径。
- 2.8 对直线电流产生的磁场，分别给出电子、质子在其中运动的可以应用漂移近似的条件。
- 2.9 有质动力与频率的平方成反比，在射频波段，有质动力起作用的现象也很普遍。若频率为 10MHz 的射频天线附近的能流密度为 10kW/m^2 ，则对电子的有质动力相当于能流密度为多强的激光场（设波长 10^{-6}m ）中的有质动力？

第三章 磁流体

上一章我们考察了单粒子在各种外场下的运动，我们没有考虑粒子之间的相互作用，忽略了粒子间的碰撞，也没有考虑带电粒子本身对电磁场的贡献。实际的等离子体体系中，这些都不能忽略，所以由单个粒子的运动状况并不能完全给出实际等离子体的运动状态。在粒子间相互作用频繁的体系中，粒子的个性被淹没了，留下的是大量粒子的集体运动特征，通常的流体就是这样。对这样的体系，我们不必了解单个粒子运动的细节，只需要处理与了解的是流体所表现出的宏观性质，如密度场、温度场、速度场等等。

等离子体同样可以视为流体，但是一种带电的流体。由于等离子体具有的宏观准电中性的特征，一般而言，磁场对其宏观运动的作用比电场更为有效和显著，因而等离子体流体通常称为磁流体。在等离子体中，电磁力作为体作用力作用于流体，同时流体运动本身也会产生电磁场，流体与电磁场紧密耦合是等离子体流体的特征。描述电磁场和流体运动相耦合的动力学理论称为磁流体动力理论，简称 MHD (Magnetohydrodynamics) 理论。

微观粒子间存在频繁的碰撞是应用流体理论的一个基本假设。这样，在任意一个微观大、宏观小的“流体元”内，粒子达到了局域的热力学平衡状态。在等离子体中，粒子之间的碰撞频率实际上可能很低，甚至在有些高温、低密度情况下，我们完全可以不考虑粒子间的碰撞相互作用。然而事实表明，等离子体常常可以达到局域热平衡状态，这与常规的碰撞导致热平衡的观念不相容，这一点早期称为朗缪尔 (Langmuir) 佯谬。实际上，在等离子体系统中，碰撞对热力学演化过程的贡献是极其有限的，等离子体中的微湍流、回旋运动、不稳定性、粒子各种漂移都可以形成很强的等效碰撞过程。只有在十分平静的、具有良好约束的等离子体体系中，常规的碰撞作用才能显现出来。因而，实际应用中，电磁流体理论可以很好地描述等离子体体系中许多物理过程。

由于电磁场的耦合，可以预期，磁流体将比普通流体复杂得多，其现象也必然丰富得多。

§ 3.1 磁流体运动方程组

§ 3.1.1 普通流体动力学方程组

1、运动方程

描述流体运动的动力学方程称为纳维叶 - 斯托克斯(Navier-Stokes)方程，

$$\rho \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} \right] = -\nabla p + \rho \nu \nabla^2 \bar{u} + \bar{f} \quad (3-1)$$

这里， ρ 、 p 、 \bar{u} 分别表示流体的密度、压力（强）与速度场， ν 为动力粘滞系数， \bar{f} 表示单位体积流体所受的外力。纳维叶 - 斯托克斯方程的意义是很清楚的。方程的左边是流体元的惯性力项，

$$\rho \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} \right] = \rho \frac{d\bar{u}}{dt} \quad (3-2)$$

在流体力学中， d/dt 称运流微商，表示在随流体元一起运动的坐标系上的微商。运流微商由两部分构成，其一是固定点场量随时间的变化，其二是由于流体元运动到不同的区域所感受场量的空间变化，在数学上就是全微分的概念。

方程（3-1）的右边，第一项是压力项，这时由于压强梯度的存在，在其梯度方向上，流体元两侧受到的压力不同而产生的力。第二项是粘滞力，它正比于速度剪切的空間变化率，流体中两个接触面之间的粘滞力（摩擦力）正比于两个面之间的相对速度，流体元所受的净的粘滞力来自于流体元两侧摩擦力之差，这是粘滞力与速度对空间的二次微商相关的原因。第三项则是包含了所有作用于流体外力。

2、连续性方程

连续性方程是描述物质或其他物理量，如能量、动量、电荷等守恒的一类方程。若流体物质不生不灭，但可以在空间流动，则应满足下面的连续性方程，

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{u}) = 0 \quad (3-3)$$

上式亦可写成：

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (3-4)$$

此时的物理意义是明显的，即流体元密度增加的原因是相应流体元体积的压缩。

3、状态方程

流体方程 (3-1) (3-3) 需要一个描述流体热力学参数 ρ 、 p 之间关系的热力学状态方程来封闭，状态方程一般可以写成，

$$\frac{d}{dt}(p\rho^{-\gamma}) = 0 \quad (3-5)$$

其中 γ 是比热比，即定压比热和定容比热之比值，对运动过程中温度不变的等温过程， $\gamma = 1$ ；对无内能交换的绝热过程， $\gamma = 1 + 2/N$ ，其中 N 为自由度数。

§ 3.1.2 洛伦兹力与麦克斯韦方程组

等离子体由自由的带电粒子构成，类似于导体。由于其准电中性的特征，电场对流体元影响比磁场小得多，电磁场对等离子体流体的作用力为洛伦兹 (Lorentz) 力，

$$\vec{f} = \rho_E \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} \approx \vec{J} \times \vec{B} \quad (3-6)$$

电磁场的运动方程为麦克斯韦 (Maxwell) 方程组，

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \approx \mu_0 \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{E} = \rho_E / \varepsilon_0 \end{cases} \quad (3-7)$$

§ 3.1.3 磁流体封闭方程组

将电磁力代入普通的流体方程，对描述流体的三个方程与描述电磁场的麦克斯韦方程组进行联合，若再加上一个等离子体对电磁场的响应方程，就可以将方程组封闭。注意到，我们用的是真空而非介质中麦克斯韦

方程，将等离子体中所有电荷与电流都视为自由的。

等离子体具有良好的导电性质，用欧姆（Ohm）定律作为等离子体对电磁场的响应方程是合理的，

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \quad (3-8)$$

这里的 $\vec{u} \times \vec{B}$ 项是导体在磁场中运动时受到的感应电场。（3-1）、（3-3）、（3-5）、（3-7）、（3-8）构成了一组封闭的方程组，称为磁流体方程组。共有 ρ 、 p 、 \vec{u} 、 \vec{J} 、 \vec{E} 、 \vec{B} 十四个独立的变量，共有十六个标量方程，但其中麦克斯韦方程组中的两个散度方程是冗余的，可由其旋度方程得到¹。完整的磁流体方程组为：

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right] = \vec{J} \times \vec{B} - \nabla p \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \\ \frac{d}{dt} (p \rho^{-\gamma}) = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \\ \vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \end{array} \right. \quad (3-9)$$

其中流体的比热比 γ 、电导率 σ 为体系参数。这里我们忽略了流体的粘滞力。

流体运动方程中，只保留了各项同性的压力梯度项。对更一般的情况， $-\nabla p$ 项应由 $-\nabla \cdot \vec{p}$ 来替代，其中 \vec{p} 为流体的压力张量。 \vec{p} 的非对角项与流体粘滞性相关，对角项则是通常的压力项。一般来说，等离子体的热压力在平行于磁场和垂直于磁场的方向上可以不相等，即压力张量中对角的三个元素可以取不同的值。方程中只考虑了电磁力，若还存在其他形式的作用力，如重力，可直接加入动力学方程组。

电导率 σ 是与流体中粒子的碰撞过程相联系的。一般说来，等离子体的电导率足够大，若取 $\sigma \rightarrow \infty$ ，则称为理想磁流体。理想磁流体中没有

¹ 电场、磁场的散度方程并非完全是多余的，具体见练习中所提的条件。一般而言，一个矢量场的性质只有其散度和旋度都给定时才能确定。

任何能量耗损机制。欧姆定律变成，

$$\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} = 0 \quad (3-10)$$

即在流体元所在的参考系上，不存在电场。

§ 3.2 磁流体平衡

使作用在所有等离子体流体元上的合力达到平衡，是约束等离子体的第一步。通常，受到约束的等离子体总是存在着压力梯度，这种梯度产生的力总是试图使等离子体占具更多的空间，进而“烟消云散”。在无磁场的等离子体中，等离子体流体元上平衡压力梯度的力依赖于中性气体的碰撞而产生的“摩擦力”。在惯性约束等离子体中，则是靠惯性力 $\rho d\vec{u}/dt$ 的作用，平衡伴随着加速运动，不是真正意义上力的平衡。在有磁场的情况下，洛伦兹力起着平衡等离子体压力的作用，这就是各种类型磁约束等离子体装置的基础，等离子体平衡问题的研究主要是针对有磁场的情况。一般说来，由于磁场位形的复杂性，平衡问题的精确计算非人力可以胜任，但我们仍然可以通过对基础原理的分析得到一些清晰的图像。

§ 3.2.1 磁流体力的平衡条件

等离子体流体元上的力学平衡条件为，

$$\vec{J} \times \vec{B} - \nabla p = 0 \quad (3-11)$$

即压力梯度由洛伦兹力 $\vec{J} \times \vec{B}$ 所平衡。

平衡条件表明，压力梯度 ∇p 既与电流 \vec{J} 垂直，也与磁场 \vec{B} 垂直，因而在平衡时， \vec{J} 及 \vec{B} 均处于压力相等的平面上，或曰磁力线、电流线均在等压面上。磁约束等离子体的体积有限，一般而言，等离子体的等压面由内向外互相嵌套，因而在平衡情况下，由磁力线构成的磁面、电流线构成的电流面亦复如此。

将 (3-11) 式叉乘 \vec{B} ，我们可以得到等离子体达到力的平衡所需的电流密度为，

$$\vec{J}_{\perp} = \frac{\vec{B} \times \nabla p}{B^2} \quad (3-12)$$

这一电流正是等离子体由于压力梯度作用而产生的所谓的“逆磁漂移电流”。

我们知道，在单粒子模型中，每出现一力，则有一个相应的漂移运动，流体的压力梯度是一个新的力，平均作用在每个粒子上的力为 $-\nabla p/2n$ （设电子、离子温度相同），则根据上一章的结果，可以直接将其漂移速度写出，

$$\bar{v}_{D\nabla p} = -\frac{\nabla p \times \bar{B}}{2nqB^2} \quad (3-13)$$

电子和离子的漂移速度大小相等，方向相反，故产生相应的漂移电流，

$$\bar{J}_D = ne(\bar{v}_{Di} - \bar{v}_{De}) = \frac{\bar{B} \times \nabla p}{B^2} \quad (3-14)$$

这就是平衡所需要的电流。因而我们可以得到结论，磁流体的平衡问题，自动地由等离子体的逆磁漂移运动所解决。或曰要平衡等离子体，必须保证逆磁漂移运动的存在。

如果我们忽略等离子体的压力梯度，由（3-11）式知，平衡时等离子体中若存在电流，则电流方向必须与磁场方向一致，即，

$$\bar{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \bar{B} = \alpha \bar{B} \quad (3-15)$$

其中 α 是任意的空间函数。这种情况称为“无作用力场（Force-free）”状态，在天体等离子体物理领域，这是一种重要的物理模型，如太阳冕区的磁场，就可以采用这种模型。

§ 3.2.2 磁压强和磁张力

等离子体中电流是自洽的，应用电流和磁场的关系，可将（3-11）平衡方程写成，

$$\nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = \frac{1}{\mu_0} (\bar{B} \cdot \nabla) \bar{B} \quad (3-16)$$

由此式可以看出，磁场有一等效的压强项 $B^2/2\mu_0$ ，称为磁压强。磁压强是磁场的能量密度，而流体的压强 p 是流体的内能密度，当流体与磁场强烈耦合的时候，这两种能量完全不分彼此地耦合在一起，（3-16）式左边表明了这一点。我们可以更进一步地看看磁力的本质，磁力可写成¹，

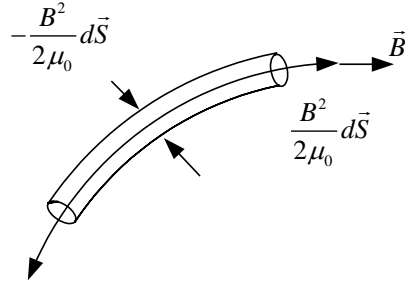


图 3.1 磁场对柱状流体的作用力

$$\begin{aligned}
 \vec{f} &= \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} - \nabla \left(\frac{\vec{B} \cdot \vec{B}}{2\mu_0} \right) \\
 &= \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \cdot \vec{B}) \vec{B} - \nabla \frac{B^2}{2\mu_0} \\
 &= \nabla \cdot \left(\frac{\vec{B} \vec{B}}{\mu_0} - \frac{B^2 \vec{I}}{2\mu_0} \right) \triangleq -\nabla \cdot \vec{T}
 \end{aligned} \tag{3-17}$$

其中，

$$\vec{T} \triangleq -\frac{\vec{B} \vec{B}}{\mu_0} + \frac{B^2 \vec{I}}{2\mu_0} \tag{3-18}$$

是不考虑电场的贡献时的麦克斯韦应力张量，即电磁场的动量流。

考虑作用在流体体积 V 上的力，

$$\iiint_V \vec{f} dV = -\iiint_V (\nabla \cdot \vec{T}) dV = -\oint_S \vec{T} \cdot d\vec{S} = \oint_S \left[\frac{\vec{B} (\vec{B} \cdot d\vec{S})}{\mu_0} - \frac{B^2 d\vec{S}}{2\mu_0} \right] \tag{3-19}$$

如图 3.1，选择等离子体流体元与磁场通量管重合，即沿着磁力线的一个短柱体，则根据上式，我们可以得出磁场对流体元各个侧面的作用力。在垂直于磁场方向有一压力，压强大小为 $B^2/2\mu_0$ ，这就是磁压强；在平

¹ $\nabla \cdot (\vec{B}_1 \vec{B}_2) = (\nabla \cdot \vec{B}_1) \vec{B}_2 + (\vec{B}_1 \cdot \nabla) \vec{B}_2$ ，并矢的两矢量位置不能交换。

行于磁场方向则表现为一拉力，其密度亦为 $B^2/2\mu_0$ ，这表现为磁力线上有一个张力。在磁力线弯曲时，磁张力试图使磁力线变直，具有弹性恢复力的特征。

§ 3.2.3 等离子体比压

考虑磁力线为平行线的情况，则与磁场垂直方向的磁流体平衡条件为，

$$\nabla_{\perp} \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = 0 \quad (3-20)$$

或，

$$p + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \quad (3-21)$$

其中， B_0 为无等离子体处的磁场。当等离子体存在时，其磁场会减小，这是必然的，因为等离子体具有抗磁的特征。定义 β 为等离子体压强与总压强之比，称为等离子体的比压¹，

$$\beta \triangleq \frac{p}{p + B^2/2\mu_0} \quad (3-22)$$

对磁约束等离子体研究领域，提高 β 值具有重要的意义，因为等离子体比压的提高意味着用磁场约束等离子体效率的提高。到目前为止，磁约束等离子体实际能够达到的等离子体比压值是很低的，通常 $\beta < 1\%$ ，其中的原因不是由于作用在等离子体上的力不能达到平衡，而是由后面课程要提及的所谓稳定性问题所限制。

单纯按力的平衡来考虑， β 的最大值可以达到 1，这时在等离子体的内部磁场为零，等离子体与磁场存在一明显分界线，但这种极端状态是不可能实现的。

¹ 也有文献将等离子体比压定义成等离子体压强与磁压强之比，在比压较小时两者差别很小。

§ 3.3 等离子体中的磁场冻结和扩散

磁场与等离子体的运动由于洛伦兹力的作用而相互影响和牵制，表现为磁场在等离子体中的冻结与扩散这两个相互矛盾的效应。冻结的含义是等离子体与磁力线之间没有相对的运动，而扩散的过程则是这两者之间存在着彼此相互渗透的运动。

§ 3.3.1 磁场运动方程与磁雷诺数

我们先不管流体的具体运动情况，来考虑磁场的运动方程。在磁流体方程组中，取出与磁场运动相关的三个方程，

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \\ \vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \end{cases} \quad (3-23)$$

消去 \vec{E} 、 \vec{J} ，可以得到磁场在等离子体中的运动方程，

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}) + \gamma_m \nabla^2 \vec{B} \quad (3-24)$$

其中，

$$\gamma_m \triangleq \frac{1}{\mu_0 \sigma} \quad (3-25)$$

称为磁粘滞系数。

方程 (3-24) 右边两项对磁场运动的作用，在图像上有明显的差异。第二项描述了一种扩散过程，而第一项表示由于流体横越磁场运动所引起磁场的变化。为了考察这两项所起作用的大小，我们定义磁雷诺数 (Reynolds) 为，

$$R_M = \mu_0 \sigma u L_B \quad (3-26)$$

其中， u 为流体速度， L_B 为磁场空间不均匀的特征线度。

磁雷诺数表示了磁粘滞对磁场运动影响的程度。从量级分析可以知

道，当磁雷诺数很大时，磁粘性作用可以忽略，磁流体可视为理想的，而在相反的情况下，与磁粘性相关的磁扩散过程起主导作用。

§ 3.3.2 磁场扩散

当磁雷诺数很小时，磁场运动方程变成一个扩散方程，称为磁扩散方程，

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = \nu_m \nabla^2 \bar{B} \quad (3-27)$$

磁场将由强的区域向弱的区域扩散。在平衡条件下，等离子体内部的磁场低于外部，这时磁场由无等离子区域向等离子体区扩散，或曰磁场对等离子体的渗透。

若考虑一维情况，若初始时（ $t=0$ ）磁场的空间分布为 $\bar{B}_0(x)$ ，则（3-27）式的解为，

$$\bar{B}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{B}_0(x') G(x - x', t) dx' \quad (3-28)$$

其中，

$$G(x, t) = (\pi \nu_m t)^{-1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4\nu_m t}\right) \quad (3-29)$$

是初始分布为点源 $\delta(x)$ 情况下扩散过程的时空分布，这是一个高斯（Gauss）分布，其分布宽度随时间增大，初始磁场不断地在空间弥散，如图 3.2 所示。

我们可以估算一下磁扩散过程的特征时间尺度，

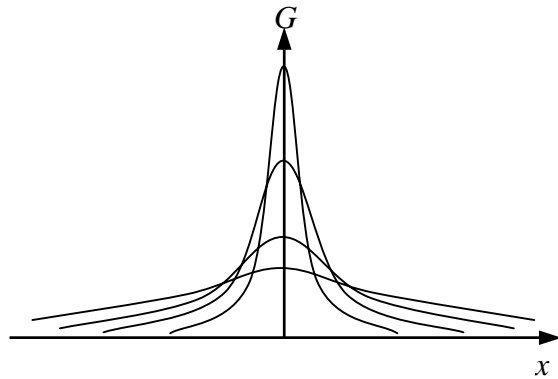


图 3.2 点源扩散过程的分布变化图

$$\tau_B \sim L_B^2 / \nu_m = L_B^2 \mu_0 \sigma = R_M \frac{L_B}{u} \quad (3-30)$$

磁场扩散进入等子体的时间与 σ 成正比，即电导率越高，越难于扩散，所需的扩散时间越长。

磁场扩散过程，实际上伴随着能量的耗散，磁场的能量通过欧姆加热转化等子体的热能，同样我们可以估算所有磁场的能量通过欧姆加热消耗所需的时间，

$$\frac{B^2}{2\mu_0} \bigg/ \frac{J^2}{\sigma} = \left(\frac{B}{J} \right)^2 \left(\frac{\sigma}{2\mu_0} \right) \sim L_B^2 \mu_0^2 \frac{\sigma}{2\mu_0} = \frac{\tau_B}{2} \quad (3-31)$$

与磁扩散过程具有同样的时间尺度。

磁雷诺数也可以写成，

$$R_M \sim \frac{u}{L_B / \tau_B} \quad (3-32)$$

即流体横越磁场的运动速度和磁场扩散速度之比，当流体横越磁场的运动速度可以忽略时，磁扩散过程才起重要作用。

§ 3.3.3 磁场冻结

当磁雷诺数很大时，磁粘滞力可以忽略，等子体成为理想磁流体，这时磁场运动方程变成，

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}) \quad (3-33)$$

让我们来考察这样的运动方程意味着什么。考虑任一闭合回路，当等子体运动时，回路随等子体运动，这一回路包含的磁通量为，

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (3-34)$$

如图 3.3 所示，随等子体运动回路中磁通量的变化包含两个部分，其一是由磁场本身随时间变化所引起的变化，其二是由于等子体运动而造成的积分环路变化所引起的，因此有，

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Phi}{dt} &= \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \oint_L \vec{B} \cdot (\vec{u} \times d\vec{l}) \\
 &= \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} - \oint_L (\vec{u} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \\
 &= \iint_S \left[\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}) \right] \cdot d\vec{S} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{3-35}$$

这表明，随等离子体流体运动的回路中磁通量不随时间变化，由于回路是任意的，这一结论可以直接应用到流体元本身。当流体元在垂直于磁场的方向扩张或收缩时，其密度与截面积成反比变化，同时由于磁通量不变，流体元处的磁场强度同样与截面积成反比，因此，磁场强度与密度之比在等离子体元扩张或收缩的过程中保持不变，即，

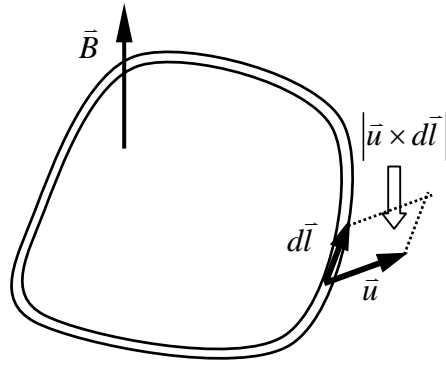


图 3.3 磁通变化积分回路图

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{B}}{\rho} \right) = 0 \tag{3-36}$$

严格的证明留作练习。不管是有限的回路，还是流体元本身，当其运动时，所包含的磁通量即磁力线的数量不会变化，这就是磁场冻结的含义。如图 3.4 所示，磁场冻结有两种可能的表现形式，一种是绝对的磁场冻结，这时磁力线冻结在流体中，不能同流体产生相对的运动，等离子体流体元的运动将拖动磁力线，使得磁力线产生形变（图 3.4b）。另一种是相对的磁场冻结，这时磁力线本身可以进入和离开等离子体，但保持流体中的磁力线数目不变（图 3.4c），如果等离子体在均匀的磁场中运动，可以不引起磁力线的形变，但在非均匀磁场的情况下，则同样会拖动部分磁力线，如图 3.4c 中所示的情况。

等离子体在运动时是发生相对磁冻结还是绝对磁冻结，依赖于等离子体的具体的运动情况，等离子体中的漂移运动垂直于磁场，是相对磁冻结的一个例子。在相对磁冻结过程中，等离子体流体元发生“切割”磁力线

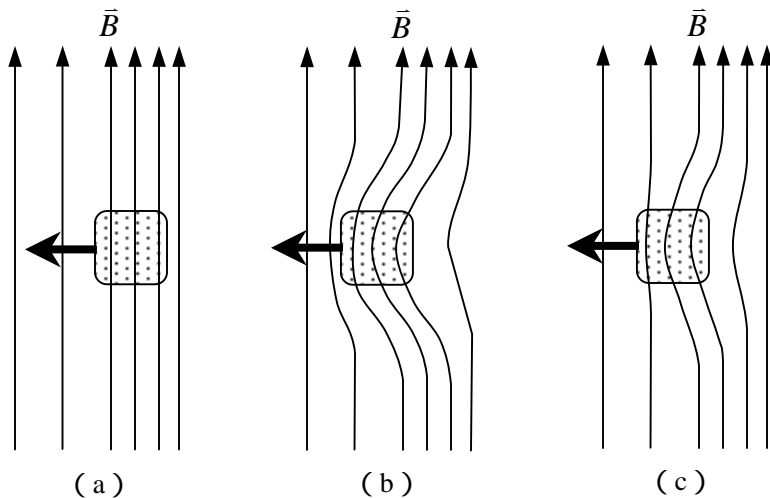


图 3.4 磁场冻结情况下流体元运动引起的磁力线变化图
(a) 初始情况 (b) 绝对磁冻结 (c) 相对磁冻结

的运动，因而等离子体元中必须建立相应的电场，以使得欧姆定律（3-10）式得以满足，由于电场的建立需要电荷分离，适时适度的电荷分离条件往往比较苛刻，相对而言，绝对磁冻结更容易发生。

值得注意的是，本章后面会介绍，等离子体的电导率是各向异性的，在与磁场平行和垂直的方向上差别很大，垂直方向上的电导率较小。在考虑磁冻结效应时，应该考虑的是垂直方向电导率。

最后，我们再回顾一下磁雷诺数。磁雷诺数与电导率成正比，同时也与流体速度及磁场不均匀的空间尺度成正比，因而对快速的流体运动过程，等离子体总是可以用理想磁流体来近似。

§ 3.4 双流体方程与广义欧姆定律

在前面的磁流体方程中，我们将等离子体视为一种导电流体。实际上，等离子体是由电子和一种以上的离子成份组成的（尘埃等离子体与负离子等离子体甚至可以有多种负电粒子成份）。一方面，同一种类粒子之间的能量交换比较容易，其热平衡最先达到，然后才是异类粒子之间的热平衡，另一方面，不同种类粒子对电磁响应的特性一般不同。因而将等离子体视为两种或多种相互贯穿的流体是恰当的，这应该比单一导电流体更为精确，也可以描述更为丰富的现象。

§ 3.4.1 双流体方程

在双流体模型中，我们考虑等离子体由两种成份，即电子与离子组成。与单流体一样，双流体中电子、离子成份可分别由其动力学方程、连续性方程、状态方程描述。两种成份的耦合包含两部分，一是通过电荷、电流在麦克斯韦方程组中相互关联，二是由于两种成份之间粒子的碰撞，产生动量交换而以摩擦力的形式出现。

离子、电子成份的运动方程可以写成，

$$n_i m_i \frac{d\bar{u}_i}{dt} = -\nabla p_i + en_i (\bar{E} + \bar{u}_i \times \bar{B}) + \frac{m_e n_i}{\tau_{ei}} (\bar{u}_e - \bar{u}_i) \quad (3-37)$$

$$n_e m_e \frac{d\bar{u}_e}{dt} = -\nabla p_e - en_e (\bar{E} + \bar{u}_e \times \bar{B}) - \frac{m_e n_i}{\tau_{ei}} (\bar{u}_e - \bar{u}_i) \quad (3-38)$$

其中， m 、 n 、 p 、 \bar{u} 分别表示质量、数密度、压力和速度，下标 i 、 e 分别表示离子和电子。 τ_{ei} 为电子和离子的平均碰撞时间，在此时间内，电子和离子可以完全交换动量，将摩擦力写成上面最后一项的形式是一种唯象的表达方式。由于动量守恒条件是必须满足的，电子和离子成份受到的摩擦力大小相等，方向相反。

电子、离子的连续性方程与状态方程为，

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\alpha \bar{u}_\alpha) = 0 \quad (\alpha = i, e) \quad (3-39)$$

$$\frac{d}{dt} (p_\alpha n_\alpha^{-\gamma_\alpha}) = 0 \quad (\alpha = i, e) \quad (3-40)$$

麦克斯韦方程组为，

$$\begin{cases} \nabla \times \bar{B} = \mu_0 \bar{J} = \mu_0 e (n_i \bar{u}_i - n_e \bar{u}_e) \\ \nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \bar{B} = 0 \\ \nabla \cdot \bar{E} = \frac{e}{\epsilon_0} (n_i - n_e) \end{cases} \quad (3-41)$$

注意到，我们在本书中为了简洁，总是假设离子只带单位电荷。

以上方程组共有 18 个独立的标量方程，其变量 n_α 、 p_α 、 \bar{u}_α 、 \bar{E} 、 \bar{B} 共有 16 个，考虑麦克斯韦方程电磁场散度方程可以由旋度方程给出，故是一组封闭方程，这就是完整的双流体方程组。

§ 3.4.2 广义欧姆定律

将离子与电子的动力学方程相加，忽略电子的惯性项，我们可以得到，

$$m_i n_i \frac{d\bar{u}}{dt} = -\nabla p + \vec{J} \times \vec{B} \quad (3-42)$$

