

中国科学技术大学

博士学位论文

回旋动理学研究

作者姓名: 徐颖峰

学科专业: 等离子体物理

导师姓名: 王少杰 教授

完成时间: 二〇一二年四月



University of Science and Technology of China
A dissertation for doctor degree

Research on Gyrokinetic Theory and Simulation

Author :	<u>Yingfeng Xu</u>
Speciality :	<u>Plasma Physics</u>
Supervisor :	<u>Prof. Shaojie Wang</u>
Finished Time :	<u>Apr., 2011</u>

中国科学技术大学学位论文原创性声明

本人声明所呈交的学位论文,是本人在导师指导下进行研究工作所取得的成果。除已特别加以标注和致谢的地方外,论文中不包含任何他人已经发表或撰写过的研究成果。与我一同工作的同志对本研究所做的贡献均已在论文中作了明确的说明。

作者签名: 徐颖峰

签字日期: 2012.6.1

中国科学技术大学学位论文授权使用声明

作为申请学位的条件之一,学位论文著作权拥有者授权中国科学技术大学拥有学位论文的部分使用权,即:学校有权按有关规定向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版,允许论文被查阅和借阅,可以将学位论文编入《中国学位论文全文数据库》等有关数据库进行检索,可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。本人提交的电子文档的内容和纸质论文的内容相一致。

保密的学位论文在解密后也遵守此规定。

☒ 公开 ☐ 保密 _____ 年

作者签名: 徐颖峰

导师签名: 王立

签字日期: 2012.6.1

签字日期: 2012.6.1

摘 要

湍流输运是托卡马克磁化等离子体研究中最重要物理问题之一。因为湍流输运将降低等离子体的约束。托卡马克中的湍流大多是低频微观湍流，它能够用回旋动理学理论与模拟来研究。

本文对回旋动理学作了一定的研究。首先，我们回顾了非线性回旋动理学理论。

其次，我们讨论了对于哈密顿回旋中心模型下，回旋动理学中李变换的性质。第一条性质是回旋中心雅可比行列式函数形式上与导心雅可比行列式相同。第二条性质是两套回旋中心坐标之间的坐标变换与相应的两套导心坐标之间的坐标变换相同。第三条性质是尽管生成矢量场不是哈密顿流，然而它们在相空间是不可压缩流。这与第一条性质一致。

然后，我们讨论了哈密顿回旋中心模型下，非线性回旋动理学理论的电磁规范不变性。我们用“R-I”分解的方法证明了对回旋动理学方程组作系统截断下，非线性回旋动理学理论保持电磁规范不变性。对于任意截断，非线性回旋动理学理论的电磁规范不变性就会被破坏。对于非线性回旋动理学理论，保留回旋动理学弗拉索夫方程和回旋中心分布函数的拉回变换中的所有二阶项，才能使得导心分布函数是一个电磁规范不变量。

最后，我们从回旋动理学中李变换的性质得到了使用精确正则变量的线性回旋动理学理论。并证明了回旋中心运动方程与通常的导心运动方程在线性、漂移近似下是等价的。我们还介绍了在使用精确正则变量的线性回旋动理学理论基础上自主发展起来的数值程序 GYCAVA。它可以用来计算托卡马克中任意电磁扰动下带点粒子的导心轨道。我们还讨论了在静态磁岛中用 GYCAVA 计算的导心轨道。

关键词： 回旋动理学，李变换扰动方法，回旋中心运动，电磁规范不变性

摘 要

ABSTRACT

The turbulent transport is one of the most important physical questions in the tokamak magnetized plasma research. Because the turbulent transport will degrade the confinement of the plasma. The turbulence in tokamaks is mainly the low frequency microturbulence, which can be studied by gyrokinetic theory and simulation.

In this thesis, we study on the gyrokinetic theory and simulation. Firstly, we reviewed the nonlinear gyrokinetic theory.

Secondly, we have discussed the properties of the Lie-transform in the gyrokinetic theory for the Hamiltonian gyrocenter model. The first property is that the gyrocenter Jacobian is formally the same as the guiding-center Jacobian. The second property is that the coordinate transform between two sets of the gyrocenter coordinates is the same as the coordinate transform between two corresponding sets of the guiding-center coordinates. The third property is that although the generating vectors are non-Hamiltonian flows, they are incompressible flows in the phase space, which is consistent with the first property.

Thirdly, we have discussed the electromagnetic gauge invariance of the nonlinear gyrokinetic theory for the Hamiltonian gyrocenter model. We have demonstrated that the electromagnetic gauge invariance of the nonlinear gyrokinetic theory is kept with the systematic truncation of the gyrokinetic equations by using “R-I” decomposition. For an arbitrary truncation, the electromagnetic gauge invariance is broken. For the nonlinear gyrokinetic theory, the guiding-center distribution function is an electromagnetic gauge invariant with all the second-order terms in the gyrokinetic Vlasov equation and in the pull-back transformation of the gyrocenter distribution function kept.

Finally, we have obtained the linear gyrokinetic theory in terms of the exact

ABSTRACT

canonical variables from the properties of the Lie-transform in the gyrokinetic theory. Next, we have demonstrated the equivalence of the gyrocenter equations of motion and the usual guiding-center equations of motion with the linear and drift approximation. Then, we have developed the numerical code GYCAVA based on the linear gyrokinetic theory in terms of the exact canonical variables. The code can be used to compute the guiding-center orbit of the charged particles with an arbitrary electromagnetic fields in tokamaks. We have discussed the guiding-center orbits computed by GYCAVA in a static magnetic island.

Keywords: Gyrokinetic, Lie-transform perturbation method, Gyrocenter motion, electromagnetic gauge invariance

目 录

摘 要	I
ABSTRACT	III
目 录	V
插 图	VII
第一章 绪论	1
1.1 引言	1
1.2 回旋动理学概述	2
1.3 李变换扰动方法介绍	5
1.4 回旋动理学理论综述	9
1.4.1 导心哈密顿动力学	9
1.4.2 回旋中心哈密顿动力学	10
1.4.3 回旋动理学的弗拉索夫方程和麦克斯韦方程组	14
第二章 回旋动理学中李变换的性质	19
2.1 引言	19
2.2 雅可比行列式的性质	19
2.3 坐标变换的性质	20
2.4 生成矢量场的性质	23
2.5 小结	26
第三章 非线性回旋动理学的电磁规范不变性	29
3.1 引言	29
3.2 证明电磁规范不变性的概要	29
3.3 线性回旋动理学理论的电磁规范不变性	31

3.4 非线性回旋动理学理论的电磁规范不变性	33
3.5 关于非线性回旋动理学理论的电磁规范不变性的讨论	35
3.6 小结	36
第四章 线性正则回旋动理学理论与回旋中心运动计算	37
4.1 引言	37
4.2 基于精确正则变量的导心哈密顿力学	37
4.3 基于精确正则变量的回旋中心哈密顿动力学	40
4.4 验证线性漂移近似下回旋中心哈密顿动力学与通常的导心公式的等 价性	41
4.5 GYCAVA 介绍	45
4.6 GYCAVA 的理论基础	46
4.7 GYCAVA 的数值算法	49
4.8 GYCAVA 的数值结果	50
4.9 小结	53
第五章 总结	59
参考文献	61
附录 A 回旋中心运动方程组的数值实现	71
A.1 平衡部分	71
A.2 扰动部分	76
A.3 运动方程	83
附录 B 一阶生成矢量场的数值实现	85
致 谢	89
在读期间发表的学术论文与取得的研究成果	91

插图

1.1 李变换扰动方法	7
2.1 非线性回旋动理学中李变换的性质	26
4.1 回旋中心运动计算程序 GYCAVA 的流程图	51
4.2 磁岛图和通行粒子的庞加莱截面图	54
4.3 磁岛图和俘获粒子的庞加莱截面图	55
4.4 通行粒子的哈密顿量的误差 $\Delta\bar{H}/[\bar{H}]_0$ 和纵向不变量的误差 $\Delta\mathcal{J}/\mathcal{J}_0$	56
4.5 通行粒子的哈密顿量的误差 $\Delta\bar{H}/[\bar{H}]_0$ 和纵向不变量的误差 $\Delta\mathcal{J}/\mathcal{J}_0$	57

第一章 绪论

1.1 引言

为了和平利用聚变能,人们发明了两种约束方法将等离子体约束在局域空间里,使其能够发生聚变反应,如氘氚(DT)聚变反应: $D + T \rightarrow n(14.1\text{MeV}) + \alpha(3.5\text{MeV})$ 。这两种约束方法分别是磁约束和惯性约束。使用磁约束方法实现核聚变的主流装置是一种叫做托卡马克的环形实验装置。它是通过强磁场将等离子体约束在一个环形区域里,并使DT聚变能缓慢地释放出来。要将托卡马克中的等离子体中的聚变能转化为电能,首先要让等离子体能够自持燃烧,即等离子体中聚变释放出的 α 粒子对等离子体加热的能量要等于等离子体损失的能量。国际热核聚变实验堆(ITER)是当今在建的最大的托卡马克装置。它的目标,就是实现等离子体的DT聚变总能量大于等离子体损失能量,验证和平利用聚变能的科学可行性和技术可行性[1, 2]。然而等离子体的物理过程非常复杂。比如托卡马克等离子体中的湍流引起的反常输运用新经典输运理论无法解释。为了实现等离子体的自持燃烧,就要提高等离子体的密度、温度以及能量约束时间,让这三个参数的乘积大于一个阈值,即Lawson判据[3]。实验测得的反常输运系数(除离子热导外)远大于新经典输运理论算得的输运系数。只有充分地理解磁化等离子体的行为,才能根据它的物理规律采取合适的手段来抑制湍流引起的反常输运,从而提高等离子体的密度、温度以及能量约束时间三个参数。磁约束聚变等离子体理论[4]和模拟[5, 6]在探索燃烧等离子体物理上扮演着重要的角色。

研究磁化等离子体宏观行为的理论描述方法有磁流体力学和动理学。相对于磁流体力学,动理学给出更多的物理信息,比如朗道阻尼、有限拉莫尔半径效应等。然而动理学需要求解六维相空间下的分布函数,这在数学处理上极为不便。由于托卡马克中存在强磁场,因而单粒子的运动可以分解为回旋运动与回旋中心运动。我们可以对动理学方程作回旋平均,从而能够更方便地研究时

间尺度远大于回旋周期的等离子体行为。回旋平均后的动理学根据研究的空间尺度不同又可以分为回旋动理学和漂移动理学。回旋动理学研究的空间尺度主要是垂直于磁场方向的波长与离子拉莫尔半径可比，漂移动理学研究的空间尺度是垂直于磁场方向的波长远大于离子拉莫尔半径，即长波近似。本文主要研究的是回旋动理学。

在回旋动理学中，回旋运动与回旋中心运动解耦，即磁矩是一个守恒量，它不依赖于回旋角。对于回旋动理学方程，要求解的分布函数就是一个四维相空间的问题，比动理学方程降了两个维度。在回旋动理学模拟中，我们可以取比回旋周期大的时间步长。这极大地节省了计算时间。托卡马克等离子体中的湍流主要是低频微观湍流，它引起的反常输运严重地降低了等离子体的约束[7, 8]。回旋动理学是研究等离子体中低频微观湍流的有效方法。如今研究磁化等离子体的大规模数值模拟，就是在回旋动理学基础上实现的。

在本文中，我们首先将回顾非线性回旋动理学理论，然后将研究对于哈密顿回旋中心模型，回旋动理学中李变换的性质。我们还将研究这种模型下非线性回旋动理学理论的电磁规范性质。另外，从电磁规范性质角度考虑，我们将提出一种新的辛回旋中心模型。这种模型的回旋中心运动方程和回旋动理学弗拉索夫方程是电磁规范不变的。最后，我们将介绍使用精确正则变量的回旋动理学理论和回旋中心运动模拟。

1.2 回旋动理学概述

回旋动理学，简单地说，就是对动理学方程作回旋平均。回旋动理学通过回旋平均，忽略了粒子回旋运动的细节，从而可以用来研究磁化等离子体的长期行为。对于回旋动理学模拟，我们可以取大于回旋周期的时间步长，从而大大地降低了计算时间，提高计算效率。

回旋动理学研究可以追溯到上个世纪六十年代。1968 年，Rutherford 和 Frieman[9] 用回旋动理学方法研究环位形下非均匀等离子体的低频漂移波不稳定性。同年，Taylor 和 Hastie[10] 也用回旋动理学方法研究了任意等离子体平衡下的稳定性，主要是针对低频静电模。到了八十年代，回旋动理学有了极大的发展。1980 年，Antonsen 和 Lane[11] 首先考虑电磁扰动，对包含电磁扰动

的低频短波模进行线性扰动分析, 得到了一组关于电磁扰动的积分微分方程。1981 年, Catto 和 Tang[12] 采用了一种新的手段, 即保留了磁矩的高阶项, 来对电磁扰动进行线性分析。1982 年, Frieman 和陈骝 [13] 首先发展了包含电磁扰动的非线性回旋动理学理论。他们主要考虑了垂直非线性项 [14], 即 $\mathbf{v}_1 \cdot \nabla f_1$ 项。1983 年, Dubin 和 Krommes 等 [15] 首次将李变换扰动方法应用于回旋动理学中。他们采用 Lie-Darboux 变换和非正则扰动理论方法发展了平板位形下只有静电扰动的非线性回旋动理学理论, 并给出了能量不变量。同年, Lee 在研究回旋动理学时首次提出了极化密度 [16]。1988 年, Hahm[17] 发展了采用作用量变分李变换扰动方法发展了环位形下只有静电扰动的非线性回旋动理学理论。同年, Hahm、Lee 和 Brizard[18] 给出了基于李变换扰动方法平板位形下包含电磁扰动的非线性回旋动理学理论。1989 年, Brizard[19] 利用磁通坐标采用李变换扰动方法给出了环位形下包含完全的电磁扰动的非线性回旋动理学麦克斯韦-弗拉索夫方程组。许多人还研究了回旋动理学理论中的性质, 比如能量守恒 [20–23], 动量守恒 [24, 25], 电磁规范不变性 [26, 27] 等。另外, 秦宏、于治将回旋动理学用更加抽象的微分几何的语言表述, 还研究了高频情况下的线性回旋动理学 [28–31]。王璐等人发展了带有极化漂移的回旋动理学理论 [32, 33]。对于托卡马克中的高约束模, 等离子体边缘处具有很强的径向电场。人们发展了存在平衡径向电场的回旋动理学理论 [29, 34]。由于回旋动理学是求解高维的分布函数, 为了降低维数, 人们在回旋动理学理论的基础上发展了回旋流体理论。相对于流体理论, 它可以包含朗道阻尼效应 [35–41]、有限拉莫尔半径效应 [42]。

Brizard 和 Hahm[22] 按照是否使用李变换扰动方法将回旋动理学理论分为经典回旋动理学和现代回旋动理学。在回旋动理学中, 扰动的垂直波长与拉莫尔半径相同量级, 因而原来的基于平衡场的导心磁矩不再是一个守恒量。将导心坐标变换到回旋中心坐标 (这里的回旋中心坐标系指存在扰动场的导心坐标系, 是原来的导心坐标系经过相空间变换后的坐标系)。回旋中心磁矩是一个很好的守恒量, 从而使回旋中心运动与回旋运动解耦。经典回旋动理学使用递归的方法来寻找回旋动理学量级下的磁矩守恒量, 而现代回旋动理学使用李变换扰动的方法。后者在数学处理上较为系统与清晰。

回旋动理学根据变换后的拉格朗日量可以分为哈密顿回旋中心模型和辛回

旋中心模型 [22]。对于哈密顿回旋中心模型，变换后的拉格朗日量与变换前的未扰拉格朗日量形式相同。对于辛回旋中心模型，两者形式不同。回旋动理学模拟通常使用哈密顿回旋中心模型，因为它在数值计算上有优势。

回旋动理学模拟 [43] 的一般步骤是首先给定初始平衡分布函数和电磁场，然后求解弗拉索夫方程得到分布函数，再是对分布函数求矩得到电荷电流密度，然后用麦克斯韦方程组求得电磁场。能量守恒是诊断回旋动理学模拟精确度的手段之一 [44]。其中求分布函数的方法有拉格朗日法、欧拉法以及半拉格朗日法。拉格朗日法中最著名的就是 PIC (particle-in-cell) 方法。用这种方法的模拟也叫作粒子模拟 [45]。1983 年, Lee 首次研究回旋动理学模拟, 它采用的数值方法就是粒子模拟 [16, 46, 47]。PIC 方法是用统计的方法来描述分布函数, 从第一性原理出发, 用导心运动方程来推进不同位置处的粒子, 再按照权重分配到相空间网格上, 就得到了分布函数。PIC 在数值实现方面比较简便, 但它的缺点是噪声太大。噪声的幅度与粒子数的平方根成反比, 所以要降低噪声的幅度, 就会极大地增大计算时间。后来, 人们发展了“ δf ”方法 [48, 49] 来代替之前的“full-f”方法, 从而降低噪声。使用 PIC 的回旋动理学模拟程序有 PG3EQ[50], GTC[51], GT3D[52], ORB5[53], GTS[54] 等。欧拉法是通过高维方程 (即回旋动理学弗拉索夫方程) 离散来求各个相空间网格上的分布函数。使用欧拉法的回旋动理学模拟程序有 GS2[55–57], GYRO[58], GENE[59], GKV[60], GKW[61], GT5D[62, 63]。半拉格朗日法利用了拉格朗日法中求特征线的优点, 同时避免欧拉法中的 CFL 限制, 还利用了欧拉法中规则网格的优点, 同时避免拉格朗日法的统计噪声。在半拉格朗日法中, 对回旋动理学弗拉索夫方程作算子分裂, 再通过低维插值来求得相空间网格上的分布函数。算子分裂的方法对粒子的相空间轨道作了一定的近似, 但降低了插值的维数, 避免高维插值。使用半拉格朗日法的回旋动理学模拟程序有 GYSELA[64–66]。在求解电磁场方程时有三种方法, 分别是有限差分方法, 傅里叶级数方法和有限元方法。另外, 由于托卡马克磁化等离子体的强烈的各向异性, 人们还发展了局部的模拟方法, 即 flux-tube[67] 方法。回旋流体模拟是建立在回旋流体理论基础上的。人们对回旋动理学模拟和回旋流体模拟之间的异同作了比较 [68]。除了对芯部等离子体模拟之外, 徐学桥等人用回旋动理学方法模拟了边缘等离子体 [69]。

1.3 李变换扰动方法介绍

扰动理论是经典力学中的重要物理问题之一。Poincare 和 Von Zeipel 利用坐标变换,使得在新的坐标下,原先扰动系统下不可解或复杂的运动方程变为新的可解、简单的运动方程 [70]。这种方法能够克服奇异扰动理论中的久期项问题。然而, Poincare 和 Von Zeipel 方法处理起来很复杂,为了使扰动方法更加高效,人们继承了通过坐标变换来简化运动方程的思想,在 Poincare-Von Zeipel 扰动方法的基础上发展了李变换扰动方法。八十年代初, Cary 对李变换扰动方法的发展作了回顾 [70]。下面,我们将简单地回顾一下李变换扰动方法在等离子体中的应用。Cary 和 Kaufman 用李变换扰动方法来研究等离子体中有质动力和磁化率的关系 [71, 72]。Johnston 和 Kaufman 将李变换扰动方法应用于等离子体中的模耦合的研究 [73]。Littlejohn 将李变换扰动方法应用于导心运动 [74–76],并展现了李变换扰动方法的微分几何基础 [77]。在导心运动中,将粒子相空间坐标变换到导心相空间坐标。导心磁矩是一个很好的守恒量,从而使导心运动与回旋运动解耦。这样,我们在研究单粒子的长期行为时,不必研究复杂的六维的粒子运动,而只需研究简单的四维的导心运动。Cary 和 Littlejohn 发展了基于李变换扰动方法的非正则哈密顿动力学,并将其用于磁力线流的研究 [78]。由于李变换扰动方法的系统处理,许多人将它用于回旋动力学理论 [15, 17–19, 22, 26, 27, 79] 的研究。这样,我们可以使用较动力学方程简单的回旋动力学方程来研究等离子体的长期行为。

下面我们将简单地介绍一下李变换扰动方法。首先定义近恒等相空间变换及其逆变换:

$$\bar{Z}^i(Z; \epsilon) \equiv \mathcal{T}_\epsilon Z^i, \quad (1.1a)$$

$$Z^i(\bar{Z}; \epsilon) \equiv \mathcal{T}_\epsilon^{-1} \bar{Z}^i. \quad (1.1b)$$

这里, ϵ 是一个小参量。在 $\epsilon = 0$ 时, $\bar{Z}^i(Z; 0) = Z^i, Z^i(\bar{Z}; 0) = \bar{Z}^i$ 。近恒等相空间变换由生成矢量场 \mathbf{G}_n 表示:

$$\mathcal{T}_\epsilon^{\pm 1} \equiv \exp(\pm \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n \mathbf{G}_n \cdot d). \quad (1.2)$$

对于一个任意函数 F 定义一个相应的函数 \bar{F} ，使得它们之间的关系满足

$$F(Z) = \bar{F}(\bar{Z}). \quad (1.3)$$

那么， F 与 \bar{F} 的关系可以由拉回算子和推进算子来描述：

$$F \equiv T_\epsilon \bar{F}, \quad (1.4a)$$

$$\bar{F} \equiv T_\epsilon^{-1} F. \quad (1.4b)$$

上式是函数的变换，即等式左右的自变量相同。

Littlejohn[77] 对李变换扰动方法的理解有两种观点，一种是“passive”观点，另一种是“active”观点，如图 (1.1)。“passive”观点认为扰动理论的基本思想是寻找一套新的相空间坐标 \bar{Z} （它与原来的相空间坐标 Z 的关系满足方程 (1.1a)），使得新的相空间坐标下新的运动方程得到简化。这样，同一个相空间点 x 可以用不同的相空间坐标系来描述，即 Z 和 \bar{Z} 。这个相空间点 x 相应的某个物理量 P 在相空间 Z 中的函数形式为 F ，在相空间 \bar{Z} 中的函数形式为 \bar{F} ，那么函数 F 与函数 \bar{F} 满足方程 (1.3)。这里的函数可以是标量，也可以是矢量。“active”观点认为扰动理论的思想是寻找新的相空间点 \bar{x} （它与原来的相空间点 x 的关系满足 $\bar{x} = T_\epsilon x$ ），使得新的相空间点的运动方程得到简化。在同一个坐标系中，相空间点 x 和 \bar{x} 对应的坐标分别是 x^i 和 \bar{x}^i 。同一个物理量 P 依赖于相空间坐标 x^i 和 \bar{x}^i 的函数形式分别是 F 和 \bar{F} ，它们满足方程 $F(x) = \bar{F}(\bar{x})$ 。

下面将李变换扰动方法应用于哈密顿方程和弗拉索夫方程。对于弗拉索夫方程 $\frac{dF}{dt} = \{F, h\}_Z = \partial_a F J^{ab} \partial_b h = 0$ （ $\{\cdot, \cdot\}$ 是泊松括号， J^{ab} 是泊松矩阵的分量），利用方程 (1.3)，可以得到

$$\begin{aligned} \{F, h\}_Z &= \frac{\partial F(Z)}{\partial Z^a} J^{ab}(Z) \frac{\partial h(Z)}{\partial Z^b} = \frac{\partial \bar{F}(\bar{Z})}{\partial \bar{Z}^{a'}} \frac{\partial \bar{Z}^{a'}}{\partial Z^a} J^{ab} \frac{\partial \bar{Z}^{a'}}{\partial Z^a} \frac{\partial \bar{h}(\bar{Z})}{\partial \bar{Z}^{b'}} \\ &= \frac{\partial \bar{F}(\bar{Z})}{\partial \bar{Z}^{a'}} \bar{J}^{a'b'}(\bar{Z}) \frac{\partial \bar{h}(\bar{Z})}{\partial \bar{Z}^{b'}} = \{\bar{F}, \bar{h}\}_{\bar{Z}}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

其中，新的泊松矩阵 $\bar{J}(\bar{Z})$ 与原来的泊松矩阵 $J(Z)$ 的关系是

$$J^{a'b'}(\bar{Z}) = \frac{\partial \bar{Z}^{a'}}{\partial Z^a}(Z) J^{ab}(Z) \frac{\partial \bar{Z}^{b'}}{\partial Z^b}(Z). \quad (1.6)$$

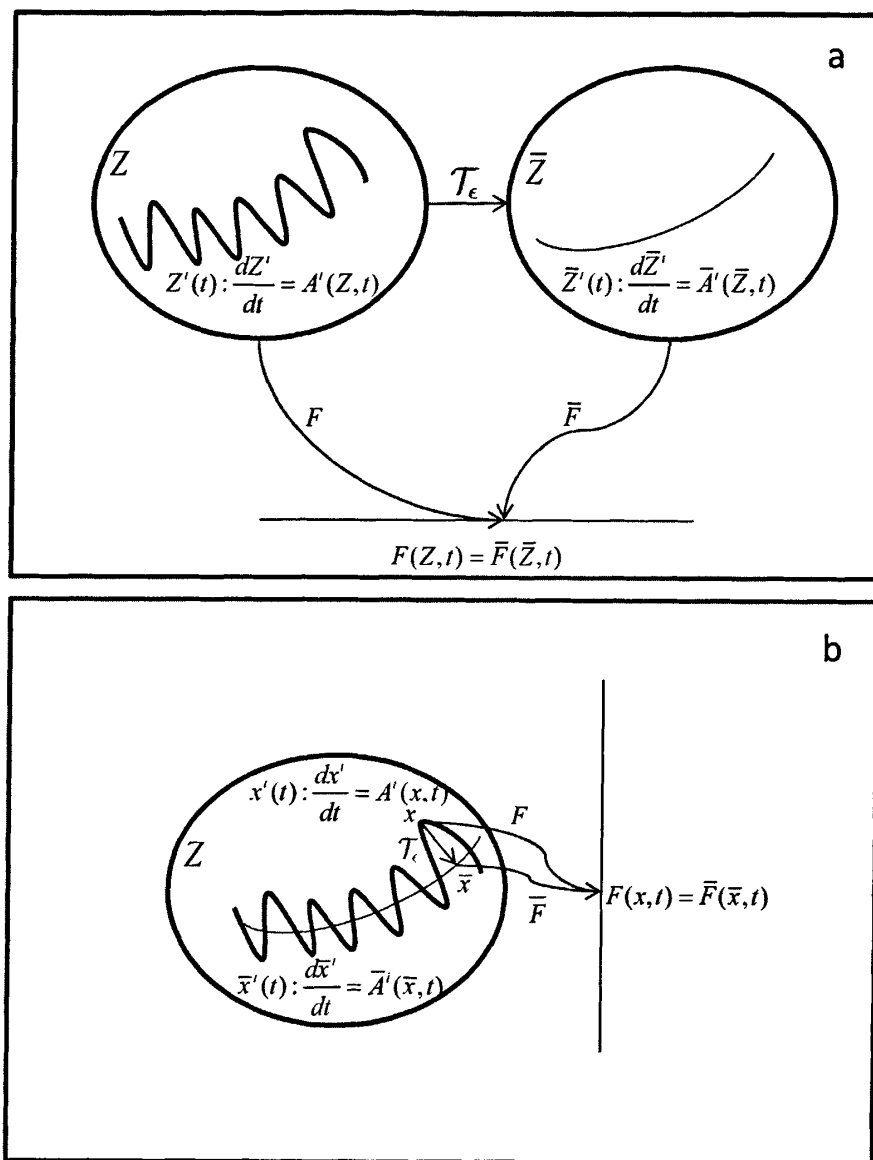


图 1.1 李变换扰动方法
(a): “passive” 观点。(b): “active” 观点。

那么,

$$\frac{d_\epsilon \bar{F}}{d\tau} \equiv \{\bar{F}, \bar{h}\}_Z = \{F, h\}_Z = 0. \quad (1.7)$$

对于哈密顿方程 $\frac{dZ^a}{d\tau} = \{Z^a, h\}_Z = J^{ab}\partial_b h$, 利用方程 (1.6) 和方程 (1.3), 可以得到

$$\begin{aligned} \{\bar{Z}^{a'}, \bar{h}\}_Z &= \bar{J}^{a'b'} \frac{\partial \bar{h}(\bar{Z})}{\partial \bar{Z}^{b'}} \\ &= \frac{\partial \bar{Z}^{a'}}{\partial Z^a}(Z) J^{ab}(Z) \frac{\partial h(Z)}{\partial Z^b} = \frac{\partial \bar{Z}^{a'}}{\partial Z^a}(Z) \{Z^a, h\}_Z. \end{aligned} \quad (1.8)$$

那么,

$$\frac{d_\epsilon \bar{Z}^{a'}}{d\tau} \equiv \{\bar{Z}^{a'}, \bar{h}\}_Z = \frac{\partial \bar{Z}^{a'}}{\partial Z^a}(Z) \{Z^a, h\}_Z. \quad (1.9)$$

注意方程 (1.6) 满足不同坐标下二阶张量的逆变分量的变换关系, 方程 (1.9) 满足不同坐标下矢量的逆变分量的变换关系。

泊松括号的变换是通过扩展相空间拉格朗日量的变换来实现的。变换后的扩展相空间哈密顿量和一形式 (one-form, 相当于拉格朗日量) 分别为:

$$\bar{h} = T_\epsilon^{-1} h, \quad (1.10a)$$

$$\bar{\Gamma} = T_\epsilon^{-1} \Gamma + dS. \quad (1.10b)$$

其中, S 是不影响运动方程的标量场, 但它可以用来简化运动方程。 Γ 与 $\bar{\Gamma}$ 之间的关系可以由变分原理得到。 dS 的出现是因为作用量中的拉格朗日量加上任意一个标量函数的全微分之后不影响运动方程。在李变换扰动理论中, 拉回算子和推进算子可以用李导数表示:

$$T_\epsilon^{\pm 1} \equiv \exp\left(\pm \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n L_n\right). \quad (1.11)$$

其中, L_n 是由 n 阶矢量场 G_n 生成的李导数。对标量和一形式 (one-form) 的李导数的定义如下:

$$L_n h \equiv G_n^a \partial_a h, \quad (1.12a)$$

$$L_n \Gamma \equiv G_n^a \omega_{ab} + \partial_b (G_n^a \Gamma_a) dZ^b. \quad (1.12b)$$

其中, $\omega_{ab} \equiv \partial_a \Gamma_b - \partial_b \Gamma_a$ 是二形式 (two-form) $\omega = d\Gamma$ 的分量。在每一阶 ϵ^n , 项 $d(G_n^a \Gamma_a)$ 被吸收入 dS_n 中。需要注意的是, $\mathcal{T}_\epsilon^{\pm 1}$ 和作用于标量函数的 $T_\epsilon^{\pm 1}$ 有相同的表达式。

1.4 回旋动理学理论综述

在这一节中, 我们首先将简单地回顾一下使用非正则变量的未扰的导心哈密顿运动方程。然后, 将介绍哈密顿回旋中心模型下的回旋中心运动方程。之后, 将回顾一下回旋动理学弗拉索夫方程和导心分布函数的拉回变换。最后, 对回旋动理学麦克斯韦方程组作简要介绍。