其中，

$$\bar{u} = \bar{u}_i, \quad p = p_e + p_i, \quad \vec{J} = en(\bar{u}_i - \bar{u}_e) \quad (3-43)$$

这里我们假设了电子、离子的数密度相等，忽略了电场力的贡献。这就是原来的单流体形式，这样我们知道，单流体中的流体速度实际上是离子成份的速度，因为流体的质量密度几乎都由离子成份贡献。由于电子质量小，对电场的响应快，电流的贡献主要来源于电子成份。

忽略了电子惯性项的电子运动方程为，

$$\nabla p_e + en(\bar{E} + \bar{u}_e \times \bar{B}) - \frac{m_e}{e\tau_{ei}} \vec{J} = 0 \quad (3-44)$$

将 $\bar{u}_e = \bar{u} - \vec{J}/en$ 代入，我们可以得到，

$$\nabla p_e + en(\bar{E} + \bar{u} \times \bar{B}) - \vec{J} \times \bar{B} - \frac{en}{\sigma} \vec{J} = 0 \quad (3-45)$$

这里我们将碰撞时间用电阻率替代，它们的关系为¹： $\tau_{ei} = m_e \sigma / ne^2$ 。或者写成，

$$\vec{J} = \sigma \left[(\bar{E} + \bar{u} \times \bar{B}) - \frac{1}{ne} \vec{J} \times \bar{B} + \frac{1}{ne} \nabla p_e \right] \quad (3-46)$$

¹ 在电场作用下，粒子在碰撞时间内所获得的速度为 $(eE/m_e)\tau_{ei}$ ，对应的电流密度为 $(ne^2\tau_{ei}/m_e)E$ ，故 $\sigma = ne^2\tau_{ei}/m_e$ 。

这就是双流体中电流与电流驱动源之间的关系，称为广义欧姆定律。

可以看到，广义欧姆定律比通常的欧姆定律多了两项。在平衡等离子体中这两项量级相同且相互抵消。作为量级估计，可以将方程左边项与右边第二项进行比较，若

$$\frac{\sigma B}{ne} = \frac{\tau_{ei} ne^2 B / m_e}{ne} = \omega_{ce} \tau_{ei} \triangleq \zeta \ll 1 \quad (3-47)$$

我们可以忽略后面两项，此时广义欧姆定律与欧姆定律一致，因而 ζ 是一个关键的参量。

当 $\omega_{ce} \tau_{ei} \gg 1$ 时，新出现的两项将起主导作用，其中 $\vec{J} \times \vec{B}$ 项是由于磁场对电子运动的影响而产生的， ∇p_e 项则是扩散效应与热电效应导致电流，是一种等效的电流驱动项。若令

$$\vec{E}^* = \vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} + \frac{1}{ne} \nabla p_e \quad (3-48)$$

为等效电场，我们可以将广义欧姆定律写成下列形式，

$$\vec{J} = \vec{\sigma}_D \cdot \vec{E}^* \quad (3-49)$$

其中，电导率表现为张量，若选磁场方向为 Z 轴方向，则电导率张量为，

$$\vec{\sigma} = \sigma \begin{pmatrix} \frac{1}{1 + \omega_{ce}^2 \tau_{ei}^2} & -\frac{\omega_{ce} \tau_{ei}}{1 + \omega_{ce}^2 \tau_{ei}^2} & 0 \\ \frac{\omega_{ce} \tau_{ei}}{1 + \omega_{ce}^2 \tau_{ei}^2} & \frac{1}{1 + \omega_{ce}^2 \tau_{ei}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3-50)$$

电导率呈张量形式表现了等离子体各向异性的特性，其根源当然来自于磁场的作用。当回旋运动的频率远大于碰撞频率时，等离子体中微观粒子的基本运动形式为回旋运动，因而磁场的作用越发重要，各向异性的现象也就越发严重。反过来，回旋运动的频率远小于碰撞频率，实际上粒子已不可能形成完整的回旋运动，当然磁场的作用就大打折扣了。

由电导率张量可以看出，在平行于磁场的方向上电导率没有改变，但在垂直于磁场方向上，电导率减小 $1 + \omega_{ce}^2 \tau_{ei}^2$ 倍。

电导率张量的非对角项表明了电流与电场的方向可以不同，这就是所谓的霍尔电流：Y 方向的电场可以产生 X 方向的电流，X 方向的电场也会产生 Y 方向的电流。到现在为止，我们已经不止一次地体会到了在磁场出现的情况下，等离子体这种“不合作”的响应特性，其根本原因当然是由于洛伦兹力 $\vec{v} \times \vec{B}$ 这种“怪异”的作用形式。

思考题

- 3.1 粘滞力为何不是直接正比于速度剪切（指速度在空间的变化），而是于速度在空间的二次导数有关？
- 3.2 说明 $-\nabla \cdot \vec{u}$ 表示流体元体积压缩速率。
- 3.3 为什么说等离子体中磁力线像弹性绳？“弹性”的来源是什么？
- 3.4 参考图 3.1，若磁力线是弯曲的，则这一等离子体元似乎总是受到一个指向曲率中心的力，这种说法对吗，为什么？
- 3.5 设等离子体为柱体，若 $\beta = 1$ ，那么等离子体中电流应该是什么样的分布，外磁场的方向如何？
- 3.6 如果初始分布结构比较复杂，比如有多个极大和极小，那么经过扩散过程，结构是变得复杂了呢，还是简单了？一定是这样吗？
- 3.7 对理想磁流体，若流体元相对于磁场作垂直运动，则 $\vec{u} \times \vec{B} \neq 0$ ，这是否意味着在等离子体中将感生出无穷大的电流？为什么？
- 3.8 考虑一个逐渐变细的磁通管（由磁力线构成），若在较粗的一端（弱场区）产生等离子体，此等离子体在磁场方向上可以达到力的平衡吗？若在较细的一端（强场区）产生等离子体，可以达到平衡吗？若要利用磁场形成所谓的“磁喷嘴”，产生高速的等离子体射流，应该采用哪一种方法？
- 3.9 将一团等离子体由无磁场区垂直地射向有磁场的区域，会发生什么样的情况？作一些讨论。
- 3.10 双流体模型应该比单流体模型更好地描述等离子体，双流体中的电子、离子成份在单流体中主要各起什么作用？
- 3.11 当碰撞频率增加时，平行于磁场方向的电导率是如何变化的？垂直方向呢？如何解释这种差别？
- 3.12 列举一些由于洛伦兹力所产生的“作用”与“效果”方向不一致的现象。

练习题

- 3.1 证明，考虑电荷守恒方程，麦克斯韦方程组中的两个散度方程可以由另外两个旋度方程得到。
- 3.2 磁场为 1 特斯拉的磁压强有多大？若 $\beta = 1\%$ ，则磁场所能约束的温度为 10keV 的等离子体密度为多少？
- 3.3 证明，若等离子体压强与磁压强相等，则等离子体中粒子的平均热运动速度为阿尔芬速度（定义见第四章）。
- 3.4 密度为 10^{20}m^{-3} 、温度为 10keV、半径为 0.1m 的等离子体柱表面通过 10^6A 的电流，求（1）表面磁场的磁压，（2） $\vec{J} \times \vec{B}$ 力，（3）等离子体是将被压缩还是膨胀？
- 3.5 证明，对无作用力场情况下，若 α 为常数，则磁场满足霍姆赫兹方程， $(\nabla^2 + \alpha^2)\vec{B} = 0$ 。
- 3.6 证明（3-28）式是扩散方程的解。
- 3.7 若磁场通过磁扩散过程而衰减，在衰减过程中其形状保持不变，证明任一时刻的磁场必须满足霍姆赫兹方程。
- 3.8 对理想磁流体，磁冻结效应也可以表示成， $d(\vec{B}/\rho)/dt = 0$ ，即对任何与磁场垂直的流体元在运动过程中，流体元处的磁场与密度之比保持不变，试证明之。

第四章 等离子体中的波动现象

波动是普遍的物理现象，等离子体是连续媒质波动现象最典型的载体。在普通流体中一般不存在切向的恢复力，因此只能存在纵波，也就是声波。只有在两种流体的分界面上，有外界重力（或其它等效力）的参与下才会出现横波，即表面波。由于电磁力的存在，等离子体的波动现象比普通流体丰富得多，也复杂得多。一方面，我们已经知道，磁场的存在使等离子体变得富有弹性，因而纵波、横波以及两者的混合模式均可以同时发生在等离子体中。另一方面，由于等离子体中有多种特征的时间尺度，这样，在波的本性与来源上存在多种分支，出现缤纷的波动现象。

§ 4.1 线性波色散关系获取方法

我们先以最简单的流体为例，介绍物理系统中求本征的线性波动模式的方法。无耗散的流体运动方程组应为，

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \rho (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} = -\nabla p \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{u}) = 0 \\ p \rho^{-\gamma} = \text{Const} \end{cases} \quad (4-1)$$

§ 4.1.1 方程的线性化

体系的运动方程一般是非线性的，但对于要考虑的线性、小振幅波来说，我们并不需要了解整个运动方程解，而只要求体系在平衡位置时对小扰动的响应特性，假定体系已经处于平衡状态。若令，

$$\bar{u} = \bar{u}_0 + \bar{u}_1, \quad p = p_0 + p_1, \quad \rho = \rho_0 + \rho_1 \quad (4-2)$$

这里 \bar{u}_0 、 p_0 、 ρ_0 表示系统的平衡值，或稳定值，而 \bar{u}_1 、 p_1 、 ρ_1 则表示扰动值。若扰动量为小量，将此假定代入系统运动方程后，可以按照量级来分离运动方程，即可以获得零阶量（平衡量）与一阶量（扰动量）的方

程。零阶量方程就是系统平衡时（未扰动时）系统的运动方程，考虑线性波的问题时，一般可以不考虑如何去解零级量的方程。在一级量方程中我们仅考虑其线性部分，因为当扰动量充分小时，扰动量的非线性部分则更小，这也是“线性”与“小扰动”具有相同意义的原因。这样，流体运动方程组扰动量的线性化方程为¹，

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} + \nabla p_1 = 0 \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \bar{u}_1) = 0 \\ p_1 / p_0 - \gamma \rho_1 / \rho_0 \end{cases} \quad (4-3)$$

这里，为了简单我们假设了 $\bar{u}_0 = 0$ ，这样做不失一般性，因为我们可以通过变换参考系来达到 $\bar{u}_0 = 0$ 的目的。

§ 4.1.2 求本征波动模式

将上述微分方程做富里叶（Fourier）变换，即令所有扰动量随时间、空间的变化关系为平面波形式（ $\sim e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$ ），就可以得到这种单模式扰动量所应满足的方程。形式上，在微分方程中将对时间的微分算符 $\partial/\partial t$ 置换成 $-i\omega$ 、对空间的微分算符 ∇ 置换成 $i\vec{k}$ 即可，

$$\begin{cases} \rho_0 \omega \bar{u}_1 - \vec{k} p_1 = 0 \\ \omega \rho_1 - \rho_0 \vec{k} \cdot \bar{u}_1 = 0 \\ p_1 = \gamma p_0 \rho_1 / \rho_0 \end{cases} \quad (4-4)$$

应该注意到，此方程的各变量与原方程（4-3）中的含义已经发生了变化，它不再包含时空变化的部分，只表示特定平面波的振幅。

这是一个线性奇次代数方程组，它具有非平庸解（至少有一个变量不为零）的条件是方程的系数矩阵行列式值为零。但对于这个简单的方程组，我们可以直接解出非平庸解对系数的要求。将方程（4-4）的第一式点

¹ 对状态方程， $C = ((p_0 + p_1)(\rho_0 + \rho_1))^{-\gamma} \approx (p_0 + p_1) \rho_0^{-\gamma} (1 - \gamma \rho_1 / \rho_0)$ ，故其零级量应满足方程， $C = p_0 \rho_0^{-\gamma}$ ，一级量应满足方程， $p_1 / p_0 - \gamma \rho_1 / \rho_0 = 0$ 。

乘 \bar{k} ，利用后两式消去 p_1 、 $\bar{k} \cdot \bar{u}_1$ ，有，

$$\left(\rho_0 \omega - \gamma \frac{p_0}{\omega} k^2 \right) \rho_1 = 0 \quad (4-5)$$

若要求扰动量不为零，必须有，

$$\frac{\omega}{k} = \left(\gamma \frac{p_0}{\rho_0} \right)^{1/2} \quad (4-6)$$

这就是在方程组 (4-1) 所描述的流体中可以存在的本征波动模式所应满足的条件，称为色散关系。这一波动模式就是大家熟知的声波。

§ 4.1.3 求本征模式的特性

从扰动量所遵从的方程，我们可以获得此系统本征模式的一些基本特征。

(1) 本征模式的数目。系数矩阵行列式为零的方程解的数目，就是此系统本征模式的数目。对本例的流体体系而言，只存在声波这种唯一的波动模式。

(2) 纵波与横波。根据扰动矢量与波传播方向平行或垂直的关系，确定特征波模是纵波还是横波。对声波而言，方程 (4-4) 的第一式表明了流体的扰动速度矢量 \bar{u}_1 与波传播方向 \bar{k} 平行，故声波是纵波。当然，扰动矢量与波传播方向也可能既不平行又不垂直，这种模式称为混杂波。

(3) 波动模式的色散关系。波矢 \bar{k} 和频率 ω 表示扰动的空间和时间的响应特征，它们之间的关系称为色散关系，表现了系统时空响应的关联方式。色散关系是描述波动模式的最重要内容，由此可以给出波动的相速度 ω/\bar{k} 、群速度 $\partial\omega/\partial\bar{k}$ 等波动传播的重要参数。声波的相速度与频率无关，与群速度一致，称为声速。声速为，

$$C_s = \left(\gamma p_0 / \rho_0 \right)^{1/2} \quad (4-7)$$

(4) 本征模式各扰动量之间的关系。从方程 (4-4)，我们可以获得声波各扰动量之间的关系，注意到它们之间的关系都是线性的。

$$u_1 = (C_s / \rho_0) \rho_1 \quad p_1 = C_s^2 \rho_1 \quad (4-8)$$

§ 4.2 冷等离子体中的线性波

在磁化的等离子体中，等离子体的流体压强与磁压强相比往往可以忽略，冷等离子体假设（ $p = 0$ ）是一种很好的近似，它可以给出一系列由等离子体中单纯的电磁性质起作用的波动现象。冷等离子体中波是等离子体波动现象的基础，我们先介绍它们，然后再讨论由于考虑等离子体压力而产生的模式修正及新的波动模式。

§ 4.2.1 电介质中波色散关系之一般形式

在电动力学课程中，我们通常将导体与电介质视为两类不同的介质来处理。导体与电介质对外界电磁场的响应方式不同，电介质的响应可以归纳成极化电荷与电流，即有，

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E} \quad (4-9)$$

而对导体，则无束缚的极化电荷与电流，对电场的反应可归纳成自由电流，

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (4-10)$$

其实这两种处理可以统一。在导体中，我们也可将所有的自由电流均视为极化电流。在定态情况下(即 $\partial/\partial t = -i\omega$)，有下列关系¹：

$$\epsilon = 1 + i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \quad (4-11)$$

对各向异性的介质，(4-11)式可以写成更一般的张量形式，

$$\vec{\epsilon} = \vec{I} + \frac{i}{\epsilon_0 \omega} \vec{\sigma} \quad (4-12)$$

于是，对于有自由电荷、自由电流的导电介质，麦克斯韦方程组为²，

¹ 事实上，只有在定态情况下，介质与导体的响应才可以一致，此时导体中的电子亦在其平衡位置附近振荡，与极化电荷图像是一致的。

² \vec{D} 与 \vec{E} 的正比关系只有在定态情况下才成立，其正比系数即介电张量与频率有关，因此下面第二式的后面等式只在定态的假设下成立。

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 \vec{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \quad (4-13)$$

注意到，此二方程是关于 \vec{E} 、 \vec{B} 的线性方程，故其线性化后将具有相同的形式。消去 \vec{B} 后有，

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \vec{\varepsilon} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (4-14)$$

对于单色平面波 $\vec{E}, \vec{B} \sim e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ ，则有，

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{\varepsilon} \cdot \vec{E} = 0 \quad (4-15)$$

或，

$$\left(\vec{k} \vec{k} - k^2 \vec{I} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{\varepsilon} \right) \cdot \vec{E} = 0 \quad (4-16)$$

这是关于 \vec{E} 三个分量的方程，将 \vec{k} 点乘上式，可以得到其平行于 \vec{k} 分量的方程，

$$\vec{k} \cdot \vec{\varepsilon} \cdot \vec{E} = 0 \quad (4-17)$$

若扰动电场可以用扰动电势来表示，即

$$\vec{E} = -\nabla \varphi = -i\varphi \vec{k} \quad (4-18)$$

则称为静电扰动，扰动的本征模式称为静电模式或静电波。(4-18)式表明了静电波一定是纵波。同时，根据 $\omega \vec{B} = \vec{k} \times \vec{E} = 0$ 可知，静电波的扰动磁场为零。有势、纵波、无磁这三个性质中任何一个都可以作为静电扰动的定义，它们可以相互推及。非静电扰动则称为电磁扰动。

对静电波，(4-17)式变成，

$$(\vec{k} \cdot \vec{\varepsilon} \cdot \vec{k}) \varphi = 0 \quad (4-19)$$

故静电波的色散关系为，

$$\vec{k} \cdot \vec{\varepsilon} \cdot \vec{k} = 0 \quad (4-20)$$

对一般的电磁扰动电势, (4-16) 的三个分量方程必须兼顾, 其 \vec{E} 有非零解的条件为系数行列式值为零, 即

$$\det \left| \vec{k}\vec{k} - k^2 \vec{I} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{\varepsilon} \right| = 0 \quad (4-21)$$

这就是电介质中波的色散关系的一般形式。若定义无量纲的波矢量 (其大小即为通常意义上介质的折射率),

$$\vec{n} = \frac{c}{\omega} \vec{k} \quad (4-22)$$

(4-21) 式可写成,

$$\det \left| \vec{n}\vec{n} - n^2 \vec{I} + \vec{\varepsilon} \right| = 0 \quad (4-23)$$

§ 4.2.2 冷等离子体的介电常数

冷等离子体的热压力为零, 等离子体流体对电磁场的响应仅需一个运动方程即可给出。作为一般性, 我们设等离子体为多组分的流体。对每一组分, 运动方程为

$$m_\alpha \frac{d\vec{u}_\alpha}{dt} = q_\alpha (\vec{E} + \vec{u}_\alpha \times \vec{B}) \quad (4-24)$$

α 可代表电子及一种以上的离子。对此方程线性化, 有,

$$m_\alpha \frac{\partial \vec{u}_\alpha}{\partial t} = q_\alpha (\vec{E} + \vec{u}_\alpha \times \vec{B}_0) \quad (4-25)$$

为了简洁, 我们取消了小扰动量的下标“1”, 但对于平衡量仍然保持“0”的下标。对于单色平面波扰动, (4-25) 变成代数方程,

$$\vec{u}_\alpha = \frac{iq_\alpha}{m_\alpha \omega} (\vec{E} + \vec{u}_\alpha \times \vec{B}_0) \quad (4-26)$$

由此方程, 我们可以得到流体运动速度与电场的关系, 再由

$$\vec{J} = \sum_\alpha n_{\alpha 0} q_\alpha \vec{u}_\alpha \quad (4-27)$$

可以获得扰动电流密度与电场强度的关系，从而可导出电导率张量与介电张量¹。

在这里，磁场方向为一特殊的方向，我们不妨取为 Z 轴方向。应用直角坐标系，则可将 (4-26) 式写成分量式：

$$\begin{cases} u_{\alpha x} = \frac{iq}{m_\alpha \omega} (E_x + u_{\alpha y} B_0) \\ u_{\alpha y} = \frac{iq}{m_\alpha \omega} (E_y - u_{\alpha x} B_0) \\ u_{\alpha z} = \frac{iq}{m_\alpha \omega} E_z \end{cases} \quad (4-28)$$

或写成,

$$\vec{A}_\alpha \cdot \vec{u}_\alpha = i\beta_\alpha \vec{E} \quad (4-29)$$

其中,

$$\vec{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -i\omega_{c\alpha}/\omega & 0 \\ i\omega_{c\alpha}/\omega & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4-30)$$

$$\beta_\alpha = q_\alpha / m_\alpha \omega, \quad \omega_{c\alpha} = q_\alpha B_0 / m_\alpha \quad (4-31)$$

于是介电张量可以写成：

$$\begin{aligned} \vec{\varepsilon} &= \vec{I} + \frac{i}{\varepsilon_0 \omega} \vec{\sigma} = \vec{I} - \frac{1}{\varepsilon_0 \omega} \sum_\alpha \left(n_{\alpha 0} q_\alpha \beta_\alpha \vec{A}_\alpha^{-1} \right) \\ &= \vec{I} - \sum_\alpha \left(\frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \vec{A}_\alpha^{-1} \right) \end{aligned} \quad (4-32)$$

这里 \vec{A}_α^{-1} 为 \vec{A}_α 的逆矩阵， $\omega_{p\alpha} = \left(n_{\alpha 0} q_\alpha^2 / \varepsilon_0 m_\alpha \right)^{1/2}$ 为分量等离子体频率。

不难求出²,

¹ 方程 (4-27) 是经过线性化手续的，因 $\vec{u}_{\alpha 0} = 0$ ，故 $\sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \vec{u}_{\alpha 0} = 0$

² 求逆矩阵的方法。将矩阵 \vec{A}_α 右边拼上单位矩阵后有 $\left(\vec{A}_\alpha \vec{I}_\alpha \right)$ ，通过线性变换将新矩阵左半部化成单位矩阵，可得 $\left(\vec{I}_\alpha \vec{A}_\alpha^{-1} \right)$ ，此时右半部即为原矩阵的逆矩阵。

$$\vec{A}_\alpha^{-1} = \frac{1}{1 - \omega_{c\alpha}^2 / \omega^2} \begin{pmatrix} 1 & i\omega_{c\alpha} / \omega & 0 \\ -i\omega_{c\alpha} / \omega & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \omega_{c\alpha}^2 / \omega^2 \end{pmatrix} \quad (4-33)$$

这样，等离子体介电张量可写成，

$$\vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} S & -iD & 0 \\ iD & S & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \quad (4-34)$$

其中，

$$S = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 - \omega_{c\alpha}^2} \quad (4-35)$$

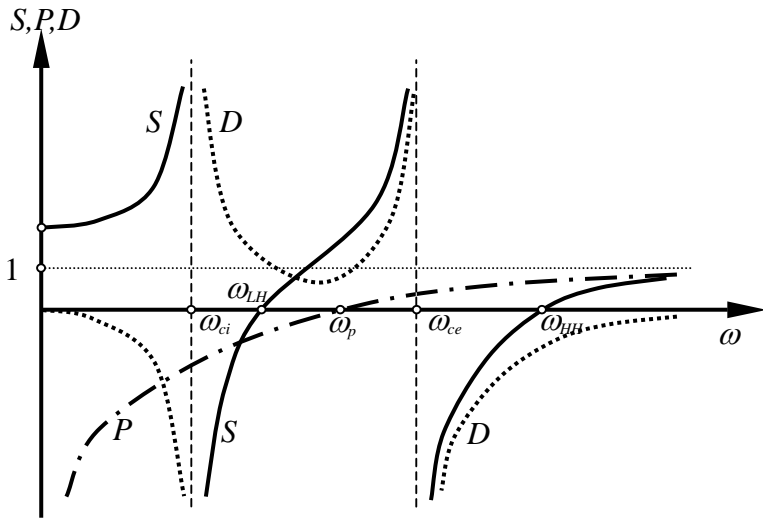
$$D = \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2 \omega_{c\alpha}}{\omega(\omega^2 - \omega_{c\alpha}^2)} \quad (4-36)$$

$$P = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \quad (4-37)$$

从等离子体介电张量的表达式 (4-34) 式，可以看到，磁化等离子体是各向异性的介质，在与磁场垂直及平行方向上等离子体的响应特性不同。当磁场趋于零时，介电张量退化成对角张量，并且三个对角项相等，等离子体于是恢复其各向同性的特征。

对任何介质，当频率趋于无穷，或密度趋于零时，应该可以获得真空极限。等离子体也是如此，在这两种极限下，其介电张量退化为单位矩阵。当扰动频率低于等离子体所有的特征频率的低频极限时，我们可以得到介电张量中各项的近似式，

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} S &= 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega_{c\alpha}^2} = 1 + \sum_{\alpha} \frac{n_{\alpha 0} m_{\alpha}}{\varepsilon_0 B_0^2} = 1 + \frac{\rho}{\varepsilon_0 B_0^2} \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} D &= -\lim_{\omega \rightarrow 0} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega \omega_{c\alpha}} = -\lim_{\omega \rightarrow 0} \sum_{\alpha} \frac{n_{\alpha 0} q_{\alpha}}{\varepsilon_0 B_0 \omega} = 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} P &= -\lim_{\omega \rightarrow 0} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} = -\infty \end{aligned} \quad (4-38)$$


 图 4.1 S 、 P 、 D 随频率变化曲线

若等离子体中仅有电子和离子两种成分，我们可以绘制出 S 、 P 、 D 随频率的变化关系曲线，如图 4.1 所示。其中 S 、 D 在电子、离子回旋频率处有奇点， S 有两个零点， D 除在零频处为零外没有零点， P 则是一个单调增的函数，在等离子体频率处过零。

§ 4.2.3 冷等离子体波

在磁化等离子体中，外加磁场使得等离子体成为各向异性的介质，磁场的方向是空间的特殊方向，等离子体对扰动的响应在磁场方向上有别于与磁场垂直的方向。对等离子体波动问题而言，波的传播方向又成为一个新的特殊方向，所以， (\vec{B}_0, \vec{k}) 构成了空间特殊的平面。为了方便，不妨取此平面为 $X-Z$ 平面，波矢与外磁场的夹角 θ ，即，

$$\vec{k} = k(\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y) \quad (4-39)$$

或，

$$\vec{n} = n \sin \theta \vec{e}_x + n \cos \theta \vec{e}_z \triangleq n_{\perp} \vec{e}_x + n_{\parallel} \vec{e}_z \quad (4-40)$$

于是由 (4-23) 式，波的色散关系为：

$$\begin{vmatrix} S - n^2 \cos^2 \theta & -iD & n^2 \sin \theta \cos \theta \\ iD & S - n^2 & 0 \\ n^2 \sin \theta \cos \theta & 0 & P - n^2 \sin^2 \theta \end{vmatrix} = 0 \quad (4-41)$$

展开有¹,

$$An^4 - Bn^2 + C = 0 \quad (4-42)$$

其中,

$$\begin{cases} A = P \cos^2 \theta + S \sin^2 \theta \\ B = SP(1 + \cos^2 \theta) + (S^2 - D^2) \sin^2 \theta \\ C = P(S^2 - D^2) \end{cases} \quad (4-43)$$

为了方便, 我们可以引入两个新的符号²,

$$R = S + D = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega(\omega + \omega_{c\alpha})} \quad (4-44)$$

$$L = S - D = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega(\omega - \omega_{c\alpha})} \quad (4-45)$$

反之则有,

$$S = (R + L)/2, \quad D = (R - L)/2 \quad (4-46)$$

于是, 诸系数可写成,

$$\begin{cases} A = P \cos^2 \theta + S \sin^2 \theta \\ B = SP(1 + \cos^2 \theta) + RL \sin^2 \theta \\ C = PRL \end{cases} \quad (4-47)$$

不难证明, (4-42) 式可写成所谓的艾利斯 (Alice) 形式,

¹ 此式看起来有 n^6 项, 但很容易看出, 两对角线乘积项给出的 n^6 系数相互抵消。

² 采用 Stix 记法, 记号含义: R (Right) L (Left) S (Sum) D (Difference)

$$\tan^2 \theta = -\frac{P(n^2 - R)(n^2 - L)}{(n^2 - P)(Sn^2 - RL)} \quad (4-48)$$

这样，我们获得了冷等离子体中本征模式所应满足的色散方程。对任一确定的传播方向，均存在两种不同的波动模式，其色散关系由下式确定，

$$n^2 = \frac{1}{2A} \left(B \pm \sqrt{B^2 - 4AC} \right) \quad (4-49)$$

当 $n^2 > 0$ 时， k 为实数，因而所对应的波模是可以传播的模式。若 $n^2 < 0$ ， k 为虚数，则所对应的波模为衰减波模。 $n^2 = 0$ 的情况，称为截止(cutoff)，此时波的相速度 $\omega/k \rightarrow \infty$ ，波将被反射。若 $n^2 \rightarrow \infty$ ，则称为共振(resonance)，此时波的相速度、群速度均为零，波动的能量将产生汇聚，一般而言，能量汇聚的结果会产生耗损机制，波的能量将被吸收。

在本章的叙述中，我们应用了整个空间的富里叶变换，这隐含了整个空间参数是均匀的假定。实际上，当空间参数是弱不均匀的时候，这种变换的方法还是有效的，只是将波矢（或波长）考虑成是空间的弱变化的函数。很显然，这种弱不均匀的假定要求，

$$|\nabla k / k^2| \ll 1 \quad (4-50)$$

即在一个波长的尺度中，波矢（或波长）的相对变化很小，这种近似称为WKB近似。

等离子体的参数（如密度）在空间变化可以引起折射率 n 的变化，在

这种非均匀等离子体中，波的传播（能流）可以类比于光在介质中的传播。我们知道光线在非均匀介质中传播有折向光密区域的趋向，在截止层和共振层附近的

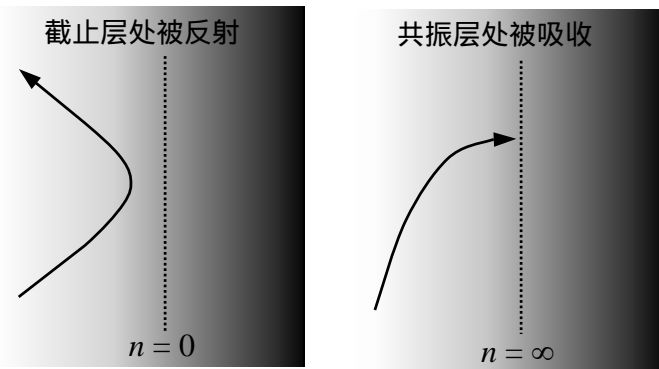


图 4.2 波在截止、共振层附近的传播轨迹
(此时已假定 n 在空间是变化的)

传播图象如图 4.2 所示。当波向截止层处传播时，逐渐转向而被反射。如果是正入射，则波可以到达截止层处，斜入射则在截止层前就已转向。波向共振层传播时，不论是斜入射，还是正入射，在到达共振层时波的轨迹一定垂直于共振层。

截止和共振是等离子体波动现象的要点，我们先来考察波的截止频率。当 (4-47) 式中的 $C = 0$ 时，两支波中有一支是截止的，故截止条件为， $P = 0$ 、 $R = 0$ 或 $L = 0$ ，截止条件与波的传播方向无关。这三个截止条件分别给出的三个不同的截止频率。

当 $P = 0$ 时，截止频率为寻常波（电磁波）的截止频率，与等离子体频率一致，

$$\omega_p \triangleq \left(\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2 \right)^{1/2} \approx \omega_{pe} \quad (4-51)$$

当 $R = 0$ 时，截止频率称为右旋波截止频率，

$$\omega_R \approx \left(\omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2 / 4 \right)^{1/2} + \omega_{ce} / 2 \quad (4-52)$$

当 $L = 0$ 时，截止频率称为左旋波截止频率，

$$\omega_L \approx \left(\omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2 / 4 \right)^{1/2} - \omega_{ce} / 2 \quad (4-53)$$

为了方便，本书中我们在一般的代数式中，回旋频率保持正负号，即 $\omega_{c\alpha} = q_\alpha B / m_\alpha$ 。当称电子回旋频率、离子回旋频率时，则均取正值，即 $\omega_{ci} = eB / m_i$ 、 $\omega_{ce} = eB / m_e$ 。比较这三个截止频率，有，

$$\omega_R \geq \omega_{pe}, \quad \omega_{ce} \geq \omega_L \quad (4-54)$$

再来考察波的共振频率。当 $A = 0$ 时，有一支波发生共振。故共振条件为，

$$\tan^2 \theta = -P/S \quad (4-55)$$

显然，共振频率与传播方向有关。上式表明，共振频率处于 P 、 S 正负相反的区域。由图 4.1 所示的 P 、 S 图可知，若离子种类是单一的，则存在三个共振频率，具体值与波的传播方向有关。图 4.3 给出了 (4-55) 式的图解，由此可知，当传播方向改变时，三个共振频率的变化范围为，

$$\begin{aligned}
0 < \omega_{re1} < \omega_{ci} \\
\omega_{LH} < \omega_{re2} < \min(\omega_{ce}, \omega_{pe}) \\
\max(\omega_{ce}, \omega_{pe}) < \omega_{re2} < \omega_{HH}
\end{aligned} \quad (4-56)$$

对垂直于磁场方向传播的波，存在 ω_{LH} 、 ω_{HH} 两个共振频率，分别称为低杂共振频率和高杂共振频率，另一个共振频率退化为零频。而对平行于磁场方向传播的波，则有 ω_{ci} 、 ω_{ce} 、 ω_{pe} 三个共振频率，分别称为左旋共振频率、右旋共振频率和等离子体共振频率。左(右)旋共振频率也称离子(电子)回旋共振频率。

值得注意的是，但凡言及共振或截止，必须与特定的波动模式相联系，一种波模在某个频率上发生共振(截止)，并不表示其它的模式也在此频率上发生共振(截止)。正如我们看到的，在 ω_{pe} 这个频率上，对电磁波是截止频率，而对静电波(后面课程将介绍)则是共振频率。

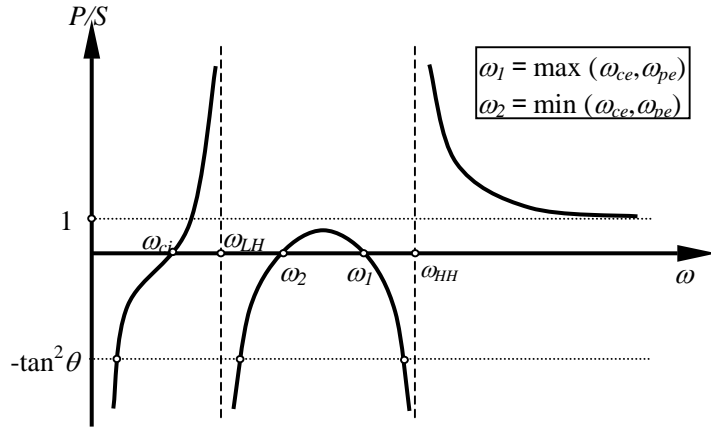


图 4.3 共振频率图解

波动的另一个重要特征是波动的偏振状态。对任一种特征的波动模式，其扰动电场的矢量方向(即偏振状态)是确定的。将 $n = n(\omega)$ 代入波的运动方程，

$$\begin{pmatrix} S - n^2 \cos^2 \theta & -iD & n^2 \sin \theta \cos \theta \\ iD & S - n^2 & 0 \\ n^2 \sin \theta \cos \theta & 0 & P - n^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad (4-57)$$

即可以得到电场各分量之间的相对比值，因而确定了扰动电场的方向。更进一步，我们还可以通过扰动速度与电场的关系，

$$\vec{u}_\alpha = i\beta_\alpha \vec{A}_\alpha^{-1} \cdot \vec{E} \quad (4-58)$$

来确定该模式扰动流体速度的方向及大小。

作为例子，我们来分析一下共振时波的偏振状态。由(4-57)后两式可知，当 $\theta \neq 0$ 时，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_x}{E_z} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{k_x}{k_z}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_y}{E_x} \rightarrow 0 \quad (4-59)$$

即扰动电场与波矢平行。这表明，当波频率接近于共振频率时，不论原来的波动模式为何，都将变成扰动电场与波矢平行的准静电波模式。只有在严格 $\theta=0$ 的情况下，情况有所不同，此时在等离子体频率处的共振是静电模式，但在电子、离子回旋频率处的共振仍然是横波模式。

在发生冷等离子体共振时，波的相速度和群速度均趋于零，波模退化成一种静电振荡模式（回旋共振除外），这种模式不伴随空间的能量传播。垂直与水平方向的三个静电振荡模式分别称为低杂混振荡、高杂混振荡，及等离子体振荡。我们将会看到，当考虑温度效应后，这三种静电振荡均可以转变成传播波模。

§ 4.3 低频近似，阿尔芬波

当频率极低时，磁流体对扰动的响应主要为流体和磁场的响应。在磁流体中，磁场与等离子体流体紧密耦合在一起我们知道，磁场具有磁压强 $B_0^2/2\mu_0$ 。相应于流体中的声波（见 4.1 节）由磁压强决定的磁声波速度应为，

$$\left(\frac{\gamma_B B_0^2 / 2\mu_0}{\rho} \right)^{1/2} = \left(\frac{\gamma_B B_0^2}{2\mu_0 \rho} \right)^{1/2} = \left(\frac{B_0^2}{\mu_0 \rho} \right)^{1/2} \triangleq V_A \quad (4-60)$$

V_A 称为阿尔芬（Alfvén）速度， γ_B 是等效的比热比，由于磁压强对应的运动垂直于磁场，应该具有两个自由度，故这里将 γ_B 的值取为 2（ $\gamma = 1 + 2/N = 2$ ）。

§ 4.3.1 阿尔芬波色散关系

当波动的频率比远低于等离子体中所有的特征频率时，与这些频率相联系的固有运动模式都不会被激发，因而对波的色散关系没有影响。一般而言，等离子体中最低的特征频率为离子回旋频率，若取 $\omega \ll \omega_{ci}$ 的低频近似，则有，

$$S \approx R \approx L \approx 1 + \rho / \varepsilon_0 B_0^2 = 1 + C^2 / V_A^2, \quad D \approx 0, \quad P \rightarrow -\infty \quad (4-61)$$

在色散关系的艾利斯表达式 (4-48) 中，取 $P \rightarrow \infty$ 极限，有，

$$\tan^2 \theta = \frac{(n^2 - R)(n^2 - L)}{Sn^2 - RL} = \frac{(n^2 - S)^2}{S(n^2 - S)} \quad (4-62)$$

很明显，此方程存在下面两个解，

$$\begin{cases} n^2 = S \\ n^2 = S(1 + \tan^2 \theta) = S / \cos^2 \theta \end{cases} \quad (4-63)$$

第一支对应着扰动流体发生挤压与扩张形变的模式，称压缩阿尔芬波；第二支对应着使磁力线产生剪切变形的模式，称为剪切阿尔芬波。压缩阿尔芬波通常称为磁声波，它与普通流体中声波的机理相当，而剪切阿尔芬波则是磁流体中出现的新的模式，通常直接称为阿尔芬波。

§ 4.3.2 阿尔芬波的扰动图像

在低频近似下，波扰动电场所满足的方程为，

$$\begin{pmatrix} S - n^2 \cos^2 \theta & 0 & n^2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & S - n^2 & 0 \\ n^2 \sin \theta \cos \theta & 0 & P - n^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad (4-64)$$

从方程的第三式可知，当 $P \rightarrow \infty$ 时，必须有 $E_z \rightarrow 0$ 。因而，无论波的模式、传播方向、频率为何，阿尔芬波的扰动电场总是垂直于外加磁场。进一步，根据扰动流体速度与电场的关系，我们可以知道扰动流体的速度同样也垂直于外磁场。在低频近似下，垂直于外磁场平面上扰动流体速度 $\bar{u}_{\alpha\perp}$ 与扰动电场 \bar{E}_\perp 之间的关系可写成，

$$\bar{u}_{\alpha\perp} = \begin{pmatrix} 0 & 1/B_0 \\ -1/B_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \quad (4-65)$$

这实际上是粒子在电场作用下的电漂移速度，与流体成份无关。因此，各种流体是作为一个整体来响应低频的阿尔芬波扰动，实际上，用单一成份的磁流体方程就可以描述阿尔芬波，阿尔芬波也称为磁流体力学（MHD）波。

波动对确定的空间点而言是振动，固有振动模式是与体系中存在的某种负反馈机制相联系。如弹性振子，弹性特征提供了振子位移的负反馈机理，振子一旦有位移，弹性力总是使位移减小。阿尔芬波相应的振荡机理则是等离子体流体与外界磁场相互作用的结果。若初始等离子体流体中发生了垂直于外磁场的运动 \bar{u}_α ，这种运动将在流体中产生感生的电场 $\bar{E} = \bar{u}_\alpha \times \bar{B}_0$ ，在此电场下，流体又会发生 $\bar{E} \times \bar{B}$ 漂移，其漂移速度与初始的扰动速度方向相反。这种负反馈的机理正是局域阿尔芬振荡可以存在的原因。

§ 4.3.3 剪切阿尔芬波

剪切阿尔芬波的色散关系为，

$$n^2 = \frac{V_A^2 + C^2}{V_A^2 \cos^2 \theta} \approx \frac{C^2}{V_A^2 \cos^2 \theta} \quad (4-66)$$

或，

$$\omega = V_A k \cos \theta = V_A k_z \quad (4-67)$$

因而，剪切阿尔芬波相速度的大小为 $V_A \cos \theta$ ，群速度为，

$$\bar{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial k_x} \bar{e}_x + \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \bar{e}_z = V_A \bar{e}_z \quad (4-68)$$

即波的能流方向平行于外加磁场¹，能流传播速度为阿尔芬速度。

由方程组（4-64）的第二式可知，对剪切阿尔芬波，必须有 $E_y = 0$ ，扰动电场只有 x 分量（ $E_x \neq 0$ ）。根据（4-65）式，流体扰动速度与扰动

¹ 也可以反平行于磁场，（4-67）式中可以取负号。

电场垂直，故剪切阿尔芬扰动流体的速度沿 Y 方向，流体扰动的方向与 (\vec{B}_0, \vec{k}) 所构成的面垂直。

注意到，流体的扰动在 Y 方向上，但由于时空变化的形式已设定为 $\exp[i(k_x x + k_z z)]$ ，与 Y 坐标无关，因而在流体扰动的方向上，扰动速度大小相同，流体没有因为波的扰动而出现挤压或拉伸现象，所以这是无压缩的扰动。如果流体在 $X = \text{常数}$ 的某平面内产生了此类扰动（当然 k_x 必须有一定的分布），不会影响和波及 X 方向上的其它平面的流体，这就是波不能在垂直于磁场方向传播的机理。剪切阿尔芬波的流体扰动图像如图 4.4 所示。

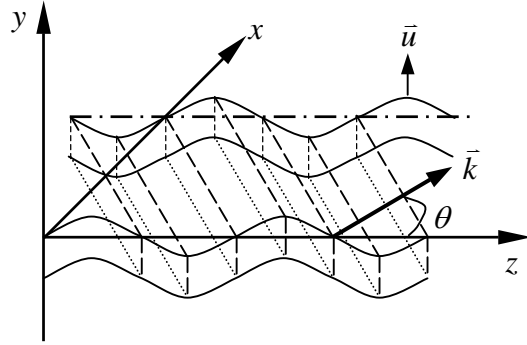


图 4.4 剪切阿尔芬波流体扰动图

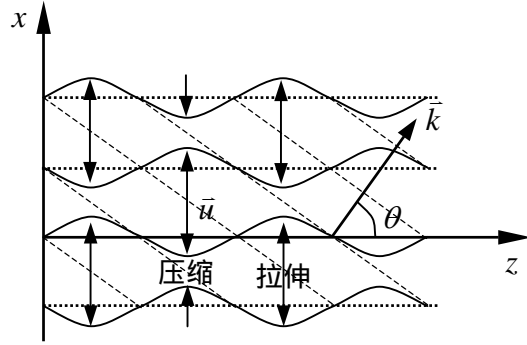


图 4.5 压缩阿尔芬波流体扰动图

§ 4.3.4 压缩阿尔芬波

压缩阿尔芬波的色散关系为，

$$n^2 = 1 + c^2 / V_A^2 \approx c^2 / V_A^2 \quad (4-69)$$

或，

$$\omega = \pm V_A k \quad (4-70)$$

同样，可以推出压缩阿尔芬波的群速度为，

$$\vec{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial k_x} \vec{e}_x + \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \vec{e}_z = V_A \frac{\vec{k}}{k} \quad (4-71)$$

与相速度完全一致。

在平行于磁场的传播方向上，压缩阿尔芬波与剪切相速度相等，但在其他方向上，压缩模式的相速度高于剪切模式，因而压缩模式也称为快模式。与剪切阿尔芬波不同，压缩阿尔芬波扰动电场在 Y 方向上，与 (\bar{B}_0, \bar{k}) 面垂直，扰动流体速度则在此平面内。由于涉及流体波动的物理量 \bar{u}_α 、 \bar{B}_0 、 \bar{k} 在同一平面内，压缩阿尔芬波实际上是一个两维的平面问题，如图 4.5 所示。在 X 方向上进行的局域扰动，必然对邻近流体进行压缩或拉伸，磁压力作为恢复力会对此种扰动作出反应，产生类似于流体声波的磁声波。在后面章节中，考虑流体的热压力时，流体压强与磁压力可以共同起作用。对垂直传播的情况，压缩阿尔芬波的图像更为典型。

§ 4.4 平行于磁场的磁流体线性波

波的传播方向与外磁场方向平行或垂直，是两种重要的特殊情况。这时波动的图像比较简洁，容易把握。一般而言，任意传播方向的波模的特征总可以理解为这两种特殊情况下的某种形式的过渡，只要熟知了这两种基本情况下的波动模式，对所有传播的波模都会有一个基本的、至少是定性地了解。下面我们分别就这两个特殊传播方向的波模进行介绍。

§ 4.4.1 平行于磁场传播的波之色散关系

在波色散关系的艾利斯表达式 (4-48) 中取 $\theta = 0$ ，即得出平行于外磁场传播的波之色散关系，

$$P(n^2 - R)(n^2 - L) = 0 \quad (4-70)$$

很明显，此式有三个独立的解， $P = 0$ 、 $n^2 = R$ 和 $n^2 = L$ ，对应着三种不同的波动模式。我们下面将会看到，这三种模式代表了可能的三种偏振状态，即一个纵波模式和两个横波模式。

§ 4.4.2 朗缪尔振荡

$P = 0$ 这一支解所对应的波动模式称为朗缪尔振荡，色散关系给出了这种振荡的频率，

$$\omega = (\omega_{pi}^2 + \omega_{pe}^2)^{1/2} \triangleq \omega_p \quad (4-71)$$

这是一种退化的波动模式，波动的频率与波数无关，因而其群速度为零，波的能量（信息）在空间不能传播，振荡只能局限在扰动的局域位置。对于这种模式，我们可以将等离子体比拟为空间分布的小振子组成，但这些振子之间没有任何关联，振子均可以独立地振动，通过适当安排这些振子的振动相位，可以得到任意的相位传播速度。然而，任一振子振幅的变化均不会引起周围振子振幅的改变，因此这种振子组合不会传递能量或信息，或曰群速度为零。后面将要说明，当考虑等离子体热压力时，粒子的热运动使得局域振荡的能量（信息）以传递给附近的等离子体，因而朗缪尔振荡可以在空间传播，形成朗缪尔波。

将 $P=0$ 代入线性波的运动方程，可知此时扰动电场平行于波矢方向，也平行于外磁场的方向。因此朗缪尔振荡是静电模式，故也称为等离子体静电振荡。同样，我们可以得到流体的扰动速度，

$$\bar{u}_\alpha = i\beta_\alpha \tilde{A}_\alpha^{-1} \cdot \bar{E} = i\beta_\alpha \bar{E} \quad (4-72)$$

流体的扰动速度方向与扰动电场平行，离子成份扰动速度与电场方向一致，电子成份则反向。同时速度扰动与电场扰动之间存在 $\pi/2$ 的相位差，表明了朗缪尔振荡过程中流体运动的动能与电场能相互转换，流体速度最大时没有电荷分离，其电场能量为零，当流体速度为零时，则电荷分离最大，流体的动能完全转换成静电场的能量。

由上式也可以看出，离子成份的流体速度远小于电子成份，离子实际上可以视为静止，故朗缪尔振荡也称为电子等离子体振荡。

§ 4.4.3 右旋偏振波

$n^2 = R$ 这一支解所对应的波动模式称为右旋偏振波，其色散关系为，

$$n^2 = 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega(\omega + \omega_{c\alpha})} = 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - \omega_{ce})(\omega + \omega_{ci})} \quad (4-73)$$

首先，我们考察此模式电场的偏振方向。将色散关系代入波的运动方程，由于此时 $P \neq 0$ ，必须有 $E_z = 0$ ，故波的扰动电场垂直于波的传播方向。垂直平面内两电场分量之比为，

$$\frac{E_x}{E_y} = i \frac{S - n^2}{D} = i \frac{S - R}{D} = -i = e^{i(-\pi/2)} \quad (4-74)$$

$|E_x/E_y| = 1$ ，故此模式为圆偏振模式，且 E_x 比 E_y 落后 $\pi/2$ 相位，其电场矢量的旋转与波矢方向构成了右手螺旋，故此模式称为右旋偏振波¹。

其次，我们分析一下右旋偏振波的色散关系曲线。在频率远大于包括电子回旋频率和等离子体频率在内的所有等离子体特征频率的极高频情况下，等离子体作为介质对电磁波的作用可以忽略，折射率趋于真空折射率。在频率远小于离子回旋频率的低频情况下，过渡成阿尔芬波，相速度为阿尔芬速度。在电子回旋频率上，右旋偏振波发生共振，而在右旋截止频率，

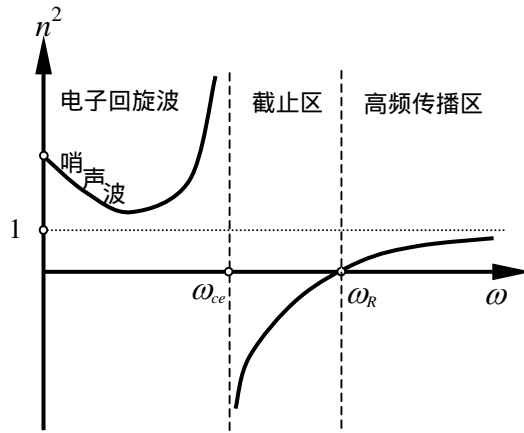


图 4.6 右旋偏振波的色散曲线

$$\omega_R \approx \left(\omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2 / 4 \right)^{1/2} + \omega_{ce} / 2 \quad (4-75)$$

处出现截止。右旋波的完整的色散关系曲线如图 4.6 所示。

从色散关系曲线可以知道，右旋偏振波在 $\omega_{ce} < \omega < \omega_R$ 频率区间 $n^2 < 0$ ，不能传播，传播区间分成两段， $\omega < \omega_{ce}$ 和 $\omega > \omega_R$ 。其中 $\omega < \omega_{ce}$ 这一段与电子的回旋运动特征紧密相关，特别称之为电子回旋波。右旋波的电场旋转方向与电子回旋运动一致，当波的频率与电子回旋频率相等时，在电子看来，波动的电场几乎是不变的，可以持续地对电子施加作用，产生共振。在微波波段，利用电子回旋共振加速电子，实现气体放电产生等离子体是一种常用的手段，称为电子回旋共振等离子体，简称 ECR 等离子体。

¹ 等离子体中波的右旋、左旋与光学中的定义正好相反。因为光学中是以观察者的观察方向为参考方向，是逆光传播方向，而等离子体中其参考方向为波的传播方向，即波矢方向。

在电子回旋波这一段，若只考虑较高频率的情况，即 $\omega \gg \omega_{ci}$ ，则可以忽略离子对色散关系的贡献，于是有，

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega - \omega_{ce})} \quad (4-76)$$

这个色散曲线不是单调的，在 $\omega = \omega_{ce}/2$ 处， n^2 有极小值，波的相速度达到极大。在很多情况下，电子回旋波的相速度远小于光速，(4-76) 式可以进一步近似为，

$$n = \left(\frac{\omega_{pe}^2}{\omega\omega_{ce} - \omega^2} \right)^{1/2} \quad (4-77)$$

其群速度为，

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{c}{n + \omega \partial n / \partial \omega} = \frac{2c}{\omega_{ce} \omega_{pe}} \omega^{1/2} (\omega_{ce} - \omega)^{3/2} \quad (4-78)$$

容易验证，群速度在 $\omega = \omega_{ce}/4$ 处有极大值。因而，在 $\omega < \omega_{ce}/4$ 较低的频率区域，电子回旋波的群速度随频率增加而增加。频率较低电子回旋波有一个特别的名字，“哨声波”，最早用于解释电离层产生的哨声无线电干扰。

在电离层中，如果某一时刻发生了局域的电磁扰动（如雷电），这样的脉冲扰动具有很宽的频谱，可以激发出各种频率的哨声波，哨声波在传播的过程中，不同频率部分将产生分离，高频成份将超前于低频成份。这样，

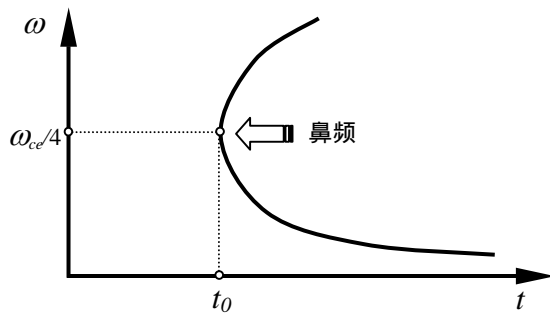


图 4.7 电离层中鼻哨声延时图

在较远处接收这种本来瞬时发生的电磁扰动，就变成了有一定时间长度的信号，信号的频率由高向低滑落，在音频波段，这种音调的变化类似于哨声。在南极区域发生的雷电扰动，沿地球磁场传播至北极区域后，就变成了这种哨声式的电磁扰动讯号，很容易直接被无线电接收机探测到。

如果我们将 $\omega > \omega_{ce}/4$ 频率区域也包含进来，通常称为鼻哨声，此时电磁扰动的频率随时间变化关系如图 4.7 所示，群速度最大的频率称为鼻频，其分量时间延迟最少。不难看出，哨声波时间延时特性给出了估算电离层等离子体参数的方法，这实际上早期电离层研究的一个重要内容。

§ 4.4.4 左旋偏振波

$n^2 = L$ 这一支解所对应的波动模式称为左旋偏振波，其色散关系为，

$$n^2 = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega(\omega - \omega_{c\alpha})} = 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega + \omega_{ce})(\omega - \omega_{ci})} \quad (4-79)$$

同样，左旋偏振波的扰动电场也垂直于波的传播方向。垂直平面内两电场分量之比为，

$$\frac{E_x}{E_y} = i \frac{S - n^2}{D} = i \frac{S - L}{D} = i = e^{i(\pi/2)} \quad (4-80)$$

E_x 比 E_y 超前 $\pi/2$ 相位，故电场矢量的旋转与波矢方向构成了左手螺旋，旋转方向与离子的回旋方向一致。

左旋偏振波的色散关系曲线与右旋偏振波类似，如图 4.8 所示。在极高频情况下，折射率趋于真空折射率，在低频情况下过渡成阿尔芬波。在离子回旋频率上，波电场的旋转与离子的回旋运动同步，发生共振，共振时离子可以从波中吸收能量，取得加热效果。而在左旋截止频率处出现截止。

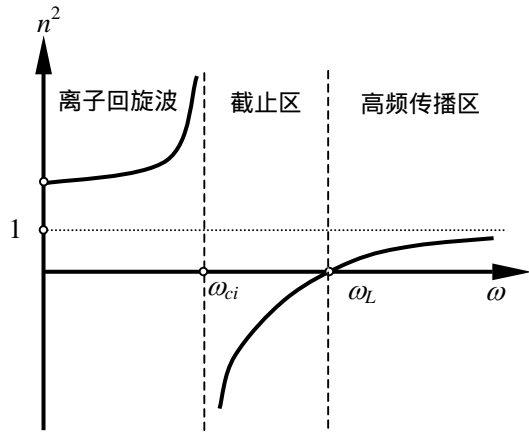


图 4.8 左旋偏振波的色散曲线

$$\omega_L \approx \left(\omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2 / 4 \right)^{1/2} - \omega_{ce} / 2 \quad (4-81)$$

左旋偏振波的传播区间也分成两段， $\omega < \omega_{ci}$ 和 $\omega > \omega_L$ 。其中 $\omega < \omega_{ci}$