1.4.1 导心哈密顿动力学

未扰的基本一形式 (即导心扩展拉格朗日量) 能够写成用非正则变量 $Z^i = (\mathbf{X}, v_{\parallel}, \xi, \mu, t, -U)$ (这里, 我们将原来的六维相空间变量加上 $(t, -U)$ 这对时间能量共轭变量后形成扩展相空间) 表示的形式, 即

$$\hat{\Gamma}_0 \equiv \Gamma_0 - h_0 d\tau = \Gamma_{0i} dZ^i - h_0 d\tau \quad (1.13a)$$

$$= (v_{\parallel} \mathbf{b}_0 + \mathbf{A}_0) \cdot d\mathbf{X} + \mu d\xi - U dt - h_0 d\tau. \quad (1.13b)$$

其中, \mathbf{X} 是导心空间位置, v_{\parallel} 是平行速度, μ 是磁矩, ξ 是回旋角, U 是粒子的总能量, τ 是独立参量。这里, $\mathbf{b}_0 = \mathbf{B}_0/B_0$, B_0 是平衡磁场; $\mathbf{X} = \mathbf{r} - \rho_0(\mu, \xi)$, \mathbf{r} 是粒子空间位置, ρ_0 是拉莫尔半径。在本文的所有地方, 如果没有特别声明, 我们令 $e_s = m_s = 1$ 来简化公式。其中, e_s 和 m_s 分别是 s 类粒子的电荷与质量。未扰导心扩展哈密顿量是

$$h_0 \equiv H_0 - U = \frac{1}{2} v_{\parallel}^2 + \mu B_0 + \phi_0 - U. \quad (1.14)$$

其中, H_0 是未扰导心哈密顿量。

拉格朗日二形式定义为 $\omega \equiv d\Gamma$ [22, 80]。未扰拉格朗日二形式能写成

$$\hat{\omega}_0 \equiv \omega_0 - dh_0 \wedge d\tau \quad (1.15a)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} B_0^{*k} dX^i \wedge dX^j + b_{0j} dv_{\parallel} \wedge dX^j \\ &+ d\mu \wedge d\xi + d(-U) \wedge dt - dh_0 \wedge d\tau. \end{aligned} \quad (1.15b)$$

其中,

$$B_0^* = B_0 + v_{\parallel} \nabla \times \mathbf{b}_0, \quad (1.16)$$

d 是外微分, \wedge 是外积, ϵ_{ijk} 是置换张量的分量。

未扰导心运动方程可以写成用非正则变量表示的形式,

$$\frac{d_0 Z^i}{d\tau} = \{Z^i, h_0\} = J_0^{ij} \partial_j h_0. \quad (1.17)$$

这里, J_0 是未扰泊松矩阵, 它是未扰拉格朗日矩阵 ω_0 的逆矩阵。未扰泊松矩阵 J_0 的非零分量为

$$J_0^{X^i X^j} = -\frac{\epsilon^{ijk} b_{0k}}{B_{\parallel 0}^*}, \quad (1.18a)$$

$$J_0^{X^i v_{\parallel}} = -J_0^{v_{\parallel} X^i} = \frac{B_0^{*i}}{B_{\parallel 0}^*}, \quad (1.18b)$$

$$J_0^{\xi \mu} = -J_0^{\mu \xi} = 1, \quad (1.18c)$$

$$J_0^{t(-U)} = -J_0^{-U t} = 1. \quad (1.18d)$$

其中, $B_{\parallel 0}^* = B_0^* \cdot \mathbf{b}_0$ 。

1.4.2 回旋中心哈密顿动力学

首先引入扰动标势、矢势 $(\delta\phi, \delta\mathbf{A})$ 。扰动电磁场分别是 $\delta\mathbf{E} = -\nabla\delta\phi - \partial_t\delta\mathbf{A}$, $\delta\mathbf{B} = \nabla \times \delta\mathbf{A}$ 。幅度量级参数 ϵ_δ 定义为扰动量与相应的平衡量之比。然后, 基本一形式能够分成未扰部分与扰动部分, 即

$$\hat{\Gamma} \equiv \hat{\Gamma}_0 + \hat{\Gamma}_1. \quad (1.19)$$

其中一形式的扰动部分写成

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}_1 &= \Gamma_1 = \Gamma_{1i} dZ^i \\ &= \delta \mathbf{A}(\mathbf{X} + \boldsymbol{\rho}_0, t) \cdot d(\mathbf{X} + \boldsymbol{\rho}_0) - \delta \phi(\mathbf{X} + \boldsymbol{\rho}_0, t) dt\end{aligned}\quad (1.20a)$$

$$= \delta \mathbf{A} \cdot d\mathbf{X} + \delta \mathbf{A} \cdot \partial_\mu \boldsymbol{\rho}_0 d\mu + \delta \mathbf{A} \cdot \partial_\xi \boldsymbol{\rho}_0 d\xi - \delta \phi dt. \quad (1.20b)$$

回旋中心扩展相空间变换是从导心坐标系 Z 变换到回旋中心坐标系 \bar{Z} 的李变换。将它展开到 $O(\epsilon_s^2)$ ，两种坐标系的关系可以写成

$$\bar{Z}^i = Z^i + G_1^i(Z) + G_2^i(Z) + \frac{1}{2} G_1^j \partial_j G_1^i(Z), \quad (1.21a)$$

$$Z^i = \bar{Z}^i - G_1^i(\bar{Z}) - G_2^i(\bar{Z}) + \frac{1}{2} G_1^j \partial_j G_1^i(\bar{Z}). \quad (1.21b)$$

其中， G_1 和 G_2 分别是一阶、二阶生成矢量场。 t 不受这变换的影响，即 $G_1^t = 0 = G_2^t$ 。变换后的基本一形式为

$$\hat{\bar{\Gamma}} \equiv \bar{\Gamma} - \bar{h} d\tau = \bar{\Gamma}_i d\bar{Z}^i - \bar{h} d\tau. \quad (1.22)$$

基本一形式的变换， $\hat{\bar{\Gamma}} = T^{-1} \hat{\Gamma} + dS$ ，可以展开至 $O(\epsilon_s^2)$ ，即

$$\bar{\Gamma}_{0i} = \Gamma_{0i}, \quad (1.23a)$$

$$\bar{\Gamma}_{1i} = \Gamma_{1i} - G_1^j \omega_{0ji} + \partial_i S_1, \quad (1.23b)$$

$$\bar{\Gamma}_{2i} = -G_2^j \omega_{0ji} - \frac{1}{2} G_1^j (\omega_{1ji} + \bar{\omega}_{1ji}) + \partial_i S_2, \quad (1.23c)$$

$$\bar{h}_0 = h_0, \quad (1.23d)$$

$$\bar{h}_1 = -G_1^i \partial_i h_0, \quad (1.23e)$$

$$\bar{h}_2 = -G_2^i \partial_i h_0 - \frac{1}{2} G_1^i \partial_i \bar{h}_1. \quad (1.23f)$$

这里， T^{-1} 是推进变换。 S_n 与 U 和 τ 无关，即 $\partial_U S_n = 0 = \partial_\tau S_n$ 。 $\omega_1, \bar{\omega}_1$ 是拉格朗日二形式，

$$\omega_{1ji} = \partial_j \Gamma_{1i} - \partial_i \Gamma_{1j}, \quad (1.24)$$

$$\bar{\omega}_{1ji} = \partial_j \bar{\Gamma}_{1i} - \partial_i \bar{\Gamma}_{1j}. \quad (1.25)$$

这里, S_1, S_2 分别是一阶、二阶标量场, 它用来消去扩展拉格朗日量依赖于回旋角的部分。一阶拉格朗日二形式能写成

$$\begin{aligned}\omega_1 &= d\Gamma_1 \\ &= \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\delta B^k dX^i \wedge dX^j + \delta E_j dX^j \wedge dt \\ &\quad + \epsilon_{ijk}\delta B^k \partial_\mu \rho_0^i d\mu \wedge dX^j + \epsilon_{ijk}\delta B^k \partial_\xi \rho_0^i d\xi \wedge dX^j \\ &\quad + \delta \mathbf{E} \cdot \partial_\mu \rho_0 d\mu \wedge dt + \delta \mathbf{E} \cdot \partial_\xi \rho_0 d\xi \wedge dt.\end{aligned}\quad (1.26)$$

从方程 (1.23b) 和 (1.23c), 我们可以得到一阶、二阶生成矢量场,

$$G_1^i = [\partial_j S_1 + (\Gamma_{1j} - \bar{\Gamma}_{1j})]J_0^{ji}, \quad (1.27a)$$

$$G_2^i = [\partial_j S_2 - \frac{1}{2}G_1^k(\omega_{1kj} + \bar{\omega}_{1kj}) - \bar{\Gamma}_{2j}]J_0^{ji}. \quad (1.27b)$$

对于哈密顿回旋中心模型, 变换后的拉格朗日二形式在形式上与变换前相同, 即 $\bar{\Gamma}_i = \Gamma_{i0}$ 。那么 $\bar{\Gamma}_{1i} = 0 = \bar{\Gamma}_{2i}$, $\bar{\omega}_1 = 0$, $\bar{\omega} = \omega_0$ 。由方程 (1.27) 可得, n 阶生成矢量场 G_n 为

$$G_n^i = \{S_n, Z^i\} + \delta \mathcal{A}_n \cdot \{\mathbf{X} + \rho_0, Z^i\} - \delta \psi_n \{t, Z^i\}. \quad (1.28)$$

其中,

$$[\delta \mathcal{A}_1, \delta \psi_1] = [\delta \mathbf{A}, \delta \phi], \quad (1.29a)$$

$$[\delta \mathcal{A}_2, \delta \psi_2] = [\frac{1}{2}G_1^r \times \delta \mathbf{B}, \frac{1}{2}G_1^r \cdot \delta \mathbf{E}], \quad (1.29b)$$

$$G_1^r = \{S_1, \mathbf{X} + \rho_0\}. \quad (1.29c)$$

利用方程 (1.28), n 阶生成矢量场 G_n 可以重写为

$$G_n^X = -\frac{b_0}{B_{\parallel 0}^*} \times (\delta \mathcal{A}_n + \nabla S_n) - \partial_{v_{\parallel}} S_n \frac{B_0^*}{B_{\parallel 0}^*}, \quad (1.30a)$$

$$G_n^{v_{\parallel}} = \frac{B_0^*}{B_{\parallel 0}^*} \cdot (\delta \mathcal{A}_n + \nabla S_n), \quad (1.30b)$$

$$G_n^{\xi} = -(\delta \mathcal{A}_n \cdot \partial_{\mu} \rho_0 + \partial_{\mu} S_n), \quad (1.30c)$$

$$G_n^{\mu} = \delta \mathcal{A}_n \cdot \partial_{\xi} \rho_0 + \partial_{\xi} S_n, \quad (1.30d)$$

$$G_n^{-U} = -\delta \psi_n + \partial_t S_n, \quad (1.30e)$$

$$G_n^t = 0. \quad (1.30f)$$

利用方程 (1.27a) 和 (1.23e), 一阶回旋中心扩展哈密顿量能重写为

$$\bar{h}_1 = -(\partial_j S_1 + \Gamma_{1j}) \dot{Z}_0^j \equiv K_1 - \frac{d_0 S_1}{d\tau}. \quad (1.31)$$

其中 K_1 的定义是

$$K_1 \equiv -\Gamma_{1i} \dot{Z}_0^i = \delta \phi - (\dot{\mathbf{X}}_0 \cdot \delta \mathbf{A} + \dot{\xi}_0 \delta \mathbf{A} \cdot \partial_{\xi} \rho_0). \quad (1.32)$$

为了将回旋中心运动从回旋运动解耦出来, 我们选择回旋中心扩展哈密顿量 \bar{h}_n , 使它满足条件 $\bar{h}_n = \langle \bar{h}_n \rangle$ 。这里, $\langle \cdots \rangle$ 表示回旋平均。因此, 一阶、二阶标量场可以选为

$$\frac{d_0 S_1}{d\tau} = \widetilde{K_1}, \quad (1.33a)$$

$$\frac{d_0 S_2}{d\tau} = \frac{1}{2} \widetilde{G_1^i \omega_{1ij} \dot{Z}_0^j} - \frac{1}{2} \widetilde{G_1^i} \partial_i \langle K_1 \rangle. \quad (1.33b)$$

对于任意函数 A , \tilde{A} 指依赖回旋角的部分, 定义为 $\tilde{A} \equiv A - \langle A \rangle$ 。将方程 (1.33) 代入方程 (1.23e) 和 (1.23f), 一阶、二阶回旋中心哈密顿量能写成

$$\bar{h}_1 = \langle K_1 \rangle = \langle \delta \phi \rangle - \dot{\mathbf{X}}_0 \cdot \langle \delta \mathbf{A} \rangle - \dot{\xi}_0 \langle \delta \mathbf{A} \cdot \partial_{\xi} \rho_0 \rangle, \quad (1.34a)$$

$$\bar{h}_2 = \frac{1}{2} \langle G_1^r \cdot (\delta \mathbf{E} + \mathbf{v}_0 \times \delta \mathbf{B}) \rangle - \frac{1}{2} \langle \delta \mathbf{A} \cdot \{ \mathbf{R} + \rho_0, \langle K_1 \rangle \} \rangle. \quad (1.34b)$$

回旋中心运动方程用泊松矩阵表示可写成

$$\frac{d\bar{Z}^i}{d\tau} = J_0^{ij} \partial_j (\bar{h}_0 + \bar{h}_1 + \bar{h}_2). \quad (1.35)$$

1.4.3 回旋动理学的弗拉索夫方程和麦克斯韦方程组

非线性回旋动理学弗拉索夫方程是

$$\{\bar{F}, \bar{h}\} = 0. \quad (1.36)$$

导心分布函数可以通过对回旋中心分布函数作拉回变换得到, 即 $F = T\bar{F}$ 。将它按 ϵ_δ 展开至 $O(\epsilon_\delta^2)$,

$$F_0 = \bar{F}_0, \quad (1.37a)$$

$$F_1 = \bar{F}_1 + G_1^i \partial_i \bar{F}_0, \quad (1.37b)$$

$$F_2 = \bar{F}_2 + G_1^i \partial_i \bar{F}_1 + G_2^i \partial_i \bar{F}_0 + \frac{1}{2} G_1^i \partial_i (G_1^j \partial_j \bar{F}_0). \quad (1.37c)$$

对于哈密顿回旋中心模型, 泊松括号是未扰的, 即 $\{, \} = \{, \}_0$ 。按 ϵ_δ 作级数展开至 $O(\epsilon_\delta^2)$, 回旋中心分布函数写为

$$\bar{F} = \bar{F}_0 + \bar{F}_1 + \bar{F}_2, \quad (1.38)$$

其中, $\bar{F}_0 = F_0(\bar{\mu}, \bar{P}_\alpha, \bar{U})$ 是零阶分布函数 [26]。对回旋动理学弗拉索夫方程作级数展开至 $O(\epsilon_\delta^2)$, 即

$$\{\bar{F}_0, \bar{h}_0\} = 0, \quad (1.39a)$$

$$\{\bar{F}_1, \bar{h}_0\} + \{\bar{F}_0, \bar{h}_1\} = 0, \quad (1.39b)$$

$$\{\bar{F}_2, \bar{h}_0\} + \{\bar{F}_1, \bar{h}_1\} + \{\bar{F}_0, \bar{h}_2\} = 0. \quad (1.39c)$$

麦克斯韦方程组可以写为

$$\nabla \times \mathbf{E} = (1/c)\partial_t \mathbf{B}, \quad (1.40a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = (4\pi/c)\mathbf{J} + (1/c)\partial_t \mathbf{E}, \quad (1.40b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (1.40c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.40d)$$

电荷电流密度 $J^\nu = (\rho c, \mathbf{J})$ 能写成用 $v^\nu = (c, \mathbf{v})$ 表示的形式,

$$J^\nu(\mathbf{r}, t) \equiv \sum e \int v^\nu(z) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \delta^3(\mathbf{x}(z) - \mathbf{r}) \mathcal{J}_p d^6 z \quad (1.41a)$$

$$= \sum e \int T_{gc}^{-1} v^\nu(Z) F(\mathbf{X}, M, U, t) \delta^3(T_{gc}^{-1} \mathbf{x}(Z) - \mathbf{r}) \mathcal{J}_{gc} d^6 Z \quad (1.41b)$$

$$= \sum e \int T_\epsilon^{-1} v^\nu(\bar{Z}) \bar{F}(\bar{\mathbf{X}}, \bar{M}, \bar{U}, t) \delta^3(T_\epsilon^{-1} \mathbf{x}(\bar{Z}) - \mathbf{r}) \mathcal{J}_{gy} d^6 \bar{Z}. \quad (1.41c)$$

其中 \sum 表示对粒子种类求和,

$$\mathcal{J}_p d^6 z = \mathcal{J}_{gc} d^6 Z = \mathcal{J}_{gy} d^6 \bar{Z}, T_\epsilon^{-1} = T_{gy}^{-1} T_{gc}^{-1} \quad (1.42a)$$

$$v^\nu = v^\nu(z) = T_{gc}^{-1} v^\nu(Z) = T_\epsilon^{-1} v^\nu(\bar{Z}), \quad (1.42b)$$

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = F(\mathbf{X}, M, U, t) = \bar{F}(\bar{\mathbf{X}}, \bar{M}, \bar{U}, t), \quad (1.42c)$$

$$F = T_{gy} \bar{F}; f = T_{gc} F = T_\epsilon \bar{F}. \quad (1.42d)$$

这里, $\mathcal{J}_p, \mathcal{J}_{gc}, \mathcal{J}_{gy}$ 分别是粒子坐标、导心坐标和回旋中心坐标的雅可比行列式。 f 和 F 可以由拉回变换求得。对于正则变量, 三种坐标系的雅可比行列式都等于一。导心回旋半径、回旋中心回旋半径的定义如下,

$$\rho_{gc}(Z) \equiv \mathbf{x} - \mathbf{X} = T_{gc}^{-1} \mathbf{x}(Z) - \mathbf{x}(Z), \quad (1.43a)$$

$$\begin{aligned} \rho_\epsilon(\bar{Z}) &\equiv \mathbf{x} - \bar{\mathbf{X}} = T_\epsilon^{-1} \mathbf{x}(\bar{Z}) - \mathbf{x}(\bar{Z}) \\ &= \rho_{gc}(\bar{Z}) - G_1^X(\bar{Z}) - G_1^i \partial_i \rho_{gc}(\bar{Z}). \end{aligned} \quad (1.43b)$$

将方程 (1.43b) 代入方程 (1.41c), 我们可以得到用回旋中心坐标表示的电荷电

流密度, 即

$$J^\nu(\mathbf{r}, t) = \sum e \int T_\epsilon^{-1} v^\nu \bar{F} e^{\rho_\epsilon \cdot \nabla} \delta^3(\bar{\mathbf{X}} - \mathbf{r}) \mathcal{J}_{gy} d^6 \bar{Z} \quad (1.44a)$$

$$= \sum e \int \mathcal{J}_{gy} d^3 \bar{p} (T_\epsilon^{-1} v^\nu) \bar{F} \\ + \sum e \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} (\nabla \cdot)^n \int d^3 \bar{p} [(\rho_\epsilon)^n (T_\epsilon^{-1} v^\nu) \bar{F} \mathcal{J}_{gy}]. \quad (1.44b)$$

这里, $d^6 \bar{Z} = d^3 \bar{X} d^3 \bar{p}$. 将方程 (1.43a) 代入方程 (1.41b), 我们可以得到用导心坐标表示的电荷电流密度, 即

$$J^\nu(\mathbf{r}, t) = \sum e \int T_{gc}^{-1} v^\nu \bar{F} e^{\rho_{gc} \cdot \nabla} \delta^3(\mathbf{X} - \mathbf{r}) \mathcal{J}_{gc} d^6 Z \quad (1.45a)$$

$$= \sum e \int \mathcal{J}_{gc} d^3 p (T_{gc}^{-1} v^\nu) F \\ + \sum e \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} (\nabla \cdot)^n \int d^3 p [(\rho_{gc})^n (T_{gc}^{-1} v^\nu) F \mathcal{J}_{gc}]. \quad (1.45b)$$

这里, $d^6 Z = d^3 X d^3 p$. 对方程 (1.44b) 作截断, 可以得到

$$\rho \simeq \bar{\rho} - \nabla \cdot \mathbf{P}_\epsilon \equiv \bar{\rho} + \rho_{pol}, \quad (1.46a)$$

$$\mathbf{J} \simeq \bar{\mathbf{J}} + \frac{\partial \mathbf{P}_\epsilon}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M}_\epsilon \equiv \bar{\mathbf{J}} + \mathbf{J}_{pol} + \mathbf{J}_M. \quad (1.46b)$$

其中,

$$\bar{\rho} = \sum e \int \mathcal{J}_{gy} d^3 \bar{p} \bar{F}, \quad (1.47a)$$

$$\bar{\mathbf{J}} = \sum e \int \mathcal{J}_{gy} d^3 \bar{p} \frac{d_\epsilon \bar{\mathbf{X}}}{dt} \bar{F}, \quad (1.47b)$$

$$\mathbf{P}_\epsilon = \sum e \int \mathcal{J}_{gy} d^3 \bar{p} [\rho_\epsilon \bar{F} - \nabla \cdot (\frac{\rho_\epsilon \rho_\epsilon}{2} \bar{F})], \quad (1.47c)$$

$$\mathbf{M}_\epsilon = \sum e \int \mathcal{J}_{gy} d^3 \bar{p} \rho_\epsilon \times (\frac{d_\epsilon \bar{\mathbf{X}}}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d_\epsilon \rho_\epsilon}{dt}) \bar{F}. \quad (1.47d)$$

这里, $(\bar{\rho}, \bar{\mathbf{J}})$ 分别是回旋中心的电荷密度和电流密度。 $(\mathbf{P}_\epsilon, \mathbf{M}_\epsilon)$ 分别是极化强

度和磁化强度。那么，麦克斯韦方程组可以写为

$$\nabla \times \mathbf{E} = c^{-1} \partial_t \mathbf{B}, \quad (1.48a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = (4\pi/c) \bar{\mathbf{J}} + (1/c) \partial_t \mathbf{D}, \quad (1.48b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi \bar{\rho}, \quad (1.48c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.48d)$$

其中, (\mathbf{D}, \mathbf{H}) 的定义为

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}_e, \quad (1.49a)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}_e. \quad (1.49b)$$

回旋动力学的总能量不变量是

$$E_{total} = \int \frac{d^3x}{8\pi} (|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2) + \sum \int \mathcal{J}_{gy} d^6Z \bar{F} (\bar{H} - \langle T^{-1} \delta \phi \rangle). \quad (1.50)$$

其中, 第一项是电磁场的能量, 第二项是等离子体的动能。二阶宏观电磁能可以写为

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{D}_1 + \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{H}_1) &= \frac{1}{8\pi} (|\mathbf{E}_1|^2 + |\mathbf{B}_1|^2) \\ &+ \frac{1}{2} (\mathbf{P}_e \cdot \mathbf{E}_1 + \mathbf{M}_e \cdot \mathbf{B}_1). \end{aligned} \quad (1.51)$$

第二章 回旋动理学中李变换的性质

2.1 引言

李变换扰动方法在磁化等离子体中主要应用于导心理论 [75, 76, 81]、现代回旋动理学理论 [15, 17–19, 22, 26, 27, 79] 以及无碰撞等离子体的有质动力效应 [71, 72] 等。它通过相空间变换使得变换后的方程得到简化。本章中, 我们讨论的回旋动理学是广泛使用于回旋动理学模拟的哈密顿回旋中心模型。在回旋动理学模拟的拉回变换中, 人们只保留有一部分与一阶生成矢量场相关的项。这种截断给数值计算带来了便利, 但是有可能会产生一些非物理的结果或者忽略了一些有物理意义的项。所以, 有必要对生成矢量场的性质作一番研究。另外, 基于李变换扰动方法回旋动理学采用的坐标 (本文中的坐标都是指相空间坐标) 有正则坐标 [26, 27, 79, 82], 也有非正则坐标 [15, 17–19, 22]。采用不同坐标的回旋动理学理论之间的关系也是不很清楚的。因此, 有必要研究回旋动理学中导心坐标变换的性质。在本章中, 我们将讨论非线性回旋动理学中李变换的性质。

2.2 雅可比行列式的性质

由于泊松矩阵 \mathbf{J} 和拉格朗日矩阵 $\boldsymbol{\omega}$ 是互逆矩阵, 即 $\mathbf{J} = \boldsymbol{\omega}^{-1}$, 以及雅可比行列式可以由方程 $\mathcal{J}^2 = |\omega_{ij}|$ [76] 得到, 所以我们可以由 $\bar{\omega} = \omega_0$ 得到

$$\bar{\mathbf{J}}(\bar{Z}) = \mathbf{J}_0(Z)|_{Z=\bar{Z}}, \quad (2.1a)$$

$$\bar{\mathcal{J}}(\bar{Z}) = \mathcal{J}_0(Z)|_{Z=\bar{Z}}. \quad (2.1b)$$

这里的导心坐标 Z 和回旋中心坐标 \bar{Z} 可以选为正则坐标或者非正则坐标。回旋中心坐标的雅可比行列式 $\bar{\mathcal{J}}$ 具有与相应的导心坐标的未扰雅可比行列式 \mathcal{J}_0

相同的函数形式。比如，对于非正则变量 $(\mathbf{X}, v_{\parallel}, \xi, \mu, t, -U)$ ，两者的关系是

$$\bar{\mathcal{J}}(\bar{Z}) = \mathcal{J}_0(Z)|_{Z=\bar{Z}} = B_{\parallel 0}^*(Z)|_{Z=\bar{Z}}. \quad (2.2)$$

对于正则变量 [26, 27, 79, 82]，两者的关系是

$$\bar{\mathcal{J}}(\bar{Z}) = \mathcal{J}_0(Z)|_{Z=\bar{Z}} = 1. \quad (2.3)$$

2.3 坐标变换的性质

对于四套坐标系 Z_1, Z_2, \bar{Z}_1 和 \bar{Z}_2 ， Z_2 与 Z_1 的函数关系和 \bar{Z}_2 与 \bar{Z}_1 的函数关系分别是 $Z_2 = \mathcal{Z}_2(Z_1)$ 和 $\bar{Z}_2 = \bar{\mathcal{Z}}_2(\bar{Z}_1)$ ；两套回旋中心坐标 \bar{Z}_1, \bar{Z}_2 与另两套导心坐标 Z_1, Z_2 分别是通过依赖于扰动的李变换关联起来的，即 $\bar{Z}_1 = \mathcal{T}_{gy} Z_1$ ， $\bar{Z}_2 = \mathcal{T}_{gy} Z_2$ 。从关系式 $\bar{\mathcal{F}}(\bar{\mathcal{Z}}_2(\bar{Z}_1)) = \mathcal{F}(\mathcal{Z}_2(Z_1))$ ，我们可以得到

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{F}}(\bar{\mathcal{Z}}_2(\bar{Z}_1)) &= \mathcal{F}(\mathcal{Z}_2(Z_1)) = \mathcal{T}_{gy} \bar{\mathcal{F}}(\mathcal{Z}_2(Z_1)) = \bar{\mathcal{F}}(\mathcal{T}_{gy} \mathcal{Z}_2(Z_1)) \\ &= \bar{\mathcal{F}}(\mathcal{Z}_2(\mathcal{T}_{gy} Z_1)) = \bar{\mathcal{F}}(\mathcal{Z}_2(\bar{Z}_1)). \end{aligned} \quad (2.4)$$

然后，我们发现

$$\bar{\mathcal{Z}}_2(\bar{Z}_1) = \mathcal{Z}_2(Z_1)|_{Z=\bar{Z}}. \quad (2.5)$$

对于任意用导心坐标表示的矢量 \mathbf{A} ，可以得到

$$A^i(Z_2) = A^j(Z_1) \frac{\partial Z_2^i}{\partial Z_1^j}. \quad (2.6)$$

我们可以选择 A^i 为 $\frac{dZ_1^i}{dt}(Z)$ 或者 $G_n^i(Z)$ ，即

$$\frac{dZ_2^i}{dt}(Z_2) = \frac{dZ_1^i}{dt}(Z_1) \frac{\partial Z_2^i}{\partial Z_1^j}, \quad (2.7a)$$

$$G_n^i(Z_2) = G_n^j(Z_1) \frac{\partial Z_2^i}{\partial Z_1^j}. \quad (2.7b)$$

对于任意用回旋中心坐标表示的矢量 \mathbf{A} ，可以得到

$$\bar{A}^i(\bar{Z}_2) = \bar{A}^j(\bar{Z}_1) \frac{\partial \bar{Z}_2^i}{\partial \bar{Z}_1^j}. \quad (2.8)$$

利用方程 (2.5)，可以得到

$$\bar{A}^i(\bar{Z}_2) = \bar{A}^j(\bar{Z}_1) \left[\frac{\partial Z_2^i}{\partial Z_1^j} \right]_{Z_1=\bar{Z}_1} \quad (2.9)$$

这里，我们可以选择分量 \bar{A}^i 为 $\frac{d\bar{Z}_2^i}{dt}(\bar{Z})$ 来计算回旋中心运动 [79]，即

$$\frac{d\bar{Z}_2^i}{dt}(\bar{Z}_2) = \frac{d\bar{Z}_1^j}{dt}(\bar{Z}_1) \left[\frac{\partial Z_2^i}{\partial Z_1^j} \right]_{Z_1=\bar{Z}_1} \quad (2.10)$$

作为性质 (2.5) 的一个应用，我们选 Z_1 为非正则导心坐标 $(\mathbf{X}, v_{\parallel}, \xi, \mu, t, -U)$ ，选择 Z_2 为正则导心坐标 $(\theta, P_{\theta}, \alpha_c, P_{\alpha}, \xi, \mu, t, -U)$ [27, 79]，选择 \bar{Z}_1 为与 Z_1 相应的非正则回旋中心坐标 $(\bar{\mathbf{X}}, \bar{v}_{\parallel}, \bar{\xi}, \bar{\mu}, t, -\bar{U})$ ，以及选择 \bar{Z}_2 为与 Z_2 相应的正则回旋中心坐标 $(\bar{\theta}, \bar{P}_{\theta}, \bar{\alpha}_c, \bar{P}_{\alpha}, \bar{\xi}, \bar{\mu}, t, -\bar{U})$ 。用正则坐标 $(\bar{\theta}, \bar{P}_{\theta}, \bar{\alpha}_c, \bar{P}_{\alpha}, \bar{\xi}, \bar{\mu}, t, -\bar{U})$ 表示的回旋动理学的公式（回旋中心运动方程、生成矢量场和回旋动理学弗拉索夫方程）能够通过坐标变换的性质从用非正则坐标 $(\bar{\mathbf{X}}, \bar{v}_{\parallel}, \bar{\xi}, \bar{\mu}, t, -\bar{U})$ 表示的回旋动理学的公式（回旋中心运动方程、生成矢量场和回旋动理学弗拉索夫方程）直接得到。回旋动理学的公式也可以通过使用李变换扰动方法推导得到。通过两种方法得到的回旋动理学的公式是相同的，但是第一种方法较为方便。

用第一种方法可以直接得到用正则坐标表示的回旋动理学的公式。导心坐标 $(\theta, P_{\theta}, \alpha_c, P_{\alpha}, \xi, \mu, t, -U)$ 与回旋中心坐标 $(\bar{\theta}, \bar{P}_{\theta}, \bar{\alpha}_c, \bar{P}_{\alpha}, \bar{\xi}, \bar{\mu}, t, -\bar{U})$ 满足方程