这一段与离子的回旋运动特征紧密相关，称之为离子回旋波。与电子回旋波不同，离子回旋波色散曲线是单调的，其折射率远大于 1，波的相速度远小于光速。

若有一个类似于磁镜的非均匀磁场位形，在强磁场处安置天线，使得天线处满足 $\omega/\omega_{ci} < 1$ ，则可以激发出离子回旋波。离子回旋波向弱场区传播时， ω/ω_{ci} 将逐渐增大，在 $\omega/\omega_{ci} = 1$ 处发生离子回旋共振。波能量被离子吸收，离子得到加热。

§ 4.4.5 法拉第旋转

任一垂直于磁场振荡的线偏振波，可分解成强度相等的左旋和右旋圆偏振波。由于这两种圆偏振波的相速度不同，波在等离子体中传播一段距离后，其合成后的线偏振波偏振方向会发生变化。也就是说，线偏振波沿着磁场方向传播过程中，其极化方向会产生旋转，这一效应称法拉第（Faraday）旋转。参照图 4.9，设沿磁场传播距离为 z ，则极化方向的旋转角（右旋方向角度为正）为，

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2}(k_L - k_R)z \quad (4-82)$$

利用法拉第旋转效应可以诊断等离子体参数。作为诊断手段，往往采用较高频率的电磁波作为探测束，这样法拉第偏振角与等离子体密度及磁场强度成简单的线性变化关系。设 $\omega \gg \omega_{ce}, \omega_{pe}$ ，有，

$$\begin{aligned} n_L - n_R &= \left(1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega + \omega_{ce})(\omega - \omega_{ci})}\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - \omega_{ce})(\omega + \omega_{ci})}\right)^{1/2} \\ &\approx 1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} \left(1 - \frac{\omega_{ce}}{\omega}\right) - 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} \left(1 + \frac{\omega_{ce}}{\omega}\right) = \frac{\omega_p^2 \omega_{ce}}{\omega^3} \end{aligned} \quad (4-83)$$

所以，

$$\Delta\varphi = \frac{\omega_{pe}^2 \omega_{ce} z}{2c\omega^2} = \frac{e^3}{2\varepsilon_0 c m_e^2 \omega^2} (n_e B_0 z) \propto n_e B_0 z \quad (4-84)$$

若磁场、密度沿波的传播方向上是变化的，则法拉第旋转角应为相应的积分，

$$\Delta\phi = \frac{e^3}{2\varepsilon_0 c m_e^2 \omega^2} \int_0^L n_e B_0 dz \quad (4-85)$$

若磁场强度是已知的，我们可以由此得到等离子体密度的线积分值，反过来，若已知等离子体的密度，则通过测量法拉第旋转角可以获得磁场强度。

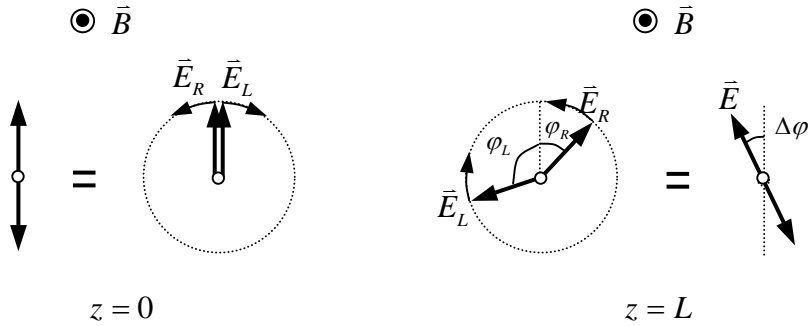


图 4.9 法拉第旋转原理图，线偏振可以分解成两个大小相等的旋转方向相反的圆偏振（注：图中线偏振矢量减小了一倍），左右两组是同一时刻不同的位置的情况。

§ 4.5. 垂直于磁场方向的磁流体线性波

§ 4.5.1 色散关系

在波色散关系的艾利斯表达式（4-48）中取 $\theta = \pi/2$ ，即得出垂直于外磁场传播的波的色散关系，

$$(n^2 - P)(Sn^2 - RL) = 0 \quad (4-86)$$

此式有两个独立的解， $n^2 = P$ 和 $n^2 = RL/S$ ，对应着两种不同的波动模式。前者是单纯的横波，后者则为横波和纵波的组合。与平行于磁场传播的波不同，垂直于磁场传播的波不能简单地以偏振态划分彼此独立的基本波模。

§ 4.5.2 寻常波

$n^2 = P$ 这一支解所对应的波动模式称为寻常波，其色散关系为，

$$n^2 = 1 - \omega_p^2 / \omega^2 \approx 1 - \omega_{pe}^2 / \omega^2 \quad (4-87)$$

这就是无磁场等离子体中电磁波的色散关系。将色散关系代入波的运动方程，容易判断，此模式 E_x 、 $E_y = 0$ ，波的扰动电场与流体速度方向均平行于外加磁场，外磁场对此模式不起作用，故称为寻常波（O 模）。寻常波只有一个截止频率 ω_p ，不存在共振频率，其传播区间为 $\omega > \omega_p$ ，如图 4.10 所示。

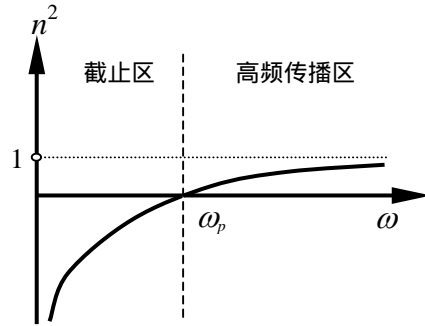


图 4.10 寻常波色散曲线

寻常波在等离子体频率之下截止这一事实我们早已知道，无线电波的短波可以很方便地实现全球通讯，就是利用了电离层的反射，其反射层就是寻常波的截止层。若等离子体的等密度面是平面，当入射电磁波正入射时，电磁波可以到达截止层所在的平面，在截止面处产生全反射。但对于斜入射的情况，则电磁波在到达截止面之前就会产生偏转，最终的出射方向为镜向反射方向。

由于截止层的等离子体密度仅与电磁波频率相关，下式是一个值得记忆的表达式，

$$f_w(\text{Hz}) = f_{pe}(\text{Hz}) \approx 9\sqrt{n_e(m^{-3})} \quad (4-88)$$

利用截止层反射可以用来测量等离子体的密度，通过电磁波发射系统发射寻常波，接收反射信号，从反射信号的时间延迟或相位变化可以获得反射层的位置，而频率决定了反射层等离子体密度。若发射系统频率可以扫描（通常称为扫频仪），则可以获得等离子体密度的空间分布。这种系统称为等离子体反射仪。反射仪是测量电离层等离子体密度分布的一个常用的方法，目前也是实验室等离子体的一个常规方法。不过在电离层测量时，通常用脉冲发射测量延时的方法来确定位置，而实验室等离子体则因为空间线度与波长相当，通常采用连续发射测量相位差的方法来决定反射点的位置。

利用寻常波在等离子体传播过程中相位的变化来测量等离子体密度，是最常规的等离子体诊断手段之一，由于相位的检测一般应用干涉的方

法，这种诊断系统称为等离子体干涉仪。若电磁波的频率远大于等离子体频率，以寻常波的模式通过等离子体，则相位发生变化，

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= (k_0 - k)z = \frac{\omega}{c} \left[1 - \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)^{1/2} \right] z \\ &\approx \frac{\omega_{pe}^2}{2c\omega} z = \frac{e^2 \lambda n_e z}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \triangleq r_e \lambda n_e z\end{aligned}\quad (4-89)$$

其中 $k_0 = \omega/c$ 是真空中电磁波波数， $r_e \triangleq e^2 / 4\pi\epsilon_0 m_e c^2$ 为经典电子半径。若密度沿波的传播方向是变化的，则应写成积分的形式，

$$\Delta\phi = r_e \lambda \int n_e dz \quad (4-90)$$

因此，应用干涉的方法测量出等离子体存在时电磁波相位变化，即可以获得等离子体的线平均密度。

§ 4.5.3 异常波

$n^2 = RL/S$ 这一支解所对应的波动模式称为异常波（X 模），扰动电场垂直于外磁场方向（ $E_z = 0$ ），垂直于磁场平面内两电场分量之比为，

$$\frac{E_x}{E_y} = i \frac{S - n^2}{D} = i \frac{D}{S} \quad (4-91)$$

一般情况下两个分量同时存在，因此异常波是纵波（ $E_y = 0$ ）和横波（ $E_x = 0$ ）的混合态。由于外磁场的作用，这两方向的等离子体运动不能分割开，导致了横波和纵波模式的强烈耦合，这是等离子体作为介质而出现的新现象。

在低频近似下，异常波仍然过渡成阿尔芬波，在频率远大于所有等离子体特征频率的极高频情况下，异常波过渡为真空中的电磁波。对这两种极限，均有 $D \rightarrow 0$ ，满足垂直传播的阿尔芬波及真空中电磁波是横波的要求。同样，从上式也可以知道，对 $S = 0$ 的共振情况下，异常波变成了纵波，成为准静电的模式。

我们已经知道，截止频率与波的传播方向无关，寻常波包含了等离子体频率这一截止频率，另两个截止频率，左、右旋截止频率则都包含在异

常波这个波模中。杂混共振频率则由 $S = 0$ 条件给出，若只考虑电子、离子两种成分，则为，

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ci}^2} = 0 \quad (4-92)$$

这个方程存在两个解，按照频率的高低，分别称为高杂共振频率和低杂共振频率，记为 ω_{HH} 和 ω_{LH} 。由于这两个解的值相差较大，可以通过适当的

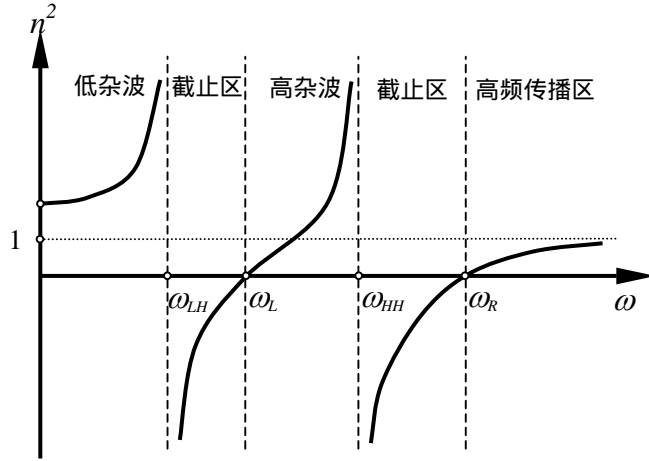


图 4.11 异常波色散曲线

近似得到其简化形式。令 $\omega \gg \omega_{ci}$ 、 ω_{pi} ，上式中离子相关的部分可以忽略，于是得到高杂共振频率，

$$\omega_{HH} = \left(\omega_{ce}^2 + \omega_{pe}^2 \right)^{1/2} \quad (4-93)$$

若令 $\omega \ll \omega_{ce}$ ，我们可以得到低杂共振频率，

$$\omega_{LH} = \left(\omega_{ci}^2 + \frac{\omega_{ce}^2 \omega_{pi}^2}{\omega_{ce}^2 + \omega_{pe}^2} \right)^{1/2} \quad (4-94)$$

很显然，上面得到低杂共振频率满足初始的低频假定。根据等离子体的两个特征频率参数，电子等离子体频率和电子回旋频率的相对大小，低杂共振频率有两个常用的近似形式，

$$\omega_{LH} = \begin{cases} (\omega_{ci}^2 + \omega_{pi}^2)^{1/2} & \omega_{ce}^2 \gg \omega_{pe}^2 \\ (\omega_{ce}\omega_{ci})^{1/2} & \omega_{ce}^2 \ll \omega_{pe}^2 \end{cases} \quad (4-95)$$

前者对应的是强磁场、低密度的情况，后者则是弱磁场、高密度的情况。

截止和共振频率将异常波分成了五个区间，其中在三个区间内可以传播。首先是 $\omega < \omega_{LH}$ 区间，波的行为与低杂共振密切相关，称为低杂波；其次是 $\omega_L < \omega < \omega_{HH}$ 区间，波的行为受高杂共振的影响，称为高杂波；最后是 $\omega > \omega_R$ 区间，波的行为逐渐摆脱等离子体特征频率的影响，过渡为普通电磁波模。异常波完整的色散曲线如图 4.11 所示。

如果等离子体中含有一种以上的离子，则会对波的色散曲线有一定的影响。如果某种离子成分浓度较小，可以称为少数离子或杂质离子，少数离子对色散曲线大部分区域不会产生严重影响，但是每一种杂质离子都会产生一个新的共振频率，在共振点处的色散曲线显然要作重大的修正。由 S 的表达式，

$$S = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 - \omega_{c\alpha}^2} \quad (4-96)$$

知道，在 $\omega^2 = \omega_{c\alpha}^2$ 处会出现奇异点，奇异的频率宽度约为 $\omega_{p\alpha}$ 。杂质离子成分的含量越小，奇异的频率宽度越小。图 4.12 给出了杂质离子的出现对

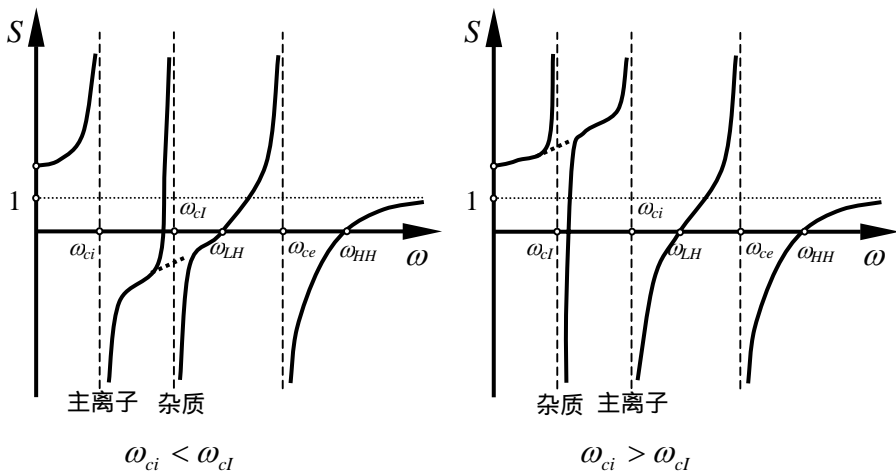


图 4.12 离子 - 离子混合共振频率图解

S 曲线的影响，虚线为不考虑杂质离子存在时的曲线，左右两图分别显示了杂质离子的回旋频率 $\omega_{cl} > \omega_{ci}$ 和 $\omega_{cl} < \omega_{ci}$ 的情况，两种情况都表明，杂质离子引起的共振频率（称为离子 - 离子混合共振频率）接近于杂质离子的回旋频率（ $\omega_{ii} \approx \omega_{cl}$ ）。利用低杂波加热等离子体的一个主要方法就是利用杂质离子的共振作用。

§ 4.6 冷等离子体波的热效应修正

§ 4.6.1 考虑热效应时波的色散关系

在流体方程中保持热压力项，则必须同时引入连续性方程和状态方程。这三个方程的线性化形式为，

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_{\alpha 0}} \nabla p_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\bar{E} + \bar{u}_\alpha \times \bar{B}_0) \\ \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha \bar{u}_\alpha) = 0 \\ \frac{p_\alpha}{p_{\alpha 0}} = \gamma_\alpha \frac{\rho_\alpha}{\rho_{\alpha 0}} \end{cases} \quad (4-97)$$

对上式作富里叶变换，即取扰动为平面波形式，可以得出扰动压力与速度的关系，

$$p_\alpha = \gamma_\alpha p_{\alpha 0} \frac{\bar{k} \cdot \bar{u}_\alpha}{\omega} \quad (4-98)$$

以及扰动流体速度与扰动电磁场之间的关系，

$$\bar{u}_\alpha = C_{s\alpha}^2 \frac{\bar{k} \cdot \bar{u}_\alpha}{\omega^2} \bar{k} + i \frac{\omega_{c\alpha}}{\omega} \left(\frac{\bar{E}}{B_0} + \frac{\bar{u}_\alpha \times \bar{B}_0}{B_0} \right) \quad (4-99)$$

其中 $C_{s\alpha} \triangleq (\gamma_\alpha p_{\alpha 0} / \rho_{\alpha 0})^{1/2}$ 为分量声速。同样不妨取，

$$\bar{k} = k_x \bar{e}_x + k_z \bar{e}_z, \quad \bar{B}_0 = B_0 \bar{e}_z \quad (4-100)$$

则 (4-99) 式可写成分量形式，

$$\begin{cases} u_{\alpha x} = C_{s\alpha}^2 \frac{\bar{k} \cdot \bar{u}_\alpha}{\omega^2} k_x + i \frac{\omega_{c\alpha} E_x}{\omega B_0} + i \frac{\omega_{c\alpha}}{\omega} u_{\alpha y} \\ u_{\alpha y} = i \frac{\omega_{c\alpha} E_y}{\omega B_0} - i \frac{\omega_{c\alpha}}{\omega} u_{\alpha x} \\ u_{\alpha z} = C_{s\alpha}^2 \frac{\bar{k} \cdot \bar{u}_\alpha}{\omega^2} k_z + i \frac{\omega_{c\alpha} E_z}{\omega B_0} \end{cases} \quad (4-101)$$

或,

$$\vec{A}_\alpha \cdot \bar{u}_\alpha = i \beta_\alpha \bar{E} \quad (4-102)$$

其中,

$$\vec{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 - \frac{k_x^2 C_{s\alpha}^2}{\omega^2} & -i \frac{\omega_{c\alpha}}{\omega} & -\frac{k_x k_z C_{s\alpha}^2}{\omega^2} \\ i \frac{\omega_{c\alpha}}{\omega} & 1 & 0 \\ -\frac{k_x k_z C_{s\alpha}^2}{\omega^2} & 0 & 1 - \frac{k_z^2 C_{s\alpha}^2}{\omega^2} \end{pmatrix} \quad (4-103)$$

$$\beta_\alpha = q_\alpha / m_\alpha \omega \quad (4-104)$$

这里 \vec{A}_α 的定义有所变化, 是对以前冷等离子体情况的拓展, 于是等离子体的介电张量与冷等离子体情况下形式相同,

$$\vec{\varepsilon} = \vec{I} - \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \vec{A}_\alpha^{-1} \quad (4-105)$$

不难看出, 等离子体热压力对波的影响与量 $k^2 C_{s\alpha}^2 / \omega^2 \sim V_{th\alpha}^2 / V_p^2$ 相关。即当粒子的热速度与波的相速度可比的时候, 热压力开始起作用。当 $V_{th\alpha}^2 / V_p^2 \ll 1$ 时, 则热效应可以忽略, 冷等离子体波动解是一个很好的近似解。有两种情况必须考虑热效应, 其一是低频的阿尔芬波, 阿尔芬波的相速度不是很大, 通常粒子的热速度可以达到和超过, 因而热压力可以耦合至阿尔芬波中。其二是冷等离子体的共振处, 此时由于冷等离子体波的相速度为零, 热效应可以显著地改变其性质。

由于热压力本身只会产生纵波, 所以热效应对冷等离子体波动的作用也局限在纵波模式上, 对横波模式而言, 我们不必考虑热压力引起的修

正。

温度不为零的等离子体不仅使得等离子体有了热压力，同时也使得粒子回旋运动的拉莫半径不为零，在波长与拉莫半径相当的短波情况下这种效应会显示出来，称为有限拉莫半径效应。有限拉莫半径效应甚至可以产生冷等离子体中所没有的新的波动模式，如伯恩斯坦（Bernstein）波模。关于有限拉莫半径效应对波的影响，超出了本课程应涉及的范围。

应用线性代数的标准方法，可以求出 \vec{A}_α 的逆矩阵，

$$\vec{A}_\alpha^{-1} = \vec{C}_\alpha / \Delta_\alpha \quad (4-106)$$

其中，

$$\vec{C}_\alpha \triangleq \begin{pmatrix} 1 - \frac{k_z^2 C_{s\alpha}^2}{\omega^2} & i \frac{\omega_{c\alpha}}{\omega} \left(1 - \frac{k_z^2 C_{s\alpha}^2}{\omega^2} \right) & \frac{k_x k_z C_{s\alpha}^2}{\omega^2} \\ -i \frac{\omega_{c\alpha}}{\omega} \left(1 - \frac{k_z^2 C_{s\alpha}^2}{\omega^2} \right) & 1 - \frac{k^2 C_{s\alpha}^2}{\omega^2} & -i \frac{\omega_{c\alpha}}{\omega^2} \frac{k_x k_z C_{s\alpha}^2}{\omega^2} \\ \frac{k_x k_z C_{s\alpha}^2}{\omega^2} & i \frac{\omega_{c\alpha}}{\omega^2} \frac{k_x k_z C_{s\alpha}^2}{\omega^2} & 1 - \frac{\omega_{c\alpha}^2}{\omega^2} - \frac{k_x^2 C_{s\alpha}^2}{\omega^2} \end{pmatrix} \quad (4-107)$$

$$\Delta_\alpha \triangleq \left(1 - \frac{\omega_{c\alpha}^2}{\omega^2} \right) \left(1 - \frac{k_z^2 C_{s\alpha}^2}{\omega^2} \right) - \left(\frac{k_x^2 C_{s\alpha}^2}{\omega^2} \right) \quad (4-108)$$

§ 4.6.2 无磁场等离子体近似

等离子体中若不存在外磁场，称为非磁化等离子体。现在我们可以考察非磁化等离子体有热压力时的波模。在上面的方程式中令 $\omega_{c\alpha} = 0$ ，可以得到无磁场近似的结果，等离子体的介电张量为，

$$\vec{\epsilon} \triangleq \begin{pmatrix} 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 - k^2 C_{s\alpha}^2} \end{pmatrix} \quad (4-109)$$

注意到这里由于磁场消失，等离子体已经是各向同性的，空间不再有特殊的方向，我们选取了传播方向为Z向。

(1) 横波解。考虑电场垂直于传播方向的横波，色散关系为，

$$n^2 = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \quad (4-110)$$

即为普通的电磁波解，正与我们所预料的一样，热压力不会影响横波。

(2) 纵波解。对电场平行于传播方向的纵波模，色散关系为，

$$1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 - k^2 C_{s\alpha}^2} = 0 \quad (4-111)$$

在冷等离子体中，这一支所对应的是不能传播的朗缪尔振荡。在等离子体粒子具有了随机运动的热能后，这种局域的静电振荡可以传播。若只考虑电子和离子两种成分，这一方程应该有两个解，分别对应着与电子响应相关的高频波和与离子响应相关的低频波，下面分别予以讨论。

(3) 朗缪尔波。高频的这支称为朗缪尔波，也称为电子等离子体波，与朗缪尔振荡直接相关。若波的相速度远大于电子的热速度¹ ($\omega/k \gg C_{se}$)，则离子的贡献可以忽略，上述色散关系可以写成，

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 C_{se}^2 = \omega_{pe}^2 (1 + \gamma_e k^2 \lambda_{De}^2) \quad (4-112)$$

这就是朗缪尔波的色散关系。朗缪尔波涉及的运动可以视为一维绝热压缩过程，通常可以取 $\gamma_e = 3$ 。

朗缪尔波的色散曲线如图 4.12 所示，当波数增大时，其相速度由极大逐渐减小至 C_{se} ，而群速度由零增大至 C_{se} ，两者之积为，

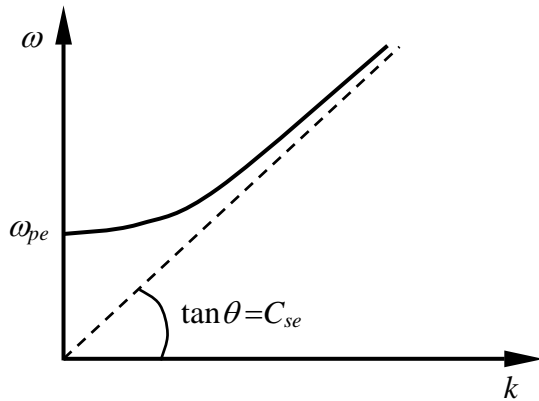


图 4.12 朗缪尔波色散曲线

¹ 热运动速度与分量声速量级相同，作为量级比较时可以不作区分。

$$V_g \cdot V_p = \frac{\partial \omega}{\partial k} \cdot \frac{\omega}{k} = C_{se}^2 \quad (4-113)$$

当 $k\lambda_{De} \sim 1$ ，即波长与电子的德拜长度相当或更小时， $V_g \sim V_p \sim V_{the}$ ，波的相速度与电子的热速度相当，此时有较多的电子可以直接与波交换能量，多数情况下，粒子将从波中获得能量从而使波受到阻尼，这种波与粒子速度匹配产生共振而形成的阻尼称为朗道（Landau）阻尼，在第六章中还将作进一步介绍。因此，实际上朗缪尔波只在波长较大时（ $k\lambda_{De} \ll 1$ ）才存在，其频率略高于电子等离子体频率。色散关系可近似为，

$$\omega = \omega_{pe} \left(1 + \frac{3}{2} k^2 \lambda_{De}^2 \right) \quad (4-114)$$

根据流体速度与电场的关系， $\bar{u}_\alpha = i(\beta_\alpha / \Delta_\alpha) \bar{E}$ ，可知在朗缪尔波中，

$$\frac{u_e}{u_i} = -\frac{m_i}{m_e} \frac{\omega^2 - k^2 C_{si}^2}{\omega^2 - k^2 C_{se}^2} \approx -\frac{m_i}{m_e} \quad (4-115)$$

电子与离子的运动方向相反，同时电子流体的速度远大于离子流体速度，离子的运动可以忽略。

（4）离子声波。纵波模的低频分支可以通过 $\omega/k \ll C_{se}$ 近似来获得，色散关系变为，

$$\omega^2 = k^2 \left(C_{si}^2 + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{pe}^2 + k^2 C_{se}^2} C_{se}^2 \right) = k^2 \left(\frac{\gamma_i T_i}{m_i} + \frac{\gamma_e T_e}{m_i} \frac{1}{1 + \gamma_e k^2 \lambda_{De}^2} \right) \quad (4-116)$$

对于 $k\lambda_{De} \ll 1$ 的长波情况，这一模式称为离子声波。离子声波有简洁的色散关系，

$$\frac{\omega}{k} = \left(\frac{\gamma_i T_i + \gamma_e T_e}{m_i} \right)^{1/2} \triangleq C_s \quad (4-117)$$

C_s 称为离子声速。

离子声波类似于流体中的声波，其相速度与群速度相等并且与频率无关，但又有所不同。离子声速的表达式中第一项是离子热压力的作用，与

普通流体声波中压力的作用一样。第二项则是普通流体中所没有的效应，来源于电子的运动。电子相对于离子的运动形成了电荷分离，由此而产生了电场，拖动了离子。我们可以从电子、离子成份的流体运动速度更清楚地看到这一点。

$$\frac{u_e}{u_i} = -\frac{m_i}{m_e} \frac{\omega^2 - k^2 C_{si}^2}{\omega^2 - k^2 C_{se}^2} = \frac{C_{se}^2}{C_{se}^2 - C_s^2} \approx 1 + \frac{C_s^2}{C_{se}^2} \approx 1 \quad (4-118)$$

电子和离子流体几乎一起运动，但电子略快，正是这一点速度差别引起了电荷分离，使得电子拖拽离子运动。由于这种静电相互作用的存在，即使作为质量主体的离子成分温度为零，没有热压力，离子声波仍然可以通过电子的热压力而传播。

如果离子温度和电子温度相近或者更高，则离子声波的相速度与离子的热速度相当，这时将会出现离子朗道阻尼。所以离子声波存在的条件为，

$$T_i \ll T_e \quad (4-119)$$

一般而言，这是一个很容易达到的条件。在此条件下，离子声波的相速度介于离子和电子的热速度之间，电子和离子的朗道阻尼均不严重。

(5) 离子朗缪尔波。纵波模的低频分支在 $k\lambda_{De} \gg 1$ 的短波长近似下，色散关系变为，

$$\omega^2 = \omega_{pi}^2 + k^2 C_{si}^2 = \omega_{pi}^2 (1 + \gamma_i k^2 \lambda_{Di}^2) \quad (4-120)$$

这与电子朗缪尔波形式类似，称为离子朗缪尔波。此时两种成分的流体速度之比为，

$$\frac{u_e}{u_i} = -\frac{m_i}{m_e} \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{pi}^2 + k^2 C_{si}^2 - k^2 C_{se}^2} \approx \frac{1}{\gamma_e k^2 \lambda_{De}^2} \approx 0 \quad (4-121)$$