(1.1a)。由方程 (2.7a)，我们可以得到用正则坐标表示的回旋中心运动方程，

$$\frac{d\bar{\xi}}{d\tau} = \frac{\partial(\bar{h}_0 + \bar{h}_1 + \bar{h}_2)}{\partial\bar{\mu}}, \quad (2.11a)$$

$$\frac{d\bar{\mu}}{d\tau} = 0, \quad (2.11b)$$

$$\frac{d\bar{\alpha}_c}{d\tau} = \frac{\partial(\bar{h}_0 + \bar{h}_1 + \bar{h}_2)}{\partial\bar{P}_\alpha}, \quad (2.11c)$$

$$\frac{d\bar{P}_\alpha}{d\tau} = -\frac{\partial(\bar{h}_1 + \bar{h}_2)}{\partial\bar{\alpha}_c}, \quad (2.11d)$$

$$\frac{d\bar{\theta}}{d\tau} = \frac{\partial(\bar{h}_0 + \bar{h}_1 + \bar{h}_2)}{\partial\bar{P}_\theta}, \quad (2.11e)$$

$$\frac{d\bar{P}_\theta}{d\tau} = -\frac{\partial(\bar{h}_0 + \bar{h}_1 + \bar{h}_2)}{\partial\bar{\theta}}, \quad (2.11f)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = 1, \quad (2.11g)$$

$$\frac{d(-\bar{U})}{d\tau} = -\frac{\partial(\bar{h}_1 + \bar{h}_2)}{\partial t}. \quad (2.11h)$$

由方程 (2.7b)，(1.29) 和 (1.30)，我们可以得到用正则坐标表示的一阶生成矢量场，

$$G_1^\theta = -(\delta\mathbf{A} \cdot \frac{\partial\mathbf{X}}{\partial\mathbf{P}_\theta} + \partial_{P_\theta}S_1), \quad (2.12a)$$

$$G_1^{\alpha_c} = -(\delta\mathbf{A} \cdot \frac{\partial\mathbf{X}}{\partial\mathbf{P}_\alpha} + \partial_{P_\alpha}S_1), \quad (2.12b)$$

$$G_1^{P_\theta} = \delta\mathbf{A} \cdot \frac{\partial\mathbf{X}}{\partial\theta} + \partial_\theta S_1, \quad (2.12c)$$

$$G_1^{P_\alpha} = \delta\mathbf{A} \cdot \frac{\partial\mathbf{X}}{\partial\alpha_c} + \partial_{\alpha_c}S_1, \quad (2.12d)$$

$$G_1^\xi = -(\delta\mathbf{A} \cdot \partial_\mu\boldsymbol{\rho}_0 + \partial_\mu S_1), \quad (2.12e)$$

$$G_1^\mu = \delta\mathbf{A} \cdot \partial_\xi\boldsymbol{\rho}_0 + \partial_\xi S_1, \quad (2.12f)$$

$$G_1^{-U} = -\delta\phi + \partial_t S_1, \quad (2.12g)$$

$$G_1^t = 0, \quad (2.12h)$$

和用正则坐标表示的二阶生成矢量场,

$$G_2^\theta = -\left[\frac{1}{2}(G_1^r \times \delta \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \bar{P}_\theta} + \partial_{\bar{P}_\theta} S_2\right], \quad (2.13a)$$

$$G_2^{\alpha_c} = -\left[\frac{1}{2}(G_1^r \times \delta \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \bar{P}_\alpha} + \partial_{\bar{P}_\alpha} S_2\right], \quad (2.13b)$$

$$G_2^{P_\theta} = \frac{1}{2}(G_1^r \times \delta \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta} + \partial_\theta S_2, \quad (2.13c)$$

$$G_2^{P_\alpha} = \frac{1}{2}(G_1^r \times \delta \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \alpha_c} + \partial_{\alpha_c} S_2, \quad (2.13d)$$

$$G_2^\xi = -\left[\frac{1}{2}(G_1^r \times \delta \mathbf{B}) \cdot \partial_\mu \rho_0 + \partial_\mu S_2\right], \quad (2.13e)$$

$$G_2^\mu = \frac{1}{2}(G_1^r \times \delta \mathbf{B}) \cdot \partial_\xi \rho_0 + \partial_\xi S_2, \quad (2.13f)$$

$$G_2^{-U} = -\frac{1}{2}G_1^r \cdot \delta \mathbf{E} + \partial_t S_2, \quad (2.13g)$$

$$G_2^t = 0. \quad (2.13h)$$

用正则坐标表示的非线性回旋动理学弗拉索夫方程为

$$\partial_t \bar{F} + \frac{d\bar{\theta}}{dt} \partial_{\bar{\theta}} \bar{F} + \frac{d\bar{P}_\theta}{dt} \partial_{\bar{P}_\theta} \bar{F} + \frac{d\bar{\alpha}_c}{dt} \partial_{\bar{\alpha}_c} \bar{F} + \frac{d\bar{P}_\alpha}{dt} \partial_{\bar{P}_\alpha} \bar{F} = 0. \quad (2.14)$$

2.4 生成矢量场的性质

在这一节中, 我们将介绍非线性回旋动理学方程中李变换的生成矢量场的性质。这性质是一阶、二阶生成矢量场在相空间都是不可压缩流。

由方程 (1.29) 和 (1.30), 不难证明,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (B_{\parallel 0}^* G_1^X) &= -\nabla \times \mathbf{b}_0 \cdot (\delta \mathbf{A}_1 + \nabla S_1) \\ &+ \nabla \times \delta \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{b}_0 - \partial_{v_{\parallel}} \nabla S_1 \cdot \mathbf{B}_{\parallel 0}^*, \end{aligned} \quad (2.15a)$$

$$\partial_{v_{\parallel}} (B_{\parallel 0}^* G_1^{v_{\parallel}}) = \nabla \times \mathbf{b}_0 \cdot \delta \mathbf{A}_1 + \nabla \times \mathbf{b}_0 \cdot \nabla S_1 + \mathbf{B}_0^* \cdot \partial_{v_{\parallel}} \nabla S_1, \quad (2.15b)$$

$$\partial_\mu (B_{\parallel 0}^* G_1^\mu) + \partial_\xi (B_{\parallel 0}^* G_1^\xi) = B_{\parallel 0}^* \frac{\mathbf{b}_0}{B_{\parallel 0}^*} \cdot \nabla \times \delta \mathbf{A}_1 = -\nabla \times \delta \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{b}_0. \quad (2.15c)$$

在上面的方程中, 我们用到了 $\partial_\xi \rho_0 \partial_\mu \rho_0 - \partial_\mu \rho_0 \partial_\xi \rho_0 = \{\rho_0, \rho_0\} = -\{\mathbf{X}, \mathbf{X}\}$ 。利用方程 (2.15), 可以证明一阶生成矢量场是在相空间是一个不可压缩流, 这在

文献 [22] 中提到过, 即

$$\partial_i(B_{\parallel 0}^* G_1^i) = 0. \quad (2.16)$$

由于相空间体积元的不变性, 我们能知道回旋中心雅可比行列式 $\bar{\mathcal{J}}$ 和未扰动导心雅可比行列式 \mathcal{J}_0 (这里, $\mathcal{J}_0 = B_{\parallel 0}^*$) 的关系是

$$\bar{\mathcal{J}}(\bar{Z}) d^6 \bar{Z} = \mathcal{J}_0(Z) d^6 Z. \quad (2.17)$$

然后可以得到

$$\mathcal{J}_0(Z) = \bar{\mathcal{J}}(\bar{Z}) \left| \frac{\partial \bar{Z}^i}{\partial Z^j} \right|. \quad (2.18)$$

由方程 (1.21a), 我们可以得到矩阵 $\left(\frac{\partial \bar{Z}^i}{\partial Z^j} \right)$ 的分量,

$$\frac{\partial \bar{Z}^i}{\partial Z^j} = \delta_j^i + \partial_j G_1^i + \partial_j G_2^i + \frac{1}{2} \partial_j (G_1^k \partial_k G_1^i). \quad (2.19a)$$

截断到二阶, 矩阵 $\left(\frac{\partial \bar{Z}^i}{\partial Z^j} \right)$ 的行列式为

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \bar{Z}^i}{\partial Z^j} \right| &= 1 + \sum_i [\partial_i G_1^i + \partial_i G_2^i + \frac{1}{2} \partial_i (\sum_j G_1^j \partial_j G_1^i)] \\ &\quad + \sum_{i < j} (\partial_i G_1^i \partial_j G_1^j - \partial_i G_1^j \partial_j G_1^i) \end{aligned} \quad (2.20a)$$

$$= 1 + \sum_i [\partial_i G_1^i + \partial_i G_2^i + \frac{1}{2} \sum_j \partial_j (G_1^j \partial_i G_1^i)]. \quad (2.20b)$$

将 $\bar{\mathcal{J}}(\bar{Z})$ 在导心坐标 Z 处作展开, 我们得到

$$\bar{\mathcal{J}}(\bar{Z}) = \bar{\mathcal{J}}(Z) + G_1^i \partial_i \bar{\mathcal{J}}(Z) + G_2^i \partial_i \bar{\mathcal{J}}(Z) + \frac{1}{2} G_1^j \partial_j (G_1^i \partial_i \bar{\mathcal{J}}(Z)). \quad (2.21)$$

利用方程 (2.20b) 和 (2.21), 可以得到

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{J}}(\bar{Z}) \left| \frac{\partial \bar{Z}^i}{\partial Z^j} \right| &= \mathcal{J}_0(Z) + \partial_i G_1^i \mathcal{J}_0(Z) + G_1^i \partial_i \mathcal{J}_0(Z) + \partial_i G_2^i \mathcal{J}_0(Z) \\ &+ G_2^i \partial_i \mathcal{J}_0(Z) + \frac{1}{2} \partial_j (G_1^j \partial_i G_1^i) \mathcal{J}_0(Z) \\ &+ \frac{1}{2} G_1^j \partial_j (G_1^i \partial_i \mathcal{J}_0(Z)) + \partial_j G_1^j G_1^i \partial_i \mathcal{J}_0(Z) \end{aligned} \quad (2.22a)$$

$$= \mathcal{J}_0 + \partial_i (\mathcal{J}_0 G_1^i) + \partial_i (\mathcal{J}_0 G_2^i) + \frac{1}{2} \partial_j [G_1^j \partial_i (\mathcal{J}_0 G_1^i)]. \quad (2.22b)$$

利用方程 (2.1b), (2.16) 和 (2.22b), 我们发现二阶生成矢量场在相空间是一个不可压缩流, 即

$$\partial_i (B_{||0}^* G_2^i) = 0. \quad (2.23)$$

这部分的证明过程如下。首先, 我们通过直接代入的方式证明一阶生成矢量场在相空间是一个不可压缩流。然后, 我们利用雅可比行列式的性质 (2.1b) 证明二阶生成矢量场在相空间是一个不可压缩流。

下面我们将介绍方程 (2.16) 和 (2.23) 的另一种证明方法。生成矢量场 \mathbf{G}_n 在相空间的不可压缩性可以不利用方程 (2.1b) 来证明。 n 阶生成矢量场 \mathbf{G}_n 能用粒子坐标来表示,

$$\mathbf{G}_n^r = \{S_n, \mathbf{r}\}, \quad (2.24a)$$

$$\mathbf{G}_n^v = \{S_n, \mathbf{v}\} + \delta \mathcal{A}_n. \quad (2.24b)$$

利用从导心坐标变换到粒子坐标的坐标变换, 可以得到

$$\frac{1}{\mathcal{J}_0} \partial_i (\mathcal{J}_0 G_n^i) = \nabla_r \cdot \mathbf{G}_n^r + \nabla_v \cdot \mathbf{G}_n^v. \quad (2.25)$$

方程 (2.24) 右边显式依赖 S_1 的部分是一个哈密顿流。显然, 它在相空间是无散的。那么, 可以得到

$$\frac{1}{\mathcal{J}_0} \partial_i (\mathcal{J}_0 G_n^i) = \nabla_v \cdot \delta \mathcal{A}_n. \quad (2.26)$$

$$\begin{array}{ccc}
 Z_1 & \xrightarrow{G_n} & \bar{Z}_1 \\
 \downarrow Z_2(Z_1) & & \downarrow \bar{Z}_2(\bar{Z}_1) \\
 Z_2 & \xrightarrow{G_n} & \bar{Z}_2 \\
 \Downarrow & & \\
 \bar{J}(\bar{Z}) = [J_0(Z)]_{Z=\bar{Z}} & & \\
 \bar{Z}_2(\bar{Z}_1) = [Z_2(Z_1)]_{Z_1=\bar{Z}_1} & & \\
 \nabla_6 \cdot G_n = 0 & &
 \end{array}$$

图 2.1 非线性回旋动力学中李变换的性质.

利用方程 $\{\mathbf{r}, \mathbf{r}\} = 0$ 和 $\{\mathbf{v}, \mathbf{r}\} = -\mathbf{I}$ (\mathbf{I} 是单位张量) [81], 我们发现

$$\nabla_v \cdot \delta A_1(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.27a)$$

$$\begin{aligned}
 \nabla_v \cdot \delta A_2(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) &= \frac{1}{2} \nabla_v \cdot (G_1^T \times \delta \mathbf{B}) \\
 &= -\frac{1}{2} (\nabla_v \times \nabla_v S_1) \cdot \delta \mathbf{B} = 0.
 \end{aligned} \quad (2.27b)$$

因此, 生成矢量场在相空间是不可压缩流, 即

$$\frac{1}{\mathcal{J}_0} \partial_i (\mathcal{J}_0 G_n^i) = 0. \quad (2.28)$$

从两种证明方法中我们可以看到, 方程 (2.1b) 与生成矢量场 G_n 在相空间的不可压缩性质一致。

2.5 小结

在本章中, 我们讨论了非线性回旋动力学理论中李变换的性质。这里的李变换依赖于扰动。哈密顿回旋中心模型下, 非线性回旋动力学中的李变换具有

三条性质，如图2.1所示。第一条性质是回旋中心雅可比行列式函数形式上与导心雅可比行列式相同。这与哈密顿回旋中心模型密切相关。第二条性质是两套回旋中心坐标之间的坐标变换与相应的两套导心坐标之间的坐标变换相同。第三条性质是尽管生成矢量场不是哈密顿流，然而他们在相空间是不可压缩流；这与第一条性质一致。

对于一套新的导心坐标和与之相应的回旋中心坐标，我们不需要重新推导回旋动理学理论。如果我们知道使用一套回旋中心坐标的回旋动理学方程组，那么通过使用两套相应的导心坐标的坐标变换，我们能够直接得到使用另外一套回旋中心坐标的回旋动理学方程组。在第四章中，我们将使用回旋动理学中李变换的第二条性质得到使用精确正则变量的线性回旋动理学理论。

第三章 非线性回旋动力学的电磁规范不变性

3.1 引言

在上一章中，我们讨论了回旋动力学中李变换的性质。除此之外，关于回旋动力学的性质还有能量守恒、动量守恒和电磁规范不变性等。对于回旋动力学中的电磁规范不变性问题，首先对其讨论的是王少杰教授。他验证了使用近似正则变量的线性回旋动力学理论的电磁规范不变性 [26]。后来，在此基础上，祁雷和王少杰又验证了使用精确正则变量的线性回旋动力学理论的电磁规范不变性 [27]。这套精确正则变量的优点在于能把导心运动和进动的时间尺度分离开。前面所讨论的回旋动力学是线性的。然而，我们在研究非线性问题时常常需要使用非线性回旋动力学。因此，研究非线性回旋动力学理论的电磁规范不变性具有重要的意义。另外，之前讨论的线性回旋动力学方程是广泛使用的哈密顿回旋中心模型的。我们在本章中讨论的非线性回旋动力学方程也局限在哈密顿回旋中心模型。

在本章中我们验证了哈密顿回旋中心模型下，使用精确正则变量的非线性回旋动力学理论的电磁规范不变性。我们引进文献 [26] 中的“R-I”分解方法，然后利用这个分解方法来证明对于任意电磁规范下导心分布函数的电磁规范不变性。对于哈密顿回旋中心模型，系统截断保证导心分布函数是一个电磁规范不变量。

3.2 证明电磁规范不变性的概要

电磁规范变换由扰动电磁规范函数 δg 来描述，

$$\delta \mathbf{A}' = \delta \mathbf{A} + \nabla \delta g, \quad (3.1a)$$

$$\delta \phi' = \delta \phi - \partial_t \delta g. \quad (3.1b)$$

为了方便起见, 我们将 $(\delta\phi, \delta\mathbf{A})$ 分解成“R”部分 $(\delta\phi^R, \delta\mathbf{A}^R)$ 和“I”部分 $(\delta\phi^I, \delta\mathbf{A}^I)$, 即

$$\delta\mathbf{A} = \delta\mathbf{A}^R + \delta\mathbf{A}^I, \quad (3.2a)$$

$$\delta\phi = \delta\phi^R + \delta\phi^I, \quad (3.2b)$$

$$\delta\mathbf{A}^I = \nabla\delta g, \quad (3.2c)$$

$$\delta\phi^I = -\partial_t\delta g, \quad (3.2d)$$

其中“I”部分 $(\delta\phi^I, \delta\mathbf{A}^I)$ 由 δg 决定。需要注意的是选择不同的 $(\delta\phi^I, \delta\mathbf{A}^I)$ 等效于选择不同的电磁规范 [26]。

对于任意函数 $\chi = \chi(\delta\phi, \delta\mathbf{A})$, 它能够相应地分成两部分,

$$\chi = \chi^R + \chi^I. \quad (3.3)$$

这里, $\chi^R = [\chi(\delta\phi, \delta\mathbf{A})]_{\delta\phi=\delta\phi^R, \delta\mathbf{A}=\delta\mathbf{A}^R}$, 它与 $(\delta\phi^I, \delta\mathbf{A}^I)$ 无关。而对于 χ^I , 它依赖于 $(\delta\phi^I, \delta\mathbf{A}^I)$, 并且当 $(\delta\phi^I, \delta\mathbf{A}^I) = (0, 0)$, $\chi^I = 0$ 。

对于任意非零的 $(\delta\phi^I, \delta\mathbf{A}^I)$, 如果 $\chi^I \equiv 0$, 这意味着 χ 与 δg 无关, 那么 χ 是一个电磁规范不变量; 如果 $\chi^I \neq 0$, 那么 χ 不是一个电磁规范不变量。

根据基于李变换扰动方法的标准回旋动力学理论, 给定扰动标势、矢势 $(\delta\phi, \delta\mathbf{A})$, 可以得到标量场 $S_n(\delta\phi, \delta\mathbf{A})$ 和回旋中心哈密顿量 $\bar{h}_n(\delta\phi, \delta\mathbf{A})$ 。生成矢量场 $\mathbf{G}_n(\delta\phi, \delta\mathbf{A})$ 是由 $S_n(\delta\phi, \delta\mathbf{A})$ 和 $(\delta\phi, \delta\mathbf{A})$ 得到的。回旋中心分布函数 $\bar{F}_n(\delta\phi, \delta\mathbf{A})$ 是利用回旋动力学弗拉索夫方程由 $\bar{h}_n(\delta\phi, \delta\mathbf{A})$ 获得。导心分布函数 $F_n(\delta\phi, \delta\mathbf{A})$ 是利用拉回变换从 $\mathbf{G}_n(\delta\phi, \delta\mathbf{A})$ 和 $\bar{F}_n(\delta\phi, \delta\mathbf{A})$ 得到的。在下面两节中, 我们将以上的函数分解成“R”部分和“I”部分, 即

$$S_n = S_n^R + S_n^I, \quad (3.4a)$$

$$\mathbf{G}_n = \mathbf{G}_n^R + \mathbf{G}_n^I, \quad (3.4b)$$

$$\bar{h}_n = \bar{h}_n^R + \bar{h}_n^I, \quad (3.4c)$$

$$\bar{F}_n = \bar{F}_n^R + \bar{F}_n^I, \quad (3.4d)$$

$$F_n = F_n^R + F_n^I. \quad (3.4e)$$

在下一节中,我们将应用这种“R-I”分解来证明,对回旋动力学方程组作系统截断后,线性回旋动力学理论和非线性回旋动力学理论是保证电磁规范不变性。我们从方程 (1.33) 能得到,当 $\delta g \neq 0$ 时, $S_n^I \neq 0$ 。从方程 (1.28) 可以看出 $G_n^I \neq 0$ 。这将在方程 (3.10) 和 (3.15) 中进一步阐明。然后我们从方程 (1.34) 能得到 $\bar{h}_n^I \neq 0$ 。这将在方程 (3.11) 和 (3.16) 中进一步阐明。回旋中心分布函数 \bar{F} 是由回旋动力学弗拉索夫方程 (1.39) 和哈密顿量 \bar{h} 确定的。因而当 $\bar{h}_n^I \neq 0$ 时, $\bar{F}_n^I \neq 0$ 。最后,导心分布函数 F 能够通过拉回变换 (1.37) 由 $G_n(\delta\phi, \delta A)$ 和 $\bar{F}(\delta\phi, \delta A)$ 得到。经过细致地推导之后,我们将发现在对回旋动力学方程作系统截断后, $F_n^I = 0$ 。系统截断是指所有的一阶项都应保留在线性回旋动力学方程中;所有的二阶项都应保留在非线性回旋动力学方程中。在系统截断下, F_n 是电磁规范不变量是因为依赖于电磁规范的量 G_n 和 \bar{F}_n 的同时出现。事实上,对回旋动力学方程作任意截断后, $F_n^I \neq 0$ 。也就是说,对于任意截断, F_n 不是一个电磁规范不变量。换句话说,任意截断会破坏非线性回旋动力学理论的电磁规范不变性。总之,对回旋动力学方程作系统截断后,尽管 S_n , G_n , \bar{h}_n 和 \bar{F}_n 不是电磁规范不变量,而 F_n 却是电磁规范不变量。

3.3 线性回旋动力学理论的电磁规范不变性

利用方程 (3.2c) 和 (3.2d), 可以得到

$$\Gamma_{1i}^I = \partial_i \delta g, \quad (3.5a)$$

$$\omega_{1ij}^I = 0. \quad (3.5b)$$

这里, $\Gamma_{1i} = \Gamma_{1i}^R + \Gamma_{1i}^I$ 以及 $\omega_{1ij} = \omega_{1ij}^R + \omega_{1ij}^I$ 。回旋动力学弗拉索夫方程的与 δg 相关的部分是 $\{\bar{F}, \bar{h}\}^I \equiv \{\bar{F}, \bar{h}\} - \{\bar{F}, \bar{h}\}^R = 0$ 。它能按 ϵ_δ 作级数展开至 $O(\epsilon_\delta^2)$,

$$\{\bar{F}_1^I, h_0\} + \{F_0, \bar{h}_1^I\} = 0, \quad (3.6a)$$

$$\{\bar{F}_2^I, h_0\} + \{\bar{F}_1^I, \bar{h}_1\} + \{\bar{F}_1, \bar{h}_1^I\} - \{\bar{F}_1^I, \bar{h}_1^I\} + \{F_0, \bar{h}_2^I\} = 0. \quad (3.6b)$$

对于线性回旋动力学方程,我们只考虑一阶回旋动力学弗拉索夫方程 (3.6a)。接下来,我们将证明对于任意电磁规范,一阶导心分布函数是一个电磁

规范不变量。一阶导心分布函数与 δg 相关的部分能写成

$$F_1^I = \bar{F}_1^I + G_1^{Ii} \partial_i F_0. \quad (3.7)$$

将方程 (3.2c) 和 (3.2d) 代入到方程 (1.32) 中, 我们得到

$$K_1^I = \{h_0, \delta g\}. \quad (3.8)$$

这里, $K_1 = K_1^R + K_1^I$ 。结合方程 (1.33a) 和方程 (3.8), 我们得到一阶标量场的与 δg 相关的部分,

$$S_1^I = -\delta \tilde{g}. \quad (3.9)$$

结合方程 (1.28) 和 (3.5), 一阶生成矢量场的与 δg 相关的部分可以写成

$$G_1^{Ii} = \{\langle \delta g \rangle, Z^i\}. \quad (3.10)$$

一阶回旋中心扩展哈密顿量的与 δg 相关的部分是

$$\bar{h}_1^I = \langle K_1^I \rangle = \{h_0, \langle \delta g \rangle\}. \quad (3.11)$$

方程 (3.10) 和 (3.11) 意味着—阶生成矢量场和一阶回旋中心扩展哈密顿量依赖于扰动电磁规范函数 δg 。使用方程 (3.10), (3.11), (3.7) 和 (3.6a), 可以得到

$$\begin{aligned} \{F_1^I, h_0\} &= \{\bar{F}_1^I, h_0\} + \{\{\langle \delta g \rangle, Z^i\} \partial_i F_0, h_0\} \\ &= -\{F_0, \{h_0, \langle \delta g \rangle\}\} + \{\{\langle \delta g \rangle, F_0\}, h_0\} \\ &= -\{\{F_0, h_0\}, \langle \delta g \rangle\} = 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

然后可以得到

$$F_1^I = 0. \quad (3.13)$$

方程 (3.13) 意味着—阶导心分布函数不依赖于扰动电磁规范函数 δg 。换句话说, 一阶导心分布函数是一个电磁规范不变量, 这与文献 [26] 一致。

3.4 非线性回旋动力学理论的电磁规范不变性

对于非线性回旋动力学理论, 我们继续考虑二阶弗拉索夫方程 (3.6b)。二阶导心分布函数中与 δg 相关的部分可以写作

$$F_2^I = \bar{F}_2^I + G_1^{Ii} \partial_i \bar{F}_1 + G_1^i \partial_i \bar{F}_1^I - G_1^{Ii} \partial_i \bar{F}_1^I + G_2^{Ii} \partial_i F_0 \\ + \frac{1}{2} G_1^{Ii} \partial_i (G_1^j \partial_j F_0) + \frac{1}{2} G_1^i \partial_i (G_1^{Ij} \partial_j F_0) - \frac{1}{2} G_1^{Ii} \partial_i (G_1^{Ij} \partial_j F_0). \quad (3.14)$$

结合方程 (1.28) 和 (3.5), 二阶生成矢量场中依赖于 δg 的部分可以写作

$$G_2^{Ii} = \{S_2^I, Z^i\} + \frac{1}{2} \{\langle \delta g \rangle, Z^j\} \omega_{1jk} \{Z^k, Z^i\}. \quad (3.15)$$

回旋中心扩展哈密顿量中与 δg 相关的部分是

$$\bar{h}_2^I = -G_2^{Ii} \partial_i h_0 - \frac{1}{2} G_1^{Ii} \partial_i \bar{h}_1 - \frac{1}{2} G_1^i \partial_i \bar{h}_1^I + \frac{1}{2} G_1^{Ii} \partial_i \bar{h}_1^I. \quad (3.16)$$

方程 (3.15) 和 (3.16) 意味着二阶生成矢量场和二阶扩展哈密顿量依赖于扰动电磁规范函数 δg 。对于哈密顿回旋中心模型, 二阶导心分布函数的电磁规范不变性可以利用泊松括号的性质加以证明。利用方程 (3.7), (3.14) 和 (3.13), 可以得到

$$\{F_2^I, h_0\} = \{\bar{F}_2^I, h_0\} + \{G_1^{Ii} \partial_i \bar{F}_1, h_0\} + \{G_2^{Ii} \partial_i F_0, h_0\} \\ + \{\frac{1}{2} G_1^{Ii} \partial_i (G_1^j \partial_j F_0), h_0\} - \{\frac{1}{2} G_1^i \partial_i (G_1^{Ij} \partial_j F_0), h_0\} \\ + \{\frac{1}{2} G_1^{Ii} \partial_i (G_1^{Ij} \partial_j F_0), h_0\}. \quad (3.17)$$

利用方程 (3.16) 和 (3.6b), 它能重写为

$$\{F_2^I, h_0\} = -\{\bar{F}_1^I, \bar{h}_1\} - \{\bar{F}_1, \bar{h}_1^I\} + \{\bar{F}_1^I, \bar{h}_1^I\} + \{F_0, G_2^{Ii} \partial_i h_0\} + \{F_0, \frac{1}{2} G_1^{Ii} \partial_i \bar{h}_1\} \\ + \{F_0, \frac{1}{2} G_1^i \partial_i \bar{h}_1^I\} - \{F_0, \frac{1}{2} G_1^{Ii} \partial_i \bar{h}_1^I\} + \{G_1^{Ii} \partial_i \bar{F}_1, h_0\} + \{G_2^{Ii} \partial_i F_0, h_0\} \\ + \{\frac{1}{2} G_1^{Ii} \partial_i (G_1^j \partial_j F_0), h_0\} - \{\frac{1}{2} G_1^i \partial_i (G_1^{Ij} \partial_j F_0), h_0\} \\ + \{\frac{1}{2} G_1^{Ii} \partial_i (G_1^{Ij} \partial_j F_0), h_0\}. \quad (3.18)$$

方程 (3.18) 右边的第三、七、十项的和是

$$\{\bar{F}_1^I, \bar{h}_1^I\} - \{F_0, \frac{1}{2}G_1^{Ii}\partial_i \bar{h}_1^I\} + \{\frac{1}{2}G_1^{Ii}\partial_i (G_1^j\partial_j F_0), h_0\} = 0. \quad (3.19)$$

利用方程 (1.39b), 方程 (3.18) 右边的第一、二、五项的和是

$$\begin{aligned} & -\{\bar{F}_1^I, \bar{h}_1^I\} - \{\bar{F}_1, \bar{h}_1^I\} + \{F_0, \frac{1}{2}G_1^{Ii}\partial_i \bar{h}_1^I\} + \{G_1^{Ii}\partial_i \bar{F}_1, h_0\} \\ & = -\{F_0, \frac{1}{2}G_1^{Ii}\partial_i \bar{h}_1^I\}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

方程 (3.18) 右边的第六、十一、十二项的和是

$$\begin{aligned} & \{\frac{1}{2}G_1^{Ii}\partial_i (G_1^j\partial_j F_0), h_0\} - \{\frac{1}{2}G_1^{Ii}\partial_i (G_1^{Ij}\partial_j F_0), h_0\} \\ & + \{\frac{1}{2}G_1^{Ii}\partial_i (G_1^{Ij}\partial_j F_0), h_0\} \\ & = \{F_0, \frac{1}{2}G_1^{Ii}\partial_i \bar{h}_1^I\} - \frac{1}{2}\{F_0, \Gamma_{1i}\}\{h_0, \{\langle\delta g\rangle, Z^i\}\} \\ & - \frac{1}{2}\{F_0, \{\Gamma_{1i}, \langle\delta g\rangle\}\}\{Z^i, h_0\} + \frac{1}{2}\{Z^i, F_0\}\{\{\langle\delta g\rangle, \Gamma_{1i}\}, h_0\} \\ & - \frac{1}{2}\{\Gamma_{1i}, h_0\}\{F_0, \{\langle\delta g\rangle, Z^i\}\}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