离子流体运动速度远大于电子，电子可以视为不动的背景。电子不响应的物理原因是此时电子的德拜长度远大于波长，电子不可能对德拜球内的电场产生屏蔽作用。换句话说，尽管电子在时间上可以响应这样的扰动，但在空间上响应不了。

与电子朗缪尔波类似，为了避开离子朗道阻尼，应加上另一个条件， $k\lambda_{Di} \ll 1$ 。故离子朗缪尔波的频率略高于离子等离子体频率。应该指出，离子朗缪尔波的出现条件相当苛刻，一般不能满足。

§ 4.6.3 磁声波

让我们来考虑热压力对阿尔芬波的影响。如前所述，热压力不会影响横波，所以这里只需要考虑对压缩阿尔芬波的作用。压缩阿尔芬波的典型形态是其传播方向垂直于磁场的情况。令 $k_z = 0$ ，可以得到，

$$\Delta_\alpha = 1 - \frac{\omega_{c\alpha}^2}{\omega^2} - \frac{k_x^2 C_{s\alpha}^2}{\omega^2} \quad (4-122)$$

$$\vec{C}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & i \frac{\omega_{c\alpha}}{\omega} & 0 \\ i \frac{\omega_{c\alpha}}{\omega} & 1 - \frac{k^2 C_{s\alpha}^2}{\omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\omega_{c\alpha}^2}{\omega^2} - \frac{k_x^2 C_{s\alpha}^2}{\omega^2} \end{pmatrix} \quad (4-123)$$

$$\vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 - \omega_{c\alpha}^2 - k_x^2 C_{s\alpha}^2} & -i \sum_\alpha \frac{\omega_{c\alpha} \omega_{p\alpha}^2}{\omega(\omega^2 - \omega_{c\alpha}^2 - k_x^2 C_{s\alpha}^2)} & 0 \\ i \sum_\alpha \frac{\omega_{c\alpha} \omega_{p\alpha}^2}{\omega(\omega^2 - \omega_{c\alpha}^2 - k_x^2 C_{s\alpha}^2)} & 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2 (\omega^2 - k_x^2 C_{s\alpha}^2)}{\omega^2 (\omega^2 - \omega_{c\alpha}^2 - k_x^2 C_{s\alpha}^2)} & 0 \\ 0 & i \frac{\omega_{c\alpha}}{\omega^2} \frac{k_x k_z C_{s\alpha}^2}{\omega^2} & 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \end{pmatrix}$$

$$\triangleq \begin{pmatrix} S' & -iD & 0 \\ iD & S'' & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \quad (4-124)$$

色散关系变成，

$$(P - n^2) [S' (S'' - n^2) - D'^2] = 0 \quad (4-125)$$

其中，寻常模不受热效应影响。对异常模则有变化，

$$n^2 = (S' S'' - D'^2) / S' \quad (4-126)$$

作低频近似，

$$S' = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 - \omega_{c\alpha}^2 - k_x^2 C_{s\alpha}^2} \approx 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega_{c\alpha}^2} = 1 + \frac{C^2}{V_A^2} \quad (4-127)$$

$$\begin{aligned} S'' &= 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2 (\omega^2 - k_x^2 C_{s\alpha}^2)}{\omega^2 (\omega^2 - \omega_{c\alpha}^2 - k_x^2 C_{s\alpha}^2)} \\ &\approx 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega_{c\alpha}^2} - \frac{k_x^2}{\omega^2} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2 C_{s\alpha}^2}{\omega_{c\alpha}^2} = 1 + \frac{C^2}{V_A^2} - \frac{C_s^2}{V_A^2} n^2 \end{aligned} \quad (4-128)$$

$$D' = \sum_{\alpha} \frac{\omega_{c\alpha} \omega_{p\alpha}^2}{\omega (\omega^2 - \omega_{c\alpha}^2 - k_x^2 C_{s\alpha}^2)} \approx - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega \omega_{c\alpha}^2} = 0 \quad (4-129)$$

故色散关系为，

$$n^2 = \frac{C^2}{V_A^2 + C_s^2}, \quad \text{或} \quad \frac{\omega}{k} = (V_A^2 + C_s^2)^{1/2} \quad (4-130)$$

这就是磁声波的色散关系¹。很明显，这里磁压力与流体压力共同决定了波的特性。

§ 4.6.4 杂混共振频率处的静电波

我们已经知道，冷等离子体的杂混共振是一种准静电振荡，在这里热压力应该起作用。静电波模的色散关系可以写成，

$$\bar{k} \cdot \bar{\epsilon} \cdot \bar{k} = 0 \quad (4-131)$$

或，

$$k_x^2 \epsilon_{xx} + 2k_x k_z \epsilon_{xz} + k_z^2 \epsilon_{zz} = 0 \quad (4-132)$$

其中 ϵ_{xx} 、 ϵ_{xz} 、 ϵ_{zz} 是介电张量 $\bar{\epsilon}$ 的三个分量。

对平行于磁场的传播的静电波， $k_x = 0$ ，色散关系为，

¹ 在 $0 < \theta < \pi/2$ 的情况下，磁声波分成两支，按相速度大小，分别称为快磁声波、慢磁声波，其色散关系为，

$$\left(\frac{\omega}{k} \right)^2 = \frac{1}{2} (V_A^2 + C_s^2) \pm \left[\frac{1}{4} (V_A^2 + C_s^2)^2 - V_A^2 C_s^2 \cos^2 \theta \right]^{1/2}$$

$$\varepsilon_{zz} = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 - k_z^2 C_{s\alpha}^2} = 0 \quad (4-133)$$

这与无磁场时纵波解一致，可给出朗缪尔波、离子声波、离子朗缪尔波等，这里不再复述。

对垂直于磁场的传播的静电波， $k_z = 0$ ，色散关系则为，

$$\varepsilon_{xx} = S' = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 - \omega_{c\alpha}^2 - k_x^2 C_{s\alpha}^2} = 0 \quad (4-134)$$

忽略离子贡献，我们可以得到频率处于高杂共振频率附近的高杂化静电波，

$$\omega^2 = \omega_{ce}^2 + \omega_{pe}^2 + k^2 C_{se}^2 = \omega_{HH}^2 + k^2 C_{se}^2 \quad (4-135)$$

容易验证，此时对波起作用的主要是电子成分，离子则视为不动的背景。

在 $\omega^2 \ll \omega_{ce}^2$ 近似下，我们可以获得另外一支静电波解，低杂化静电波，其色散关系为，

$$\omega^2 = \omega_{ci}^2 + k^2 C_{si}^2 + \frac{\omega_{ce}^2 + k^2 C_{se}^2}{\omega_{HH}^2 + k^2 C_{se}^2} \omega_{pi}^2 \quad (4-136)$$

比较电子回旋频率和等离子体频率，可以得到低杂化静电波也有近似的简洁形式。当 $\omega_{pe}^2 \gg \omega_{ce}^2$ ， $\omega_{HH}^2 \approx \omega_{pe}^2 \gg k^2 C_{se}^2$ 时，

$$\omega^2 \approx \omega_{ce} \omega_{ci} + k^2 \left(C_{si}^2 + \frac{m_e}{m_i} C_{se}^2 \right) = \omega_{ce} \omega_{ci} + k^2 C_s^2 = \omega_{LH}^2 + k^2 C_s^2 \quad (4-137)$$

此时的低杂化静电波中，电子和离子的运动几乎同步，电子同样对波动起作用，因而在色散关系中出现了离子声速。另一方面，当 $\omega_{pe}^2 \ll \omega_{ce}^2$ ， $\omega_{HH}^2 \approx \omega_{ce}^2 \gg k^2 C_{se}^2$ 时，

$$\omega^2 \approx \omega_{ci}^2 + \omega_{pi}^2 + k^2 C_{si}^2 = \omega_{LH}^2 + k^2 C_{si}^2 \quad (4-138)$$

此时实际上只有离子起作用，电子几乎不动，这是因为磁场对电子的束缚很强，电子不能在垂直于磁场方向上对波动电场进行响应。

§ 4.6.5 静电离子回旋波

前面已经提到, 对任一确定的传播方向, 冷等离子体波存在三个共振频率, 其中最低的一个小于离子回旋频率, 与传播方向有关。在垂直传播的情况下, 此共振频率退化为零频。但只要传播方向稍稍偏离与磁场垂直的方向, 这一共振即可以出现, 并且共振频率接近离子回旋频率。在 $\omega^2 \approx \omega_{ci}^2$ 频率附近考察冷等离子体波共振条件, 有,

$$\tan^2 \theta = -\frac{P}{S} \approx \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{pi}^2} \frac{\omega_{ci}^2 - \omega^2}{\omega^2} = \frac{m_i}{m_e} \frac{\omega_{ci}^2 - \omega^2}{\omega^2} \approx \frac{2m_i}{m_e} \frac{\omega_{ci} - \omega}{\omega} \quad (4-139)$$

只要 $\theta \neq \pi/2$, 则容易有 $\tan^2 \theta (m_e/m_i) \ll 1$, 因而上式的解为 $\omega \approx \omega_{ci}$ 。考虑热压力效应, 这一支静电振荡同样可以传播, 称为静电离子回旋波, 下面我们来考察这一模式。

我们假定, (1) 离子是冷的, (2) $k_z^2 \ll k_x^2$, (3) $\omega \approx \omega_{ci}$, 于是,

$$\varepsilon_{xx} \approx 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{ci}^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} \approx 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{ci}^2} \quad (4-140)$$

$$\varepsilon_{zz} = 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - k_z^2 C_{se}^2} \approx 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{k_z^2 C_{se}^2} \quad (4-141)$$

则静电波色散关系为,

$$k_x^2 \left(1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{ci}^2} \right) + k_z^2 \left(1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \right) + \frac{\omega_{pe}^2}{C_{se}^2} = 0 \quad (4-142)^1$$

因为 $k_z^2 \ll k_x^2$, 第二项可以忽略, 则有,

$$k_x^2 \left(1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{ci}^2} \right) + \frac{\omega_{pe}^2}{C_{se}^2} = 0 \quad (4-143)$$

最终可得静电离子回旋波的色散关系,

¹ 这里忽略了 $\varepsilon_{xz} k_x k_z$ 项。

$$\omega^2 = \omega_{ci}^2 + \frac{\omega_{pi}^2}{1 + \omega_{pe}^2 / k_x^2 C_{se}^2} \approx \omega_{ci}^2 + \frac{m_e}{m_i} k_x^2 C_{se}^2 = \omega_{ci}^2 + k_x^2 C_s^2 \quad (4-144)$$

§ 4.7 漂移波

到目前为止，在波动问题中，我们一直没有考虑流体的整体流动，即 $\bar{u}_{\alpha 0} = 0$ 。实际上，等离子体中常常存在着整体的流体速度，外界注入的粒子束可以形成这样的状态，但更为一般的是各种因素引起的流体漂移，这种漂移往往是不可避免的，并且可能产生新的波模。由于流体的漂移与漂移运动相关，所涉及的时间尺度较大，对于前面介绍的绝大多数波模来说，特征时间上有较大的差别，因而可以判断漂移运动的存在对已有的波模不会有大的影响。下面我们专门就由密度梯度漂移所引起的新的波模，漂移波进行讨论。

§ 4.7.1 密度梯度存在时流体线性化方程

对非均匀等离子体，存在密度梯度，我们可以定义，

$$\bar{k}_{n\alpha} \triangleq \nabla n_{\alpha 0} / n_{\alpha 0} \quad (4-145)$$

$\bar{k}_{n\alpha}$ 表示了密度梯度方向，其大小为密度变化特征长度的倒数。若温度不为零，则同时存在着压力梯度，假设温度本身的空间变化可以忽略，则有，

$$\nabla p_{\alpha 0} / p_{\alpha 0} = \bar{k}_{n\alpha} \quad (4-146)$$

这样，由压力梯度引起的流体漂移速度为，

$$\bar{u}_{\alpha 0} = \frac{\bar{B}_0 \times (\nabla p_{\alpha 0})}{q_\alpha n_{\alpha 0} B_0^2} = \frac{T_\alpha \bar{B}_0 \times \bar{k}_{n\alpha}}{q_\alpha B_0^2} \quad (4-147)$$

由于密度梯度及流体漂移速度的存在，线性化流体方程组有所变化。流体运动方程和连续性方程变为¹，

¹ 设流体不可压缩， $\nabla \cdot \bar{u}_{\alpha 0} = 0$ 。

$$m_\alpha n_\alpha \left[\frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial t} + (\bar{u}_{\alpha 0} \cdot \nabla) \bar{u}_\alpha \right] = -\nabla p_\alpha + q_\alpha n_{\alpha 0} (\bar{E} + \bar{u}_\alpha \times \bar{B}_0) \quad (4-148)$$

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + (\bar{u}_{\alpha 0} \cdot \nabla) n_\alpha + n_{\alpha 0} \nabla \cdot \bar{u}_\alpha + (\bar{u}_\alpha \cdot \nabla) n_{\alpha 0} = 0 \quad (4-149)$$

状态方程则无变化，设波动过程中温度不变，有，

$$p_\alpha = n_\alpha T_\alpha \quad (4-150)$$

作富里叶变换后（注意变换只对一级量进行），有，

$$\begin{cases} \omega_\alpha^* \bar{u}_\alpha = \frac{T_\alpha}{m_\alpha} \frac{n_\alpha}{n_{\alpha 0}} \bar{k} + i \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\bar{E} + \bar{u}_\alpha \times \bar{B}_0) \\ \omega_\alpha^* n_\alpha = n_{\alpha 0} (\bar{k} - i \bar{k}_{n\alpha}) \cdot \bar{u}_\alpha \end{cases} \quad (4-151)$$

其中 $\omega_\alpha^* \triangleq \omega - \bar{k} \cdot \bar{u}_{\alpha 0}$ 。流体方程导出后，可按以前相同的程序去解本征值问题，这里不再赘述。

§ 4.7.2 静电漂移波

考虑下列简单情况，(1) 电子和离子的密度梯度相等， $\bar{k}_{ne} = \bar{k}_{ni} \triangleq \bar{k}_n$ ；(2) 冷离子流体， $T_i = 0$ ；(3) 静电波模， $\bar{E} = -i\phi \bar{k}$ ，其中 ϕ 为扰动电势；(4) 低频， $\omega \ll \omega_{ci}$ 。于是，离子成分的扰动量方程为，

$$\begin{cases} \omega \bar{u}_i = i \frac{q_i}{m_i} (\bar{E} + \bar{u}_i \times \bar{B}_0) \\ \omega n_i = n_{i0} (\bar{k} - i \bar{k}_n) \cdot \bar{u}_i \end{cases} \quad (4-152)$$

扰动速度与电场的关系与均匀、冷等离子体情况下一致，同样为，

$$\bar{u}_i = i \beta_i \vec{A}_i^{-1} \cdot \bar{E} \quad (4-153)$$

其中，

$$\beta_i = q_i / m_i \omega \quad (4-154)$$

$$\vec{A}_i^{-1} = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_{ci}^2} \begin{pmatrix} 1 & i\omega_{ci}/\omega & 0 \\ -i\omega_{ci}/\omega & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \omega_{ci}^2/\omega^2 \end{pmatrix} \quad (4-155)$$

但扰动密度则与非均匀性有关，

$$n_i = i \frac{n_{i0} \beta_i}{\omega} (\vec{k} - i\vec{k}_n) \cdot \vec{A}_i^{-1} \cdot \vec{E}_i = \frac{n_{i0} q_i}{m_i \omega} [(\vec{k} - i\vec{k}_n) \cdot \vec{A}_i^{-1} \cdot \vec{k}] \varphi \quad (4-156)$$

电子成分扰动量方程没有任何简化，一般说来，求解比较繁杂。我们可以换一个方式来求解波的色散关系。先考虑平行于磁场的电子扰动速度方程，

$$\omega_\alpha^* u_{e_z} = \frac{T_e}{m_e} \frac{n_e}{n_{e0}} k_z + i \frac{q_e}{m_e} E_z = \frac{T_e}{m_e} \left(\frac{n_e}{n_{e0}} + \frac{q_e \varphi}{T_e} \right) k_z \quad (4-157)$$

如果认为电子沿磁力线方向可以瞬时地响应电场的扰动，即认为电子的响应时间为零，或曰忽略电子的惯性。形式上在上式中令电子质量趋于零，即有，

$$n_e/n_{e0} = -q_e \varphi / T_e \quad (4-158)$$

此式称为玻尔兹曼（Boltzmann）关系，是密度的玻尔兹曼分布的小扰动形式。只要在扰动的特征时间远大于电子的响应时间，玻尔兹曼关系通常都可以成立，这样扰动电子密度和电势就有了简单直接的联系，避开了扰动量的联立方程。

直接利用静电场的泊松（Poisson）方程，即可以获取波的色散关系，

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{1}{\epsilon_0} \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha = -\frac{1}{\epsilon_0} (n_i q_i + n_e q_e) \quad (4-159)$$

作富立叶变换后的形式为，

$$k^2 \varphi = \frac{1}{\epsilon_0} (n_i q_i + n_e q_e) = \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} (\vec{k} \cdot \vec{A}_i^{-1} \cdot \vec{k} - i\vec{k}_n \cdot \vec{A}_i^{-1} \cdot \vec{k}) \varphi - \frac{1}{\lambda_{De}^2} \varphi \quad (4-160)$$

故色散关系为，

$$k^2 = \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \left(\bar{k} \cdot \bar{A}_i^{-1} \cdot \bar{k} - i \bar{k}_n \cdot \bar{A}_i^{-1} \cdot \bar{k} \right) - \frac{1}{\lambda_{De}^2} \quad (4-161)$$

值得注意的是, 若 $k^2 \lambda_{De}^2 \ll 1$, 上式等号左边的项可以忽略, 此时的泊松方程与 $\sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \approx 0$ 的准中性条件一致, 这说明了静电波的长波条件, $k^2 \lambda_{De}^2 \ll 1$ 与准中性条件相当。我们在前面分析各种静电振荡的物理机制时, 总是隐含了这个结论。更明确地说, 在德拜长度以内进行电荷扰动, 产生较大的电荷分离, 从而产生较大的电场是允许的, 超过德拜长度的大线度的扰动, 电荷分离是有限的, 必须满足准中性条件¹。

将上式展开,

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{ci}^2} \right) k_x^2 + \left(1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \right) k_z^2 + \frac{1}{\lambda_{De}^2} \\ &= -i \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{ci}^2} k_x \left(k_{nx} - i k_{ny} \frac{\omega_{ci}}{\omega} \right) - i \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} k_z k_{nz} \end{aligned} \quad (4-162)$$

等号右边是由于密度不均匀所引起的, 在均匀情况下为零。多数情况下, 密度不均匀主要在磁场的垂直方向。我们这里仅考虑密度梯度与波传播方向垂直, 即设为 Y 方向。这样, 避免了上式出现复数解。出现复数解总是对应着阻尼、或增长的状态, 不是一种稳定的波动状态。反过来说, 上式有稳定波动的传播方向必须与梯度垂直。再考虑准中性条件成立, 以及垂直磁场传播的情况, 有,

$$\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{ci}^2} k_x^2 - \frac{1}{\lambda_{De}^2} = \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{ci}^2} \frac{\omega_{ci}}{\omega} k_x k_{ny} \quad (4-163)$$

在离子回旋频率附近, 此式的解就是经过非均匀效应修正的静电离子回旋波,

$$\omega^2 = \omega_{ci}^2 + k_x^2 C_s^2 + k_x k_{ny} C_s^2 \quad (4-164)$$

注意到, 由于这里应用了等温过程, 故 $C_s^2 = T_e / m_i = \omega_{pi}^2 \lambda_{De}^2$ 。

对于 $\omega^2 \ll \omega_{ci}^2$ 的低频情况, 我们可以得到与密度梯度相关的新模式,

¹ 当然, 准中性条件成立还需要考虑电子的特征响应时间。

$$\omega = \frac{k_x k_{ny} C_s^2}{\omega_{ci}^2 + k_x^2 C_s^2} \omega_{ci} \approx \frac{k_x k_{ny} C_s^2}{\omega_{ci}} \quad (4-165)$$

最后的近似是解的自洽性要求。因为若无 $k^2 C_s^2 \ll \omega_{ci}^2$ 的条件，则解不符合低频条件要求。这就是静电漂移波的色散关系。若将 k_{ny} 替换成电子的漂移速度，

$$k_{ny} = \frac{q_e B_0}{T_e} u_{e0x} \quad (4-166)$$

则静电漂移波的色散关系为，

$$\omega - \vec{k} \cdot \vec{u}_{e0} = 0 \quad (4-167)$$

因而，漂移波的传播方向是电子漂移方向，其相速度与群速度与电子的漂移速度相等。

思考题

- 4.1 指出方程组 (4-1) 中的非线性项。
- 4.2 若大气中声波的相速度与频率（或波长）相关，或曰大气对声波是色散介质，人们交谈时会有什么不方便之处吗？
- 4.3 真空中的麦克斯韦方程组有非线性项吗？如果有，是哪一项？如果没有，这意味着什么？在真空中传输的两束强激光相遇时会相互影响吗？
- 4.4 等离子体频率是波的截止频率，还是共振频率？
- 4.5 截止频率与传播方向无关，请分析其中原因。
- 4.6 当密度越来越小时，波应向真空中的电磁波进行过渡，阿尔芬波可以直接实现这样的过渡吗？为什么？
- 4.7 若阿尔芬速度与光速可比，对磁场能量密度的要求如何？
- 4.8 设计实验方案，利用哨声波的延时特性估算电离层的等离子体参数，方案包括测量什么？计算模型需要哪些假设和近似？
- 4.9 面对磁化的等离子体发射电磁波，如何保证电磁波进入等离子体后是寻常波？
- 4.10 等离子体中哪些波模是电子成份响应起作用，哪些是离子起作用，哪些是电子离子都起作用？电子不起作用的主要原因有哪些？

- 4.11 无磁场的等离子体中所传播的波频率必须高于等离子体频率，但在有磁场的情况下，出现了一些低于等离子体频率的传播模式，请分析其中的奥秘。

练习题

- 4.1 试证明 (4-11) 式。
- 4.2 导出 (4-33) 式。
- 4.2 试证明，色散方程 (4-41) 式可以写成 (4-47) 艾利斯形式。
- 4.3 不可压缩流体的数学表达式是 $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ ，由此证明剪切阿尔芬波和压缩阿尔芬波的流体分别对应着无压缩和可压缩模式。
- 4.4 推导右旋波、左旋波截止频率的严格表达式，并考察当等离子体密度趋于零的截止频率。
- 4.5 证明，对忽略离子响应的高频情况下，冷等离子体色散关系可以写成，

$$n^2 = 1 - X \left/ \left[1 - \frac{Y^2 \sin^2 \theta}{2(1-X)} \pm \left(\frac{Y^4 \sin^4 \theta}{4(1-X)^2} + Y^2 \cos^2 \theta \right)^{1/2} \right] \right.$$

其中， $X \triangleq \omega_{pe}^2 / \omega^2$ ， $Y \triangleq \omega_{ce} / \omega$ 。这称为阿普勒顿 - 哈特里 (Appleton-Hartree) 公式。

- 4.6 对朗缪尔振荡模式，证明，流体扰动的动能与扰动电场能量平均值相等，两者相互转换。
- 4.7 等离子体中波动的能量由两部分组成，其一是电磁场的能量，其二是与波频率一致的粒子的振动能量（极化能量）。证明，对冷等离子体中电磁波而言，前者大于后者。
- 4.8 求电子回旋波的最大相速度，最大的相速度的频率是多少？
- 4.9 根据 (4-78) 式，求哨声波最大的群速度。
- 4.10 在单离子成份的等离子体中，左、右旋波共同的传播区域内，左旋波的相速度总是小于右旋波。但若考虑两种离子成份的等离子体，则左、右旋在某个频率上相速度可以相等，即色散曲线可以出现交叉，故称此频率为交叉频率，请求出交叉频率。
- 4.11 证明，高杂化静电波中电子流体运动与离子相反，且速度远大于离子。
- 4.12 证明，低杂化静电波中电子流体与离子速度之比为 $u_e / u_i \approx \omega_{pe}^2 / \omega_{HH}^2$ 。

- 4.13 比较等离子体各特征频率 ω_{ci} 、 ω_{ce} 、 ω_{LH} 、 ω_{HH} 、 ω_L 、 ω_R 、 ω_{pe} 的大小顺序，给出条件。
- 4.14 设 $\omega_{pe}^2 > 2\omega_{ce}^2$ ，将垂直于磁场和平行于磁场的波色散曲线 $n^2(\omega)$ 绘于同一图中，以 L 、 R 、 O 、 X 注明左旋波、右旋波、寻常波、异常波。考虑当传播方向 $0 < \theta < \pi/2$ 时，色散曲线是如何过渡的，用阴影标明 $0 < \theta < \pi/2$ 情况下的传播区域。

第五章 等离子体不稳定性

§ 5.1 等离子体不稳定性概述

热力学定律告诉我们，任何一个孤立体系随时间演化的最终状态是热力学平衡态。完全的热力学平衡态是，系统的各类粒子的速度分布均为麦克斯韦分布，所有种类粒子都具有相同的温度，系统中辐射场的谱分布符合普朗克（Planck）分布，其分布唯一的参数，辐射温度与诸粒子成份的温度相等。若体系中不存在外力势场，则粒子密度在空间是均匀的，否则，粒子密度在空间的分布将符合玻尔兹曼关系。然而，这种完全热力学平衡的状态在实际物理系统中几乎不可能达到，更遑论等离子体这种复杂的系统。其原因主要有两点，其一，严格的孤立体系实际上是没有的，除非将整个宇宙视为一个体系；其二，系统的维持时间与达到热平衡所需的时间可能相差较远。热力学平衡系统是信息量最少的体系，我们通常不会面对完全热力学平衡这种毫无生机的系统，热力学告诉了我们一个系统演化的方向，我们面对的体系都是处于正在演化的状态。

等离子体通常处于高度非热力学平衡状态。如前所述，系统偏离热力学平衡的方式和层次有几种，（1）粒子的局域速度分布函数不是麦克斯韦型；（2）不同粒子种类之间未达到热平衡，各成分的温度不同¹；（3）粒子密度的空间分布不均匀，或未达到玻尔兹曼分布。非热（力学）平衡系统走向热平衡方式可以有多种，可以以扩散、输运等缓和、渐变的热力学过程来实现，但也可以是以涉及整体的、剧烈的不稳定性过程来达到。不稳定性是指系统扰动随时间指数增长的物理过程，其驱动的根本因素就是系统偏离热力学平衡的自由能，在不稳定性发展的过程中，自由能得到释放，最终化为系统的无规热运动能量。

等离子体不稳定性丰富多彩，有多种不同的分类方法。若按照偏离热力学平衡的方式来分，可以分成，（1）宏观不稳定性。此时体系粒子之间达到了麦克斯韦分布，但空间处于非均匀状态，宏观不稳定性导致粒子宏观整体的运动，可以用流体模型来描述，故也称为磁流体（MHD）不稳定

¹ 粒子与辐射之间的热力学平衡一般很难达到，故一般而言，可以将粒子和辐射分别处理。然而，对与粒子之间相互作用很强特定频率的辐射，如线光谱辐射、回旋辐射，则粒子可能与此频率的辐射达到热平衡，具有相同的温度。

性；(2) 微观不稳定性。此时体系的粒子速度分布不是热平衡的麦克斯韦分布，或各种粒子总的速度分布未达到热平衡的分布。微观不稳定性涉及的是速度分布空间，不是我们所感知的实空间，所考虑的出发点是微观的粒子速度分布，故有“微观”之称。微观不稳定性一般用动力学（Kinetic）理论描述¹。一般而言，宏观不稳定性发展比较剧烈，但微观不稳定性的发展也会显示出宏观效果。如果需要控制系统的不稳定性，那么首先应关注宏观，然后才是微观。

等离子体中的不稳定性也可以按电磁性质分成静电不稳定性和电磁不稳定性两种，前者在不稳定性发展过程中，仅有电场扰动，后者则为电磁扰动。若按驱动不稳定性的机制来分，可以有电流不稳定性、压力不稳定性、川流不稳定性等。在磁约束等离子体中，人们还喜欢将宏观不稳定性按形态命名，如扭曲模、腊肠模、撕裂模、气球模、水龙管模等。