方程 (3.18) 右边的第四、九项的和是

$$\begin{aligned} & \{F_0, G_2^{Ii}\partial_i h_0\} + \{G_2^{Ii}\partial_i F_0, h_0\} \\ & = \frac{1}{2}\{F_0, \Gamma_{1i}\}\{h_0, \{\langle\delta g\rangle, Z^i\}\} + \frac{1}{2}\{F_0, \{\Gamma_{1i}, \langle\delta g\rangle\}\}\{Z^i, h_0\} \\ & - \frac{1}{2}\{Z^i, F_0\}\{\{\langle\delta g\rangle, \Gamma_{1i}\}, h_0\} + \frac{1}{2}\{\Gamma_{1i}, h_0\}\{F_0, \{\langle\delta g\rangle, Z^i\}\}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

利用方程 (3.19), (3.20), (3.21) 和 (3.22), 可以得到

$$\{F_2^I, h_0\} = 0, \quad (3.23)$$

即,

$$F_2^I = 0. \quad (3.24)$$

这意味着二阶导心分布函数不依赖于扰动电磁规范场 δg 。因此，直到 $O(\epsilon_g^2)$ ，对于任意的电磁规范，扰动分布函数是一个电磁规范不变量。

$$\begin{aligned} \delta F \equiv F_1 + F_2 = F_1^R + F_2^R = \bar{F}_1^R + G_1^{Ri} \partial_i F_0 + \bar{F}_2^R + G_1^{Ri} \partial_i \bar{F}_1^R \\ + G_2^{Ri} \partial_i F_0 + \frac{1}{2} G_1^{Ri} \partial_i (G_1^{Rj} \partial_j F_0). \end{aligned} \quad (3.25)$$

这里，一阶、二阶回旋中心分布函数满足

$$\{\bar{F}_1^R, h_0\} + \{F_0^R, \bar{h}_1^R\} = 0, \quad (3.26a)$$

$$\{\bar{F}_2^R, h_0\} + \{\bar{F}_1^R, \bar{h}_1^R\} + \{F_0^R, \bar{h}_2^R\} = 0. \quad (3.26b)$$

3.5 关于非线性回旋动力学理论的电磁规范不变性的讨论

从以上证明我们可以知道，为保证非线性回旋动力学的电磁规范不变性，回旋动力学弗拉索夫方程以及回旋中心分布函数的拉回变换中的所有二阶项必须保留。因为一阶、二阶生成矢量场 G_1, G_2 依赖于扰动标势、矢势 $(\delta\phi, \delta A)$ ，所以相空间变换和拉回变换依赖于扰动电磁规范函数 δg 。

对于在非线性回旋动力学模拟中使用的通常 [13] 的和守恒 [15, 17–19] 的回旋动力学方程，二阶回旋中心哈密顿量 \bar{h}_2 和对回旋中心分布函数作拉回变换的二阶项 $(G_1^i \partial_i \bar{F}_1, G_2^i \partial_i F_0, \frac{1}{2} G_1^i \partial_i (G_1^j \partial_j F_0))$ 被忽略。这里通常的回旋动力学方程和守恒的回旋动力学方程的区别在于通常的回旋动力学弗拉索夫方程忽略了速度空间非线性项。

对于 “full-f” 形式的非线性回旋动力学方程，在文献 [21–23] 中，已经证明了精确的能量守恒定律。为了满足精确能量守恒定律，必须保留二阶哈密顿量 \bar{h}_2 和对回旋中心分布函数作拉回变换的二阶项 $G_1^i \partial_i \bar{F}_1$ ，必须忽略一些回旋中心分布函数的拉回变换的二阶项 $(G_2^i \partial_i F_0, \frac{1}{2} G_1^i \partial_i (G_1^j \partial_j F_0))$ 。

为了保证精确能量守恒性质 [21–23]，需要忽略一些二阶项。然而，丢掉任何的二阶项将破坏非线性回旋动力学的电磁规范不变性。因此，在回旋动力学模拟中，回旋动力学弗拉索夫方程，回旋中心分布函数的拉回变换中的所有二阶项都应该保留，以保证非线性回旋动力学理论的电磁规范不变性。这是非线性回旋动力学理论的电磁规范不变性的一个应用。保留所有的二阶项，总能量

守恒精确到二阶，即 $dE_{total}/dt = O(\epsilon_\delta^3)$ 。

3.6 小结

在本章中，我们用“R-I”分解的方法证明了对回旋动理学方程组作系统截断下，非线性回旋动理学理论的电磁规范不变性。对于任意截断，非线性回旋动理学理论的电磁规范不变性就会被破坏。

对于非线性回旋动理学理论，对回旋动理学弗拉索夫方程和回旋中心分布函数的拉回变换作系统截断时，导心分布函数是一个电磁规范不变量。这里，系统截断意味着所有的二阶项都需要保留下来，因为一阶、二阶生成矢量场不是电磁规范不变量。在非线性回旋动理学模拟中，要想保证导心分布函数的电磁规范不变性，就必须保留回旋动理学弗拉索夫方程和回旋中心分布函数的拉回变换中的所有二阶项。保留所有二阶项时，总能量精确到二阶。

对于拥有电磁规范不变性的回旋动理学理论，我们在针对一个具体问题时，可以选择合适的电磁规范来简化计算，这在文献 [26] 中已经讨论过。此外，我们能够使用回旋动理学理论的电磁规范不变性来检查解析推导。

第四章 线性正则回旋动理学理论与回旋中心运动计算

4.1 引言

守恒量无论是在解析理论或者数值模拟中都具有一定的优势。近来，人们发展了处理托卡马克中带电粒子的使用精确正则变量的导心哈密顿动力学理论 [83–85]。能够把极向运动和环向漂移运动的时间尺度分开的精确正则变量在数值计算上有一定的优势 [84, 86]。可以证明，使用精确正则变量的导心哈密顿理论，与 M-S-B 导心运动公式完全一致 [84]。考虑到正则变量的优点，人们发展了基于近似 [26]、精确 [27] 正则变量的线性回旋动理学理论。

另外，八十年代，White 等人发展存在电磁扰动时，回旋中心轨道的正则理论，并编写了在此理论基础上的著名导心轨道程序 ORBIT [87–89]。然而，他们的理论和模拟中所取的扰动具有一定的特殊性，而且也没有考虑有限拉莫尔半径效应。

所以，有必要进一步研究一般扰动下的回旋中心轨道。在本章中，我们将介绍基于精确正则变量的线性回旋动理学理论和我们独立发展的回旋中心轨道计算的程序。

4.2 基于精确正则变量的导心哈密顿力学

环向对称的托卡马克中平衡磁场可以写成如下的逆变形式和协变形式 [90]：

$$\mathbf{B} = q(\psi)\nabla\psi \times \nabla\theta + \nabla\zeta \times \nabla\psi \quad (4.1a)$$

$$= g(\psi)\nabla\zeta + I(\psi)\nabla\theta + g(\psi)\delta(\psi, \theta)\nabla\psi. \quad (4.1b)$$

其中， (ψ, θ, ζ) 是磁通坐标， ψ 是极向磁通， θ 是极向角， ζ 是环向角。 $q(\psi)$ 是安全因子。由于我们讨论的磁场位形是环向对称的，所以 ζ 是可遗坐标。磁通

坐标的雅可比行列式是

$$J_{(\psi, \theta, \zeta)} = |\nabla \psi \times \nabla \theta \cdot \nabla \zeta|^{-1} = \frac{qg + I}{B^2}. \quad (4.2)$$

为了将极向运动和环向漂移分开，我们将使用坐标系 (ψ, θ, α) 来表示磁场：

$$\mathbf{B} = \nabla \psi \times \nabla \alpha \quad (4.3a)$$

$$= -g(\psi) \nabla \alpha + [q(\psi)g(\psi) + I(\psi)] \nabla \theta + g(\psi) \left[\delta(\psi, \theta) + \frac{dq}{d\psi} \right] \nabla \psi \quad (4.3b)$$

$$= -g(\psi) \nabla \alpha + h(\psi) \nabla \theta + g(\psi) \Delta(\psi, \theta) \nabla \psi. \quad (4.3c)$$

其中， α 定义为

$$\alpha = -\zeta + q\theta. \quad (4.4)$$

下面，我们将使用精确导心正则相空间坐标 $(P_\alpha, \alpha_c, P_\theta, \theta, \mu, \xi)$ 来代替导心非正则相空间坐标 $(\psi, \theta, \zeta, \rho_\parallel, \mu, \xi)$ 。这里，磁矩 μ 为 $\mu = v_\perp^2/(2B)$ ， ξ 是回旋角。 P_α, P_θ 和 α_c 的定义如下：

$$P_\alpha = \psi - \rho_\parallel g, \quad (4.5a)$$

$$P_\theta = \rho_\parallel g(q + I/g) - (\psi - \psi_0)Q(\psi_0, \theta) + [Q_I(\psi, \theta) - Q_I(\psi_0, \theta)] - \rho_\parallel g[Q(\psi, \theta) - Q(\psi_0, \theta)], \quad (4.5b)$$

$$\alpha_c = \alpha - \lambda(\psi, \theta, \psi_0) = -\zeta + q(\psi_0)\theta - [\tilde{\zeta}(\psi, \theta) - \tilde{\zeta}(\psi_0, \theta)]. \quad (4.5c)$$

其中， ψ_0 可以选为极向磁通或环向角动量， $q_I(\psi)$ ， $\tilde{\zeta}(\psi, \theta)$ ， $\tilde{q}(\psi, \theta)$ ， $\tilde{q}_I(\psi, \theta)$ ， $Q(\psi, \theta)$ 和 $Q_I(\psi, \theta)$ 是与平衡相关的物理量。它们的定义如下，

$$q_I(\psi) \equiv \int_0^\psi q(\psi) d\psi, \quad (4.6a)$$

$$\tilde{\zeta}(\psi, \theta) \equiv \int_0^\psi \delta(\psi, \theta) d\psi, \quad (4.6b)$$

$$\tilde{q}(\psi, \theta) \equiv \partial_\theta \tilde{\zeta}(\psi, \theta), \quad (4.6c)$$

$$\tilde{q}_I(\psi, \theta) \equiv \int_0^\psi \tilde{q}(\psi) d\psi, \quad (4.6d)$$

$$Q(\psi, \theta) \equiv q(\psi) + \tilde{q}(\psi, \theta), \quad (4.6e)$$

$$Q_I(\psi, \theta) \equiv q_I(\psi) + \tilde{q}_I(\psi, \theta). \quad (4.6f)$$

$\lambda(\psi, \theta, \psi_0)$ 的定义为

$$\begin{aligned}\lambda(\psi, \theta, \psi_0) &\equiv \int_{\psi_0}^{\psi} \Delta(\psi, \theta) d\psi \\ &= [q(\psi) - q(\psi_0)]\theta + [\tilde{\zeta}(\psi, \theta) - \tilde{\zeta}(\psi_0, \theta)].\end{aligned}\quad (4.7)$$

从非正则变量 $(\psi, \theta, \zeta, \rho_{\parallel}g)$ 到正则变量 $(P_{\theta}, \theta, P_{\alpha}, \alpha_c)$ 的变换矩阵分量可以写为

$$\frac{\partial \psi}{\partial P_{\theta}} = \frac{\partial(\rho_{\parallel}g)}{\partial P_{\theta}} = \frac{g}{D}, \quad (4.8a)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} &= \frac{\partial(\rho_{\parallel}g)}{\partial \theta} = \frac{g}{D} \{ \rho_{\parallel}g [\partial_{\theta} \tilde{q}(\psi, \theta) - \partial_{\theta} \tilde{q}(\psi_0, \theta)] \\ &\quad - [\partial_{\theta} \tilde{q}_I(\psi, \theta) - \partial_{\theta} \tilde{q}_I(\psi_0, \theta)] + (\psi - \psi_0) \partial_{\theta} \tilde{q}(\psi_0, \theta) \},\end{aligned}\quad (4.8b)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial P_{\alpha}} = \frac{\partial(\rho_{\parallel}g)}{\partial P_{\alpha}} + 1 = \frac{g}{D} \{ q - [Q(\psi, \theta) - Q(\psi_0, \theta)] + \frac{I}{g} \}, \quad (4.8c)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \theta} = -\frac{\partial \zeta}{\partial \alpha_c} = 1, \quad (4.8d)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial P_{\theta}} = -\frac{\partial \psi}{\partial P_{\theta}} \delta, \quad (4.8e)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \delta + q - [Q(\psi, \theta) - Q(\psi_0, \theta)], \quad (4.8f)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial P_{\alpha}} = -\frac{\partial \psi}{\partial P_{\alpha}} \delta, \quad (4.8g)$$

其中,

$$D = qg + I + \rho_{\parallel}g(I' - g'I/g - g\partial_{\theta}\delta). \quad (4.9)$$

未列出来的变换矩阵的分量为零。需要注意的是这里的关于未扰动心轨道的正则理论与文献 [84] 中的正则理论略有不同。为了更有利于以后回旋中心运动正则理论的发展, 这里我们在方程 (4.7) 中用初始值 ψ_0 代替正则环向角动量 P_{α} 。

引入导心扩展相空间正则变量 $(\mu, P_{\alpha}, P_{\theta}, -U; \xi, \alpha_c, \theta, t)$ 和独立参量 τ 。 $(-U, t)$ 是一对正则共轭导心能量—时间坐标。那么, 在扩展相空间中的未扰动基本一形式 (one-form) 和哈密顿量可以写作:

$$\Gamma_0 = \Gamma_{0i} dZ^i = \mu d\xi + P_{\alpha} d\alpha_c + P_{\theta} d\theta - U dt - h_0 d\tau, \quad (4.10)$$

$$h_0 = H_0 - U = \frac{1}{2} \rho_{\parallel}^2 B^2 + \mu B + \Phi - U. \quad (4.11)$$

其中 Z^i 表示导心扩展相空间的正则变量。

那么, 运动方程为 $dZ^i/d\tau = \{Z^i, h_0\} = J^{ij}\partial_j h_0$ 。各个分量的方程如下:

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{\partial h_0}{\partial \mu} = \frac{\partial H_0}{\partial \mu}, \quad (4.12a)$$

$$\frac{d\mu}{d\tau} = -\frac{\partial h_0}{\partial \xi} = -\frac{\partial H_0}{\partial \xi} = 0, \quad (4.12b)$$

$$\frac{d\alpha_c}{d\tau} = \frac{\partial h_0}{\partial P_\alpha} = \frac{\partial H_0}{\partial P_\alpha}, \quad (4.12c)$$

$$\frac{dP_\alpha}{d\tau} = -\frac{\partial h_0}{\partial \alpha_c} = -\frac{\partial H_0}{\partial \alpha_c} = 0, \quad (4.12d)$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{\partial h_0}{\partial P_\theta} = \frac{\partial H_0}{\partial P_\theta}, \quad (4.12e)$$

$$\frac{dP_\theta}{d\tau} = -\frac{\partial h_0}{\partial \theta} = -\frac{\partial H_0}{\partial \theta} \quad (4.12f)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\partial h_0}{\partial(-U)} = 1, \quad (4.12g)$$

$$\frac{d(-U)}{d\tau} = -\frac{\partial h_0}{\partial t} = -\frac{\partial H_0}{\partial t} = 0. \quad (4.12h)$$

4.3 基于精确正则变量的回旋中心哈密顿动力学

对于精确正则变量, 利用李变换的坐标变换性质 (2.7b) 和方程 (1.27a), 一阶生成矢量场的各个分量能够显式地表示,

$$G_1^\theta = -\{[\delta A_\psi - \delta A_\zeta \delta(\psi, \theta)]\partial_{P_\theta} \psi + \partial_{P_\theta} S_1\}, \quad (4.13a)$$

$$G_1^{\alpha_c} = -\{[\delta A_\psi - \delta A_\zeta \delta(\psi, \theta)]\partial_{P_\alpha} \psi + \partial_{P_\alpha} S_1\}, \quad (4.13b)$$

$$G_1^{P_\theta} = [\delta A_\psi - \delta A_\zeta \delta(\psi, \theta)]\partial_\theta \psi + \delta A_\theta + \delta A_\zeta [q(\psi_0) + \tilde{q}(\psi_0) - \tilde{q}(\psi)] + \partial_\theta S_1, \quad (4.13c)$$

$$G_1^{P_\alpha} = -\delta A_\zeta + \partial_{\alpha_c} S_1, \quad (4.13d)$$

$$G_1^\xi = -(\delta \mathbf{A} \cdot \partial_\mu \boldsymbol{\rho}_0 + \partial_\mu S_1), \quad (4.13e)$$

$$G_1^\mu = \delta \mathbf{A} \cdot \partial_\xi \boldsymbol{\rho}_0 + \partial_\xi S_1, \quad (4.13f)$$

$$G_1^{-U} = -\delta \phi + \partial_t S_1, \quad (4.13g)$$

$$G_1^t = 0. \quad (4.13h)$$

二阶生成矢量场的各个分量见方程 (2.13)。回旋中心哈密顿正则方程可以表示为

$$\frac{d\bar{\xi}}{d\tau} = \frac{\partial(\bar{h}_0 + \bar{h}_1 + \bar{h}_2)}{\partial\bar{\mu}}, \quad (4.14a)$$

$$\frac{d\bar{\mu}}{d\tau} = 0, \quad (4.14b)$$

$$\frac{d\bar{\alpha}_c}{d\tau} = \frac{\partial(\bar{h}_0 + \bar{h}_1 + \bar{h}_2)}{\partial\bar{P}_\alpha}, \quad (4.14c)$$

$$\frac{d\bar{P}_\alpha}{d\tau} = -\frac{\partial(\bar{h}_1 + \bar{h}_2)}{\partial\bar{\alpha}_c}, \quad (4.14d)$$

$$\frac{d\bar{\theta}}{d\tau} = \frac{\partial(\bar{h}_0 + \bar{h}_1 + \bar{h}_2)}{\partial\bar{P}_\theta}, \quad (4.14e)$$

$$\frac{d\bar{P}_\theta}{d\tau} = -\frac{\partial(\bar{h}_0 + \bar{h}_1 + \bar{h}_2)}{\partial\bar{\theta}}, \quad (4.14f)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = 1, \quad (4.14g)$$

$$\frac{d(-\bar{U})}{d\tau} = -\frac{\partial(\bar{h}_1 + \bar{h}_2)}{\partial t}. \quad (4.14h)$$

需要注意的是方程 (4.14d) 和 (4.14h) 的右边没有零阶项。对于正则变量，雅可比行列式是 1，以及回旋中心哈密顿正则方程 (4.14) 满足刘维尔定理。

4.4 验证线性漂移近似下回旋中心哈密顿动力学与通常的导心公式的等价性

在线性漂移近似下，有四个小参数 $\epsilon_B, \epsilon_\delta, \epsilon_\perp, \epsilon_\omega$,

$$\epsilon_B \equiv \rho_0/L_B \ll 1, \quad (4.15a)$$

$$|\frac{\mathbf{v}_0 \cdot \delta \mathbf{A}}{T}| \sim \frac{\phi_1}{T} \sim \epsilon_\delta \ll 1, \quad (4.15b)$$

$$|\mathbf{k}_\perp| \rho_0 \equiv \epsilon_\perp \ll 1, \quad (4.15c)$$

$$\frac{\omega}{\Omega_c} \sim \epsilon_\omega \ll 1. \quad (4.15d)$$

用小参量 ϵ_B 来描述背景等离子体的不均匀性，用小参量 ϵ_δ 来描述扰动幅度。另外，用参量 ϵ_\perp 和 ϵ_ω 来分别描述扰动的垂直方向的波数与频率。其中， L_B 为磁场的特征长度。对于线性情况，只保留 ϵ_δ 至一阶。下面将考虑漂移近似，故

只保留 ϵ_{\perp} 的零阶项。在线性近似下，近恒等相空间变换为：

$$\bar{Z}^i \approx Z^i + G_1^i. \quad (4.16)$$

在漂移近似下，扰动场可以近似表示为：

$$\delta\phi, \delta\mathbf{A} \approx \langle \delta\phi, \delta\mathbf{A} \rangle \approx \delta\phi_c, \delta\mathbf{A}_c, \quad (4.17a)$$

$$\delta\mathbf{A} \cdot \partial_{\xi}\rho_0 \approx \widetilde{\delta\mathbf{A} \cdot \partial_{\xi}\rho_0} \approx \delta\mathbf{A}_c \cdot \partial_{\xi}\rho_0. \quad (4.17b)$$

利用方程 (4.15) 和 (1.33a)，我们发现一阶标量场 S_1 为

$$S_1 \approx -\delta\mathbf{A}_c \cdot \rho_0. \quad (4.18)$$

将方程 (4.18) 代入方程 (1.27a) 中，我们发现一阶生成矢量函数为

$$G_1^i = \delta A_{kc} \partial_j X^k J^{ji} \quad (4.19a)$$

$$= (\delta A_{\psi c} \partial_j \psi + \delta A_{\theta c} \partial_j \theta + \delta A_{\zeta c} \partial_j \zeta + \delta \phi_c \partial_j t) J^{ji}. \quad (4.19b)$$

一阶生成矢量 (4.19a) 的分量可以显式地写成

$$G_1^{\theta} = -[\delta A_{\psi c} - \delta A_{\zeta c} \delta(\psi, \theta)] \partial_{P_{\theta}} \psi, \quad (4.20a)$$

$$G_1^{\alpha c} = -[\delta A_{\psi c} - \delta A_{\zeta c} \delta(\psi, \theta)] \partial_{P_{\alpha}} \psi, \quad (4.20b)$$

$$G_1^{P_{\theta}} = -[\delta A_{\psi c} - \delta A_{\zeta c} \delta(\psi, \theta)] \partial_{\theta} \psi + \delta A_{\theta c} + \delta A_{\zeta c} [q(\psi_0) + \tilde{q}(\psi_0) - \tilde{q}(\psi)], \quad (4.20c)$$

$$G_1^{P_{\alpha}} = -\delta A_{\zeta c}, \quad (4.20d)$$

$$G_1^{\xi} = 0, \quad (4.20e)$$

$$G_1^{\mu} = 0, \quad (4.20f)$$

$$G_1^{-U} = -\delta \phi_c, \quad (4.20g)$$

$$G_1^t = 0. \quad (4.20h)$$

将方程 (4.19a) 代入方程 (1.23e) 中, 我们发现一阶回旋中心哈密顿量是

$$\bar{H}_1 = \bar{h}_1 = -G_1^i \partial_i h_0 = -\delta A_{kc} \partial_j X^k J^{ji} \partial_i h_0 \quad (4.21a)$$

$$= -(\delta A_{\psi c} \partial_j \psi + \delta A_{\theta c} \partial_j \theta + \delta A_{\zeta c} \partial_j \zeta + \delta \phi_c \partial_j t) J^{ji} \partial_i h_0. \quad (4.21b)$$

使用回旋中心坐标系与导心坐标系的关系, 我们能从回旋中心坐标得到线性漂移近似下的导心运动方程。将方程 (4.16) 和 (4.21a) 代入方程 (??) 中, 我们发现用正则变量表示的导心运动方程是

$$\frac{dZ^i}{dt} = \frac{d}{dt} (\bar{Z}^i - G_1^i(\bar{Z})) \quad (4.22a)$$

$$= \{\bar{Z}^i, \bar{h}_0\}_{gy} + \{\bar{Z}^i, \bar{h}_1\}_{gy} - \{G_1^i, \bar{h}_0\}_{gy} \quad (4.22b)$$

$$= \{\bar{Z}^i, h_0\}_{gc} + G_1^j \partial_j \{\bar{Z}^i, h_0\}_{gc} + G_1^{-U} \partial_{-U} \{\bar{Z}^i, h_0\}_{gc} \\ + \{\bar{Z}^i, \phi_1 - G_1^j \partial_j h_0\}_{gc} - \partial_j G_1^i \{\bar{Z}^j, h_0\}_{gc} - \partial_t G_1^i \{t, h_0\}_{gc} \quad (4.22c)$$

$$= \dot{Z}_0^i - J^{ij} [\omega_{1jk} \dot{Z}_0^k + E_{1j}]. \quad (4.22d)$$

其中 $Z^i = (P_\theta, \theta, P_\alpha, \alpha_c)$ 。然后, 从线性漂移近似下的回旋中心哈密顿动力学理论可以得到非正则变量表示的导心运动方程,

$$\frac{dX^\alpha}{dt} = \frac{\partial X^\alpha}{\partial Z^i} \frac{dZ^i}{dt}, \quad (4.23a)$$

$$= \dot{X}_0^\alpha - J^{\alpha\beta} (\omega_{1\beta\gamma} \dot{X}_0^\gamma + E_{1\beta}). \quad (4.23b)$$

其中 $\omega_{1\beta\gamma} = \partial_\beta A_{1\gamma} - \partial_\gamma A_{1\beta}$ 和 $X^\alpha = (\psi, \theta, \zeta, u)$, 以及 u 是导心平行速度。通常的导心运动能写成 Morozov-Solovév-Boozer 的公式形式 [91, 92] 或者 Littlejohn 的公式形式 [76]. Littlejohn 的导心运动方程可写成

$$\dot{\mathbf{R}} = u \frac{\mathbf{B}^*}{B_\parallel^*} + \mathbf{E}^* \times \frac{\hat{\mathbf{b}}}{B_\parallel^*}, \quad (4.24a)$$

$$\dot{u} = \frac{\mathbf{B}^*}{B_\parallel^*} \cdot \mathbf{E}^*. \quad (4.24b)$$

其中 $\mathbf{B}^*, B_{\parallel}^*, \mathbf{E}^*$ 的定义如下

$$\mathbf{B}^* \equiv \nabla \times (\mathbf{A} + u\hat{\mathbf{b}}), \quad (4.25a)$$

$$B_{\parallel}^* \equiv \mathbf{B}^* \cdot \hat{\mathbf{b}}, \quad (4.25b)$$

$$\mathbf{E}^* \equiv \mathbf{E} - \mu \nabla B - u \frac{\partial \hat{\mathbf{b}}}{\partial t}. \quad (4.25c)$$

平衡电势 Φ_0 设为零。令 $\epsilon_B \rightarrow 0, \epsilon_\delta \rightarrow 0$, 然后我们就有在线性漂移近似下的导心运动方程,

$$\dot{\mathbf{R}} = u\hat{\mathbf{b}} + \mathbf{E}_1 \times \frac{\hat{\mathbf{b}}_0}{B_0}, \quad (4.26a)$$

$$\dot{u} = \hat{\mathbf{b}}_0 \cdot \mathbf{E}_1. \quad (4.26b)$$

零阶近似下的导心运动方程为

$$(\dot{X}^\alpha)_0 = (\dot{\mathbf{R}})_0 \cdot \nabla X^\alpha = u\hat{\mathbf{b}}_0 \cdot \nabla X^\alpha. \quad (4.27)$$

在方程 (4.27) 和以下方程中, X^α 可选择磁通坐标 (ψ, θ, ζ) 。一阶通常的运动方程可写为

$$\begin{aligned} (\dot{X}^\alpha)_1 &= \frac{u}{B_0^3} (B_0^2 \mathbf{B}_1 \cdot \nabla X^\alpha - (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_1) B_0 \cdot \nabla X^\alpha) \\ &+ \mathbf{E}_1 \times \frac{\hat{\mathbf{b}}_0}{B_0} \cdot \nabla X^\alpha, \end{aligned} \quad (4.28a)$$

$$(\dot{u})_1 = \hat{\mathbf{b}}_0 \cdot \mathbf{E}_1. \quad (4.28b)$$

非正则泊松矩阵的分量 [76] 在漂移近似下可写成

$$J^{\alpha\beta} \equiv \{X^\alpha, X^\beta\} = -\frac{1}{B_0} \hat{\mathbf{b}}_0 \cdot \nabla X^\alpha \times \nabla X^\beta = -\frac{1}{J_{(\psi, \theta, \zeta)} B_0^2} B_{0\gamma} \epsilon^{\alpha\beta\gamma}, \quad (4.29a)$$

$$J^{u\alpha} \equiv \{u, X^\alpha\} = \{u, \mathbf{R}\} \cdot \nabla X^\alpha = -\hat{\mathbf{b}}_0 \cdot \nabla X^\alpha = -\frac{(\dot{X}^\alpha)_0}{u}. \quad (4.29b)$$

其中 $\epsilon^{\alpha\beta\gamma}$ 是置换张量的分量。

利用方程 (4.29)，可以得到

$$\begin{aligned} B_0 \cdot B_1 &= B_{0\gamma} \nabla X^\gamma \cdot \nabla \times (A_{1\beta} \nabla X^\beta) \\ &= J_{(\psi, \theta, \zeta)}^{-1} B_{0\gamma} \partial_\alpha A_{1\beta} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} = -J^{\alpha\beta} \partial_\alpha A_{1\beta} B_0^2, \end{aligned} \quad (4.30a)$$

$$\begin{aligned} E_1 \times \frac{\hat{b}_0}{B_0} \cdot \nabla X^\alpha &= \frac{1}{B_0^2} \nabla X^\alpha \cdot (E_{1\beta} \nabla X^\beta \times B_{0\gamma} \nabla X^\gamma) \\ &= \frac{1}{J_{(\psi, \theta, \zeta)} B_0^2} B_{0\gamma} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} E_{1\beta} = -J^{\alpha\beta} E_{1\beta}, \end{aligned} \quad (4.30b)$$

$$B_1 \cdot \nabla X^\alpha = \nabla X^\alpha \cdot \nabla \times (A_{1\gamma} \nabla X^\gamma) = J_{(\psi, \theta, \zeta)}^{-1} \partial_\beta A_{1\gamma} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \quad (4.30c)$$

$$= \frac{1}{J_{(\psi, \theta, \zeta)} B_0^2} (B_0^\alpha B_{0\alpha} + B_0^\beta B_{0\beta} + B_0^\gamma B_{0\gamma}) \partial_\beta A_{1\gamma} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \quad (4.30d)$$

$$= -\frac{1}{u} \left[(\dot{X}^\alpha)_0 J^{\beta\gamma} + (\dot{X}^\beta)_0 J^{\gamma\alpha} + (\dot{X}^\gamma)_0 J^{\alpha\beta} \right] \partial_\beta A_{1\gamma}. \quad (4.30e)$$

将方程 (4.27) 和 (4.30) 代入方程 (4.28) 中，我们发现漂移近似下的一阶导心运动方程是

$$(\dot{X}^\alpha)_1 = -J^{\alpha\beta} (\omega_{1\beta\gamma} \dot{X}_0^\gamma + E_{1\beta}), \quad (4.31a)$$

$$(\dot{u})_1 = -J^{u\beta} (\omega_{1\beta\gamma} \dot{X}_0^\gamma + E_{1\beta}). \quad (4.31b)$$

在推导方程 (4.31b) 时，我们用了 $J^{u\beta} \omega_{1\beta\gamma} \dot{X}_0^\gamma = 0$ 。

通过比较方程 (4.23) 和 (4.31)，我们证明了基于正则回旋动理学理论的回旋中心运动方程与通常的导心运动方程在线性漂移近似下是等价的。

4.5 GYCAVA 介绍

在本节中，我们将介绍独立发展的计算回旋中心运动的数值程序 GYCAVA[79]。程序 GYCAVA 是 “GYrocenter CAnonical Variable Advance” 的缩写。它是在导心运动的数值程序 GCM[86, 93] 的基础上编写的。

GCM 是计算未扰导心运动的程序，它是由等离子体所的肖小涛博士所编写。它所使用的坐标系是由王少杰教授发展的精确正则变量 [84]。它首先读取磁场平衡位形数据，然后对于单自变量函数用三次样条插值算法作一维插值，对于双自变量函数用 B 样条插值算法作二维差值。GCM 中计算粒子轨道的子

程序采用了变时间步长, 四阶荣格-库塔算法。通过可变的时间步长来控制每一次粒子推进位置的误差。由于四阶荣格-库塔算法会随着计算时间的累积而使误差变大, GCM 中采用了通过对粒子位置的修正来实现哈密顿量修正, 从而控制粒子长时间模拟的误差。

GYCAVA 是计算在一般的电势、磁矢势扰动下单粒子的导心轨道。当取扰动为零时, 可以用 GCM 作基准测试, 即由 GYCAVA 计算的未扰导心运动与由 GCM 获得的结果一致。R. B. White 所编写的知名的导心程序 ORBIT 也可以计算存在电磁扰动时的导心运动。GYCAVA 与 ORBIT 的不同之处有如下几点。GYCAVA 能计算任意电磁扰动下的导心运动, 而 ORBIT 只能计算有一定特殊的电磁扰动 ($\delta \mathbf{B} = \nabla \times (\alpha \mathbf{B})$)。GYCAVA 使用的精确正则变量精度上稍高于 ORBIT 所使用的近似正则变量。另外, GYCAVA 中包含了拉莫尔半径效应, 而 ORBIT 中没有包含这个效应。

4.6 GYCAVA 的理论基础

在 GYCAVA 程序中, 我们用回旋中心正则运动方程来推进粒子。子程序 GYROTRAN 是用来将导心坐标系变换到回旋中心坐标系, 或从回旋中心坐标系变换到导心坐标系。初始导心正则坐标系 $Z^i = (P_\theta, \theta, P_\alpha, \alpha_c)$ 和非正则坐标系 $X^i = (\psi(\mathbf{Z}), \zeta(\mathbf{Z}), \rho_{\parallel} g(\mathbf{Z}))$ 变换到回旋中心正则坐标系 $\bar{Z}^i = (\bar{P}_\theta, \bar{\theta}, \bar{P}_\alpha, \bar{\alpha}_c)$ 和非正则坐标系 $\bar{X}^i = (\psi(\bar{\mathbf{Z}}), \zeta(\bar{\mathbf{Z}}), \rho_{\parallel} g(\bar{\mathbf{Z}}))$ 是通过以下方程进行的,

$$\bar{Z}^i = Z^i + \langle G_1^i \rangle, \quad (4.32a)$$

$$\bar{X}^i = X^i + \frac{\partial X^i}{\partial Z^j} \langle G_{1j} \rangle. \quad (4.32b)$$

粒子每推进一个时间步长, 回旋中心坐标系按照以下方程变换到导心坐标系:

$$Z^i = \bar{Z}^i - \langle G_1^i \rangle, \quad (4.33a)$$

$$X^i = \bar{X}^i - \frac{\partial X^i}{\partial \bar{Z}^j} \langle G_{1j} \rangle. \quad (4.33b)$$

程序中所用到的回旋中心运动方程是

$$\frac{d\bar{\theta}}{dt} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{P}_\theta} (\bar{\psi}, \bar{\theta}, \bar{\alpha}_c, \bar{P}_\alpha), \quad (4.34a)$$

$$\frac{d\bar{P}_\theta}{dt} = -\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{\theta}} (\bar{\psi}, \bar{\theta}, \bar{\alpha}_c, \bar{P}_\alpha), \quad (4.34b)$$

$$\frac{d\bar{\alpha}_c}{dt} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{P}_\alpha} (\bar{\psi}, \bar{\theta}, \bar{\alpha}_c, \bar{P}_\alpha), \quad (4.34c)$$

$$\frac{d\bar{P}_\alpha}{dt} = -\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{\alpha}_c} (\bar{\psi}, \bar{\theta}, \bar{\alpha}_c, \bar{P}_\alpha), \quad (4.34d)$$

$$\frac{d\bar{\psi}}{dt} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{\theta}} \frac{d\bar{\theta}}{dt} + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{P}_\theta} \frac{d\bar{P}_\theta}{dt} + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{\alpha}_c} \frac{d\bar{\alpha}_c}{dt} + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{P}_\alpha} \frac{d\bar{P}_\alpha}{dt}, \quad (4.34e)$$

$$\bar{\psi} = \psi (\bar{P}_\theta, \bar{\theta}, \bar{P}_\alpha), \quad (4.34f)$$

$$\bar{h} = \bar{H} - \bar{U} = \bar{H}_0 + \bar{H}_1 + \bar{H}_2 - \bar{U}, \quad (4.34g)$$

$$\bar{H}_0 = H_0, \quad (4.34h)$$

$$\bar{H}_1 = \langle \delta \phi \rangle - (\dot{\psi}_0 \langle \delta A_\psi \rangle + \dot{\theta}_0 \langle \delta A_\theta \rangle + \dot{\zeta}_0 \langle \delta A_\zeta \rangle + \dot{\xi}_0 \langle \delta \mathbf{A} \cdot \partial_\xi \boldsymbol{\rho} \rangle), \quad (4.34i)$$

$$\bar{H}_2 = \frac{1}{2} \langle |\delta \mathbf{A}_{gc}|^2 \rangle. \quad (4.34j)$$

其中变量 $\bar{\rho}_{\parallel} \bar{g}, \bar{\zeta}$ 根据以下方程获得,

$$\bar{\rho}_{\parallel} \bar{g} = \bar{\psi} - \bar{P}_\alpha, \quad (4.35a)$$

$$\bar{\zeta} = -\bar{\alpha}_c + q(\bar{\psi})\bar{\theta} - \lambda(\bar{\psi}, \bar{\theta}, \psi_0). \quad (4.35b)$$

对于 S_1, \bar{H}_1 的详细处理在下面给出。回旋半径和垂直速度写为

$$\boldsymbol{\rho} = \rho_\perp \hat{a}, \quad (4.36a)$$

$$\mathbf{v} = v_\parallel \hat{b} + v_\perp \hat{c}. \quad (4.36b)$$

这里 \hat{a}, \hat{c} 分别是回旋半径和垂直速度的方向。 \hat{b} 是平行磁场方向的单位矢量。旋转单位矢量 $(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c})$ 能用固定单位矢量 $(\hat{1}, \hat{2}, \hat{b})$ 表示,

$$\hat{a} = \cos \xi \hat{1} - \sin \xi \hat{2}, \quad (4.37a)$$

$$\hat{c} = -\sin \xi \hat{1} - \cos \xi \hat{2}. \quad (4.37b)$$

其中固定单位矢量 $(\hat{1}, \hat{2}, \hat{b})$ 与回旋角无关。 $\hat{1}$ 和 $\hat{2}$ 分别选为 $\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|}$ 和 $\frac{\hat{b} \times \nabla\psi}{|\nabla\psi|}$ 。使用方程 (4.36) 和 (4.37) 以及

$$\begin{aligned}\rho \cdot \nabla &= \rho \cdot \nabla X^j \partial_j = \rho_\perp \hat{1} \cdot \nabla X^j \cos \xi \partial_j - \rho_\perp \hat{2} \cdot \nabla X^j \sin \xi \partial_j \\ &\equiv \rho_c^j \cos \xi \partial_j + \rho_s^j \sin \xi \partial_j,\end{aligned}\quad (4.38)$$

可以得到

$$e^{\rho \cdot \nabla} = e^{\rho_s^j \sin \xi \partial_j} e^{\rho_c^j \cos \xi \partial_j} = \sum_{m,n} i^{-m} I_m(\rho_s^j \partial_j) I_{n-m}(\rho_c^j \partial_j) e^{in\xi}, \quad (4.39a)$$

$$e^{\rho \cdot \nabla} \cos \xi = \sum_{m,n} i^{-m} I_m(\rho_s^j \partial_j) I'_{n-m}(\rho_c^j \partial_j) e^{in\xi}, \quad (4.39b)$$

$$e^{\rho \cdot \nabla} \sin \xi = \sum_{m,n} i^{-m} I'_m(\rho_s^j \partial_j) I_{n-m}(\rho_c^j \partial_j) e^{in\xi}. \quad (4.39c)$$

其中, $X^j = (\psi, \theta, \zeta)$ 。

根据方程 (1.32), K_1 能重写成

$$\begin{aligned}K_1 &= e^{\rho \cdot \nabla} (\delta\phi_c - (\dot{\psi}_0 \delta A_{\psi c} + \dot{\theta}_0 \delta A_{\theta c} + \dot{\zeta}_0 \delta A_{\zeta c})) \\ &\quad + e^{\rho \cdot \nabla} \cos \xi v_\perp \hat{1} \cdot \delta \mathbf{A}_c + e^{\rho \cdot \nabla} \sin \xi v_\perp \hat{2} \cdot \delta \mathbf{A}_c.\end{aligned}\quad (4.40)$$

这里, ∇ 只作用于 $(\delta\phi_c, \delta \mathbf{A}_c)$ 。下标 c 指相应的函数在导心位置计算。

通过使用 $\frac{d_0 S_1}{dt} \simeq \dot{\xi}_0 \partial_\xi S_1$ 和方程 (1.33a), 一阶标量场 S_1 可写成

$$S_1 = \int \frac{\tilde{K}_1}{\Omega_c} d\xi. \quad (4.41)$$

其中, Ω_c 是回旋频率。

让 S_1 , K_1 对回旋角作傅里叶级数展开,

$$S_1 = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} S_{1n} e^{in\xi}, \quad (4.42a)$$

$$K_1 = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} K_{1n} e^{in\xi}. \quad (4.42b)$$

结合方程 (4.39, 4.40, 4.41, 4.42), 可以得到

$$S_1 = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{in\Omega_c} K_{1n}, \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} K_{1n} = & \sum_m \{ i^{-m} I_m(\rho_s^j \partial_j) I_{n-m}(\rho_c^j \partial_j) [\delta\phi_c - (\dot{\psi}_0 \delta A_{\psi c} + \dot{\theta}_0 \delta A_{\theta c} + \dot{\zeta}_0 \delta A_{\zeta c})] \\ & + i^{-m} I_m(\rho_s^j \partial_j) I'_{n-m}(\rho_c^j \partial_j) v_{\perp} \hat{1} \cdot \delta \mathbf{A}_c \\ & + i^{-m} I'_m(\rho_s^j \partial_j) I_{n-m}(\rho_c^j \partial_j) v_{\perp} \hat{2} \cdot \delta \mathbf{A}_c \}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

值得注意的是 $\bar{H}_1 = \langle K_1 \rangle = K_{10}$ 。在程序 GYCAVA 中, Bessel 函数 $I_n(x)$, $I'_n(x)$ 展开至 $O(x^2)$; 这意味着有限拉莫尔半径效保留到二阶。

4.7 GYCAVA 的数值算法

下面我们将简要介绍 GYCAVA 程序的主要流程。

1. 首先, 读取托卡马克位形的平衡数据。比如读取由程序 shafranov 计算得到的平衡数据。这些平衡数据主要是与磁场相关的数据, 包括 $g(\psi)$, $q(\psi)$, $I(\psi)$ 以及 $R(\psi, \theta)$, $Z(\psi, \theta)$, $\delta(\psi, \theta)$, $B(\psi, \theta)$, $Q(\psi, \theta)$, $\int \delta(\psi^*, \theta) d\psi^*$, $\int (\int \delta(\psi^*, \theta) d\psi^*) d\psi$ 。然后对平衡数据作插值。对以上单变量函数的平衡数据作三次样条函数插值。而对于以上双变量函数的平衡数据, 对它们的极向角作傅里叶变换, 对它们的径向作三次样条函数插值。
2. 给定电磁扰动, 并输出扰动磁面数据。首先, 给定有理面 q_{mn} , 然后结合二分法和 Newton-Raphson 迭代法来求此有理面处极向磁通 ψ_{mn} 的值。再给定扰动 $(\delta\phi, \delta\mathbf{A})$ 的函数形式, 并对其在径向作三次样条函数插值。最后, 给出螺旋磁通关于 R 、 Z 的函数, 即 $\psi_h(R, Z)$, 以及螺旋磁通关于 ψ 、 θ 的函数, 即 $\psi_h(\psi, \theta)$, 并输出数据。
3. 设置一些程序的控制参数。控制参数有误差控制参数, 扰动控制参数, 运动方程非线性项控制参数等。给定粒子种类, 及其初始导心相空间坐标。并求得初始导心正则坐标 $(P_{\alpha 0}, P_{\theta 0}, \alpha_{c0}, \theta_0)$ 。通过相空间变换, 将初始导心坐标变换到初始回旋中心坐标。

4. 采用变时间步长（或定时间步长），四阶 Runge-Kutta 算法，用回旋中心哈密顿方程组推进粒子。程序 GYCAVA 中的子程序 FUNCT 是计算回旋中心运动方程组右边的函数值。在 FUNCT 中，先求出与平衡相关的数值，如 g, q, I, δ, B, Q 等。再求出与坐标变换矩阵相关的数值，如 $(\partial X^i / \partial Z^j)$ 等。接着，求出与未扰动哈密顿量相关的数值，如 H_0 等。然后，求出与一阶、二阶扰动哈密顿量相关的数值，如 \bar{H}_1, \bar{H}_2 等。最后求出相空间速度的数值，如 $d(X^i, Z^j)/dt$ 。回旋中心哈密顿方程组的数值实现在附录 A 中详细给出。
5. 对每个时刻通过相空间逆变换从回旋中心坐标变换回导心坐标，这由子程序 GYROTRAN 完成。先求出与 $S_1, \delta A_q$ 相关的量。再求出与 Γ_1^i 相关的量。然后，对每个时刻的回旋中心正则、非正则坐标 Z^i, X^i ，利用相空间逆变换来求得导心正则、非正则坐标 \bar{Z}^i, \bar{X}^i 。子程序 GYROTRAN 中，一阶生成矢量场的数值实现在附录 B 中详细给出。
6. 输出粒子的导心轨道的庞加莱截面数据。（庞加莱截面，是三维空间中的粒子轨道与某一截面相交的一系列离散的点。它的优点，在低维空间中保留原始轨道的周期性或准周期性。）在本程序中，庞加莱截面取 $(\psi, \theta)_{\zeta=0}$ 。另外还输出能量与纵向不变量的数据。

4.8 GYCAVA 的数值结果

作为 GYCAVA 程序的一个例子，我们将在这一节中讨论托卡马克中存在静态磁岛时的导心轨道。

这里所用的平衡位形是大半径比近似下，由磁通坐标构建的 Shafranov 平衡。托卡马克平衡的主要参数如下。大半径是 $1.67m$ ，小半径是 $0.4m$ 。环向平衡磁场是 $2.4T$ 。磁轴和边界处的安全因子分别是 1.2 和 3.7。

为了模拟静态磁岛，我们选择扰动极向磁通为

$$\psi_1 = \psi_{1(m,n)}(\psi) \cos(m\theta - n\zeta - \omega t), \quad (4.45a)$$

$$\psi_{1(m,n)}(\psi) = \epsilon_\psi (\psi - \psi_{axis})(\psi_b - \psi). \quad (4.45b)$$

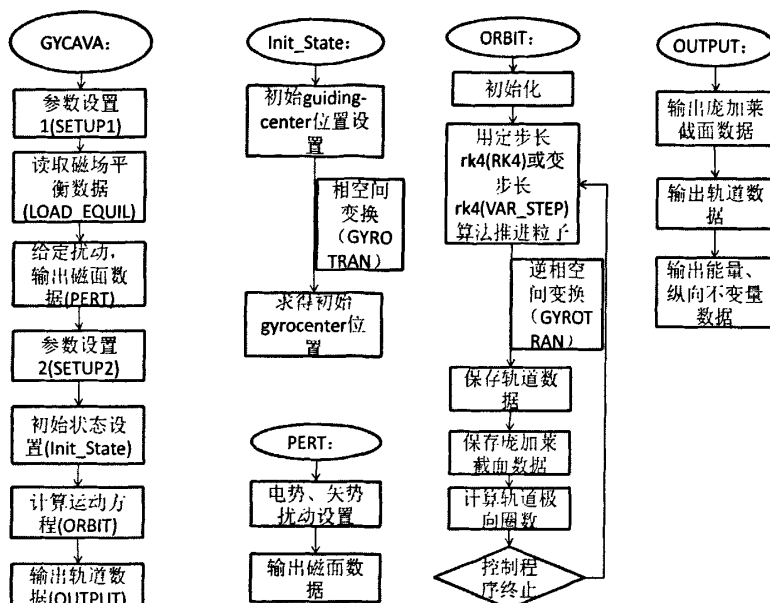


图 4.1 回旋中心运动计算程序 GYCAVA 的流程图

这里, ϵ_ψ 是一个小参数。($\psi_{axis} = 0, \psi_b = 0.098 \text{ Wb}$) 分别是平衡极向磁通在磁轴和边界处的值。我们选择扰动参数为 $m = 2, n = 1, \omega = 0, \psi_{1(m,n)}(\psi_s)/\psi_s = 10^{-5}$, 其中 ψ_s 是平衡极向磁通在 $q = 2$ 处的值。我们选择的扰动极向磁通的特征尺度与小半径是同一个量级, $|\nabla \ln \psi_1|^{-1} \sim r$ 。因此, 在这个数值例子中有限拉莫尔半径效应可以忽略。

磁面和粒子轨道的庞加莱截面取在 $\zeta = 0$ 处。初始粒子能量设定为 $E_0 = 1 \text{ keV}$ 。粒子从两个不同的初始径向位置出发, 对于电子是 ($\psi = 5.734 \times 10^{-2} \text{ Wb}, \theta = 0, \zeta = 0$) 和 ($\psi = 5.756 \times 10^{-2} \text{ Wb}, \theta = 0, \zeta = 0$), 对于离子是 ($\psi = 5.837 \times 10^{-2} \text{ Wb}, \theta = 0, \zeta = 0$) 和 ($\psi = 5.864 \times 10^{-2} \text{ Wb}, \theta = 0, \zeta = 0$)。我们在图中标出初始磁面位置用来比较不同的粒子轨道。

有或无扰动时, 通行电子轨道的庞加莱截面图分别如图 4.2(a) 和图 4.2(b) 所示。电子轨道轻微地偏离磁面。通行离子轨道的庞加莱截面图分别如图 4.2(c) 和 4.2(d) 所示。离子轨道相当多地偏离磁面。显然可以看出在有理面处静态磁岛诱导出岛状结构的通行粒子轨道。

有或无扰动时, 俘获电子轨道的庞加莱截面图如图 4.3(a) 和图 4.3(b) 所示。俘获离子轨道的庞加莱截面图如图 4.3(c) 和图 4.3(d) 所示。从图 4.3 可以看出静态磁岛对俘获粒子的庞加莱截面的影响很小。

哈密顿量和纵向不变量的数值误差如图 4.4 (通行粒子) 和图 4.5 (俘获粒子) 所示, 它们的定义如下,

$$\Delta \bar{H} / [\bar{H}]_0 \equiv \frac{\bar{H}(\bar{Z}) - [\bar{H}(\bar{Z})]_{t=0}}{[\bar{H}(\bar{Z})]_{t=0}}, \quad (4.46a)$$

$$\Delta \mathcal{J} / \mathcal{J}_0 \equiv \frac{\mathcal{J} - \mathcal{J}_0}{\mathcal{J}_0}. \quad (4.46b)$$

这里, $\bar{H}(\bar{Z})$ 和 J 分别是在回旋中心坐标系计算得到的回旋中心哈密顿量和纵向不变量。 $[\bar{H}(\bar{Z})]_{t=0}$ 和 J_0 分别是 $\bar{H}(\bar{Z})$ 和 J 的初始值。

纵向不变量定义为 [84]

$$\mathcal{J} = \oint P_\theta d\theta. \quad (4.47)$$

这里纵向不变量的定义与文献 [89] 不同是因为 P_θ 的定义不同。这里纵向不变量的定义不仅对于俘获粒子有效, 而且对于通行粒子也适用。这在文献 [84] 中已指出。而一般的定义 [94] 只对于俘获粒子有效。

需要注意的是, 存在静态磁岛时粒子能量是守恒的。从图 4.4 和图 4.5 可以看出哈密顿量的偏离是 10^{-6} 的量级。这从数值角度证明了粒子能量的守恒性。

从图 4.4(b,d) 和图 4.5(b,d), 可以明显地看到没有扰动时, 对于平衡场中的通行、俘获粒子, $\Delta \mathcal{J} / \mathcal{J}_0 \sim 10^{-4}$ 。这从数值上证明了没有扰动时纵向不变量的守恒性 [84]。从图 4.4(a,c) 和图 4.5(a,c) 可以看出存在扰动时, 对于通行粒子 $\Delta \mathcal{J} / \mathcal{J}_0 \sim 10^{-2}$, 而对于俘获粒子 $\Delta \mathcal{J} / \mathcal{J}_0 \sim 10^{-4}$ 。明显地, 甚至存在扰动时, 对于俘获粒子 \mathcal{J} 仍是一个很好的不变量。这在之前已经被指出 [89, 94, 95]。然而, 对于扰动场下的通行粒子来说, \mathcal{J} 不是一个好的不变量。这不难理解。对于俘获粒子, 它在一个反弹周期后回到几乎相同的位置, 因此, 俘获粒子的运动在扰动场中是准周期的。纵向不变量因此是守恒的。对于通行粒子, 一个极向周期后, 它不会回到相同的环向位置, 因此它的极向周期运动只存在于环向对称的平衡场中 (这里环向角是可遗的), 而当环向对称被破坏时 \mathcal{J} 就不再是一个好的不变量。

从以上的讨论中, 不难理解图 4.2 和图 4.3 所示的结果。磁岛对俘获粒子的

影响很小是因为纵向不变量的守恒性。磁岛诱导出岛状结构的通行粒子轨道是因为环向对称性的破坏使纵向不变量 J 不守恒。通行电子几乎沿着磁力线是因为它的拉莫尔半径很小。通行离子轨道（含有岛状结构）相当大程度地偏离磁面是因为离子拉莫尔半径较大。这种存在磁岛时的离子轨道的行为在文献 [96] 中已指出。

4.9 小结

在本章中，我们首先使用回旋动理学中李变换的性质得到了使用精确正则变量的线性回旋动理学理论。并证明了回旋中心运动方程与通常的导心运动方程在线性、漂移近似下是等价的。其次，我们介绍了在前面的理论上自主发展起来的导心轨道程序 GYCAVA。它可以用来计算托卡马克中任意电磁扰动下带点粒子的导心轨道。最后，我们讨论了在静态磁岛中用 GYCAVA 计算的数值结果。我们发现托卡马克中的静态磁岛对于俘获粒子的庞加莱截面图几乎没什么影响。这是因为俘获粒子的纵向不变量是守恒的。而对于通行粒子，静态磁岛会导致岛状结构的通行粒子轨道。这是因为非环向对称的扰动破坏了通行粒子的纵向不变量。

程序 GYCAVA 还可以用来模拟托卡马克中任意扰动下导心轨道的有限拉莫尔效应。此外，它是用正则回旋动理学方法模拟托卡马克聚变等离子体的一个主要环节。

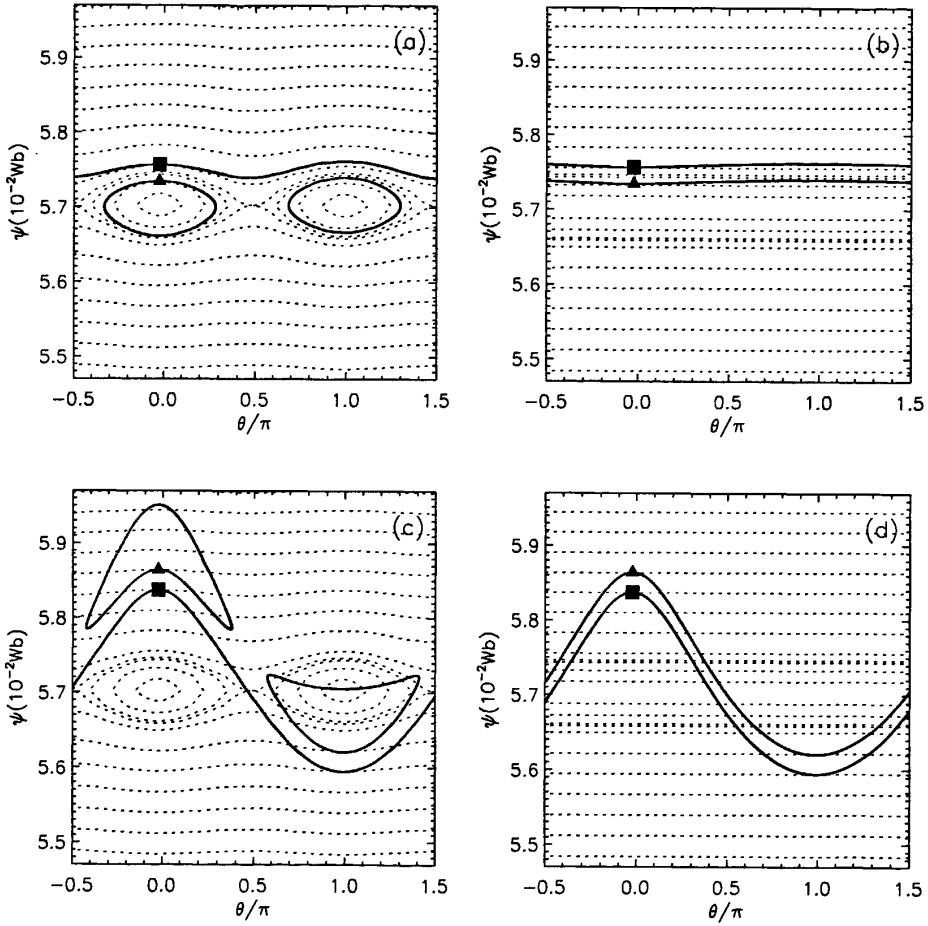


图 4.2 磁岛图和通行粒子的庞加莱截面图

磁岛结构的磁面用点线表示。初始能量是 $E_0 = 1 \text{ keV}$ ；投掷方向为 $v_{\parallel}/v = 1.0$ 。两个不同的发射点分别用方形和三角符号标记。(a) 和 (b) 分别对于有、无扰动下的通行电子。(c) 和 (d) 分别对于有、无扰动下的通行离子。

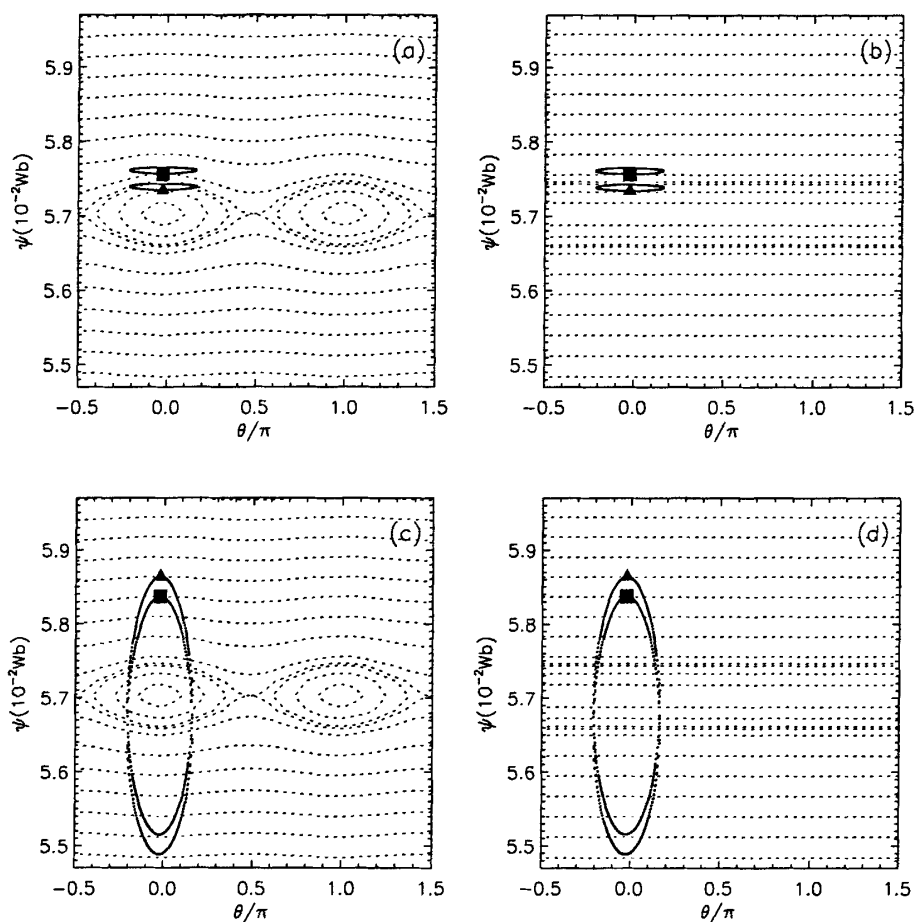


图 4.3 磁岛图和俘获粒子的庞加莱截面图

磁岛结构的磁面用点线表示。初始能量是 $E_0 = 1\text{keV}$ ；投掷方向为 $v_{\parallel}/v = 0.2$ 。两个不同的发射点分别用方形和三角符号标记。(a) 和 (b) 分别对于有、无扰动下的俘获电子。(c) 和 (d) 分别对于有、无扰动下的俘获离子。

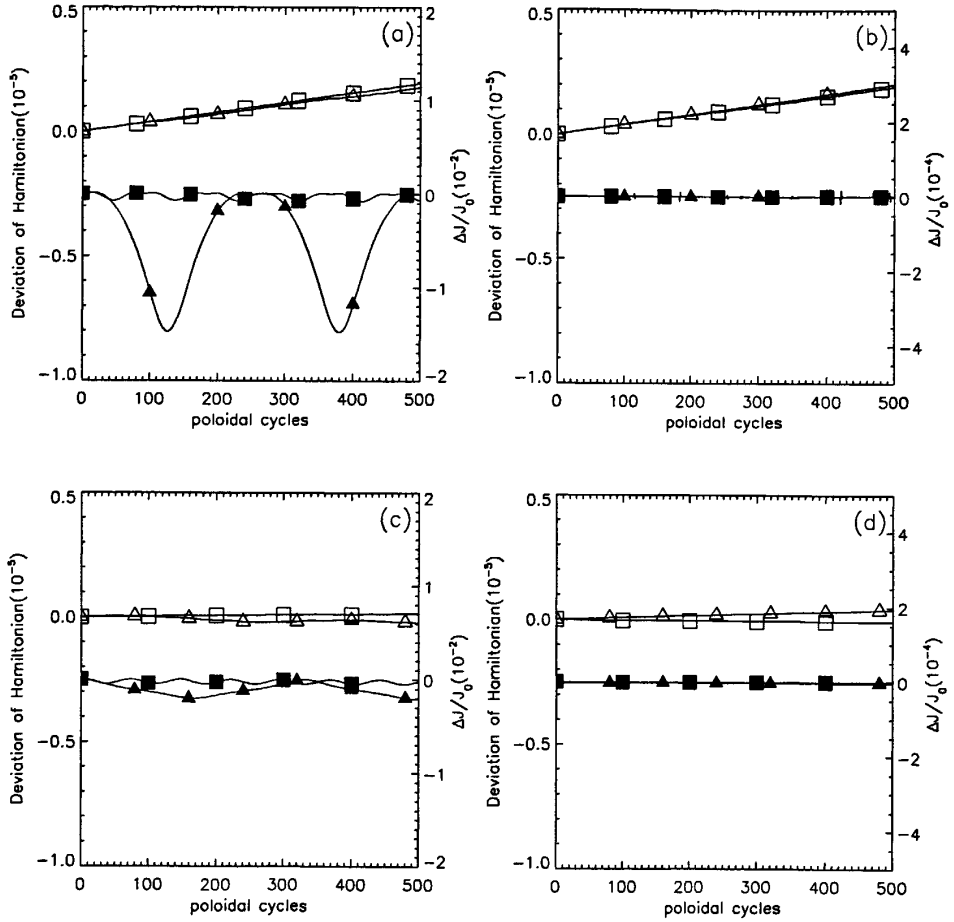


图 4.4 通行粒子的哈密顿量的误差 $\Delta\bar{H}/[\bar{H}]_0$ 和纵向不变量的误差 $\Delta J/J_0$ 前者用“ Δ ”和“ \square ”标记，后者用“ \blacktriangle ”和“ \blacksquare ”标记。从两个不同初始位置发射（与图4.2相同）初始能量是 $E_0 = 1\text{keV}$ ；投掷方向为 $v_{\parallel}/v = 1.0$ 。(a) 和 (b) 分别对于有、无扰动下的通行电子。(c) 和 (d) 分别对于有、无扰动下的通行离子。