下面我们来分析几种典型的不稳定性，从中得到其不稳定性的特征和不稳定性发展的条件。同时通过分析过程，领悟分析不稳定性的基本方法。

§ 5.2 瑞利 - 泰勒不稳定性

§ 5.2.1 不稳定性机制与图像

从日常的体验中，我们可以从物体“头重脚轻”联想到“不稳定”，因为这种状态很容易倾翻，变成“头轻脚重”。头重脚轻的状态实际上就是处于不稳定的状态，倾翻的过程，就是不稳定性发展的过程，也是物体势能降低的过程。对一般热力学体系的不稳定性而言，不稳定性发展的过程是自由能降低的过程。

瑞利 - 泰勒不稳定性首先在流体中发现的。当质量密度大的流体（重流体）由质量密度小的流体（轻流体）所支撑，在重力的作用下就会产生这种不稳定性，故也称为重力不稳定性。

瑞利 - 泰勒不稳定性是通常可以碰到的。我们知道，油可以均匀的漂浮在水面上，但水却不能浮在油面上；将一杯水倒置，水一定会流出。这里水流下的原因并不是杯子里的水受到了净的向下的力，水的重力实际上

¹ 注意 kinetics 和 dynamics 的差别，中文均为“动力学”，前者是对运动的描述，如“轨迹”等，后者涉及系统随时间演化规律，有“力”参与其中。

与大气对水的压力是平衡的。水可以流出的原因是这种平衡是不稳定的，分界面一个小的涟漪，就使这种平衡遭到破坏，涟漪发展成水的整体下落，如图 5.1 所示。

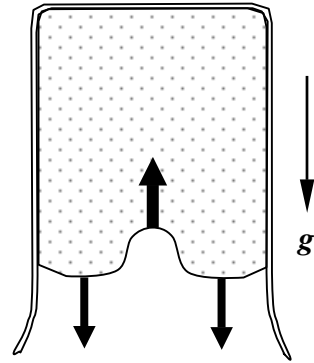


图 5.1 倒置的水表面处瑞利 - 泰勒不稳定性的发展

当等离子体有密度梯度，或更极端一点，等离子体有一个明确的边界，磁场对等离子体的作用力平衡着等离子体的压力梯度，若同时在密度梯度的方向上存在着非电磁力（类似于重力），这种情况就与上述的流体发生瑞利 - 泰勒不稳定性的状态类似。

下面我们分析一下磁流体中瑞利 - 泰勒不稳定性的图像。如图 5.2 所示，设等离子体有一个锐边界（ $y = 0$ ），磁场垂直于纸面，在重力作用下，等离子体中的电子、离子成分会产生不同的重力漂移，

$$\bar{u}_{i0} = \frac{m_i \bar{g} \times \bar{B}_0}{q_i B_0^2}, \quad \bar{u}_{e0} = \frac{m_e \bar{g} \times \bar{B}_0}{q_e B_0^2} \quad (5-1)$$

与离子成分相比，电子流体的漂移方向相反，但速度大小可以忽略。因而，在分界面开始有流体扰动的情况下

（ $\bar{k}_x \neq 0$ ），漂移运动会产生电荷分离，在表面积累电荷，从而产生电场。在此电场的作用下，离子与电子的流体电漂移方向与初始扰动方向一致，使扰动幅度增加，因此产生了不稳定性。

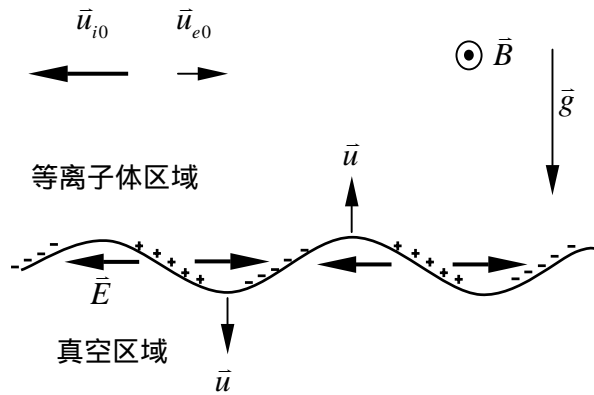


图 5.2 等离子体中瑞利 - 泰勒不稳定性机制

§ 5.2.2 简正模分析

对不稳定性进行分析的一种常用方法是简正模方法，这实际上就是上一章分析线性波时所用的方法。同样我们考察系统固有的简谐波模式，如果在波的色散关系中，频率出现了复数，则由扰动的形式，

$$\text{扰动量} \sim e^{-i\omega t} = e^{-i(\omega_r + i\gamma)t} = e^{\gamma t} e^{-i\omega_r t} \quad (5-2)$$

可知，复数频率的实部对应着随时间简谐变化的频率，而正的虚部则体现了扰动量随时间的指数增长，这就是不稳定性， γ 就是此模式不稳定性的增长率。

瑞利 - 泰勒不稳定性是一种理想磁流体不稳定性，可以采用冷等离子体近似，由于密度梯度本身引起的漂移可以略去，只需考虑重力产生的漂移。这样，我们可以直接采用上章漂移波时所导出的流体扰动量方程（4-141），

$$\begin{cases} \omega_\alpha^* \bar{u}_\alpha = i \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\bar{E} + \bar{u}_\alpha \times \bar{B}_0) \\ \omega_\alpha^* n_\alpha = n_{\alpha 0} (\bar{k} - i \bar{k}_n) \cdot \bar{u}_\alpha \end{cases} \quad (5-3)$$

考虑静电扰动，则可以直接写出色散关系，

$$k^2 = \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega_\alpha^{*2}} (\bar{k} - i \bar{k}_n) \cdot \bar{A}_\alpha^{*-1} \cdot \bar{k} \quad (5-4)$$

其中，

$$\bar{A}_\alpha^{*-1} = \bar{A}_\alpha^{-1} \Big|_{\omega=\omega^*} = \frac{\omega_\alpha^{*2}}{\omega_\alpha^{*2} - \omega_{c\alpha}^2} \begin{pmatrix} 1 & i\omega_{ci}/\omega_\alpha^* & 0 \\ -i\omega_{ci}/\omega_\alpha^* & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \omega_{ci}^2/\omega_\alpha^{*2} \end{pmatrix} \quad (5-5)$$

将 $\bar{k} = k_x \bar{e}_x$ ， $\bar{k}_n = k_{ny} \bar{e}_y$ 代入，有，

$$\begin{aligned}
k_x^2 &= \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega_{\alpha}^{*2} - \omega_{c\alpha}^2} \left(k_x^2 - \frac{\omega_{c\alpha}}{\omega_{\alpha}^*} k_x k_{ny} \right) \approx - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega_{c\alpha}^2} \left(k_x^2 - \frac{\omega_{c\alpha}}{\omega_{\alpha}^*} k_x k_{ny} \right) \\
&= - \frac{c^2 k_x^2}{V_A^2} + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega_{\alpha}^* \omega_{c\alpha}} k_x k_{ny} = - \frac{c^2 k_x^2}{V_A^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{\alpha}^* \omega_{ci}} \left(\frac{1}{\omega_i^*} - \frac{1}{\omega_e^*} \right) \\
&= \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2} \left[\frac{k_{ny}}{k_x} \left(\frac{1}{\omega_i^*} - \frac{1}{\omega_e^*} \right) - 1 \right] k_x^2
\end{aligned} \tag{5-6}$$

等式左边可以忽略，因而可以得到色散方程，

$$\frac{1}{\omega_i^*} - \frac{1}{\omega_e^*} - \frac{1}{\omega_{ci}} \frac{k_x}{k_{ny}} = 0 \tag{5-7}$$

或有，

$$(\omega - k_x u_{i0x})(\omega - k_x u_{e0x}) + \omega_{ci} k_{ny} (u_{e0x} - u_{i0x}) = 0 \tag{5-8}$$

其解为，

$$\omega = \frac{1}{2} k_x (u_{i0x} - u_{e0x}) \pm \left[\omega_{ci} k_{ny} (u_{i0x} - u_{e0x}) + \frac{1}{4} k_x^2 (u_{i0x} - u_{e0x})^2 \right]^{1/2} \tag{5-9}$$

因而，重力不稳定性条件为，

$$\omega_{ci} k_{ny} (u_{i0x} - u_{e0x}) + \frac{1}{4} k_x^2 (u_{i0x} - u_{e0x})^2 < 0 \tag{5-10}$$

重力不稳定性增长率为，

$$\gamma = \left[\omega_{ci} k_{ny} (u_{e0x} - u_{i0x}) - \frac{1}{4} k_x^2 (u_{e0x} - u_{i0x})^2 \right]^{1/2} \tag{5-11}$$

对重力漂移，电子漂移速度可以忽略，离子漂移速度 $u_{i0x} = g_y / \omega_{ci}$ ，不稳定性条件可以简化为，

$$\frac{1}{4}k_x^2 u_{i0x}^2 < -k_{ny} g_y = -\vec{k}_n \cdot \vec{g} \quad (5-12)$$

由于不等式左边是非负的，故若 $\vec{k}_n \cdot \vec{g} > 0$ ，也即密度梯度方向与重力方向一致时，不存在重力不稳定性，这实际上就是流体中质量密度大的流体支撑密度小的流体的情况。所以，重力不稳定性的必要条件是，

$$\vec{k}_n \cdot \vec{g} < 0 \quad (5-13)$$

只要不稳定性的必要条件得到满足，总存在适当的波模（波长足够大）的扰动是不稳定的。对长波模，重力不稳定性的增长率为，

$$\gamma = \left(-\vec{k}_n \cdot \vec{g} \right)^{1/2} \quad (5-14)$$

值得指出的是，我们现在的分析是线性过程，即扰动量足够小，即我们只考察了系统平衡态状态附近的动力学性质，因而这种不稳定性分析的结论应该注上线性的标签。至于系统偏离平衡态稍远的稳定性质，需要进行考虑非线性项的作用，稳定的性质与线性情况下可能大不相同。也就是说，体系在平衡点附近的动力学性质，可以是线性稳定非线性也稳定、线性稳定非线性不稳定、线性不稳定非线性稳定、线性不稳定非线性也不稳定的任何一种。

§ 5.2.3 交换不稳定性

重力不稳定性有时也称槽形不稳定性，这是因为重力不稳定性在表面扰动的形状呈沟槽状。扰动波矢垂直于磁场，在磁场方向扰动的大小和相位相同，故此扰动的沟槽就是沿着磁力线方向。

我们也可以从另一个角度看待重力不稳定性的扰动过程，平静的界面产生槽形的扰动，可以看成是邻近磁力管之间的交换，因而重力不稳定性又可以称为交换不稳定性。不过，交换不稳定性通常特指在非均匀磁场情况下的重力不稳定性，此时外力是非均匀磁场产生的等效力。

在第二章我们分析过，非均匀磁场对等离子体电子和离子产生的等效力为，

$$\vec{F}_e = -\frac{W_{e\perp}}{B_0} \nabla B_0 \triangleq W_{e\perp} \vec{k}_B, \quad \vec{F}_i = -\frac{W_{i\perp}}{B_0} \nabla B_0 \triangleq W_{i\perp} \vec{k}_B \quad (5-15)$$

其中, W_{\perp} 表示粒子垂直于磁场方向的动能, $\vec{k}_B \triangleq \nabla B_0 / B_0$ 表示了非均匀性的大小和梯度方向。在此力作用下, 离子与电子的相对漂移速度为,

$$\vec{u}_{i0} - \vec{u}_{e0} = -\frac{W_{i\perp} \vec{k}_B \times \vec{B}_0}{q_i B_0^2} + \frac{W_{e\perp} \vec{k}_B \times \vec{B}_0}{q_e B_0^2} = -\frac{(W_{i\perp} + W_{e\perp}) \vec{k}_B \times \vec{B}_0}{q_i B_0^2} \quad (5-16)$$

因而, 根据 (5-10) 式, 此时的不稳定性条件为,

$$\omega_{ci} k_{ny} (u_{i0x} - u_{e0x}) < 0 \quad (5-17)$$

或者,

$$k_{ny} k_{By} = \vec{k}_n \cdot \vec{k}_B > 0 \quad (5-18)$$

这表明了交换不稳定性的条件是密度梯度与磁场梯度方向一致。交换不稳定性的意义是简明的, 通过磁力管的交换, 等离子体由强磁场区域交换至弱磁场区, 那么由于等离子体中的磁能的减少, 系统将处于较低的能态, 因而这种交换可以持续进行。严格而言, 只有等离子体处于磁场的极小值处, 才不会存在交换不稳定性, 这就是所谓的最小 B 位形。

实际上, 不均匀磁场的磁力线总是弯曲的, 磁场梯度的垂直方向与磁力线曲率方向相反。我们也可以用磁力线的形状来判断交换不稳定性条件。当磁力线凸向等离子体时, 是稳定的位形; 若磁力线凹向等离子体, 则是交换不稳定的。所以, 有两个平行电流环构成的简单磁镜, 尽管可以捕获带电粒子, 但对交换模是不稳定的, 因而不能约束较高温度、密度的等离子体。

由于交换模涉及整个磁力管的交换, 如果磁力线既有凸向部分, 又有凹向部分, 则交换模稳定与否取决于两者的比例。有效的等离子体磁约束装置 (如托卡马克) 都是通过磁力线的旋转减少或消除了交换不稳定性。

§ 5.3 螺旋不稳定性

§ 5.3.1 不稳定性机制与图像

产生螺旋不稳定性的系统是具有螺旋形磁场的柱状等离子体。外加纵向 (轴向) 磁场, 同时等离子体中有纵向电流就可以形成这样的系统。托

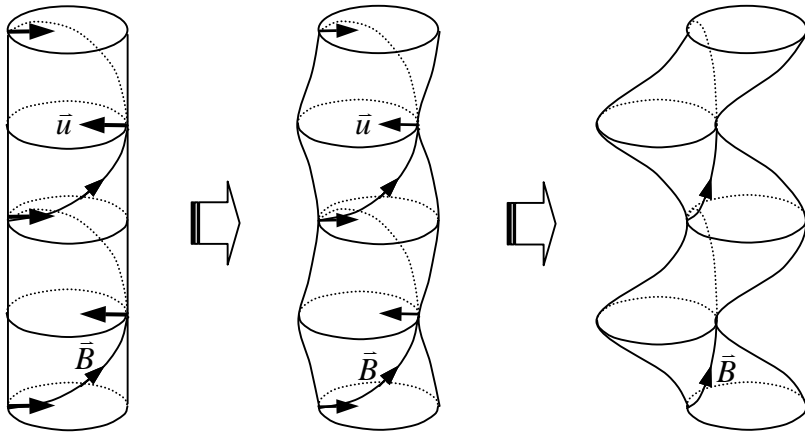


图 5.3 螺旋不稳定性发展示意图

卡马克、箍缩装置、电弧以及日地空间等离子体都具有此类位形。纵向电流产生的磁场是极向的，它与外加的纵向磁场一起，使磁力线呈螺旋形状。我们知道，磁张力总是试图使磁力线伸直，因而只要扰动能使磁力线有伸直或变短的趋势，则此种扰动就可以发展起来，成为不稳定性。由于理想等离子体的冻结效应，螺旋状磁力线的伸直必然导致等离子体本身产生螺旋形扭曲，如图 5.3 所示。显然，螺旋形不稳定性的驱动能量是磁场的能量，不稳定性发展以消耗磁场能量为代价。

§ 5.3.2 色散关系

为了突出螺旋不稳定性，我们对系统作以下假定：(1) 柱状等离子体，有明显的等离子体分界面；(2) 只有等离子体表面有面电流；(3) 等离子体不可压缩。这样，平衡时的磁场在等离子体内部只有纵向，在外部仅有纵向和极向，

$$\vec{B}_0 = \begin{cases} B_o \vec{e}_z & r \leq a \\ B_{o\theta}^{(e)} \vec{e}_\theta + B_{oz}^{(e)} \vec{e}_z & r \geq a \end{cases} \quad (5-19)$$

其中 a 为等离子体柱半径。

螺旋不稳定性是与阿尔芬波相关的 MHD 行为，实际上只需要考虑单磁流体。采用直柱坐标系，我们设等离子体位移 $\vec{\xi}$ ($\vec{u} \triangleq d\vec{\xi}/dt$) 和磁场

的扰动形式如下，

$$\bar{\xi} = \begin{cases} \bar{\xi}(r) e^{i(k_z z - m\theta - \omega t)} & r \leq a \\ 0 & r \geq a \end{cases} \quad (5-20)$$

$$\bar{B} = \begin{cases} \bar{B}(r) e^{i(k_z z - m\theta - \omega t)} & r \leq a \\ \bar{B}^{(e)}(r) e^{i(k_z z - m\theta - \omega t)} & r \geq a \end{cases} \quad (5-21)$$

这里， $\bar{B}^{(e)}$ 为等离子体外部磁场扰动幅度，与内部的幅度一般不同。注意到，我们只对极向和纵向进行了空间二维的富立叶分量展开，径向方向上没有展开，保持扰动量在径向方向的变化。

由于在等离子体边界是不连续的锐边界，我们必须分区（等离子体内部和外部）来求解，然后根据边界条件将两区域的解联接起来。在等离子体内部，应用理想磁流体的运动方程和场方程为，

$$\begin{cases} \rho \frac{d\bar{u}}{dt} = -\nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} (\bar{B} \cdot \nabla) \bar{B} \\ \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = -\nabla \times \bar{E} = \nabla \times (\bar{u} \times \bar{B}) \end{cases} \quad (5-22)$$

线性化后的方程为，

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\nabla \left(p + \frac{\bar{B}_0 \cdot \bar{B}}{\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} (\bar{B}_0 \cdot \nabla) \bar{B} \\ \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = \nabla \times (\bar{u} \times \bar{B}_0) \end{cases} \quad (5-23)$$

应用位移扰动，则场方程简化为，

$$\bar{B} = \nabla \times (\bar{\xi} \times \bar{B}_0) = -\bar{B}_0 (\nabla \cdot \bar{\xi}) + (\bar{B}_0 \cdot \nabla) \bar{\xi} = (\bar{B}_0 \cdot \nabla) \bar{\xi} = ik_z B_{0z} \bar{\xi} \quad (5-24)$$

这里应用了不可压缩扰动的假设。运动方程简化为，

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial t^2} = -\nabla \left(p + \frac{\bar{B}_0 \cdot \bar{B}}{\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} (\bar{B}_0 \cdot \nabla) \bar{B} \triangleq -\nabla \tilde{p} + \frac{1}{\mu_0} (\bar{B}_0 \cdot \nabla) \bar{B} \quad (5-25)$$

其中 $\tilde{p} \triangleq p + \bar{B}_0 \cdot \bar{B} / \mu_0$ 为总的压力扰动量。将扰动量的扰动简谐形式代入，

$$(\rho_0 \omega^2 - k_z^2 B_0^2 / \mu_0) \bar{\xi} = \nabla \tilde{p} \quad (5-26)$$

或者，

$$\bar{\xi} = \frac{\nabla \tilde{p} / \rho_0}{\omega^2 - k_z^2 B_0^2 / \mu_0 \rho_0} = \frac{\nabla \tilde{p} / \rho_0}{\omega^2 - k_z^2 V_A^2} \quad (5-27)$$

应用不可压缩条件，我们可以得到总压力扰动应满足拉普拉斯（Laplace）方程 $\nabla^2 \tilde{p} = 0$ ，其振幅的径向变化 $\tilde{p}(r)$ 满足虚宗量的贝塞尔（Bessel）方程，

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \tilde{p}) - \left(\frac{m^2}{r^2} + k_z^2 \right) \tilde{p} = 0 \quad (5-28)$$

在 $r = 0$ 处有限的解为第一类修正贝塞尔函数，

$$\tilde{p}(r) = \tilde{p}(a) I_m(k_z r) / I_m(k_z a) \quad (5-29)$$

在等离子体外部，由于有 $\nabla \times \bar{B}^{(e)} = 0$ ，故可以引入势函数 ψ ，使得 $\bar{B}^{(e)} = -\nabla \psi$ ，则 ψ 同样满足拉普拉斯方程。在 $r = \infty$ 处有限的解为第二类修正贝塞尔函数，

$$\psi(r) = \psi(a) K_m(k_z r) / K_m(k_z a) \quad (5-30)$$

将等离子体内部、外部的解联接起来，就可以获得本征模式所满足的色散关系。首先我们考虑总压强连续的条件，

$$\begin{aligned} \tilde{p}(a) &= \left[\frac{\bar{B}^{(e)} \cdot \bar{B}_0^{(e)}}{\mu_0} + \xi_r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\bar{B}_0^{(e)2}}{2\mu_0} \right) \right]_{r=a} \\ &= -i \left(k_z B_{0z}^{(e)} - \frac{m}{a} B_{0\theta}^{(e)} \right) \frac{\psi(a)}{\mu_0} - \frac{B_{0\theta}^{(e)2}}{\mu_0 a} \xi_r(a) \end{aligned} \quad (5-31)$$

其次是切向电场连续条件，等离子体内部电场为零，故有，

$$\vec{n} \times \left(\vec{E}^{(e)} + \vec{u} \times \vec{B}_0^{(e)} \right)_{r=a} = 0 \quad (5-32)$$

\vec{n} 为边界法向。可以证明，上式与下面方程一致，

$$\vec{n} \cdot \left[\nabla \times \left(\vec{E}^{(e)} + \vec{u} \times \vec{B}_0^{(e)} \right) \right]_{r=a} = 0 \quad (5-33)$$

于是切向电场连续条件又可以写成，

$$\vec{n} \cdot \left[\vec{B}^{(e)} - \nabla \times \left(\vec{\xi} \times \vec{B}_0^{(e)} \right) \right]_{r=a} = 0 \quad (5-34)$$

由于边界法向的扰动也为小量，故线性条件下，上式为，

$$\left[B_r^{(e)} - \left(\vec{B}_0^{(e)} \cdot \nabla \right) \xi_r \right]_{r=a} = \left[B_r^{(e)} - i \left(k_z B_{0z}^{(e)} - \frac{m}{r} B_{0\theta}^{(e)} \right) \xi_r \right]_{r=a} = 0 \quad (5-35)$$

最终有，

$$k_z \frac{K'_m(k_z a)}{K_m(k_z a)} \psi(a) + i \left(k_z B_{0z}^{(e)} - \frac{m}{r} B_{0\theta}^{(e)} \right) \xi_r(a) = 0 \quad (5-36)$$

又由 (5-27) 式，

$$\xi_r(a) = \frac{\partial \tilde{p} / \partial r}{\rho_0 (\omega^2 - k_z^2 V_A^2)} \bigg|_{r=a} = \frac{k_z / \rho_0}{\omega^2 - k_z^2 V_A^2} \frac{I'_m(k_z a)}{I_m(k_z a)} \tilde{p}(a) \quad (5-37)$$

由 (5-31) 及 (5-36) 及 (5-37) 三式可得螺旋不稳定性的色散方程为，

$$\omega^2 = k_z^2 V_A^2 - \frac{\left(k_z B_{0z}^{(e)} - m B_{0\theta}^{(e)} / a \right)^2}{\rho_0 \mu_0 a} \frac{I'_m(k_z a)}{I_m(k_z a)} \frac{K_m(k_z a)}{K'_m(k_z a)} - \frac{k_z B_{0\theta}^{(e)2}}{\rho_0 \mu_0 a} \frac{I'_m(k_z a)}{I_m(k_z a)} \quad (5-38)$$

§ 5.3.3 模式分析

我们从 (5-38) 可以看出，这种不稳定性实际上是对均匀、无限空间

等离子体中剪切阿尔芬波的修正，有限边界的出现改变了本征模式。由于 $I'_m/I_m > 0$ ， $K'_m/K_m < 0$ ，所以色散方程右边前两项起稳定作用，第三项是不稳定性的根源。第一项是等离子体内部磁力线弯曲而引起的恢复力，起稳定作用。第二项则是等离子体外表面磁力线弯曲所引起的恢复力，也起稳定作用。当扰动的螺距与磁力线的螺距一致，即，

$$\frac{2\pi m}{k_z} = \frac{2\pi a B_{0z}^{(e)}}{B_{0\theta}^{(e)}} \triangleq L_a \quad (5-39)$$

第二项为零，因而这种外形匹配的扰动是最容易发展不稳定性的扰动方式。下面我们根据色散关系分析几种典型的螺旋不稳定性。

(1) 箍缩放电时的腊肠型不稳定性。 $m = 0$ 的扰动称为腊肠型不稳定性，此时在极向上扰动是一致的，如图 5.4 所示。所谓箍缩放电，是指在纵向通过较大的（表面）电流，因而在等离子体外产生较强的极向磁场，这时，可以忽略等离子体外的纵向磁场，此时有，

$$\omega^2 = k_z^2 V_A^2 \left(1 - \frac{B_{0\theta}^{(e)2}}{B_0^2} \frac{I'_m(k_z a)}{k_z a I_m(k_z a)} \right) \quad (5-40)$$

而 $I'_0(x)/xI_0(x)$ 的极大值为 $1/2$ ，故当

$$2B_0^2 < B_{0\theta}^{(e)2} \quad (5-41)$$

时，腊肠型扰动是不稳定的。

(2) 扭曲型不稳定性。 $m \neq 0$ 情况下，等离子体的扰动形状呈扭曲型，故称为扭曲模。我们考虑 $m = 1$ 的模式，这种扰动是柱体截面有一个整体位移，结合纵向的变化，扰动图像是一个左右相错的扭曲（类似于新疆舞中的典型的颈部动作）。仍然忽略等离子体外的纵向磁场，

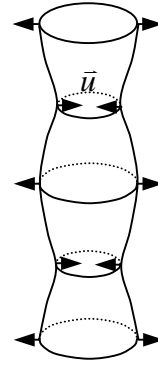


图 5.4 腊肠型扰动示意图

$$\omega^2 = k_z^2 V_A^2 \left[1 + \frac{B_{0\theta}^{(e)2}}{B_0^2} \frac{I_1'(k_z a)}{k_z a I_1(k_z a)} \frac{K_0(k_z a)}{K_1'(k_z a)} \right] \quad (5-42)$$

这里应用了 $xK_0(x) = -K_1(x) - xK_1'(x)$ 等式。对长波扰动, $k_z a \rightarrow 0$, 上式中关于 $k_z a$ 的函数有渐近值 $\ln(k_z a)$, 所以不稳定性条件为,

$$\left(B_{0\theta}^{(e)2} / B_0^2 \right) \ln(k_z a) < -1 \quad (5-43)$$

所以对长波扰动而言, 此种情况下的 $m=1$ 的扭曲模总是不稳定的。

(3) 强纵场的情况。这种情况对应托卡马克放电形式, 这时我们可以考虑长波扰动来分析最可能的不稳定性。在长波近似下, $I_m'/I_m \rightarrow m/k_z a$, $K_m'/K_m \rightarrow -m/k_z a$, 色散方程简化为,

$$\omega^2 = V_A^2 \left[k_z^2 + \frac{\left(k_z B_{0z}^{(e)} - m B_{0\theta}^{(e)} / a \right)^2}{B_0^2} - \frac{m B_{0\theta}^{(e)2}}{a^2 B_0^2} \right] \quad (5-44)$$

当

$$k_z = \frac{m}{a} \frac{B_{0z}^{(e)} B_{0\theta}^{(e)}}{B_{0z}^{(e)2} + B_0^2} \quad (5-45)$$

时, ω^2 取极小值 (注意上式在强纵场条件下与长波条件自洽),

$$\omega_{\min}^2 = \frac{V_A^2}{a^2} \frac{B_{0\theta}^{(e)2}}{B_0^2} \left[\frac{m^2 B_0^2}{B_0^2 + B_{0z}^{(e)2}} - m \right] \quad (5-46)$$

对 $m=1$, 上式总小于零, 因此总存在不稳定性。在强纵场条件下, 不稳定性条件可以简化为,

$$k_z a < \frac{a B_{0z}^{(e)} B_{0\theta}^{(e)}}{B_{0z}^{(e)2} + B_0^2} \approx \frac{B_{0\theta}^{(e)}}{B_{0z}^{(e)}} \quad (5-47)$$

对环形等离子体, 可以设 $k_z = n/R$, 其中 R 为环的半径、 n 为整数。

故对 $m = 1$ 不稳定性条件可以写成 ,

$$q \triangleq (R/a) (B_{0\theta}^{(e)} / B_{0z}^{(e)}) < 1 \quad (5-48)$$

这就是著名的克鲁斯卡 - 沙夫拉诺夫判据 , q 称为安全因子。如果边界的安全因子小于 1 , 则是不稳定的。

同样分析 , 对 $m = 2$ 模式 , 根据 (5-46) 式 , 出现不稳定性必要条件为 ,

$$B_0^2 < B_{0z}^{(e)2} \quad (5-49)$$

对 $m \geq 3$ 模式 , 不会产生不稳定性。当然 , 这个结论是考虑面电流分布而言 , 实际上 , 若电流分布是体分布 , $m \geq 3$ 模式也可以是不稳定的。