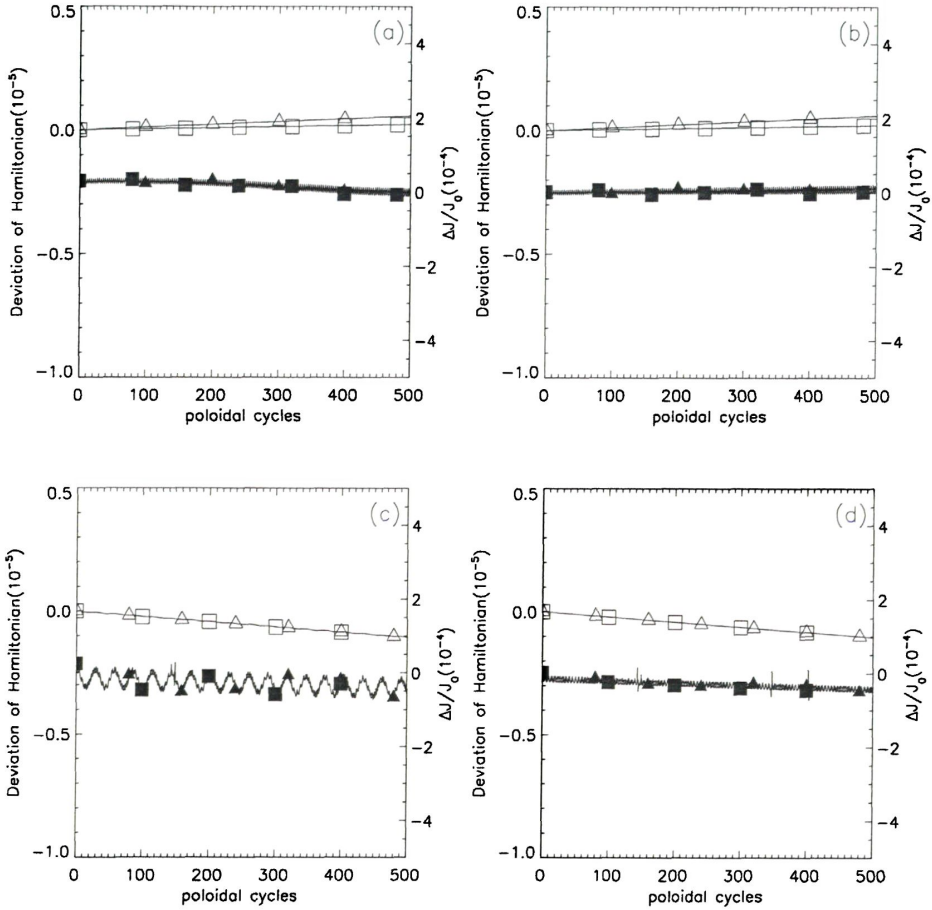


图 4.5 通行粒子的哈密顿量的误差 $\Delta \bar{H}/[\bar{H}]_0$ 和纵向不变量的误差 $\Delta J/J_0$ 。前者用“ Δ ”和“ \square ”标记，后者用“ \blacktriangle ”和“ \blacksquare ”标记。从两个不同初始位置发射（与图4.2相同）初始能量是 $E_0 = 1\text{keV}$ ；投掷方向为 $v_{\parallel}/v = 0.2$ 。(a) 和 (b) 分别对于有、无扰动下的捕获电子。(c) 和 (d) 分别对于有、无扰动下的俘获离子。

第五章 总结

我们首先总结了基于李变换扰动方法的回旋动理学理论。它可以分成四个部分，分别是未扰的导心哈密顿动力学，引入扰动后的回旋中心哈密顿动力学，回旋动理学的弗拉索夫方程和拉回变换，回旋动理学麦克斯韦方程组。

在第二章中，我们讨论了非线性回旋动理学理论中李变换的性质。这里的李变换依赖于扰动。李变换的三条性质如图2.1所示。第一条性质是回旋中心雅可比行列式函数形式上与导心雅可比行列式相同。第二条性质是两套回旋中心坐标之间的坐标变换与相应的两套导心坐标之间的坐标变换相同。第三条性质是尽管生成矢量场不是哈密顿流，然而他们在相空间是不可压缩流。这与第一条性质一致。对于一套新的导心坐标和与之相应的回旋中心坐标，我们不需要重新推导回旋动理学理论。如果我们知道使用一套回旋中心坐标的回旋动理学方程组，那么通过使用两套相应的导心坐标的坐标变换，我们能够直接得到使用另外一套回旋中心坐标的回旋动理学方程组。

在第三章中，我们用“R-I”分解的方法证明了对回旋动理学方程组作系统截断下，非线性回旋动理学理论的电磁规范不变性。对于任意截断，非线性回旋动理学理论的电磁规范不变性就会被破坏。对于非线性回旋动理学理论，对回旋动理学弗拉索夫方程和回旋中心分布函数的拉回变换作系统截断时，导心分布函数是一个电磁规范不变量。这里，系统截断意味着所有的二阶项都需要保留下来。这是因为一阶、二阶生成矢量场不是电磁规范不变量。在非线性回旋动理学模拟中，要想保证导心分布函数的电磁规范不变性，就必须保留回旋动理学弗拉索夫方程和回旋中心分布函数的拉回变换中的所有二阶项。保留所有二阶项时，总能量精确到二阶。对于拥有规范不变性的回旋动理学理论，我们在针对一个具体问题，可以选择合适的电磁规范来简化计算，这在文献[26]中已经讨论过。此外，我们能够使用回旋动理学理论的电磁规范不变性来检查解析推导。

在第四章中，我们首先使用回旋动理学中李变换的性质得到了使用精确正

则变量的线性回旋动理学理论。并证明了回旋中心运动方程与通常的导心运动方程在线性、漂移近似下是等价的。其次，我们介绍了在前面的理论上自主发展起来的导心轨道程序 GYCAVA。它可以用来计算托卡马克中任意电磁扰动下带点粒子的导心轨道。最后，我们讨论了在静态磁岛中用 GYCAVA 计算的数值结果。我们发现托卡马克中的静态磁岛对于俘获粒子的庞加莱截面图几乎没什么影响。这是因为俘获粒子的纵向不变量是守恒的。而对于通行粒子，静态磁岛会导致岛状结构的通行粒子轨道。这是因为非环向对称的扰动破坏了通行粒子的纵向不变量。程序 GYCAVA 还可以用来模拟托卡马克中任意扰动下导心轨道的有限拉莫尔效应。此外，它对以后正则回旋动理学理论在托卡马克聚变等离子体模拟中应用会有一定的帮助。

参考文献

- [1] F. W. Perkins, D. E. Post, N. A. Uckan, M. Azumi, D. J. Campbell, N. Ivanov, N. R. Sauthoff, M. Wakatani, W. M. Nevins, M. Shimada, J. Van Dam, D. Boucher, G. Cordey, A. Costley, J. Jacquinet, G. Janeschitz, S. Mirnov, V. Mukhovatov, G. Porter, S. Putvinski, R. Stambaugh, J. Wesley, K. Young, R. Aymar, Y. Shimomura, N. Fujisawa, Y. Igitkhanov, A. Kukushkin, and M. Rosenbluth. Chapter 1: Overview and summary. *Nucl. Fusion*, 39(12):2137, 1999.
- [2] M. Shimada, D. J. Campbell, V. Mukhovatov, M. Fujiwara, N. Kirneva, K. Lackner, M. Nagami, V. D. Pustovitov, N. Uckan, J. Wesley, N. Asakura, A. E. Costley, A. J. H. Donne, E. J. Doyle, A. Fasoli, C. Gormezano, Y. Gribov, O. Gruber, T. C. Hender, W. Houlberg, S. Ide, Y. Kamada, A. Leonard, B. Lipschultz, A. Loarte, K. Miyamoto, V. Mukhovatov, T. H. Osborne, A. Polevoi, and A. C. C. Sipps. Progress in the iter physics basis - chapter 1: Overview and summary. *Nucl. Fusion*, 47(6):S1, 2007.
- [3] J. D. Lawson. Some criteria for a power producing thermonuclear reactor. *Proceedings of the Physical Society. Section B*, 70:6, 1957.
- [4] A. H. Boozer. Physics of magnetically confined plasmas. *Reviews of Modern Physics*, 76(4):1071, 2004.
- [5] W. M. Tang and V. S. Chan. Advances and challenges in computational plasma science. *Plasma Phys. Control. Fusion*, 47(2):R1, 2005.
- [6] D. A. Batchelor, M. Beck, A. Becoulet, R. V. Budny, C. S. Chang, P. H. Diamond, J. Q. Dong, G. Y. Fu, A. Fukuyama, T. S. Hahm, D. E. Keyes, Y. Kishimoto, S. Klasky, L. L. Lao, K. Li, Z. Lin, B. Ludaecher, J. Manickam, N. Nakajima, T. Ozeki, N. Podhorszki, W. M. Tang, M. A. Vouk, R. E. Waltz, S. J. Wang, H. R. Wilson, X. Q. Xu, M. Yagi, and F. Zonca. Simulation of fusion plasmas: Current status and future direction. *Plasma Sci. & Tech.*, 9:312, 2007.
- [7] M. Wakatani, V. S. Mukhovatov, K. H. Burrell, J. W. Connor, J. G. Cordey, Y. V. Esipchuk, X. Garbet, S. V. Lebedev, M. Mori, K. Toi, S. M. Wolfe, D. Boucher, A. N. Chudnovskii, J. C. DeBoo, W. A. Houlberg, S. M. Kaye, Y. Miura, Y. Ogawa, M. V. Osipenko, F. Ryter, T. Takizuka, G. Bateman, G. Bracco, D. J. Campbell, T. N.

- Carlstrom, Y. N. Dnestrovski, T. Fujita, A. Fukuyama, P. Gohil, M. J. Greenwald, T. Hoang, G. M. D. Hogeweyj, A. E. Hubbard, O. J. W. F. Kardaun, J. E. Kinsey, J. A. Konings, M. Marinucci, Y. R. Martin, D. R. Mikkelsen, J. Ongena, T. H. Osborne, F. W. Perkins, A. R. Polevoi, M. N. Rosenbluth, D. P. Schissel, J. A. Snipes, P. M. Stubberfield, E. J. Synakowski, A. Taroni, K. Thomsen, M. F. Turner, N. A. Uckan, M. Valovic, G. Vlad, R. E. Waltz, J. Weiland, H. Zohm, D. E. Post, N. A. Uckan, M. Azumi, N. Ivanov, N. R. Sauthoff, M. Wakatani, W. M. Nevins, M. Shimada, and J. Van Dam. Chapter 2: Plasma confinement and transport. *Nucl. Fusion*, 39(12):2175, 1999.
- [8] E. J. Doyle, W. A. Houlberg, Y. Kamada, V. Mukhovatov, T. H. Osborne, A. Polevoi, G. Bateman, J. W. Connor, J. G. Cordey, T. Fujita, X. Garbet, T. S. Hahm, L. D. Horton, A. E. Hubbard, F. Imbeaux, F. Jenko, J. E. Kinsey, Y. Kishimoto, J. Li, T. C. Luce, Y. Martin, M. Ossipenko, V. Parail, A. Peeters, T. L. Rhodes, J. E. Rice, C. M. Roach, V. Rozhansky, F. Ryter, G. Saibene, R. Sartori, A. C. C. Sips, J. A. Snipes, M. Sugihara, E. J. Synakowski, H. Takenaga, T. Takizuka, K. Thomsen, M. R. Wade, H. R. Wilson, ITPA Transport Phys Topical Grp, and ITPA Confinement Database Modelling. Chapter 2: Plasma confinement and transport. *Nucl. Fusion*, 47(6):S18, 2007.
- [9] P. H. Rutherford and E. A. Frieman. Drift instabilities in general magnetic field configurations. *Phys. Fluids*, 11:569, 1968.
- [10] J. B. Taylor and R. J. Hastie. Stability of general plasma equilibria-i formal theory. *Plasma Physics*, 10:479, 1968.
- [11] T. M. Antonsen Jr and B. Lane. Kinetic equations for low frequency instabilities in inhomogeneous plasmas. *Phys. Fluids*, 23:1205, 1980.
- [12] P. J. Catto, W. M. Tang, and D. E. Baldwin. Generalized gyrokinetics. *Plasma Physics*, 23(7):639, 1981.
- [13] E. A. Frieman and L. Chen. Non-linear gyrokinetic equations for low-frequency electromagnetic-waves in general plasma equilibria. *Phys. Fluids*, 25(3):502, 1982.
- [14] J. Candy, R. E. Waltz, S. E. Parker, and Y. Chen. Relevance of the parallel nonlinearity in gyrokinetic simulations of tokamak plasmas. *Phys. Plasmas*, 13(7):074501, 2006.
- [15] D. H. E. Dubin, J. A. Krommes, C. Oberman, and W. W. Lee. Non-linear gyrokinetic equations. *Phys. Fluids*, 26(12):3524, 1983.

- [16] W. W. Lee. Gyrokinetic approach in particle simulation. *Phys. Fluids*, 26(2):556, 1983.
- [17] T. S. Hahm. Nonlinear gyrokinetic equations for tokamak microturbulence. *Phys. Fluids*, 31(9):2670, 1988.
- [18] T. S. Hahm, W. W. Lee, and A. J. Brizard. Nonlinear gyrokinetic theory for finite beta plasmas. *Phys. Fluids*, 31:1940, 1988.
- [19] A. J. Brizard. Nonlinear gyrokinetic maxwell-vlasov equations using magnetic coordinates. *J. Plasma Phys.*, 41:541, 1989.
- [20] A. J. Brizard. New variational principle for the vlasov-maxwell equations. *Phys. Rev. Lett.*, 84(25):5768, 2000.
- [21] A. J. Brizard. Variational principle for nonlinear gyrokinetic vlasov-maxwell equations. *Phys. Plasmas*, 7(12):4816, 2000.
- [22] A. J. Brizard and T. S. Hahm. Foundations of nonlinear gyrokinetic theory. *Reviews of Modern Physics*, 79:421, 2007.
- [23] A. J. Brizard. Exact energy conservation laws for full and truncated nonlinear gyrokinetic equations. *Phys. Plasmas*, 17(4):042303, 2010.
- [24] B. Scott and J. Smirnov. Energetic consistency and momentum conservation in the gyrokinetic description of tokamak plasmas. *Phys. Plasmas*, 17(11):112302, 2010.
- [25] Alain J. Brizard and Natalia Tronko. Exact momentum conservation laws for the gyrokinetic vlasov-poisson equations. *Phys. Plasmas*, 18(8):082307, 2011.
- [26] Shaojie Wang. Canonical hamiltonian gyrocenter variables and gauge invariant representation of the gyrokinetic equation. *Phys. Rev. E*, 64(5):056404, 2001.
- [27] L. Qi and S. Wang. Gyrokinetic equation in an exact canonical hamiltonian coordinate system and its orbit-averaged form. *Phys. Plasmas*, 16(6):062504, 2009.
- [28] H. Qin, W. M. Tang, and W. W. Lee. Gyrocenter-gauge kinetic theory. *Phys. Plasmas*, 7(11):4433, 2000.
- [29] H. Qin, R. H. Cohen, W. M. Nevins, and X. Q. Xu. Geometric gyrokinetic theory for edge plasmas. *Phys. Plasmas*, 14(5):056110, 2007.
- [30] Z. Yu and H. Qin. Gyrocenter-gauge kinetic algorithm for high frequency waves in magnetized plasmas. *Phys. Plasmas*, 16(3):032507, 2009.

- [31] 于治. 几何动理学理论和模拟方法. 博士学位论文, 中国科学技术大学, 2009.
- [32] L. Wang and T. S. Hahm. Generalized expression for polarization density. *Phys. Plasmas*, 16(6):062309, 2009.
- [33] L. Wang and T. S. Hahm. Nonlinear gyrokinetic theory with polarization drift. *Phys. Plasmas*, 17(8):082304, 2010.
- [34] T. S. Hahm, L. Wang, and J. Madsen. Fully electromagnetic nonlinear gyrokinetic equations for tokamak edge turbulence. *Phys. Plasmas*, 16(2):022305, 2009.
- [35] W. Dorland and G. W. Hammett. Gyrofluid turbulence models with kinetic effects. *Phys. Fluids B*, 5(3):812, 1993.
- [36] G. W. Hammett, M. A. Beer, W. Dorland, S. C. Cowley, and S. A. Smith. Developments in the gyrofluid approach to tokamak turbulence simulations. *Plasma Phys. Control. Fusion*, 35(8):973, 1993.
- [37] R. E. Waltz, G. D. Kerbel, and J. Milovich. Toroidal gyro-landau fluid model turbulence simulations in a nonlinear ballooning mode representation with radial modes. *Phys. Plasmas*, 1(7):2229, 1994.
- [38] M. A. Beer and G. W. Hammett. Toroidal gyrofluid equations for simulations of tokamak turbulence. *Phys. Plasmas*, 3(11):4046, 1996.
- [39] R. D. Sydora, V. K. Decyk, and J. M. Dawson. Fluctuation-induced heat transport results from a large global 3d toroidal particle simulation model. *Plasma Phys. Control. Fusion*, 38(12A):A281, 1996.
- [40] R. E. Waltz, G. M. Staebler, W. Dorland, G. W. Hammett, M. Kotschenreuther, and J. A. Konings. A gyro-landau-fluid transport model. *Phys. Plasmas*, 4(7):2482, 1997.
- [41] B. Scott. Exb shear flows and electromagnetic gyrofluid turbulence. *Phys. Plasmas*, 7(5):1845, 2000.
- [42] A. Brizard. Nonlinear gyrofluid description of turbulent magnetized plasmas. *Phys. Fluids B*, 4(5):1213, 1992.
- [43] X. Garbet, Y. Idomura, L. Villard, and T. H. Watanabe. Gyrokinetic simulations of turbulent transport. *Nucl. Fusion*, 50(4):043002, 2010.

-
- [44] R. Hatzky, T. M. Tran, A. Konies, R. Kleiber, and S. J. Allfrey. Energy conservation in a nonlinear gyrokinetic particle-in-cell code for ion-temperature-gradient-driven modes in theta-pinch geometry. *Phys. Plasmas*, 9(3):898, 2002.
- [45] J. M. Dawson. Particle simulation of plasmas. *Reviews of Modern Physics*, 55(2):403, 1983.
- [46] W. W. Lee. Gyrokinetic particle simulation-model. *J. Comput. Phys.*, 72(1):243, 1987.
- [47] W. W. Lee and W. M. Tang. Gyrokinetic particle simulation of ion temperature-gradient drift instabilities. *Phys. Fluids*, 31(3):612, 1988.
- [48] A. M. Dimits and W. W. Lee. Partially linearized algorithms in gyrokinetic particle simulation. *J. Comput. Phys.*, 107(2):309, 1993.
- [49] S. E. Parker and W. W. Lee. A fully nonlinear characteristic method for gyrokinetic simulation. *Phys. Fluids B*, 5(1):77, 1993.
- [50] A. M. Dimits, T. J. Williams, J. A. Byers, and B. I. Cohen. Scalings of ion-temperature-gradient-driven anomalous transport in tokamaks. *Phys. Rev. Lett.*, 77(1):71, 1996.
- [51] Z. Lin, T. S. Hahm, W. W. Lee, W. M. Tang, and R. B. White. Turbulent transport reduction by zonal flows: Massively parallel simulations. *Science*, 281(5384):1835, 1998.
- [52] Y. Idomura, S. Tokuda, and Y. Kishimoto. Global gyrokinetic simulation of ion temperature gradient driven turbulence in plasmas using a canonical maxwellian distribution. *Nucl. Fusion*, 43(4):234, 2003.
- [53] S. Joliet, A. Bottino, P. Angelino, R. Hatzky, T. M. Tran, B. F. Mcmillan, O. Sauter, K. Appert, Y. Idomura, and L. Villard. A global collisionless pic code in magnetic coordinates. *Comput. Phys. Commun.*, 177(5):409, 2007.
- [54] W. X. Wang, T. S. Hahm, W. W. Lee, G. Rewoldt, J. Manickam, and W. M. Tang. Nonlocal properties of gyrokinetic turbulence and the role of $\mathbf{e} \times \mathbf{b}$ flow shear. *Phys. Plasmas*, 14(7):072306, 2007.
- [55] M. Kotschenreuther, G. Rewoldt, and W. M. Tang. Comparison of initial-value and eigenvalue codes for kinetic toroidal plasma instabilities. *Comput. Phys. Commun.*, 88(2-3):128, 1995.
- [56] M. Kotschenreuther, W. Dorland, M. A. Beer, and G. W. Hammett. Quantitative predictions of tokamak energy confinement from first-principles simulations with kinetic effects. *Phys. Plasmas*, 2(6):2381, 1995.

- [57] W. Dorland, F. Jenko, M. Kotschenreuther, and B. N. Rogers. Electron temperature gradient turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 85(26):5579, 2000.
- [58] J. Candy and R. E. Waltz. An eulerian gyrokinetic-maxwell solver. *J. Comput. Phys.*, 186(2):545, 2003.
- [59] F. Jenko, W. Dorland, M. Kotschenreuther, and B. N. Rogers. Electron temperature gradient driven turbulence. *Phys. Plasmas*, 7(5):1904, 2000.
- [60] T.H. Watanabe and H. Sugama. Velocity-space structures of distribution function in toroidal ion temperature gradient turbulence. *Nucl. Fusion*, 46:24, 2006.
- [61] A. G. Peeters and D. Strintzi. The effect of a uniform radial electric field on the toroidal ion temperature gradient mode. *Phys. Plasmas*, 11:3748, 2004.
- [62] Yasuhiro Idomura, Masato Ida, Takuma Kano, Nobuyuki Aiba, and Shinji Tokuda. Conservative global gyrokinetic toroidal full-f five-dimensional vlasov simulation. *Comput. Phys. Commun.*, 179(6):391, 2008.
- [63] Y. Idomura, H. Urano, N. Aiba, and S. Tokuda. Study of ion turbulent transport and profile formations using global gyrokinetic full-f vlasov simulation. *Nucl. Fusion*, 49:065029, 2009.
- [64] M. Brunetti, V. Grandgirard, O. Sauter, J. Vaclavik, and L. Villard. A semi-lagrangian code for nonlinear global simulations of electrostatic drift-kinetic itg modes. *Comput. Phys. Commun.*, 163(1):1, 2004.
- [65] V. Grandgirard, M. Brunetti, P. Bertrand, N. Besse, X. Garbet, P. Ghendrih, G. Manfredi, Y. Sarazin, O. Sauter, and E. Sonnendrücker. A drift-kinetic semi-lagrangian 4d code for ion turbulence simulation. *J. Comput. Phys.*, 217(2):395, 2006.
- [66] V. Grandgirard, Y. Sarazin, P. Angelino, A. Bottino, N. Crouseilles, G. Darinet, G. Dif-Pradalier, X. Garbet, P. Ghendrih, S. Jolliet, G. Latu, E. Sonnendrücker, and L. Villard. Global full-f gyrokinetic simulations of plasma turbulence. *Plasma Phys. Control. Fusion*, 49(12B):B173, 2007.
- [67] M. A. Beer, S. C. Cowley, and G. W. Hammett. Field-aligned coordinates for nonlinear simulations of tokamak turbulence. *Phys. Plasmas*, 2(7):2687, 1995.
- [68] A. M. Dimits, G. Bateman, M. A. Beer, B. I. Cohen, W. Dorland, G. W. Hammett, C. Kim, J. E. Kinsey, M. Kotschenreuther, A. H. Kritiz, L. L. Lao, J. Mandrekas, W. M.

- Nevins, S. E. Parker, A. J. Redd, D. E. Shumaker, R. Sydora, and J. Weiland. Comparisons and physics basis of tokamak transport models and turbulence simulations. *Phys. Plasmas*, 7(3):969, 2000.
- [69] X. Q. Xu, Z. Xiong, M. R. Dorr, J. A. Hittinger, K. Bodi, J. Candy, B. I. Cohen, R. H. Cohen, P. Colella, G. D. Kerbel, S. Krashennnikov, W. M. Nevins, H. Qin, T. D. Rognlien, P. B. Snyder, and M. V. Umansky. Edge gyrokinetic theory and continuum simulations. *Nucl. Fusion*, 47(8):809, 2007.
- [70] John R. Cary. Lie transform perturbation theory for hamiltonian systems. *Phys. Rep.*, 79(2):129, 1981.
- [71] John R. Cary and Allan N. Kaufman. Ponderomotive force and linear susceptibility in vlasov plasma. *Phys. Rev. Lett.*, 39(7):402, 1977.
- [72] J. R. Cary and A. N. Kaufman. Ponderomotive effects in collisionless plasma: A lie transform approach. *Phys. Fluids*, 24:1238, 1981.
- [73] S Johnston and AN Kaufman. Lie-operator approach to mode coupling in nonuniform plasma. *Phys. Rev. Lett.*, 40(19):1266, 1978.
- [74] R. G. Littlejohn. A guiding center hamiltonian: A new approach. *J. Math. Phys.*, 20:2445, 1979.
- [75] R. G. Littlejohn. Hamiltonian formulation of guiding center motion. *Phys. Fluids*, 24(9):1730, 1981.
- [76] R. G. Littlejohn. Variational principles of guiding centre motion. *J. Plasma Phys.*, 29(01):111, 1983.
- [77] R. G. Littlejohn. Hamiltonian perturbation theory in noncanonical coordinates. *J. Math. Phys.*, 23:742, 1982.
- [78] John R. Cary and Robert G. Littlejohn. Noncanonical hamiltonian mechanics and its application to magnetic field line flow. *Ann. Phys. (N.Y.)*, 151(1):1, 1983.
- [79] Yingfeng Xu, Xiaotao Xiao, and Shaojie Wang. Linear gyrokinetic theory and computation of the gyrocenter motion based on the exact canonical variables for axisymmetric tokamaks. *Phys. Plasmas*, 18(4):042505, 2011.
- [80] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, 2002.

- [81] J. R. Cary and A. J. Brizard. Hamiltonian theory of guiding-center motion. *Reviews of Modern Physics*, 81(2):693, 2009.
- [82] S. C. Chiu, V. S. Chan, Y. R. Lin-Liu, and Y. Omelchenko. Gyrokinetic theory in the white-chance-boozer coordinates. *Phys. Plasmas*, 7:4609, 2000.
- [83] R. B. White and L. E. Zakharov. Hamiltonian guiding center equations in toroidal magnetic configurations. *Phys. Plasmas*, 10:573, 2003.
- [84] Shaojie Wang. Canonical hamiltonian theory of the guiding-center motion in an axisymmetric torus, with the different time scales well separated. *Phys. Plasmas*, 13(5):52506, 2006.
- [85] G. A. Cooper, M. Jucker, W. A. Cooper, J. P. Graves, and M. Y. Isaev. Exact canonical drift hamiltonian formalism with pressure anisotropy and finite perturbed fields. *Phys. Plasmas*, 14(10):102506, 2007.
- [86] X. Xiao and S. Wang. Explicit runge-kutta integrator with hamiltonian correction for long-time simulations of guiding-center orbit in tokamak configurations. *Phys. Plasmas*, 15:122511, 2008.
- [87] R. B. White, A. H. Boozer, and Ralph Hay. Drift hamiltonian in magnetic coordinates. *Phys. Fluids*, 25(3):575, 1982.
- [88] R. B. White, R. J. Goldston, K. McGuire, A. H. Boozer, D. A. Monticello, and W. Park. Theory of mode-induced beam particle loss in tokamaks. *Phys. Fluids*, 26(10):2958, 1983.
- [89] R. B. White and M. S. Chance. Hamiltonian guiding center drift orbit calculation for plasmas of arbitrary cross section. *Phys. Fluids*, 27(10):2455, 1984.
- [90] Allen H. Boozer. Plasma equilibrium with rational magnetic surfaces. *Phys. Fluids*, 24(11):1999, 1981.
- [91] A. I. Morozov and L. S. Solov'ev. *Reviews of plasma physics*, volume 2. Consultants Bureau, New York, 1966.
- [92] Allen H. Boozer. Guiding center drift equations. *Phys. Fluids*, 23(5):904, 1980.
- [93] 肖小涛. 离子轨道损失与 H 模托克马克边界径向电场. 博士学位论文, 中国科学院等离子体物理研究所, 2010.

- [94] R. B. White. The theory of toroidally confined plasmas. Imperial College Press, London, 2006.
- [95] B. B. Kadomtsev. Plasma Physics and the Problem of Controlled Thermonuclear Reactions, volume III. Pergamon, London, 1960.
- [96] C. C. Hegna and A. Bhattacharjee. Suppression of the tearing mode by energetic ions. Phys. Rev. Lett., 63(19):2056, 1989.

参考文献

附录 A 回旋中心运动方程组的数值实现

在这一附录中,我们介绍一下程序 GYCAVA 中的子程序 FUNCT,即回旋中心运动方程组在数值上实现的具体过程。下面主要分成三部分。第一部分是给定粒子的回旋中心相空间坐标,求与平衡相关的物理量,第二部分求与扰动相关的物理量,第三部分求出哈密顿量以及回旋中心运动方程右边的函数值。

A.1 平衡部分

与平衡相关的物理量的数值求解可以分成以下六小部分。

a. 给定粒子的回旋中心相空间坐标,我们可以通过一维三次样条插值函数求出 $g(\psi)$, $g'(\psi)$, $g''(\psi)$, $q'(\psi)$, $I(\psi)$, $I'(\psi)$, $I''(\psi)$ 。另外,通过傅里叶逆变换和一维三次样条插值函数,我们可以求得 $\delta(\psi, \theta)$, $\partial_\psi \delta(\psi, \theta)$, $\partial_\theta \delta(\psi, \theta)$, $\partial_{\theta\theta}^2 \delta(\psi, \theta)$, $\partial_{\psi\theta}^2 \delta(\psi, \theta)$; $f(\psi, \theta)$, $\partial_\psi f(\psi, \theta)$, $\partial_\theta f(\psi, \theta)$, $\partial_{\psi\psi}^2 f(\psi, \theta)$, $\partial_{\psi\theta}^2 f(\psi, \theta)$, $\partial_{\theta\theta}^2 f(\psi, \theta)$ (这里, f 取 B , R , Z , ν)。

b. 通过先求 $q(\psi)$, $\int_0^\psi q d\psi$, $\int_0^\psi \delta d\psi$, $\partial_\theta \int_0^\psi \delta d\psi$, $\partial_{\theta\theta}^2 \int_0^\psi \delta d\psi$, $\partial_{\theta\theta\theta}^3 \int_0^\psi \delta d\psi$, $\partial_\theta \int_0^\psi \int_0^\psi \delta d\psi d\psi$, $\partial_{\theta\theta}^2 \int_0^\psi \int_0^\psi \delta d\psi d\psi$, $\partial_{\theta\theta\theta}^3 \int_0^\psi \int_0^\psi \delta d\psi d\psi$ 在 ψ 和 ψ_0 处的值,再求 $Q(\psi, \theta)$, $\int_0^\psi Q(\psi, \theta) d\psi$ 在 ψ 和 ψ_0 处的值。其中,

$$Q(\psi, \theta) = q(\psi) + \partial_\theta \int_0^\psi \delta(\psi, \theta) d\psi, \quad (\text{A.1a})$$

$$\int_0^\psi Q(\psi, \theta) d\psi = \int_0^\psi q(\psi) d\psi + \partial_\theta \int_0^\psi \int_0^\psi \delta(\psi, \theta) d\psi d\psi. \quad (\text{A.1b})$$

c. 求 D , $\partial_{X^i} D$, $A_{1,2,3}$, $\partial_{X^i} A_{1,2,3}$ 。它们的解析表达式如下:

$$D = gq + I + \rho_{\parallel} g(I' - g'I/g - g\partial_\theta \delta). \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned}\partial_\psi D &= q'g + qg' + I' \\ &+ \rho_{\parallel}g(I'' - g''I/g + g''I g'/g^2 - g'\partial_\theta\delta - g\partial_{\psi\theta}^2\delta),\end{aligned}\quad (\text{A.3a})$$

$$\partial_\theta D = -\rho_{\parallel}gg\partial_{\theta\theta}^2\delta, \quad (\text{A.3b})$$

$$\partial_\zeta D = 0, \quad (\text{A.3c})$$

$$\partial_{(\rho_{\parallel}g)} D = I' - g'I/g - g\partial_\theta\delta. \quad (\text{A.3d})$$

$$A_1 = q - [Q(\psi, \theta) - Q(\psi_0, \theta)] = q(\psi_0) - [\partial_\theta\delta_I(\psi, \theta) - \partial_\theta\delta_I(\psi_0, \theta)], \quad (\text{A.4a})$$

$$A_2 = A_1 + I/g, \quad (\text{A.4b})$$

$$\begin{aligned}A_3 &= \rho_{\parallel}g[\partial_\theta Q(\psi, \theta) - \partial_\theta Q(\psi_0, \theta)] - [\partial_\theta Q_I(\psi, \theta) - \partial_\theta Q_I(\psi_0, \theta)] \\ &+ (\psi - \psi_0)\partial_\theta Q(\psi_0, \theta) = \rho_{\parallel}g[\partial_{\theta\theta}^2\delta_I(\psi, \theta) - \partial_{\theta\theta}^2\delta_I(\psi_0, \theta)] - [\partial_{\theta\theta}^2\delta_{II}(\psi, \theta) \\ &- \partial_{\theta\theta}^2\delta_{II}(\psi_0, \theta)] + (\psi - \psi_0)\partial_{\theta\theta}^2\delta_I(\psi_0, \theta).\end{aligned}\quad (\text{A.4c})$$

$$\partial_\psi A_1 = -\partial_\theta\delta(\psi, \theta), \quad (\text{A.5a})$$

$$\partial_\theta A_1 = -[\partial_{\theta\theta}^2\delta_I(\psi, \theta) - \partial_{\theta\theta}^2\delta_I(\psi_0, \theta)], \quad (\text{A.5b})$$

$$\partial_\psi A_2 = \partial_\psi A_1 + I'/g - g'I/g^2, \quad (\text{A.5c})$$

$$\partial_\theta A_2 = \partial_\theta A_1, \quad (\text{A.5d})$$

$$\partial_\psi A_3 = \rho_{\parallel}g\partial_{\theta\theta}^2\delta - [\partial_{\theta\theta}^2\delta_I(\psi, \theta) - \partial_{\theta\theta}^2\delta_I(\psi_0, \theta)], \quad (\text{A.5e})$$

$$\begin{aligned}\partial_\theta A_3 &= \rho_{\parallel}g[\partial_{\theta\theta\theta}^3\delta_I(\psi, \theta) - \partial_{\theta\theta\theta}^3\delta_I(\psi_0, \theta)] - [\partial_{\theta\theta\theta}^3\delta_{II}(\psi, \theta) \\ &- \partial_{\theta\theta\theta}^3\delta_{II}(\psi_0, \theta)] + (\psi - \psi_0)\partial_{\theta\theta\theta}^3\delta_I(\psi_0, \theta),\end{aligned}\quad (\text{A.5f})$$

$$\partial_{(\rho_{\parallel}g)} A_3 = \partial_\theta\delta_I(\psi, \theta) - \partial_\theta\delta_I(\psi_0, \theta), \quad (\text{A.5g})$$

$$\partial_\zeta A_1 = \partial_\zeta A_2 = \partial_\zeta A_3 = 0, \quad (\text{A.5h})$$

$$\partial_{(\rho_{\parallel}g)} A_1 = \partial_{(\rho_{\parallel}g)} A_2 = 0. \quad (\text{A.5i})$$

d. 求 $\frac{\partial X^j}{\partial Z^i}$, $\partial_{X^m} \left(\frac{\partial X^j}{\partial Z^i} \right)$.

$$\left(\frac{\partial X^j}{\partial Z^i} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial P_\theta} & \frac{\partial \theta}{\partial P_\theta} & \frac{\partial \zeta}{\partial P_\theta} & \frac{\partial(\rho_{\parallel} g)}{\partial P_\theta} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \theta} & \frac{\partial \theta}{\partial \theta} & \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} & \frac{\partial(\rho_{\parallel} g)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \psi}{\partial P_\alpha} & \frac{\partial \theta}{\partial P_\alpha} & \frac{\partial \zeta}{\partial P_\alpha} & \frac{\partial(\rho_{\parallel} g)}{\partial P_\alpha} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_c} & \frac{\partial \theta}{\partial \alpha_c} & \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha_c} & \frac{\partial(\rho_{\parallel} g)}{\partial \alpha_c} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial P_\theta} &= \frac{g}{e_s D}, & \frac{\partial \theta}{\partial P_\theta} &= 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial \theta} &= \frac{\partial \psi}{\partial P_\theta} A_3 e_s, & \frac{\partial \theta}{\partial \theta} &= 1, \\ \frac{\partial \psi}{\partial P_\alpha} &= \frac{\partial \psi}{\partial P_\theta} A_2, & \frac{\partial \theta}{\partial P_\alpha} &= 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_c} &= 0, & \frac{\partial \theta}{\partial \alpha_c} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial P_\theta} &= -\frac{\partial \psi}{\partial P_\theta} \delta, & \frac{\partial(\rho_{\parallel} g)}{\partial P_\theta} &= \frac{\partial \psi}{\partial P_\theta}, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} &= -\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \delta + A_1, & \frac{\partial(\rho_{\parallel} g)}{\partial \theta} &= \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial P_\alpha} &= -\frac{\partial \psi}{\partial P_\alpha} \delta, & \frac{\partial(\rho_{\parallel} g)}{\partial P_\alpha} &= \frac{\partial \psi}{\partial P_\alpha} - \frac{1}{e_s}, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha_c} &= -1, & \frac{\partial(\rho_{\parallel} g)}{\partial \alpha_c} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} \partial_\psi \left(\frac{\partial \psi}{\partial P_\theta} \right) &= \frac{g'}{e_s D} - \frac{\partial \psi}{\partial P_\theta} \frac{\partial_\psi D}{D}, & \partial_\psi \left(\frac{\partial \zeta}{\partial P_\theta} \right) &= -\partial_\psi \left(\frac{\partial \psi}{\partial P_\theta} \right) \delta - \frac{\partial \psi}{\partial P_\theta} \partial_\psi \delta, \\ \partial_\psi \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) &= e_s \left(\partial_\psi \left(\frac{\partial \psi}{\partial P_\theta} \right) A_3 + \frac{\partial \psi}{\partial P_\theta} \partial_\psi A_3 \right), & \partial_\psi \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \right) &= -\partial_\psi \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \delta - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \partial_\psi \delta + \partial_\psi A_1, \\ \partial_\psi \left(\frac{\partial \psi}{\partial P_\alpha} \right) &= \partial_\psi \left(\frac{\partial \psi}{\partial P_\theta} \right) A_2 + \frac{\partial \psi}{\partial P_\theta} \partial_\psi A_2, & \partial_\psi \left(\frac{\partial \zeta}{\partial P_\alpha} \right) &= -\partial_\psi \left(\frac{\partial \psi}{\partial P_\alpha} \right) \delta - \frac{\partial \psi}{\partial P_\alpha} \partial_\psi \delta, \\ \partial_\psi \left(\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_c} \right) &= 0, & \partial_\psi \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \alpha_c} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} \partial_\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial P_\theta} \right) &= -\frac{\partial \psi}{\partial P_\theta} \frac{\partial_\theta D}{D}, & \partial_\theta \left(\frac{\partial \zeta}{\partial P_\theta} \right) &= -\partial_\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial P_\theta} \right) \delta - \frac{\partial \psi}{\partial P_\theta} \partial_\theta \delta, \\ \partial_\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) &= e_s \left(\partial_\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial P_\theta} \right) A_3 + \frac{\partial \psi}{\partial P_\theta} \partial_\theta A_3 \right), & \partial_\theta \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \right) &= -\partial_\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \delta - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \partial_\theta \delta + \partial_\theta A_1, \\ \partial_\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial P_\alpha} \right) &= \partial_\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial P_\theta} \right) A_2 + \frac{\partial \psi}{\partial P_\theta} \partial_\theta A_2, & \partial_\theta \left(\frac{\partial \zeta}{\partial P_\alpha} \right) &= -\partial_\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial P_\alpha} \right) \delta - \frac{\partial \psi}{\partial P_\alpha} \partial_\theta \delta, \\ \partial_\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_c} \right) &= 0, & \partial_\theta \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \alpha_c} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned}
 \partial_{(\rho_{\parallel}g)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial P_\theta} \right) &= -\frac{\partial \psi}{\partial P_\theta} \frac{\partial(\rho_{\parallel}g)}{\partial P_\theta} \frac{D}{D}, & \partial_{(\rho_{\parallel}g)} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial P_\theta} \right) &= -\partial_{(\rho_{\parallel}g)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial P_\theta} \right) \delta, \\
 \partial_{(\rho_{\parallel}g)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) &= e_s \left(\partial_{(\rho_{\parallel}g)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial P_\theta} \right) A_3 + \frac{\partial \psi}{\partial P_\theta} \partial_{(\rho_{\parallel}g)} A_3 \right), & \partial_{(\rho_{\parallel}g)} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \right) &= -\partial_{(\rho_{\parallel}g)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \delta + \partial_{(\rho_{\parallel}g)} A_1, \\
 \partial_{(\rho_{\parallel}g)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial P_\alpha} \right) &= \partial_{(\rho_{\parallel}g)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial P_\theta} \right) A_2 + \frac{\partial \psi}{\partial P_\theta} \partial_{(\rho_{\parallel}g)} A_2, & \partial_{(\rho_{\parallel}g)} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial P_\alpha} \right) &= -\partial_{(\rho_{\parallel}g)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial P_\alpha} \right) \delta, \\
 \partial_{(\rho_{\parallel}g)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_c} \right) &= 0, & \partial_{(\rho_{\parallel}g)} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \alpha_c} \right) &= 0.
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

$$\partial_{X^m} \left(\frac{\partial(\rho_{\parallel}g)}{\partial Z^i} \right) = \partial_{X^m} \left(\frac{\partial \psi}{\partial Z^i} \right), \tag{A.12a}$$

$$\partial_{X^m} \left(\frac{\partial \theta}{\partial Z^i} \right) = 0. \tag{A.12b}$$

e. 求 J^{ij} , H_0 , $\partial_{B,g} H_0$, $\partial_{X^i} H_0$, $\partial_{BB,Bg,gg,B(\rho_{\parallel}g),g(\rho_{\parallel}g)}^2 H_0$, $\partial_{X^i X^j}^2 H_0$.

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.13}$$

$$H_0 = \frac{1}{2} (\rho_{\parallel}g)^2 \frac{B^2}{g^2} \frac{e_s^2}{m_s} + \mu B = \frac{1}{2} \partial_{BB}^2 H_0 B^2 + \mu B, \tag{A.14a}$$

$$\partial_B H_0 = (\rho_{\parallel}g)^2 \frac{B}{g^2} \frac{e_s^2}{m_s} + \mu = \frac{1}{2} \partial_{BB}^2 H_0 B + \mu, \tag{A.14b}$$

$$\partial_g H_0 = -(\rho_{\parallel}g)^2 \frac{B^2}{g^3} \frac{e_s^2}{m_s} = 0.5 \partial_{Bg}^2 H_0 B, \tag{A.14c}$$

$$\partial_\psi H_0 = \partial_B H_0 \partial_\psi B + \partial_g H_0 g', \tag{A.14d}$$

$$\partial_\theta H_0 = \partial_B H_0 \partial_\theta B, \tag{A.14e}$$

$$\partial_\zeta H_0 = 0, \tag{A.14f}$$

$$\partial_{(\rho_{\parallel}g)} H_0 = (\rho_{\parallel}g)^2 \frac{B^2}{g^2} \frac{e_s^2}{m_s}. \tag{A.14g}$$

$$\partial_{BB}^2 H_0 = (\rho_{\parallel} g)^2 \frac{1}{g^2} \frac{e_s^2}{m_s}, \quad (\text{A.15a})$$

$$\partial_{B(\rho_{\parallel} g)}^2 H_0 = 2(\rho_{\parallel} g) \frac{B}{g^2} \frac{e_s^2}{m_s}, \quad (\text{A.15b})$$

$$\partial_{Bg}^2 H_0 = -2(\rho_{\parallel} g)^2 \frac{B}{g^3} \frac{e_s^2}{m_s} = -2\partial_{BB}^2 H_0 \frac{B}{g}, \quad (\text{A.15c})$$

$$\partial_{g(\rho_{\parallel} g)}^2 H_0 = -2(\rho_{\parallel} g) \frac{B^2}{g^3} \frac{e_s^2}{m_s} = -\partial_{B(\rho_{\parallel} g)}^2 H_0 \frac{B}{g}, \quad (\text{A.15d})$$

$$\partial_{gg}^2 H_0 = 3(\rho_{\parallel} g)^2 \frac{B^2}{g^4} \frac{e_s^2}{m_s} = 3\partial_{BB}^2 H_0 \frac{B^2}{g^2}. \quad (\text{A.15e})$$

$$\begin{aligned} \partial_{\psi\psi}^2 H_0 &= \partial_B H_0 \partial_{\psi\psi}^2 B + \partial_g H_0 g'' \\ &+ \partial_{BB}^2 H_0 (\partial_{\psi} B)^2 + 2\partial_{Bg}^2 H_0 \partial_{\psi} B g' + \partial_{gg}^2 H_0 (g')^2, \end{aligned} \quad (\text{A.16a})$$

$$\partial_{\psi\theta}^2 H_0 = \partial_B H_0 \partial_{\psi\theta}^2 B + (\partial_{BB}^2 H_0 \partial_{\psi} B + \partial_{Bg}^2 H_0 g') \partial_{\theta} B, \quad (\text{A.16b})$$

$$\partial_{\theta\theta}^2 H_0 = \partial_B H_0 \partial_{\theta\theta}^2 B + \partial_{BB}^2 H_0 (\partial_{\theta} B)^2, \quad (\text{A.16c})$$

$$\partial_{\psi(\rho_{\parallel} g)}^2 H_0 = \partial_{B(\rho_{\parallel} g)}^2 H_0 \partial_{\psi} B + \partial_{g(\rho_{\parallel} g)}^2 H_0 g', \quad (\text{A.16d})$$

$$\partial_{\theta(\rho_{\parallel} g)}^2 H_0 = \partial_{B(\rho_{\parallel} g)}^2 H_0 \partial_{\theta} B, \quad (\text{A.16e})$$

$$\partial_{(\rho_{\parallel} g)(\rho_{\parallel} g)}^2 H_0 = \frac{B^2}{g^2} \frac{e_s^2}{m_s}, \quad (\text{A.16f})$$

$$\partial_{\zeta X}^2 H_0 = 0, \quad (\text{A.16g})$$

$$\partial_{\theta\psi}^2 H_0 = \partial_{\theta\psi}^2 H_0, \partial_{(\rho_{\parallel} g)\psi}^2 H_0 = \partial_{\psi(\rho_{\parallel} g)}^2 H_0, \partial_{(\rho_{\parallel} g)\theta}^2 H_0 = \partial_{\theta(\rho_{\parallel} g)}^2 H_0. \quad (\text{A.16h})$$

f. 求 $\left(\frac{dX^i}{dt}\right)_0$, $\partial_{X^m} \left(\frac{dX^i}{dt}\right)_0$.

$$\left(\frac{dX^i}{dt}\right)_0 = \frac{\partial X^i}{\partial Z^j} J^{jk} \frac{\partial X^l}{\partial Z^k} \partial_l H_0, \quad (\text{A.17a})$$

$$\begin{aligned} \partial_{X^m} \left(\frac{dX^i}{dt}\right)_0 &= \partial_{X^m} \left(\frac{\partial X^i}{\partial Z^j}\right) J^{jk} \frac{\partial X^l}{\partial Z^k} \partial_l H_0 \\ &+ \frac{\partial X^i}{\partial Z^j} J^{jk} \partial_{X^m} \left(\frac{\partial X^l}{\partial Z^k}\right) \partial_l H_0 + \frac{\partial X^i}{\partial Z^j} J^{jk} \frac{\partial X^l}{\partial Z^k} \partial_{ml}^2 H_0. \end{aligned} \quad (\text{A.17b})$$

A.2 扰动部分

与扰动相关的物理量的数值求解可以分成以下七小部分。

a. 求 $D\delta A_q^{(m)}$, 螺旋角 β , T_{trig} , T_d , I_{123} 。其中, $E^{(i)} = T_d E^{(i-1)}$ 。

$$\beta = m\theta - n\zeta - \omega t, \quad (\text{A.18a})$$

$$\partial_{\theta, \zeta, t} \beta = m, -n, -\omega, \quad (\text{A.18b})$$

$$\begin{aligned} T_{trig} &= \begin{pmatrix} E^{(0)} & E^{(1)} & E^{(2)} & E^{(3)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & -\cos\beta & \sin\beta \\ \cos\beta & -\sin\beta & -\cos\beta & \sin\beta \\ \cos\beta & -\sin\beta & -\cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta & -\sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.18c})$$

$$T_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.19})$$

$$I_{123} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.20})$$

下面函数中的下标 $(j2, j3)$ 表示 $I_{123}(j, 2)$, $I_{123}(j, 3)$; $(k2, k3)$ 表示 $I_{123}(k, 2)$, $I_{123}(k, 3)$ 。

b. 求 δA_q , $\partial_l \delta A_q$, $\partial_{ll'}^2 \delta A_q$, $\partial_{lll'}^3 \delta A_q$.

$$\delta A_q = D \delta A_q^{(0)} E_q^{(0)}, \quad (\text{A.21a})$$

$$\partial_\psi \delta A_q = D \delta A_q^{(1)} E_q^{(0)}, \quad (\text{A.21b})$$

$$\partial_l \delta A_q = D \delta A_q^{(0)} E_q^{(1)} \partial_l \beta, \quad (\text{A.21c})$$

$$\partial_{\psi\psi}^2 \delta A_q = D \delta A_q^{(2)} E_q^{(0)}, \quad (\text{A.21d})$$

$$\partial_{\psi l}^2 \delta A_q = D \delta A_q^{(1)} E_q^{(1)} \partial_l \beta, \quad (\text{A.21e})$$

$$\partial_{ll'}^2 \delta A_q = D \delta A_q^{(0)} E_q^{(2)} \partial_l \beta \partial_{l'} \beta. \quad (\text{A.21f})$$

$$\partial_{\psi\psi\psi}^3 \delta A_q = D \delta A_q^{(3)} E_q^{(0)}, \quad (\text{A.22a})$$

$$\partial_{\psi ll'}^3 \delta A_q = D \delta A_q^{(1)} E_q^{(2)} \partial_l \beta \partial_{l'} \beta, \quad (\text{A.22b})$$

$$\partial_{\psi\psi l}^3 \delta A_q = D \delta A_q^{(2)} E_q^{(1)} \partial_l \beta, \quad (\text{A.22c})$$

$$\partial_{ll'l'}^3 \delta A_q = D \delta A_q^{(0)} E_q^{(3)} \partial_l \beta \partial_{l'} \beta \partial_{l''} \beta. \quad (\text{A.22d})$$

c. 求 $I \delta A_q^\lambda$, $\partial_{X^i} I \delta A_q^\lambda$; $(I \delta A_2)^\lambda_p$, $\partial_{X^i} (\delta A_2)^\lambda_p$.

$$\begin{aligned} I \delta A_q^1 &= \delta A_q, & \partial_{X^i} I \delta A_q^1 &= \partial_l \delta A_q, \\ I \delta A_q^{[2:4]} &= \partial_k \delta A_q, & \partial_{X^i} I \delta A_q^{[2:4]} &= \partial_{lk}^2 \delta A_q, \\ I \delta A_q^{[5:7]} &= \partial_{kk}^2 \delta A_q, & \partial_{X^i} I \delta A_q^{[5:7]} &= \partial_{lkk}^2 \delta A_q, \\ I \delta A_q^{[8:10]} &= \partial_{k2,k3}^2 \delta A_q, & \partial_{X^i} I \delta A_q^{[8:10]} &= \partial_{l,k2,k3}^3 \delta A_q. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

$$(I\delta A2)_{1:3}^1 = \delta A_j \delta A_j, \quad (\text{A.24a})$$

$$(I\delta A2)_{4:6}^1 = \delta A_{j2} \delta A_{j3}, \quad (\text{A.24b})$$

$$(I\delta A2)_{1:3}^{[2:4]} = \partial_k(\delta A_j \delta A_j) = 2\partial_k \delta A_j \delta A_j, \quad (\text{A.24c})$$

$$(I\delta A2)_{4:6}^{[2:4]} = \partial_k(\delta A_{j2} \delta A_{j3}) = \partial_k \delta A_{j2} \delta A_{j3} + \delta A_{j2} \partial_k \delta A_{j3}, \quad (\text{A.24d})$$

$$(I\delta A2)_{1:3}^{[5:7]} = \partial_{kk}^2(\delta A_j \delta A_j) = 2\partial_{kk}^2 \delta A_j \delta A_j + 2\partial_k \delta A_j \partial_k \delta A_j, \quad (\text{A.24e})$$

$$(I\delta A2)_{4:6}^{[5:7]} = \partial_{kk}^2(\delta A_{j2} \delta A_{j3}) \\ = \partial_{kk}^2 \delta A_{j2} \delta A_{j3} + 2\partial_k \delta A_{j2} \partial_k \delta A_{j3} + \delta A_{j2} \partial_{kk}^2 \delta A_{j3}, \quad (\text{A.24f})$$

$$(I\delta A2)_{1:3}^{[8:10]} = \partial_{k2,k3}^2(\delta A_j \delta A_j) = 2\partial_{k2,k3}^2 \delta A_j \delta A_j + 2\partial_{k2} \delta A_j \partial_{k3} \delta A_j, \quad (\text{A.24g})$$

$$(I\delta A2)_{4:6}^{[8:10]} = \partial_{k2,k3}^2(\delta A_{j2} \delta A_{j3}) = \partial_{k2,k3}^2 \delta A_{j2} \delta A_{j3} \\ + \partial_{k2} \delta A_{j2} \partial_{k3} \delta A_{j3} + \partial_{k3} \delta A_{j2} \partial_{k2} \delta A_{j3} + \delta A_{j2} \partial_{k2,k3}^2 \delta A_{j3}. \quad (\text{A.24h})$$

$$\partial_{X^l}(I\delta A2)_{1:3}^1 = \partial_l(\delta A_j \delta A_j) = 2\partial_l \delta A_j \delta A_j, \quad (\text{A.25a})$$

$$\partial_{X^l}(I\delta A2)_{4:6}^1 = \partial_l(\delta A_{j2} \delta A_{j3}) = \partial_l \delta A_{j2} \delta A_{j3} + \delta A_{j2} \partial_l \delta A_{j3}, \quad (\text{A.25b})$$

$$\partial_{X^l}(I\delta A2)_{1:3}^{[2:4]} = \partial_{kl}^2(\delta A_j \delta A_j) = 2\partial_{kl}^2 \delta A_j \delta A_j + 2\partial_k \delta A_j \partial_l \delta A_j, \quad (\text{A.25c})$$

$$\partial_{X^l}(I\delta A2)_{4:6}^{[2:4]} = \partial_{kl}^2(\delta A_{j2} \delta A_{j3}) = \partial_{kl}^2 \delta A_{j2} \delta A_{j3} \\ + \partial_k \delta A_{j2} \partial_l \delta A_{j3} + \partial_l \delta A_{j2} \partial_k \delta A_{j3} + \delta A_{j2} \partial_{kl}^2 \delta A_{j3}, \quad (\text{A.25d})$$

$$\partial_{X^l}(I\delta A2)_{1:3}^{[5:7]} = \partial_{lkk}^3(\delta A_j \delta A_j) \\ = 2\partial_{lkk}^3 \delta A_j \delta A_j + 2\partial_{kk}^2 \delta A_j \partial_l \delta A_j + 4\partial_{lk}^2 \delta A_j \partial_k \delta A_j, \quad (\text{A.25e})$$

$$\partial_{X^l}(I\delta A2)_{4:6}^{[5:7]} = \partial_{lkk}^3(\delta A_{j2} \delta A_{j3}) \\ = \partial_{lkk}^3 \delta A_{j2} \delta A_{j3} + \delta A_{j2} \partial_{lkk}^3 \delta A_{j3} + \partial_{kk}^2 \delta A_{j2} \partial_l \delta A_{j3} \\ + \partial_l \delta A_{j2} \partial_{kk}^2 \delta A_{j3} + 2\partial_{lk}^2 \delta A_{j2} \partial_k \delta A_{j3} + 2\partial_k \delta A_{j2} \partial_{lk}^2 \delta A_{j3}. \quad (\text{A.25f})$$

$$\begin{aligned} \partial_{X^1}(I\delta A2)_{1:3}^{[8:10]} &= \partial_{l,k2,k3}^3(\delta A_j \delta A_j) = 2\partial_{l,k2,k3}^3 \delta A_j \delta A_j \\ &+ 2\partial_{l,k2} \delta A_j \partial_{k3} \delta A_j + 2\partial_{l,k3} \delta A_j \partial_{k2} \delta A_j + 2\partial_{k2,k3} \delta A_j \partial_l \delta A_j, \end{aligned} \quad (\text{A.26a})$$

$$\begin{aligned} \partial_{X^1}(I\delta A2)_{4:6}^{[8:10]} &= \partial_{l,k2,k3}^3(\delta A_{j2} \delta A_{j3}) \\ &= \partial_{l,k2,k3}^3 \delta A_{j2} \delta A_{j3} + \delta A_{j2} \partial_{l,k2,k3}^3 \delta A_{j3} + \partial_l \delta A_{j2} \partial_{k2,k3}^2 \delta A_{j3} \\ &+ \partial_{k2,k3}^2 \delta A_{j2} \partial_l \delta A_{j3} + \partial_{k2} \delta A_{j2} \partial_{l,k3}^2 \delta A_{j3} + \partial_{l,k3}^2 \delta A_{j2} \partial_{k2} \delta A_{j3} \\ &+ \partial_{k3} \delta A_{j2} \partial_{l,k2}^2 \delta A_{j3} + \partial_{l,k2}^2 \delta A_{j2} \partial_{k3} \delta A_{j3}. \end{aligned} \quad (\text{A.26b})$$