§ 5.4 束不稳定性

§ 5.4.1 色散关系

当等离子体中有束流时 , 或者更广义一些 , 等离子体中不同成分存在相对的宏观整体流体速度时 , 可以激发出一种静电不稳定性 , 不稳定性通过消耗束的定向能量而发展 , 这种不稳定性称为束不稳定性 , 或者束等离子体不稳定性。

再次应用推导漂移波时给出的流体扰动量的简正模方程 (4-141) 式 , 令外磁场为零 , 也不考虑密度梯度 , 只考虑存在流体速度 , 则此式简化为 ,

$$\begin{cases} \omega_\alpha^* \bar{u}_\alpha = v_{i\alpha}^2 \frac{n_\alpha}{n_{\alpha 0}} \bar{k} + i \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \bar{E} \\ \omega_\alpha^* n_\alpha = n_{\alpha 0} \bar{k} \cdot \bar{u}_\alpha \end{cases} \quad (5-50)$$

其中 $\omega_\alpha^* \triangleq \omega - \bar{k} \cdot \bar{u}_{\alpha 0}$, $v_{i\alpha} \triangleq (T_\alpha / m_\alpha)^{1/2}$ 为粒子热速度。对静电扰动 , $\bar{E} = -i\phi \bar{k}$, 扰动密度和电势的关系为 ,

$$n_\alpha = \frac{k^2 q_\alpha n_{\alpha 0} / m_\alpha}{\omega_\alpha^{*2} - k^2 v_{i\alpha}^2} \varphi \quad (5-51)$$

应用泊松方程，可以直接获得色散关系，

$$1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2}{(\omega - \bar{k} \cdot \bar{u}_{\alpha 0})^2 - k^2 v_{i\alpha}^2} = 0 \quad (5-52)$$

这实际上是无外磁场均匀等离子体中，有定向流速同时考虑热压力时，静电波的色散方程，其特殊情况在前面的课程中已经讨论过了。这里主要讨论引入束的定向速度后所产生的新效应。

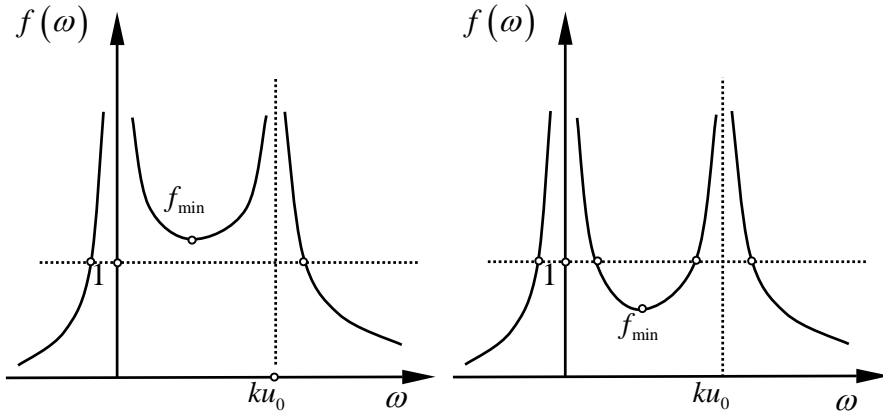


图 5.5 $f(\omega) = 1$ 解示意图，左图对应有两实数解，右图有四个。

§ 5.4.2 电子束 - 等离子体不稳定性

一种简单而常见的情况是，背景等离子体中注入一速度为 u_0 的电子束。设电子束密度 $n_{B0} = \alpha n_{e0}$ ，背景等离子体密度为 n_{e0} ，电子束及背景等离子体的温度均为零。这时我们可以将电子束视为一种新的成分。忽略离子的响应，此时的色散关系为，

$$\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} + \frac{\alpha \omega_{pe}^2}{(\omega - ku_0)^2} = 1 \quad (5-53)$$

方程有四个解，对应着 ω 的实根或共轭复根。若令上式左边为函数 $f(\omega)$ ，其解的情况如图 5.5 所示。此函数在 $0 < \omega < ku_0$ 区域有一极小值，若此极小值小于 1，则方程有四个实根，所对应的均为稳定的静电振荡；若大于 1，则有两个实根，两个共轭的复根，其中虚部为负的一支对应着增长的静电不稳定性；极小值正好为 1 时，处于临界状态，四根均为实数，其中两个为相等的重根。

因此，我们可以得到这种束等离子体系统静电不稳定性的条件，

$$f_{\min} = \frac{\omega_{pe}^2}{(ku_0)^2} (1 + \alpha^{1/3})^3 > 1 \quad (5-54)$$

或，

$$ku_0 < \omega_{pe} (1 + \alpha^{1/3})^{3/2} = \omega_{pe} \left[1 + (n_{B0}/n_{e0})^{1/3} \right]^{3/2} \quad (5-55)$$

不稳定性对抗动波长有一个下限，或者说，长波扰动有利于不稳定性的发展。

若入射电子束密度很小， $\alpha \ll 1$ ，则方程 (5-53) 可以改写成，

$$(\omega - ku_0)^2 (1 - \omega_{pe}^2/\omega^2) \approx 0 \quad (5-56)$$

故存在两个波模，

$$\begin{cases} \omega^2 = \omega_{pe}^2 \\ \omega = ku_0 \end{cases} \quad (5-57)$$

前者为大家熟知的朗缪尔振荡，后者称为束振荡，又称弹道模 (Ballistic Mode)，与漂移波类似。

严格来说，束振荡分支会出现较弱的的不稳定性，若令 $\omega = ku_0 + i\gamma$ ，代入色散方程 (5-51)，可得近似解，

$$\gamma = \pm \frac{\alpha^{1/2} \omega_{pe}}{(\omega_{pe}^2/k^2 u_0^2 - 1)^{1/2}} \approx \pm \alpha^{1/2} ku_0 \quad (5-58)$$

最后的近似是在 $ku_0 \ll \omega_{pe}$ 条件下得到的，这种条件通常可以满足。上式也自洽地表明了弱束引起的不稳定性增长率很小。

§ 5.4.3 二电子川流不稳定性

考虑两相向而动的电子束，在均匀的正离子背景中运动。这时的色散关系变成，

$$\frac{\omega_{Be}^2}{(\omega - ku_0)^2} + \frac{\omega_{Be}^2}{(\omega + ku_0)^2} = 1 \quad (5-59)$$

其中 ω_{Be} 是每束电子的等离子体频率。其解为，

$$\omega^2 = (k^2 u_0^2 - \omega_{Be}^2) \pm \omega_{Be} (\omega_{Be}^2 + 4k^2 u_0^2)^{1/2} \quad (5-60)$$

所以，不稳定性条件为，

$$k^2 u_0^2 < 2\omega_{Be}^2 \quad (5-61)$$

容易证明，当 $k^2 u_0^2 = (3/4)\omega_{Be}^2$ ，二电子川流不稳定性具有最大的增长率，

$$\gamma_{\max} = \omega_{Be}/2 \quad (5-62)$$

思考题

- 5.1 电磁辐射和粒子的相互作用可以理解成粒子吸收和发射（光子）的过程，当发射和吸收过程平衡时，是否就意味着辐射和粒子之间达到了热平衡？
- 5.2 图 5.2 中，等离子体中电流未标出，但必须有电流产生的洛伦兹力平衡压力梯度和重力，电流的方向和空间分布如何？
- 5.3 从 (5-10) 式可知， $k_x^2 (u_{i0x} - u_{e0x})^2 \approx (k_x u_{i0x})^2$ 项是起稳定作用的项，也就是说，对波长小的扰动，不会产生瑞利 - 泰勒不稳定性。结合习题 5.3，解释其物理原因。

- 5.4 若柱坐标系中空间的扰动形式为 $e^{i(k_z z - m\theta)}$, 考虑 $m = 0$ 及各整数时的扰动的几何图像。
- 5.5 图 5.3 所示的扰动模式是否满足扰动螺距与磁力线的螺距一致的条件？

练习题

- 5.1 用重力势场中处于某曲面上的小球这一系统为例，绘出此系统是线性稳定非线性也稳定、线性稳定非线性不稳定、线性不稳定非线性稳定、线性不稳定非线性也不稳定这几种情况的曲面形状。
- 5.2 在重力场中，水面表面波的色散关系为， $\omega^2 = kg \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$ ，其中 ρ_1 、 ρ_2 为水和空气的密度、 g 为重力加速度。那么，由空气支撑的水表面的重力不稳定性的增长率为何？
- 5.3 根据图 5.2 所示的瑞利 - 泰勒不稳定性机制，按照下列思路导出不稳定性的增长率（5-14）式。（1）设扰动的空间形式为方波，方波的高度为 Δy ，由于离子漂移会导致在方波阶跃处出现随时间增长的电荷积累；（2）电荷积累导致电场，设等离子体介电常数为 $\varepsilon = 1 + m_i n_i / \varepsilon_0 B^2 \approx m_i n_i / \varepsilon_0 B^2$ ；（3）电场产生漂移速度，使方波的高度为 Δy 变化，列出 Δy 的微分方程；（4）求解得出 Δy 的指数增长率。
- 5.4 试分析电子相对于离子有速度 u_0 时不稳定性条件及增长率，此种情况下不稳定性称为布内曼（Buneman）不稳定性。
- 5.5 对束流很强的离子束，自身电场会使得束流在传输的过程中发散，一个解决的方法是在束中保留适当密度的中性气体，中性气体在离子束作用下电离，电离产生的慢离子将被排斥出离子束，而电子则保留在束内起到“电中和”的作用。试求经过完全电中和的强流离子束系统的静电不稳定性条件，设离子束速度为 u_0 、密度为 n_0 。
- 5.6 证明，当 $ku_0 = (3/4)^{1/2} \omega_{Be}$ ，二电子川流不稳定性的增长率最大。

第六章 几个重要的等离子体概念

§ 6.1 库仑碰撞与特征碰撞频率

我们知道，气体、液体达到热力学平衡态的主要途径是碰撞过程。粒子间的碰撞决定了系统的弛豫过程（由速度空间的非热力学平衡态向热力学平衡态过渡）、输运过程（非均匀的局域热平衡向热平衡趋近）。

常规气体与液体中中性粒子（原子或分子）的弹性碰撞图像比较简单，很大程度上可以用刚性球碰撞来模拟，即粒子间的相互作用仅仅存在于相互接触的瞬间。在等离子体中，带电粒子间的相互作用是库仑力，由之而形成的库仑碰撞与中性粒子间的碰撞有两点重要的差别。其一，库仑碰撞是渐近式的，没有明确的相互作用起点和终点；其二，实际上的库仑碰撞是多体相互作用同时发生，每个粒子都同时与周围很多粒子发生作用碰撞。

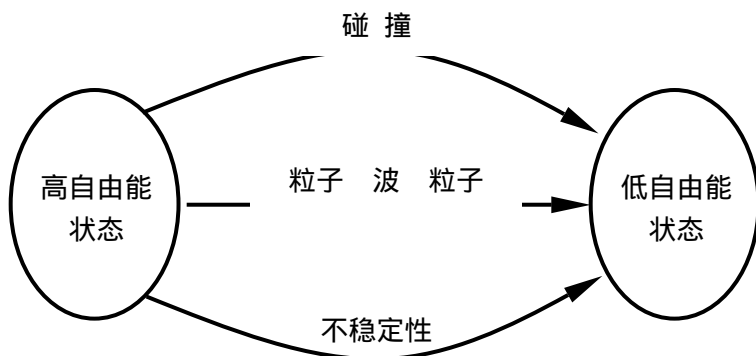


图 6.1 等离子体系统的热力学发展过程

应该指出，与气体情况不同，在等离子体中，由于存在各种波动、不稳定性现象，系统的弛豫过程与输运过程并不仅仅由碰撞过程决定。在高温等离子体中，非碰撞效应引起所谓反常输运（Anomalous Transport）完全处于支配地位。

等离子体粒子之间的库仑相互作用可以分成两部分，超过德拜长度以外的远距离作用可以用自洽场来取代，即对于某个具体粒子来说，以它为中心的德拜球之外的所有粒子对它的库仑作用表现出一个平均而且是时空

匀滑的电场，这就是等离子体的自洽场，自洽场对这个具体粒子的作用情况同外加场一样。在德拜长度以内的库仑相互作用，才表现为较为激烈的碰撞形式。由于在德拜球内，存在着大量的粒子，即，

$$N_D \triangleq n \left(\frac{4\pi}{3} \lambda_D^3 \right) \gg 1 \quad (6-1)$$

因而等离子体的碰撞本质上是多体的碰撞。然而，满足上面条件的等离子体实际上是比较稀疏的，如果用两个电子的朗道（Landau）长度，即两个相对能量为 E_c 的电子所能接近的最短距离，

$$\rho_L \triangleq \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 E_c} \quad (6-2)$$

表示库仑相互作用的特征长度，那么可以容易证明，（6-1）式同时表明了这一特征长度远小于粒子间的平均间距¹。这样实质上的多体碰撞问题可以用一系列的两体碰撞来等价，即在每一个时刻，粒子的主要碰撞对象只是最近的一个粒子。因而我们可以基于两体碰撞过程来考虑等离子体中粒子的碰撞。

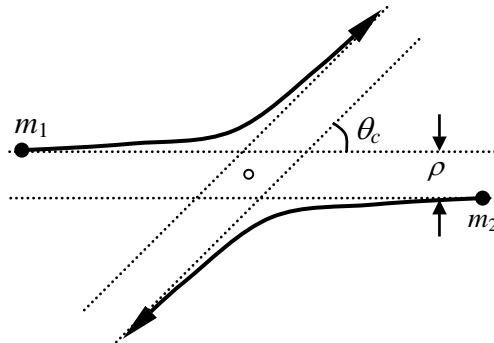


图 6.2 质心系中库仑碰撞几何

§ 6.1.1 两体的库仑碰撞

两带电粒子间的库仑碰撞可以用卢瑟福（Rutherford）散射模型来考虑，碰撞几何如图 6.2 所示。粒子在质心系的散射偏转角 θ_c 与瞄准距离（也称为碰撞参数） ρ 之间的关系为，

$$\cot(\theta_c/2) = \frac{8\pi\epsilon_0 E_c}{q_1 q_2} \rho \quad (6-3)$$

¹ 设粒子之间的平均相对能量为 T 。

其中 E_c 为质心系两粒子的动能， q_1 、 q_2 为两粒子的电荷。

根据散射的偏转角的大小，我们可以将碰撞分成两类，有明显偏转的散射（ $\theta_c \geq \pi/2$ ）称为近碰撞，也称大角度散射。反之，偏转角 $\theta_c < \pi/2$ 的偏转称为远碰撞，也称为小角度散射。近碰撞对应的最小瞄准距离为，

$$\rho_{\min} = \frac{q_1 q_2}{8\pi\epsilon_0 E_c} = \rho_L/2 \quad (6-4)$$

瞄准距离在 ρ_{\min} 之内的碰撞都是近碰撞，因而可以认为库仑近碰撞的截面为，

$$\sigma_N = \pi\rho_{\min}^2 = \frac{1}{64\pi} \left(\frac{q_1 q_2}{\epsilon_0 E_c} \right)^2 \quad (6-5)$$

远碰撞最大的瞄准距离可以设成德拜长度，相应的截面约为，

$$\pi(\rho_{\max}^2 - \rho_{\min}^2) \approx \pi\lambda_D^2 \quad (6-6)$$

这一截面的数值很大，但从碰撞的效果来看，小角度散射与大角度散射所产生的偏转相差很多。即使都是小角度散射，不同的瞄准距离，其碰撞偏转效果也不同。因而应该按照碰撞的效果将远碰撞过程进行折合，多次的小角度散射可以累积成一次大的偏转。如果以平均经历 N 次小角度散射后偏转角积累成 $\pi/2$ ，则认为完成了一次等效碰撞，这样库仑远碰撞的碰撞截面可以写成，

$$\sigma_F = \pi\rho_{\max}^2 / N \quad (6-7)$$

由于远碰撞绝大多数都是偏转角很小的过程，同时偏转的方向可正可负，这种偏转角度积累的过程是可以用一维随机行走模型来描述，其步长为，

$$\begin{aligned}
\bar{\theta}_c &= \left(\frac{1}{\pi \rho_{\max}^2} \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \theta_c^2 \cdot 2\pi \rho d\rho \right)^{1/2} \approx \left(\frac{1}{\pi \rho_{\max}^2} \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \left(\frac{q_1 q_2}{4\pi \varepsilon_0 E_c} \right)^2 \frac{2\pi}{\rho} d\rho \right)^{1/2} \\
&= \frac{\sqrt{2} q_1 q_2}{4\pi \varepsilon_0 E_c \rho_{\max}} \left(\ln \frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}} \right)^{1/2}
\end{aligned} \tag{6-8}$$

按一维的随机行走过程，积累的次数为¹，

$$N = \left(\frac{\pi}{2/\bar{\theta}_c} \right)^2 \tag{6-9}$$

于是远碰撞的等效截面为，

$$\sigma_F = \frac{8}{\pi} \left(\frac{q_1 q_2}{4\pi \varepsilon_0 E_c} \right)^2 \ln \frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}} = \left(\frac{32}{\pi^2} \ln \frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}} \right) \sigma_N \tag{6-10}$$

一般来说，远碰撞的等效截面远大于近碰撞截面，约相差两个量级，因而等离子体中所发生的碰撞主要是粒子小角度散射所形成的远碰撞，也就是说，带电粒子之间相互接近至朗道长度量级距离的机会是很少的。

§ 6.1.2 库仑碰撞频率

我们知道两体参与的任何过程的反应截面和反应速率之间的关系为，

$$\nu = n \langle \sigma v \rangle \tag{6-11}$$

这里的平均是对相对速度进行平均。对于碰撞过程，反应速率就是碰撞频率。由于库仑碰撞截面与粒子间相对速度有关，等离子体中的碰撞截面应该对速度分布进行平均，精确的计算比较繁复，这里我们只进行简单的估算。我们直接将热速度作为平均速度代入，可以得到不同粒子之间的碰撞频率。电子与电子之间的碰撞频率为，

$$\nu_{ee} = \frac{8}{\pi} \left(\frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0} \right)^2 \left(\frac{n}{m_e^{1/2} T_e^{3/2}} \right) \ln \Lambda \tag{6-12}$$

¹一维随机行走过程，若步长为 Δx ，则经过 N 步后，平均行进的距离为 $\sqrt{N} \Delta x$ 。

离子与离子之间的碰撞频率为，

$$\nu_{ii} = \frac{8}{\pi} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{n}{m_i^{1/2} T_i^{3/2}} \right) \ln \Lambda \quad (6-13)$$

由于相对速度主要取决于电子，故电子与离子之间的碰撞频率与电子与电子的碰撞频率相当， $\nu_{ei} \approx \nu_{ee}$ 。

由于推算过程的近似，这里所得出的碰撞频率与严格按分布函数计算出的结果有一个量级为 1 的系数差别。事实上，由于库仑碰撞的计算过程尚有一定的基础性问题没有完全解决，因而对碰撞频率的实际应用时并不在意其精确值，但所给出的定性关系是十分重要的。

首先，碰撞频率与温度的 3/2 次幂成反比，这是库仑碰撞的重要特点，与中性粒子之间的碰撞对温度的依赖完全不同。温度越高，库仑碰撞的频率越小，甚至在磁约束聚变等离子体中可以认为是无碰撞的。

其次，我们应该注意到，到目前为止，我们所说的碰撞频率实际上应称为动量碰撞频率，因为我们所考察的碰撞效果是碰撞后粒子产生大角度的偏转，碰撞前后的两个粒子的动量均有明显的改变，产生了明显的动量转移。由上面结果可知，几个动量碰撞频率的大小关系为，

$$\nu_{ii} \approx (m_e/m_i)^{1/2} \nu_{ee} \ll \nu_{ee} \sim \nu_{ei} \quad (6-14)$$

但是，如果我们考察能量的转移情况，则与动量过程有所区别。很容易证明，同类粒子之间若产生一次大角度散射，则粒子间的能量也进行了充分的交换，因而动量碰撞频率就是能量碰撞频率。但质量差别很大的电子和离子之间，能量交换就比较困难，一次动量碰撞所能交换的能量份额约为 m_e/m_i 。电子与离子的能量碰撞频率比其动量碰撞频率要小 m_e/m_i 因子。因此，我们可以比较几种能量碰撞频率的大小，

$$\nu_{ei}^E \approx (m_e/m_i) \nu_{ee} \ll \nu_{ii}^E \approx (m_e/m_i)^{1/2} \nu_{ee} \ll \nu_{ee}^E \approx \nu_{ee} \quad (6-15)$$

最后，我们来考察一下 (6-12) 式中的对数，这是计算库仑碰撞截面中所出现的，称为库仑对数，它是小角度散射时，瞄准距离上下截断值之比的对数，

$$\ln \Lambda \triangleq \ln \frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}} \approx \ln \frac{\lambda_D}{\rho_L} = \ln(4\pi n \lambda_D^3) = \ln(3N_D) \quad (6-16)$$

由于这是一个对数值，所以在相当大的等离子体参数范围内，库仑对数变化不大，其数值范围通常可以取为， $\ln \Lambda = 10 - 20$ 。

由于电子与离子的碰撞，在外电场中表现为电阻率，称为斯比泽（Spitzer）电阻率，电阻率与碰撞频率的关系为，

$$\eta = \frac{m_e v_{ei}}{n_e e^2} = \frac{v_{ei}}{\varepsilon_0 \omega_{pe}^2} \quad (6-17)$$

§ 6.2 等离子体中的扩散与双极扩散

§ 6.2.1 无磁场时扩散参量

若等离子体任一成份存在着密度梯度，则通过碰撞，该成份粒子会产生由高密度向低密度的扩散运动。如果同时存在电场，带电粒子在电场的作用下，还会产生迁移。扩散和迁移运动是流体的整体行为，我们可以通过流体动力方程来考察，

$$m_\alpha n_\alpha \frac{d\bar{u}_\alpha}{dt} = -\nabla p_\alpha + n_\alpha q_\alpha \bar{E} - m_\alpha n_\alpha \nu_\alpha \bar{u}_\alpha \quad (6-18)$$

注意到，碰撞效应写成了 $-m_\alpha n_\alpha \nu_\alpha \bar{u}_\alpha$ 的形式，其意义是单位时间、单位体积中该成份流体动量的改变量，即一次碰撞就使该流体元的流体速度消失，碰撞频率的大小就是粒子的动量碰撞频率。由于动量守恒，同类粒子之间的碰撞不改变该流体成份的动量，所以这里的频率是异类粒子之间的碰撞频率。若为极弱电离的等离子体，带电粒子与中性粒子碰撞占主要作用， $\nu_\alpha = \nu_{\alpha 0}$ ，若是较高电离度的等离子体，则 $\nu_\alpha = \nu_{ei}$ 。

考虑稳定状态， $\partial/\partial t = 0$ ，且速度空间梯度不大， $(\bar{u}_\alpha \cdot \nabla) \bar{u}_\alpha \approx 0$ ，则有，

$$\bar{u}_\alpha = \frac{q_\alpha}{m_\alpha \nu_\alpha} \bar{E} - \frac{T_\alpha}{m_\alpha n_\alpha \nu_\alpha} \nabla n_\alpha \triangleq \mu_\alpha \bar{E} - D_\alpha \frac{\nabla n_\alpha}{n_\alpha} \quad (6-19)$$

这里假设了扩散过程中温度不变。 μ_α 、 D_α 分别称为迁移率和扩散系数，它们之间满足所谓的爱因斯坦（Einstein）关系，

$$\mu_\alpha = (q_\alpha / T_\alpha) D_\alpha \quad (6-20)$$

于是，由迁移和扩散引起的粒子通量流为，

$$\bar{\Gamma}_\alpha = \frac{q_\alpha n_\alpha}{m_\alpha v_\alpha} \bar{E} - \frac{T_\alpha}{m_\alpha v_\alpha} \nabla n_\alpha \triangleq \mu_\alpha n_\alpha \bar{E} - D_\alpha \nabla n_\alpha \quad (6-21)$$

§ 6.2.2 双极扩散

若电子与离子的扩散粒子流不相等，则在等离子体中会积累电荷，电荷所产生的电场将会调整粒子流，使等离子体中仍然保持电中性。等离子体中这种通过自生电场自洽调节的扩散过程，称为双极扩散。由于扩散流的差异在等离子体内部所产生的电场称为双极电场。

根据连续性方程，我们有，

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_i - n_e) + \nabla \cdot (\bar{\Gamma}_i - \bar{\Gamma}_e) = 0 \quad (6-22)$$

考察无电荷积累的稳定情况，可以得到等离子体中双极扩散条件，

$$\nabla \cdot (\Gamma_i - \Gamma_e) = 0 \quad (6-23)$$

在非磁化等离子体情况下，双极扩散过程大多可以用一维模型，这样，双极扩散条件简化为¹，

$$\bar{\Gamma}_i = \bar{\Gamma}_e = \bar{\Gamma} \quad (6-24)$$

代入通量流的表达式，可以得到双极电场，

$$\bar{E} = \frac{D_i \nabla n_i - D_e \nabla n_e}{n_i \mu_i - n_e \mu_e} = \frac{D_i - D_e}{\mu_i - \mu_e} \frac{\nabla n}{n} \quad (6-25)$$

上面应用了准中性条件。于是，经过自身电场修正的电子或离子的通量流为，

$$\bar{\Gamma} = \mu_i \frac{D_i - D_e}{\mu_i - \mu_e} \nabla n - D_i \nabla n = \frac{\mu_e D_i - \mu_i D_e}{\mu_i - \mu_e} \nabla n \triangleq -D_a \nabla n \quad (6-26)$$

其中，

¹ 数学上，在一维情况下，电子和离子流可以相差一个空间不变的常数，但如果从整体考虑，扩散是由等离子体内部向外部，且没有其它的驱动源，则此常数必须为零。

$$D_a \triangleq \frac{\mu_i D_e - \mu_e D_i}{\mu_i - \mu_e} \quad (6-27)$$

称为双极扩散系数。

由于质量小，电子的迁移率远大于离子迁移率，双极扩散系数为，

$$D_a = D_i - \frac{\mu_i}{\mu_e} D_e = D_i + \frac{m_e}{m_i} D_e = D_i \left(1 + \frac{T_e}{T_i} \right) \quad (6-28)$$

所以，双极扩散系数介于两种粒子扩散系数之间。其物理原因是两种成分不能分离，因而扩散快的成分将对扩散慢的成份产生拖拽力，使之扩散加快。对具有相同温度的电子和离子系统，双极扩散系数是离子扩散系数的两倍。

§ 6.2.3 有磁场时的扩散系数

在有磁场的情况下，等离子体扩散过程是各向异性的。粒子沿磁场方向的扩散同无磁场时是相同的。在垂直于磁场方向上，粒子的主体运动是回旋运动，由于碰撞使回旋运动中断，重新开始的回旋运动将具有新的回旋中心，因而粒子得以在垂直方向上进行扩散，如图 6.3 所示。

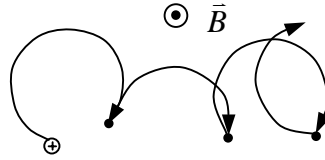


图 6.3 碰撞引起横越磁场的扩散

在垂直于磁场方向，流体运动方程的稳态形式为，

$$-T_\alpha \nabla_\perp n_\alpha + n_\alpha q_\alpha (\bar{E}_\perp + \bar{u}_{\alpha\perp} \times \bar{B}) - m_\alpha n_\alpha v_{\alpha\perp} \bar{u}_{\alpha\perp} = 0 \quad (6-29)$$

解出速度，

$$\bar{u}_{\alpha\perp} = \begin{pmatrix} \frac{v_{\alpha\perp}^2}{\omega_{c\alpha}^2 + v_{\alpha\perp}^2} & \frac{\omega_{c\alpha}^2}{\omega_{c\alpha}^2 + v_{\alpha\perp}^2} \\ -\frac{\omega_{c\alpha}^2}{\omega_{c\alpha}^2 + v_{\alpha\perp}^2} & \frac{v_{\alpha\perp}^2}{\omega_{c\alpha}^2 + v_{\alpha\perp}^2} \end{pmatrix} \left(\mu_{\alpha\perp 0} \bar{E}_\perp - D_{\alpha\perp 0} \frac{\nabla_\perp n_\alpha}{n_\alpha} \right) \quad (6-30)$$

其中，

$$\mu_{\alpha\perp} \triangleq \frac{q_\alpha}{m_\alpha v_{\alpha\perp}}, \quad D_{\alpha\perp} \triangleq \frac{T_\alpha}{m_\alpha n_\alpha v_{\alpha\perp}} \quad (6-31)$$

方程(6-30)中, 张量中的对角项与后面矢量相乘给出垂直方向的迁移速度和扩散速度, 而非对角项(另一对角项)给出了修正的电漂移和逆磁漂移速度,

$$\bar{u}_{\alpha\perp} = \mu_{\alpha\perp} \bar{E}_\perp - D_{\alpha\perp} \frac{\nabla_\perp n_\alpha}{n_\alpha} + \frac{\omega_{c\alpha}^2}{\omega_{c\alpha}^2 + v_{\alpha\perp}^2} (\bar{v}_{DE} + \bar{v}_{DP}) \quad (6-32)$$

其中,

$$\mu_{\alpha\perp} \triangleq \frac{\mu_{\alpha\perp 0}}{1 + \omega_{c\alpha}^2 / v_{\alpha\perp}^2}, \quad D_{\alpha\perp} \triangleq \frac{D_{\alpha\perp 0}}{1 + \omega_{c\alpha}^2 / v_{\alpha\perp}^2} \quad (6-33)$$

在考虑碰撞的情况下, 流体一般存在着两种垂直于磁场方向的运动。其一为通常的漂移运动, 方向垂直于驱动电场或密度梯度, 漂移运动由于碰撞而有所减慢; 其二为平行于驱动电场或密度梯度的迁移和扩散运动, 比无磁场时减小了 $1 + \omega_{c\alpha}^2 / v_{\alpha\perp}^2$ 倍。

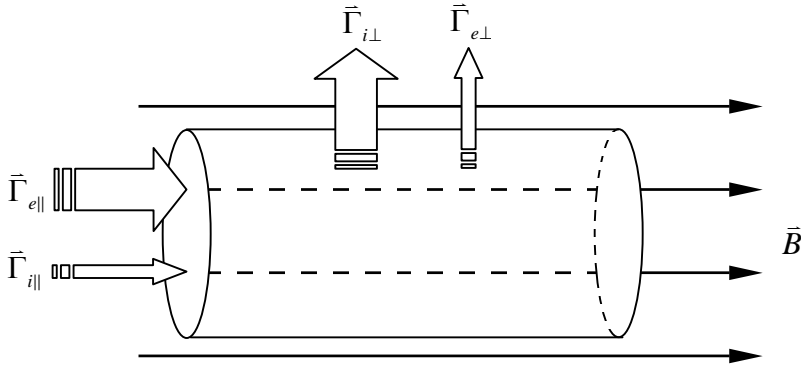


图 6.4 有磁场时等离子体扩散流的平衡

如同我们所预料的, 当碰撞频率远大于回旋频率时, 磁场的一切效应都可以忽略, 反之, 磁场使得流体运动变得比较丰富。在强磁场近似下, 扩散系数可以近似为,

$$D_{\alpha\perp} \approx \frac{T_\alpha}{m_\alpha v_{\alpha\perp}} \frac{v_{\alpha\perp}^2}{\omega_{c\alpha}^2} = \frac{T_\alpha v_{\alpha\perp}}{m_\alpha \omega_{c\alpha}^2} = v_{\alpha\perp} r_L^2 \quad (6-34)$$

扩散系数这种形式，表明了垂直于磁场的扩散过程可视为步长为拉莫半径的扩散过程。由于离子的拉莫半径远大于电子，因而离子的垂直磁场的扩散系数远大于电子。这一点与普通的扩散过程不同，普通的扩散过程的步长是平均自由程，由于电子的速度快，电子扩散远大于离子。

§ 6.2.4 有磁场时的双极扩散

等离子体中真实的扩散总是双极的，电子和离子的流动必须满足准中性条件。在有磁场的情况下，双极扩散变得复杂起来，与实际的情况相关。双极扩散的条件仍为（6-23）式，但由于磁场的垂直方向与水平方向必须耦合起来一起考虑，因而一般并无简洁的答案。

一般而言，在垂直方向上由于电子和离子流的不平衡，离子流大于电子流，会产生空间电荷积累，这可以通过平行方向的粒子流，主要是电子流进行中和。具体图像如图 6.4 所示。

§ 6.3 等离子体鞘层

§ 6.3.1 鞘层的概念及必然性

等离子体中明显呈电荷非中性的区域，称为等离子体鞘层。鞘层的内部存在较强的电场，其线度在德拜长度量级。在等离子体与固体各种接触面上通常存在着鞘层，在等离子体内部密度或温度的剧烈变化的地方，也可以存在鞘层。

对于悬浮在等离子体中的金属电极（器壁）或绝缘体，由于电子运动

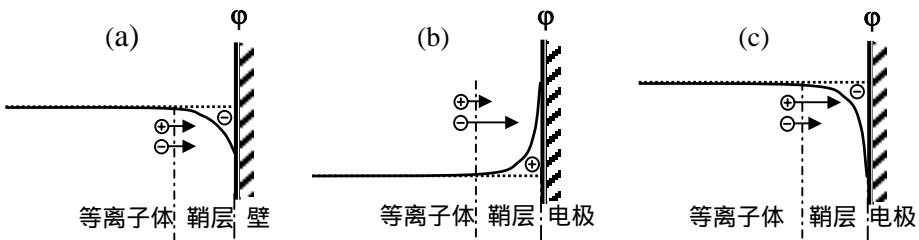


图 6.5 等离子体鞘层及鞘层处电势分布

速度一般大于离子速度，电子流较大，电子将在器壁积累形成电场，这个电场使得进入鞘层的电子流减小而离子流增大，最终两者相等。因而，简单情况下的等离子体相对与绝缘的器壁的电势要高约几倍的 T_e/e 值，如图 6.5 (a) 所示。在电极有电流的情况下，电极相对等离子体的电位可正可负。一般来说，当流向电极的电子流较大时，电极相对等离子体电势为正值，如图 6.5 (b) 所示；当流向电极的离子流较大时，电极相对等离子体电势为负值，如图 6.5 (c)。

§ 6.3.2 稳定鞘层判据

让我们考察一维鞘层的电势分布，参考图 6.5 (c)，X 轴方向由等离子体指向器壁。不考虑离子的温度，设离子在进入鞘层之前具有定向速度 u_0 ，则由能量守恒关系，鞘层中离子的速度为，

$$u(x) = \left(u_0^2 - 2e\phi/m_i\right)^{1/2} \quad (6-35)$$

密度的空间分布直接由离子的连续性方程给出，

$$n_i(x) = n_0 \frac{u_0}{u_i(x)} = n_0 \left(1 - \frac{2e\phi(x)}{m_i u_0^2}\right)^{-1/2} \quad (6-36)$$

这里 n_0 是鞘层外等离子体的密度。电子满足玻尔兹曼分布，

$$n_e(x) = n_0 \exp(e\phi/T_e) \quad (6-37)$$

应用泊松方程，我们就可以得到鞘层中电势所满足的方程，

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{e}{\epsilon_0} (n_e - n_i) = \frac{n_0 e}{\epsilon_0} \left[\exp\left(\frac{e\phi}{T_e}\right) - \left(1 - \frac{2e\phi}{m_i u_0^2}\right)^{-1/2} \right] \quad (6-38)$$

由于方程不显含 x ，将两边同乘 $d\phi/dx$ 后进行积分，

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 = \frac{2n_0 T_e}{\epsilon_0} \left[\exp\left(\frac{e\phi}{T_e}\right) - 1 \right] + \frac{2n_0 m_i u_0^2}{\epsilon_0} \left[\left(1 - \frac{2e\phi}{m_i u_0^2}\right)^{1/2} - 1 \right] \quad (6-39)$$

这里应用了在 $x = 0$ 的鞘层边界处电势、电场强度均为零的条件。

一般情况下，此方程难于再次积分，只能依赖于数值求解。但如果我

们考察电势绝对值较小的区域，可以将右边进行展开，保留至平方项，有，

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 \approx \frac{n_0 T_e}{\varepsilon_0} \left(\frac{e\varphi}{T_e}\right)^2 - \frac{n_0 m_i u_0^2}{4\varepsilon_0} \left(\frac{2e\varphi}{m_i u_0^2}\right)^2 = \left(1 - \frac{C_s^2}{u_0^2}\right) \left(\frac{\varphi}{\lambda_D}\right)^2 \quad (6-40)$$

很明显，上方程有解的条件要求，

$$M \triangleq u_0 / C_s > 1 \quad (6-41)$$

这里 M 是流体的定向速度与离子声速之比，称为马赫（March）数。这个条件是稳定鞘层存在的必要条件，称为玻姆（Bohm）鞘层判据。

稳定鞘层存在要求离子进入鞘层时速度大于离子声速。通常这种定向的速度不是由外界施加的，而是等离子体内部电场空间分布自洽的调整结果。也就是说，自鞘边界向等离子体内部延伸，有一个电场强度较弱的称之为预鞘的区域，在预鞘区，离子得到缓慢加速直至离子声速。实际上，鞘层和预鞘并没有严格的区别，通常将离子达到离子声速的位置确定为鞘层的边缘，同时认为在预鞘区，准中性条件仍然满足。

§ 6.3.3 查尔德 - 朗缪尔定律

若电极（器壁）相对于等离子体的电势足够负，那么在电极附近，实际上已经不存在电子，电荷仅由离子来提供。这种情况下方程（6-38）简化成，

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} \approx -\frac{n_0 e}{\varepsilon_0} \left(1 - \frac{2e\varphi}{m_i u_0^2}\right)^{-1/2} \approx -\frac{n_0 e}{\varepsilon_0} \left(-\frac{m_i u_0^2}{2e\varphi}\right)^{1/2} \quad (6-42)$$

同样将两边乘 $d\varphi/dx$ 后进行积分，忽略电势为零处的电场，则有，

$$\frac{d\varphi}{dx} = \left(-\frac{8em_i n_0^2 u_0^2}{\varepsilon_0^2} \varphi\right)^{1/4} \quad (6-43)$$

再次积分，选择坐标原点，使 $x=0$ 处电势为零¹，于是有，

¹ 此时的坐标原点已经与前面的不同，实际上此方程仅在电势较大时是泊松方程的近似。

$$\varphi = - \left(\frac{81}{32} \frac{em_i n_0^2 u_0^2}{\varepsilon_0^2} x^4 \right)^{1/3} \triangleq - \left(\frac{81}{32} \frac{m_i J^2}{e \varepsilon_0^2} x^4 \right)^{1/3} \quad (6-44)$$

这里 $J \triangleq en_0 u_0$ 是流向电极的电流密度。上式可以写成一个常见的形式，

$$J = \left(\frac{32}{81} \frac{e \varepsilon_0^2}{m_i} \right)^{1/2} \frac{|V|^{3/2}}{d^2} \quad (6-45)$$

这里， V 为电极处电势， d 为电极位置。这就是查尔德 - 朗缪尔 (Child-Langmuir) 定律，在电子管年代，这时很著名的定律，它描述了平面真空二极管中由于空间电荷效应所限制的发射电流密度的规律。在等离子体鞘层中，若只有单一种类粒子存在，其规律应该是一致的，但具体情况有所不同。在平面二极管中，电极间距 d 是确定的，电极间电压增大，电流则按电压 $3/2$ 次幂正比增大。而在等离子体中，电流密度由等离子体内部参数决定，并不随电极的电势所变化，这时等离子体则是通过自洽地调节 d 来满足查尔德 - 朗缪尔定律，电势差越大，这一部分的鞘层越厚。

§ 6.4 朗道阻尼

§ 6.4.1 伏拉索夫方程

描述等离子体系统“精确”理论是动力学 (Kinetic) 理论与适当的电磁理论相结合。动力学理论包含了粒子在相空间 (速度与位形空间) 运动在统计意义上的所有信息，目前我们所接触的流体理论实际上是动力学理论对粒子速度分布作某种平均后的结果。流体理论对速度分布的具体形式不敏感，所以原则上不能处理与速度分布密切相关的物理问题¹。这一节我们结合等离子体中最基本的波 - 粒子相互作用现象，朗道 (Landau) 阻尼来简略地介绍动力学理论。

由统计物理课程可知，粒子体系每个粒子状态对应着相空间的一个点，系统中粒子的运动可以用这些代表点的运动来描述。相空间这些代表点的密度就是所谓的粒子分布函数 $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ ，它满足下面的玻尔兹曼方程，

¹ 某些与速度分布相关的问题流体理论也可以处理，如上一章中的束不稳定性问题，将电子视为两种流体来处理其电子速度分布严重偏离麦克斯韦分布有束状态。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c \quad (6-46)$$

其中, \vec{F} 为作用在粒子上的力, $\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c$ 是由于碰撞引起的分布函数变化。这就是动力学理论的基本运动方程。与流体的运流微商的概念一样, 上式可以写为下面的形式,

$$\frac{df}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c \quad (6-47)$$

即在随粒子运动的相空间中, 若不考虑碰撞, 其密度不变。

对于温度足够高的等离子体中, 我们忽略碰撞, 同时只考虑电磁力的作用, 动力论方程简化为伏拉索夫 (Vlasov) 方程,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{q}{m} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (6-48)$$

§ 6.4.2 朗缪尔波和朗道阻尼

作为伏拉索夫方程应用的实例, 我们用动力论方法重新推导朗缪尔波的色散关系。我们知道, 朗缪尔波是静电模式, 只需考虑电子成份, 离子可视为不动的背景。这样, 伏拉索夫方程和泊松方程就构成了完备的方程组,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{q}{m} \vec{E} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{E} = -\frac{e}{\epsilon_0} \iiint f d^3 \vec{v} \end{cases} \quad (6-49)$$

应用准中性假设不考虑零阶电场, 将此方程进行线性化,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{q}{m} \vec{E} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{E} = -\frac{e}{\epsilon_0} \iiint f d^3 \vec{v} \end{cases} \quad (6-50)$$

再进行富里叶变换, 选波矢方向为 X 轴方向, 有,

$$\begin{cases} f = i \frac{eE_x}{m_e} \frac{\partial f_0 / \partial v_x}{\omega - k_x v_x} \\ E_x = i \frac{e}{\epsilon_0 k_x} \iiint f d^3 \bar{v} \end{cases} \quad (6-51)$$

于是，我们得到静电波的色散方程，

$$\frac{\omega_{pe}^2}{k_x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \tilde{f}_0 / \partial v_x}{v_x - \omega/k_x} dv_x = 1 \quad (6-52)$$

其中，

$$\tilde{f}_0 \triangleq \frac{1}{n_{e0}} \iint f_0 dv_y dv_z \quad (6-53)$$

为一维的归一化分布函数， n_{e0} 为电子密度。

色散方程的积分在 $v_x = \omega/k_x$ 处有奇点，不能直接计算。正确处理这一带有奇点的积分导致出朗道阻尼这一无碰撞、非耗散性阻尼的重要现象。

伏拉索夫曾考虑用主值意义上的积分，即，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \tilde{f}_0 / \partial v_x}{v_x - \omega/k_x} dv_x = \mathbb{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \tilde{f}_0 / \partial v_x}{v_x - \omega/k_x} dv_x \triangleq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\left(\int_{-\infty}^{\omega/k_x - \varepsilon} + \int_{\omega/k_x + \varepsilon}^{\infty} \right) \frac{\partial \tilde{f}_0 / \partial v_x}{v_x - \omega/k_x} dv_x \right] \quad (6-54)$$

但并无充分证据说明其合理性。

朗道认为，对一个实际的扰动，其正确的处理方式是考虑在初始时刻给定扰动后系统的演化。应该采用与初始扰动有关的拉普拉斯（Laplace）变换，而非富里叶变换。若应用拉普拉斯变换，可以发

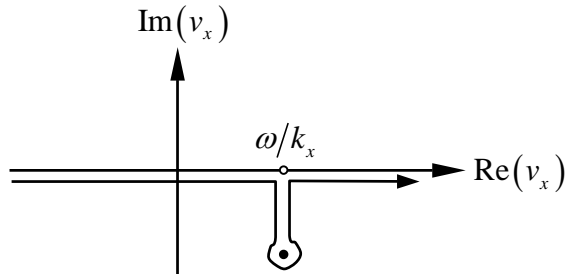


图 6.6 朗道路径

现，若将富里叶变换给出的色散关系中的频率理解成复数，积分在复平面上进行，同时积分路径包含低于奇点处通过的沿实轴的曲线，则结果是一致的，如图 6.6 所示。这一积分路径称为朗道路径。

这样，若考虑弱阻尼的情况，

$$|\operatorname{Re}(\omega)| \gg |\operatorname{Im}(\omega)| \quad (6-55)$$

则色散方程可以写成，

$$1 = \frac{\omega_{pe}^2}{k_x^2} \left[\mathbb{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \tilde{f}_0 / \partial v_x}{v_x - \omega/k_x} dv_x + i\pi \frac{\partial \tilde{f}_0}{\partial v_x} \Big|_{v_x = \omega/k_x} \right] \quad (6-56)$$

主值部分可以用分部积分，

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \tilde{f}_0 / \partial v_x}{v_x - \omega/k_x} dv_x &= \frac{\partial \tilde{f}_0 / \partial v_x}{v_x - \omega/k_x} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}_0}{(v_x - \omega/k_x)^2} dv_x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}_0}{(v_x - \omega/k_x)^2} dv_x = \left\langle (v_x - \omega/k_x)^{-2} \right\rangle \end{aligned} \quad (6-57)$$

若波的相速度足够大，上式积分内函数可以按 $k_x v_x / \omega$ 进行小量展开，保留到二次项，有

$$\left\langle (v_x - \omega/k_x)^{-2} \right\rangle \approx \frac{k_x^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{3k_x^2 \langle v_x^2 \rangle}{\omega^2} \right) = \frac{k_x^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{3k_x^2 T_e}{\omega^2 m_e} \right) \quad (6-58)$$

于是，色散关系的实部为，

$$1 = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{3k_x^2 T_e}{\omega^2 m_e} \right) \approx \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{3k_x^2 T_e}{\omega_{pe}^2 m_e} \right) \quad (6-59)$$

与流体的结果一致。

对虚部，若认为修正量小，对实部贡献可忽略，同时系数中的频率用等离子体频率替代，结果可以得出，

$$\omega = \omega_{pe} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{k_x^2 T_e}{\omega_{pe}^2 m_e} + i \frac{\pi}{2} \frac{\omega_{pe}^2}{k_x^2} \frac{\partial \tilde{f}_0}{\partial v_x} \Big|_{v_x = \operatorname{Re}(\omega)/k_x} \right) \quad (6-60)$$

对麦克斯韦分布，

$$\frac{\partial \tilde{f}_0}{\partial v_x} = - \left(\frac{m_e}{T_e} \right)^{3/2} \frac{v_x}{(2\pi)^{1/2}} \exp \left(- \frac{m_e v_x^2}{2T_e} \right) \quad (6-61)$$

于是，我们得到频率的虚部，

$$\gamma = - \left(\frac{\pi}{8} \right)^{1/2} \frac{\omega_{pe}}{k_x^3 \lambda_{De}^3} \exp \left(- \frac{1}{k_x^2 \lambda_{De}^2} - \frac{3}{2} \right) \approx -0.14 \frac{\omega_{pe}}{k_x^3 \lambda_{De}^3} \exp \left(- \frac{1}{k_x^2 \lambda_{De}^2} \right) \quad (6-62)$$

由于 $\gamma < 0$ ，因而是一种阻尼效应，这种无碰撞阻尼称为朗道阻尼。若 $k_x \lambda_{De} \ll 1$ 时，朗道阻尼较弱，但若 $k_x \lambda_{De} \sim 1$ ，即热速度与相速度相当时，则会出现明显的朗道阻尼。

§ 6.4.3 朗道阻尼的物理解释

现在我们从物理上分析一下朗道阻尼的机理。从阻尼率的表达式，

$$\gamma \propto \left. \frac{\partial \tilde{f}_0}{\partial v_x} \right|_{v_x = \omega/k_x} \quad (6-63)$$

可知，阻尼实际上只与速度 $v_x = \omega/k_x$ 的粒子有关，这些与波相速度相近的粒子称为共振粒子。因此我们可以认为，朗道阻尼是共振粒子与波相互作用的结果。

当分布函数在波相速度处具有负斜率，比如麦克斯韦分布时，频率的虚部为负值，对应着朗道阻尼。但是，若分布函数在波相速度处具有正斜率，则频率的虚部应为正值，这实际上对应着不稳定性，称为朗道增长。由于束的存在，电子的分布函数会出现如图 6.7 所示的双峰结构，出现了正斜率区，因而会出现不稳定

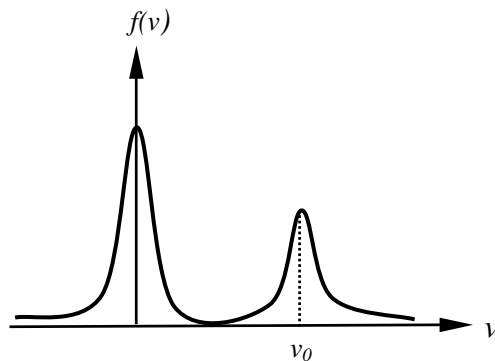


图 6.7 束等离子体双峰速度分布

性。

朗道阻尼或增长的过程实际上是波与粒子直接的能量交换的结果。当波的能量转移到粒子时，波受到了阻尼而粒子得到了能量（加热或获得定向能量），反过来则是波被激发。

波与粒子相互作用可以产生能量交换的条件必须是波的相速度与粒子的速度相近，这样在粒子参考系中波动的电场变化缓慢，粒子可以充分地得到加（减）速，产生能量交换。冲浪运动员从波涛中获得能量是一个较好的图象，运动员通过爬升来控制自己的速度始终与波浪同步。若相对于波的相速度，粒子速度太慢（如水波中的树叶）、太快（如海浪中的快艇）都不能产生这种效果。

考虑等离子体中的静电波，在随波运动的参考系中，电场和粒子的相对运动情况如图 6.8 所示。等离子体中既有比波相速度大的粒子（2、4 类），也有小的粒子（1、3 类），粒子在空间上可能处于被加速的位置（1、2 类），也可能处于被波减速的位置（3、4 类）。具有相同速度的慢粒子，在波电场的作用下，1 类粒子在实验室参考系中获得加速，而 3 类粒子则被减速，但由于 1 类粒子在加速波场中停留的时间长，两者的平均效果是从波中获得能量。同样，速度较快的粒子（2、4 类）平均而言给波提供能量。若粒子的速度

分布在波相速度处的斜率为负，则 1、3 类粒子多于 2、4 类粒子，总的效果波会出现阻尼。反之，则 2、4 类粒子多于 1、3 类粒子，因而波会出现朗道增长。速度分布在波相速度的斜率越大，这种阻尼率或增长率就越大。

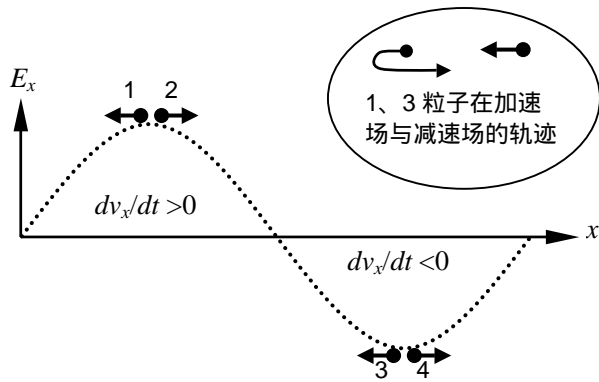


图 6.8 波粒子相互作用的微观图像

§ 6.4.4 离子朗道阻尼与离子声不稳定性

朗道阻尼是等离子体中波与粒子相互作用的最基本现象，等离子体中任何一种成分都可以产生这种波粒子共振。当离子速度分布在离子声波相

速度处于负斜率时，离子也会与波发生共振相互作用，产生离子朗道阻尼。为了避免离子朗道阻尼，能够产生传播的离子声波的系统必须满足 $T_i \ll T_e$ 的条件。

若电子相对离子存在漂移运动，并且速度大于离子声速时，在离子声波的相速度处的电子速度分布则具有正斜率，因而可以产生不稳定性，这就是漂移运动产生的离子声不稳定性。

§ 6.4.5 非线性朗道阻尼

若波的振幅足够大，波场的势与共振粒子的动能相当时，即，

$$|q\phi| = \frac{1}{2} m \left(\frac{\omega}{k} \right)^2 \quad (6-64)$$

波场可以俘获粒子，被俘获的粒子在波的势阱中以回跳频率，

$$\omega_B \triangleq |q\phi k^2 / m|^{1/2} = |qkE / m|^{1/2} \quad (6-65)$$

不断反射，因而导致波的振幅出现频率为捕获粒子回跳频率的振荡，这就是考虑粒子捕获效应的非线性朗道阻尼效应。

思考题

- 6.1 粒子与德拜球内的粒子的相互作用本质上是多体的，为什么可以用一系列两体的库仑碰撞来处理？
- 6.2 为什么动量碰撞频率有别于能量碰撞频率，动量碰撞频率一定不小于能量碰撞频率吗？
- 6.3 (6-17) 式所给出的等离子体电阻率与密度无关，你觉得这合理吗？
- 6.4 在等离子体中通上电流，可以通过欧姆加热效应使等离子体温度升高。但欧姆加热手段对高温 ($T > 1\text{keV}$) 等离子体不再适用，请考虑其原因及相关的过程。
- 6.5 建立双极电场的时间尺度是多少？
- 6.6 若在真空中放置两个电极，电极间通过的电流受到限制的因素由哪些？大电流开关多采用等离子体开关，为什么？
- 6.7 若插入等离子体中的金属电极表面涂上绝缘层，不收集电流，当电极电势足够负时，鞘层结构如何？会产生较厚的鞘层吗？

- 6.8 指出 (6-49) 式的非线性项。
- 6.9 考虑初始的粒子速度分布是麦克斯韦分布，当波出现朗道阻尼后，粒子的速度分布会发生什么样的变化趋势？
- 6.10 等离子体中的电磁波动模式能否产生朗道阻尼效应？

练习题

- 6.1 证明 $N_D \gg 1$ 条件与 $\rho_L \ll n^{-1/3}$ 是等价的。
- 6.2 设等离子体被环状磁场所约束，若在平行于磁场的方向上加上电场，则粒子将得到加速，由于碰撞，粒子在给定的电场中所得到的平均速度是有限的。但由于库仑碰撞频率与相对速度的 3 次幂成反比，因此，若粒子的初始速度足够大，则可以持续不断地得到电场加速而不产生碰撞，这种粒子，通常是电子称为逃逸电子。试分析一下出现逃逸电子的条件。
- 6.3 若等离子体中有两种离子成份，密度为 n_{i1} 、 n_{i2} 。对 $n_{i1} \gg n_{i2}$ 的情况，给出双极扩散条件及各自的扩散流。
- 6.4 证明，玻姆鞘层判据保证了鞘层内离子密度始终高于电子密度。
- 6.5 若平面静电探针加上足够的负电位 V （相对等离子体电位）后，收集的饱和离子流密度为 $j = 0.5en_e C_s$ ，证明探针鞘层的厚度可以写成，

$$d = (128/81)^{1/4} (-eV/T)^{1/2} \lambda_{De} \approx 1.1(-eV/T)^{1/2} \lambda_{De}。$$

附录 常用矢量关系

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{C} \times \vec{D}) = [(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{D}] \vec{C} - [(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}] \vec{D}$$

$$\nabla(ab) = a\nabla b + b\nabla a$$

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A}$$

$$\nabla \cdot (a\vec{A}) = a\nabla \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla a$$

$$\nabla \times (a\vec{A}) = a\nabla \times \vec{A} + \vec{A} \times \nabla a$$

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B}(\nabla \times \vec{A}) - \vec{A}(\nabla \times \vec{B})$$

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B}$$

$$\nabla \times (\nabla a) = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

$$\nabla \cdot (\nabla a) = \nabla^2 a$$