为了后面的计算，我们将计算得到的 $(\delta A2)_{4:6}^{[1:10]}$, $\partial_l(\delta A2)_{4:6}^{[1:10]}$ 乘以 2。

d. 求 $(\nabla X \cdot \nabla X)^j$, $\partial_{\psi,\theta}(\nabla X \cdot \nabla X)^j$ 。磁面坐标 (ψ, θ, ζ) 的逆变基矢可以由柱坐标 (R, Z, ϕ) 的逆变基矢来表示：

$$\nabla\psi = \frac{R}{\mathcal{J}}(Z_\theta \nabla R - R_\theta \nabla Z), \quad (\text{A.27a})$$

$$\nabla\theta = \frac{-R}{\mathcal{J}}(Z_\psi \nabla R - R_\psi \nabla Z), \quad (\text{A.27b})$$

$$\nabla\zeta = \nabla\phi - \frac{\partial\nu}{\partial\psi} \nabla\psi - \frac{\partial\nu}{\partial\theta} \nabla\theta, \quad (\text{A.27c})$$

$$\zeta = \phi - \nu(\psi, \theta). \quad (\text{A.27d})$$

由上式，得

$$|\nabla\psi| = \frac{R}{\mathcal{J}}(Z_\theta^2 + R_\theta^2)^{1/2}, \quad (\text{A.28a})$$

$$|\nabla\theta| = \frac{R}{\mathcal{J}}(Z_\psi^2 + R_\psi^2)^{1/2}, \quad (\text{A.28b})$$

$$\begin{aligned} |\nabla\zeta| &= \left[\frac{1}{R^2} + \left(\frac{R}{\mathcal{J}} \right)^2 \left(-\frac{\partial\nu}{\partial\psi} Z_\theta + \frac{\partial\nu}{\partial\theta} Z_\psi \right)^2 \right. \\ &\left. + \left(\frac{R}{\mathcal{J}} \right)^2 \left(\frac{\partial\nu}{\partial\psi} R_\theta - \frac{\partial\nu}{\partial\theta} R_\psi \right)^2 \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (\text{A.28c})$$

$$\nabla\psi \cdot \nabla\theta = -\frac{R^2}{\mathcal{J}^2}(Z_\theta Z_\psi + R_\theta R_\psi), \quad (\text{A.28d})$$

$$\nabla\theta \cdot \nabla\zeta = -\frac{\partial\nu}{\partial\psi} \nabla\psi \cdot \nabla\theta - \frac{\partial\nu}{\partial\theta} |\nabla\theta|^2, \quad (\text{A.28e})$$

$$\nabla\zeta \cdot \nabla\psi = -\frac{\partial\nu}{\partial\psi} |\nabla\psi|^2 - \frac{\partial\nu}{\partial\theta} \nabla\psi \cdot \nabla\theta. \quad (\text{A.28f})$$

$$\begin{aligned}\partial_{\psi,\theta}|\nabla\psi|^2 &= |\nabla\psi|^2 \frac{2\partial_{\psi,\theta}R}{R} - \frac{2\partial_{\psi,\theta}\mathcal{J}}{\mathcal{J}} \\ &+ 2\frac{R^2}{\mathcal{J}^2}(Z_\theta\partial_{\psi,\theta}Z_\theta + R_\theta\partial_{\psi,\theta}R_\theta),\end{aligned}\quad (\text{A.29a})$$

$$\begin{aligned}\partial_{\psi,\theta}|\nabla\theta|^2 &= |\nabla\theta|^2 \frac{2\partial_{\psi,\theta}R}{R} - \frac{2\partial_{\psi,\theta}\mathcal{J}}{\mathcal{J}} \\ &+ 2\frac{R^2}{\mathcal{J}^2}(Z_\psi\partial_{\psi,\theta}Z_\psi + R_\psi\partial_{\psi,\theta}R_\psi),\end{aligned}\quad (\text{A.29b})$$

$$\partial_{\psi,\theta}|\nabla\zeta|^2 \approx -\frac{2\partial_{\psi,\theta}R}{R^3}.\quad (\text{A.29c})$$

$$\begin{aligned}\partial_{\psi,\theta}(\nabla\psi \cdot \nabla\theta) &= (\nabla\psi \cdot \nabla\theta)\left(\frac{2\partial_{\psi,\theta}R}{R} - \frac{2\partial_{\psi,\theta}\mathcal{J}}{\mathcal{J}}\right) \\ &- \frac{R^2}{\mathcal{J}^2}(\partial_{\psi,\theta}Z_\theta Z_\psi + Z_\theta\partial_{\psi,\theta}Z_\psi + \partial_{\psi,\theta}R_\theta R_\psi + R_\theta\partial_{\psi,\theta}R_\psi),\end{aligned}\quad (\text{A.30a})$$

$$\begin{aligned}\partial_{\psi,\theta}(\nabla\theta \cdot \nabla\zeta) &= -\partial_{\psi,\theta}\left(\frac{\partial\nu}{\partial\psi}\right)\nabla\psi \cdot \nabla\theta - \frac{\partial\nu}{\partial\psi}\partial_{\psi,\theta}(\nabla\psi \cdot \nabla\theta) \\ &- \partial_{\psi,\theta}\left(\frac{\partial\nu}{\partial\theta}\right)|\nabla\theta|^2 - \frac{\partial\nu}{\partial\theta}\partial_{\psi,\theta}|\nabla\theta|^2,\end{aligned}\quad (\text{A.30b})$$

$$\begin{aligned}\partial_{\psi,\theta}(\nabla\zeta \cdot \nabla\psi) &= -\partial_{\psi,\theta}\left(\frac{\partial\nu}{\partial\psi}\right)|\nabla\psi|^2 - \frac{\partial\nu}{\partial\psi}\partial_{\psi,\theta}|\nabla\psi|^2 \\ &- \partial_{\psi,\theta}\left(\frac{\partial\nu}{\partial\theta}\right)\nabla\psi \cdot \nabla\theta - \frac{\partial\nu}{\partial\theta}\partial_{\psi,\theta}(\nabla\psi \cdot \nabla\theta).\end{aligned}\quad (\text{A.30c})$$

$$\partial_\psi\mathcal{J} = \frac{1}{B^2}(q'g + qg' + I') - 2\mathcal{J}\frac{\partial_\psi B}{B},\quad (\text{A.31a})$$

$$\partial_\theta\mathcal{J} = -2\mathcal{J}\frac{\partial_\theta B}{B}.\quad (\text{A.31b})$$

e. 求 ρ_\perp , $\partial_{\psi,\theta}\rho_\perp$, $\rho_{c,s}^i$, $(\rho^2)_{cc,ss,sc}^i$, $\partial_{\psi,\theta}\rho_{c,s}^i$, $\partial_{\psi,\theta}(\rho^2)_{cc,ss,sc}^i$ 任意函数的下标 cn 和 sn 分别表示与 $\cos n\xi$ 和 $\sin n\xi$ 相关的量 ($n \neq 0$), 即

$$\rho^i = \rho_c^i \cos \xi + \rho_s^i \sin \xi,\quad (\text{A.32a})$$

$$F = F_0 + F_{cn} \cos n\xi + F_{sn} \sin n\xi.\quad (\text{A.32b})$$

$$\rho_{\perp} = \left(\frac{2m_s \mu}{B} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \partial_{\psi, \theta} \rho_{\perp} = -\frac{\rho_{\perp} \partial_{\psi, \theta} B}{B}. \quad (\text{A.33})$$

$$\begin{aligned} \rho_c^{\psi} &= \frac{\rho_{\perp}}{|\nabla \psi|} |\nabla \psi|^2, & \rho_s^{\psi} &= 0, \\ \rho_c^{\theta} &= \frac{\rho_{\perp}}{|\nabla \psi|} \nabla \psi \cdot \nabla \theta, & \rho_s^{\theta} &= -\frac{\rho_{\perp} g}{|\nabla \psi| \mathcal{J} B}, \\ \rho_c^{\zeta} &= \frac{\rho_{\perp}}{|\nabla \psi|} \nabla \psi \cdot \nabla \zeta, & \rho_s^{\zeta} &= \frac{\rho_{\perp} I}{|\nabla \psi| \mathcal{J} B}. \end{aligned} \quad (\text{A.34a})$$

$$\begin{aligned} (\rho 2)_1^{[1:3]} &= \rho_c^i \rho_c^i, & (\rho 2)_1^{[4:6]} &= 2\rho_c^{j2} \rho_c^{j3}, \\ (\rho 2)_2^{[1:3]} &= \rho_s^i \rho_s^i, & (\rho 2)_1^{[4:6]} &= 2\rho_s^{j2} \rho_s^{j3}, \\ (\rho 2)_3^{[1:3]} &= \rho_c^i \rho_s^i, & (\rho 2)_1^{[4:6]} &= \rho_c^{j2} \rho_s^{j3} + \rho_s^{j2} \rho_c^{j3}. \end{aligned} \quad (\text{A.34b})$$

$$\partial_{\psi, \theta} \rho_c^{\psi} = \partial_{\psi, \theta} \rho_{\perp} |\nabla \psi| + \frac{\rho_c^{\psi} \partial_{\psi, \theta} |\nabla \psi|^2}{|\nabla \psi|^2}, \quad (\text{A.35a})$$

$$\begin{aligned} \partial_{\psi, \theta} \rho_c^{\theta} &= \partial_{\psi, \theta} \rho_{\perp} \frac{\nabla \psi \cdot \nabla \theta}{|\nabla \psi|} \\ &+ \frac{\rho_{\perp}}{|\nabla \psi|} \partial_{\psi, \theta} (\nabla \psi \cdot \nabla \theta) - \frac{\rho_c^{\theta} \partial_{\psi, \theta} |\nabla \psi|^2}{|\nabla \psi|^2}, \end{aligned} \quad (\text{A.35b})$$

$$\begin{aligned} \partial_{\psi, \theta} \rho_c^{\zeta} &= \partial_{\psi, \theta} \rho_{\perp} \frac{\nabla \psi \cdot \nabla \zeta}{|\nabla \psi|} \\ &+ \frac{\rho_{\perp}}{|\nabla \psi|} \partial_{\psi, \theta} (\nabla \psi \cdot \nabla \zeta) - \frac{\rho_c^{\zeta} \partial_{\psi, \theta} |\nabla \psi|^2}{|\nabla \psi|^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.35c})$$

$$\partial_{\psi, \theta} \rho_s^{\psi} = 0, \quad (\text{A.36a})$$

$$\begin{aligned} \partial_{\psi, \theta} \rho_s^{\theta} &= -\frac{\partial_{\psi, \theta} \rho_{\perp}}{|\nabla \psi|} \frac{g}{\mathcal{J} B} + \rho_s^{\theta} \left(\frac{-\partial_{\psi, \theta} |\nabla \psi|^2}{|\nabla \psi|^2} \right. \\ &\left. + \frac{\partial_{\psi, \theta} g}{g} + \frac{-\partial_{\psi, \theta} \mathcal{J}}{\mathcal{J}} + \frac{-\partial_{\psi, \theta} B}{B} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.36b})$$

$$\begin{aligned} \partial_{\psi, \theta} \rho_s^{\zeta} &= \frac{\partial_{\psi, \theta} \rho_{\perp}}{|\nabla \psi|} \frac{I}{\mathcal{J} B} + \rho_s^{\zeta} \left(\frac{-\partial_{\psi, \theta} |\nabla \psi|^2}{|\nabla \psi|^2} \right. \\ &\left. + \frac{\partial_{\psi, \theta} I}{I} + \frac{-\partial_{\psi, \theta} \mathcal{J}}{\mathcal{J}} + \frac{-\partial_{\psi, \theta} B}{B} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.36c})$$

$$\partial_{\psi,\theta}(\rho 2)_1^{1:3} = 2\partial_{\psi,\theta}\rho_c^i\rho_s^i, \quad (\text{A.37a})$$

$$\partial_{\psi,\theta}(\rho 2)_2^{1:3} = 2\partial_{\psi,\theta}\rho_s^i\rho_s^i, \quad (\text{A.37b})$$

$$\partial_{\psi,\theta}(\rho 2)_3^{1:3} = \partial_{\psi,\theta}\rho_c^i\rho_s^i + \partial_{\psi,\theta}\rho_s^i\rho_c^i, \quad (\text{A.37c})$$

$$\partial_{\psi,\theta}(\rho 2)_1^{4:6} = 2(\partial_{\psi,\theta}\rho_c^{j2}\rho_c^{j3} + \partial_{\psi,\theta}\rho_c^{j3}\rho_c^{j2}), \quad (\text{A.37d})$$

$$\partial_{\psi,\theta}(\rho 2)_2^{4:6} = 2(\partial_{\psi,\theta}\rho_s^{j2}\rho_s^{j3} + \partial_{\psi,\theta}\rho_s^{j3}\rho_s^{j2}), \quad (\text{A.37e})$$

$$\partial_{\psi,\theta}(\rho 2)_3^{4:6} = \partial_{\psi,\theta}\rho_c^{j2}\rho_s^{j3} + \partial_{\psi,\theta}\rho_s^{j3}\rho_c^{j2} + \partial_{\psi,\theta}\rho_s^{j2}\rho_c^{j3} + \partial_{\psi,\theta}\rho_c^{j3}\rho_s^{j2}. \quad (\text{A.37f})$$

f. 求 $(C_{II})_\lambda^{p0}$, $\partial_l(C_{II})_\lambda^{p0}$, $(v_{comp})_p^q$, $\partial_l(v_{comp})_p^q$.

$$\begin{aligned} (C_{II})_1^{10} &= 1, & \partial_{\psi,\theta}(C_{II})_1^{10} &= 0, \\ (C_{II})_{[2:4]}^{20} &= \frac{1}{2}\rho_c^i, & \partial_{\psi,\theta}(C_{II})_{[2:4]}^{20} &= \frac{1}{2}\partial_{\psi,\theta}\rho_c^i, \\ (C_{II})_{[2:4]}^{30} &= \frac{1}{2}\rho_s^i, & \partial_{\psi,\theta}(C_{II})_{[2:4]}^{30} &= \frac{1}{2}\partial_{\psi,\theta}\rho_s^i, \\ (C_{II})_{[5:10]}^{10} &= \frac{1}{4}((\rho 2)_{ss}^i + (\rho 2)_{cc}^i), & \partial_{\psi,\theta}(C_{II})_{[5:10]}^{10} &= \frac{1}{4}(\partial_{\psi,\theta}(\rho 2)_{ss}^i + \partial_{\psi,\theta}(\rho 2)_{cc}^i). \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

$$(v_{comp})_p^q = \begin{pmatrix} -\dot{\psi}_0 & -\dot{\theta}_0 & -\dot{\zeta}_0 & 1 \\ \Omega\rho_c^\psi & \Omega\rho_c^\theta & \Omega\rho_c^\zeta & 0 \\ \Omega\rho_s^\psi & \Omega\rho_s^\theta & \Omega\rho_s^\zeta & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.39a})$$

$$\partial_{\psi,\theta}(v_{comp})_p^q = \begin{pmatrix} -\partial_{\psi,\theta}\dot{\psi}_0 & -\partial_{\psi,\theta}\dot{\theta}_0 & -\partial_{\psi,\theta}\dot{\zeta}_0 & 0 \\ \partial_{\psi,\theta}(\Omega\rho_c^\psi) & \partial_{\psi,\theta}(\Omega\rho_c^\theta) & \partial_{\psi,\theta}(\Omega\rho_c^\zeta) & 0 \\ \partial_{\psi,\theta}(\Omega\rho_s^\psi) & \partial_{\psi,\theta}(\Omega\rho_s^\theta) & \partial_{\psi,\theta}(\Omega\rho_s^\zeta) & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.39b})$$

$$\partial_{(\rho_{\parallel g})}(v_{comp})_1^q = \begin{pmatrix} -\partial_{(\rho_{\parallel g})}\dot{\psi}_0 & -\partial_{(\rho_{\parallel g})}\dot{\theta}_0 & -\partial_{(\rho_{\parallel g})}\dot{\zeta}_0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.39c})$$

g. 求 $(\delta A^{FT})_q^{p0}$, $\partial_{\psi,\theta}(\delta A^{FT})_q^{p0}$, $(\delta A 2^{FT})_j^0$, $\partial_{\psi,\theta}(\delta A 2^{FT})_j^0$.

$$(\delta A^{FT})_q^{p0} = (C_{II})_\lambda^{p0}(I\delta A)_q^\lambda, \quad (\text{A.40a})$$

$$\partial_{\psi,\theta}(\delta A^{FT})_q^{p0} = \partial_{\psi,\theta}(C_{II})_\lambda^{p0}(I\delta A)_q^\lambda + (C_{II})_\lambda^{p0}\partial_{\psi,\theta}(I\delta A)_q^\lambda, \quad (\text{A.40b})$$

$$\partial_{\zeta,t}(\delta A^{FT})_q^{p0} = (C_{II})_\lambda^{p0}\partial_{\zeta,t}(I\delta A)_q^\lambda. \quad (\text{A.40c})$$

$$(\delta A 2^{FT})_j^0 = (C_{II})_\lambda^{10} (I \delta A 2)_j^\lambda, \quad (\text{A.41a})$$

$$\partial_{\psi,\theta}(\delta A 2^{FT})_j^0 = \partial_{\psi,\theta}(C_{II})_\lambda^{10} (I \delta A 2)_j^\lambda + (C_{II})_\lambda^{10} \partial_{\psi,\theta}(I \delta A 2)_j^\lambda, \quad (\text{A.41b})$$

$$\partial_{\zeta,t}(\delta A 2^{FT})_j^0 = (C_{II})_\lambda^{10} \partial_{\zeta,t}(I \delta A 2)_j^\lambda. \quad (\text{A.41c})$$

A.3 运动方程

与运动方程相关的物理量的数值求解可以分成以下两部分。

a. 求 \bar{H}_1 , $\partial_l \bar{H}_1$, \bar{H}_2 , $\partial_l \bar{H}_2$ 。

$$\bar{H}_1 = e_s \langle K_1 \rangle = e_s \sum_{p,q} (v_{comp})_p^q (\delta A^{FT})_q^{p0}, \quad (\text{A.42a})$$

$$\begin{aligned} \partial_{\psi,\theta} \bar{H}_1 &= e_s \sum_{p,q} \partial_{\psi,\theta} (v_{comp})_p^q (\delta A^{FT})_q^{p0} \\ &+ e_s \sum_{p,q} (v_{comp})_p^q \partial_{\psi,\theta} (\delta A^{FT})_q^{p0}, \end{aligned} \quad (\text{A.42b})$$

$$\partial_{\zeta,t} \bar{H}_1 = e_s \sum_{p,q} (v_{comp})_p^q \partial_{\zeta,t} (\delta A^{FT})_q^{p0}, \quad (\text{A.42c})$$

$$\partial_{\rho_{\parallel}g} \bar{H}_1 = e_s \sum_{p,q} \partial_{\rho_{\parallel}g} (v_{comp})_p^q (\delta A^{FT})_q^{p0}. \quad (\text{A.42d})$$

$$\bar{H}_2 = \frac{e_s^2}{2m_s} (\delta A 2^{FT})_j^0 (\nabla X \cdot \nabla X)^j, \quad (\text{A.43a})$$

$$\begin{aligned} \partial_{\psi,\theta} \bar{H}_2 &= \frac{e_s^2}{2m_s} \partial_{\psi,\theta} (\delta A 2^{FT})_j^0 (\nabla X \cdot \nabla X)^j \\ &+ \frac{e_s^2}{2m_s} (\delta A 2^{FT})_j^0 \partial_{\psi,\theta} (\nabla X \cdot \nabla X)^j, \end{aligned} \quad (\text{A.43b})$$

$$\partial_{\zeta,t} \bar{H}_2 = \frac{e_s^2}{2m_s} \partial_{\zeta,t} (\delta A 2^{FT})_j^0 (\nabla X \cdot \nabla X)^j, \quad (\text{A.43c})$$

$$\partial_{\rho_{\parallel}g} \bar{H}_2 = 0. \quad (\text{A.43d})$$

b. 求 E , $\frac{dZ^i}{dt}$, $\frac{dX^i}{dt}$, $\frac{dE}{dt}$ 。

$$E = \bar{H}_0 + \bar{H}_1 + \bar{H}_2, \quad (\text{A.44a})$$

$$\frac{d\bar{Z}^i}{dt} = J^{ij} \frac{\partial X^k}{\partial Z^j} (\partial_k \bar{H}_0 + \partial_k \bar{H}_1 + \partial_k \bar{H}_2), \quad (\text{A.44b})$$

$$\frac{d\bar{X}^i}{dt} = \frac{\partial X^i}{\partial Z^j} \frac{d\bar{Z}^j}{dt}, \quad (\text{A.44c})$$

$$\frac{dE}{dt} = \partial_t \bar{H}_1 + \partial_t \bar{H}_2. \quad (\text{A.44d})$$

附录 B 一阶生成矢量场的数值实现

本节附录将介绍程序 GYCAVA 中的子程序 GYROTRAN 中的一阶生成矢量场在数值上实现的具体过程。其中，部分物理量在子程序 FUNCT 中已经求得，所以可以直接调用。与一阶生成矢量场相关的数值求解可以分成以下四小部分。

a. 求 $(C_{II})_{\lambda}^{[1:3]n} (n \neq 0)$ 。

$$\begin{aligned}
 (C_{II})_1^{2[c1]} &= 1, & \partial_{\psi,\theta}(C_{II})_1^{2[c1]} &= 0, \\
 (C_{II})_{[2:4]}^{1[c1]} &= \rho_c^i, & \partial_{\psi,\theta}(C_{II})_{[2:4]}^{1[c1]} &= \partial_{\psi,\theta}\rho_c^i, \\
 (C_{II})_{[5:10]}^{2[c1]} &= \frac{1}{8}(\rho 2)_{ss}^i + \frac{3}{8}(\rho 2)_{cc}^i, & \partial_{\psi,\theta}(C_{II})_{[5:10]}^{2[c1]} &= \frac{1}{8}\partial_{\psi,\theta}(\rho 2)_{ss}^i + \frac{3}{8}\partial_{\psi,\theta}(\rho 2)_{cc}^i, \\
 (C_{II})_{[5:10]}^{3[c1]} &= \frac{1}{4}(\rho 2)_{cs}^i, & \partial_{\psi,\theta}(C_{II})_{[5:10]}^{3[c1]} &= \frac{1}{4}\partial_{\psi,\theta}(\rho 2)_{cs}^i.
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

$$\begin{aligned}
 (C_{II})_1^{3[s1]} &= 1, & \partial_{\psi,\theta}(C_{II})_1^{3[s1]} &= 0, \\
 (C_{II})_{[2:4]}^{1[s1]} &= \rho_s^i, & \partial_{\psi,\theta}(C_{II})_{[2:4]}^{1[s1]} &= \partial_{\psi,\theta}\rho_s^i, \\
 (C_{II})_{[5:10]}^{2[s1]} &= \frac{1}{4}(\rho 2)_{cs}^i, & \partial_{\psi,\theta}(C_{II})_{[5:10]}^{2[s1]} &= \frac{1}{4}\partial_{\psi,\theta}(\rho 2)_{cs}^i, \\
 (C_{II})_{[5:10]}^{3[s1]} &= \frac{1}{8}(\rho 2)_{cc}^i + \frac{3}{8}(\rho 2)_{ss}^i, & \partial_{\psi,\theta}(C_{II})_{[5:10]}^{3[s1]} &= \frac{1}{8}\partial_{\psi,\theta}(\rho 2)_{cc}^i + \frac{3}{8}\partial_{\psi,\theta}(\rho 2)_{ss}^i.
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

$$\begin{aligned}
 (C_{II})_{[2:4]}^{2[c2]} &= \frac{1}{2}\rho_c^i, & \partial_{\psi,\theta}(C_{II})_{[2:4]}^{2[c2]} &= \frac{1}{2}\partial_{\psi,\theta}\rho_c^i, \\
 (C_{II})_{[2:4]}^{3[c2]} &= -\frac{1}{2}\rho_s^i, & \partial_{\psi,\theta}(C_{II})_{[2:4]}^{3[c2]} &= -\frac{1}{2}\partial_{\psi,\theta}\rho_s^i, \\
 (C_{II})_{[5:10]}^{1[c2]} &= -\frac{1}{4}(\rho 2)_{ss}^i + \frac{1}{4}(\rho 2)_{cc}^i, & \partial_{\psi,\theta}(C_{II})_{[5:10]}^{1[c2]} &= -\frac{1}{4}\partial_{\psi,\theta}(\rho 2)_{ss}^i + \frac{1}{4}\partial_{\psi,\theta}(\rho 2)_{cc}^i.
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

$$\begin{aligned}
 (C_{II})_{[2:4]}^{2[s2]} &= \frac{1}{2}\rho_s^i, & \partial_{\psi,\theta}(C_{II})_{[2:4]}^{2[s2]} &= \frac{1}{2}\partial_{\psi,\theta}\rho_s^i, \\
 (C_{II})_{[2:4]}^{3[s2]} &= \frac{1}{2}\rho_c^i, & \partial_{\psi,\theta}(C_{II})_{[2:4]}^{3[s2]} &= \frac{1}{2}\partial_{\psi,\theta}\rho_c^i, \\
 (C_{II})_{[5:10]}^{1[s2]} &= \frac{1}{2}(\rho 2)_{cs}^i, & \partial_{\psi,\theta}(C_{II})_{[5:10]}^{1[s2]} &= \frac{1}{2}\partial_{\psi,\theta}(\rho 2)_{cs}^i.
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

$$\begin{aligned}
 (C_{II})_{[5:10]}^{2[c3]} &= -\frac{1}{8}(\rho 2)_{ss}^i + \frac{1}{8}(\rho 2)_{cc}^i, & \partial_{\psi,\theta}(C_{II})_{[5:10]}^{2[c3]} &= -\frac{1}{8}\partial_{\psi,\theta}(\rho 2)_{ss}^i + \frac{1}{8}\partial_{\psi,\theta}(\rho 2)_{cc}^i, \\
 (C_{II})_{[5:10]}^{3[c3]} &= \frac{1}{8}(\rho 2)_{ss}^i - \frac{1}{4}(\rho 2)_{cs}^i, & \partial_{\psi,\theta}(C_{II})_{[5:10]}^{3[c3]} &= \frac{1}{8}\partial_{\psi,\theta}(\rho 2)_{ss}^i - \frac{1}{4}\partial_{\psi,\theta}(\rho 2)_{cs}^i.
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

$$\begin{aligned}
 (C_{II})_{[5:10]}^{2[s3]} &= \frac{1}{4}(\rho 2)_{cs}^i, & \partial_{\psi,\theta}(C_{II})_{[5:10]}^{2[s3]} &= \frac{1}{4}\partial_{\psi,\theta}(\rho 2)_{cs}^i, \\
 (C_{II})_{[5:10]}^{3[s3]} &= \frac{1}{8}(\rho 2)_{cc}^i, & \partial_{\psi,\theta}(C_{II})_{[5:10]}^{3[s3]} &= \frac{1}{8}\partial_{\psi,\theta}(\rho 2)_{cc}^i.
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

b. 求 $(\delta A^{FT'})_q^{pn}$, $\partial_l(\delta A^{FT'})_q^{pn}(l = \psi, \theta, \zeta, t)$; $(\delta A^{FT})_q^{pm}$, \tilde{K}_1^n , S_1^n , $\partial_l S_1^n(l = \psi, \theta, \zeta, \rho_{||}, t)$.

$$\begin{aligned}
 (C'_{II})_{\lambda}^{p[cn]} &= \frac{-1}{n}(C_{II})_{\lambda}^{p[sn]}, & \partial_l(C'_{II})_{\lambda}^{p[cn]} &= \frac{-1}{n}\partial_l(C_{II})_{\lambda}^{p[sn]}, \\
 (C'_{II})_{\lambda}^{p[sn]} &= \frac{1}{n}(C_{II})_{\lambda}^{p[cn]}, & \partial_l(C'_{II})_{\lambda}^{p[sn]} &= \frac{1}{n}\partial_l(C_{II})_{\lambda}^{p[cn]}.
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

$$(\delta A^{FT'})_q^{p[cn]} = (C'_{II})_{\lambda}^{p[sn]}(I\delta A)_q^{\lambda}, \tag{B.8a}$$

$$(\delta A^{FT'})_q^{p[sn]} = (C'_{II})_{\lambda}^{p[cn]}(I\delta A)_q^{\lambda}, \tag{B.8b}$$

$$\partial_{\psi,\theta}(\delta A^{FT'})_q^{p[cn]} = \partial_{\psi,\theta}(C'_{II})_{\lambda}^{p[sn]}(I\delta A)_q^{\lambda} + (C'_{II})_{\lambda}^{p[cn]}\partial_{\psi,\theta}(I\delta A)_q^{\lambda}, \tag{B.8c}$$

$$\partial_{\psi,\theta}(\delta A^{FT'})_q^{p[sn]} = \partial_{\psi,\theta}(C'_{II})_{\lambda}^{p[cn]}(I\delta A)_q^{\lambda} + (C'_{II})_{\lambda}^{p[sn]}\partial_{\psi,\theta}(I\delta A)_q^{\lambda}, \tag{B.8d}$$

$$\partial_{\zeta,t}(\delta A^{FT'})_q^{p[cn]} = (C'_{II})_{\lambda}^{p[sn]}\partial_{\zeta,t}(I\delta A)_q^{\lambda}, \tag{B.8e}$$

$$\partial_{\zeta,t}(\delta A^{FT'})_q^{p[sn]} = (C'_{II})_{\lambda}^{p[cn]}\partial_{\zeta,t}(I\delta A)_q^{\lambda}. \tag{B.8f}$$

$$(\delta A^{FT})_q^{pn} = (C_{II})_{\lambda}^{pn}(I\delta A)_q^{\lambda}, \tag{B.9a}$$

$$\tilde{K}_1^n = e_s \sum_{p,q} (v_{comp})_p^q (\delta A^{FT})_q^{pn}, \tag{B.9b}$$

$$S_1^n = \int \frac{1}{n\Omega} \tilde{K}_1^n d\xi = \frac{e_s}{\Omega} \sum_{p,q} (v_{comp})_p^q (\delta A^{FT'})_q^{pn}. \tag{B.9c}$$

$$\partial_{\psi,\theta} S_1^n = \frac{-\partial_{\psi,\theta} B}{B} S_1^n + \frac{e_s}{\Omega} \sum_{p,q} \partial_{\psi,\theta} (v_{comp})_p^q (\delta A^{FT'})_q^{pn} + \frac{e_s}{\Omega} \sum_{p,q} (v_{comp})_p^q \partial_{\psi,\theta} (\delta A^{FT'})_q^{pn}, \quad (\text{B.10a})$$

$$\partial_\zeta S_1^n = \frac{e_s}{\Omega} \sum_{p,q} (v_{comp})_p^q \partial_\zeta (\delta A^{FT'})_q^{pn}, p = 1, 2, 3, \quad (\text{B.10b})$$

$$\partial_{(\rho_{\parallel} g)} S_1^n = \frac{e_s}{\Omega} \partial_{(\rho_{\parallel} g)} (v_{comp})_1^q (\delta A^{FT'})_q^{1n}. \quad (\text{B.10c})$$

c. 求 Γ_{1b}^n , 求 S_1^n , $\partial_b S_1^n$ ($n \neq 0$).

$$\Gamma_{1b}^n = e_s (\delta A^{FT})_q^{1n} \frac{\partial X^q}{\partial Z^b}, b = 1, 2, 3, 4 \quad (\text{B.11a})$$

$$\Gamma_{1\xi}^n = -\frac{e_s}{\Omega} \sum_{p,q} (v_{comp})_p^q (\delta A^{FT})_q^n, p = 2, 3, \quad (\text{B.11b})$$

$$\Gamma_{1t}^n = -e_s (\delta A^{FT})_4^{1n}. \quad (\text{B.11c})$$

$$\partial_b S_1^n = \partial_b X^j \partial_j S_1^n, \quad (\text{B.12a})$$

$$\partial_\xi S_1^n = \frac{1}{\Omega} \tilde{K}_1^n, \quad (\text{B.12b})$$

$$\partial_t S_1^n = \frac{e_s}{\Omega} \sum_{p,q} (v_{comp})_p^q \partial_t (\delta A^{FT'})_q^{pn}, p = 1, 2, 3. \quad (\text{B.12c})$$

d. 求生成一阶矢量场 G_1^{an} .

$$G_1^{an} = (\partial_b S_1^n + \Gamma_{1b}^n) J^{ba}, \quad (\text{B.13a})$$

$$G_1^{\xi n} = \partial_\xi S_1^n + \Gamma_{1\xi}^n, \quad (\text{B.13b})$$

$$G_1^{tn} = \partial_t S_1^n + \Gamma_{1t}^n. \quad (\text{B.13c})$$

致 谢

感谢我的导师，王少杰教授，在我五年的研究生学习和工作中对我的悉心培养，帮我叩开学术研究的大门，慢慢地将我带入磁约束聚变研究的前沿领域，让我感受到做科研的乐趣。王老师在抽象的数学公式背后总能发现其中隐藏的物理意义，并能从纷繁复杂的表象中找到最关键的本质。这些让我学术思维上受益匪浅。王老师在当碰到问题时的积极的心态，让我学会面临挑战时应有的态度。王老师性格随和，对学生的疑问总是非常耐心地解答。

此外，我还要感谢肖小涛师兄。他编写的程序结构分明，可读性好，让我能够很容易地在他原有的程序基础上再发展新的程序。

感谢等离子体专业的俞昌旋，刘万东，杨维纭，陈银华，马锦秀，蔡辉山，兰涛，谢锦林，李弘等老师，你们是这个专业的领路人，为我们学生在未知的科研道路上指明方向。

感谢实验室的师弟师妹们刘磊，王时佳，戴宗良，黄文龙，左阳，杨晓庆，李春华，张琦乐，张德兵，李蒙，王金，李海容。感谢我的其他同门叶磊，郭文峰，李德徽，潘成康，能够与你们一起探讨学术问题，分享生活经验。在与你们交流问题时，让我获益匪浅。

感谢我的朋友孔德峰，陈晔斌，王东升，张双喜，邹丹丹，郭威，与你们一起讨论学术科研，分享心得经验，是我的快乐。

感谢多年来一直在背后默默支持我追求自己理想的父亲母亲。你们的关心让身在外地的我时时感受到温暖，你们的支持让我可以心无旁骛地做自己喜欢做的事情。

在我研究生期间的最后一个学期，外公不幸去世。回想外公从小对我的关爱，让我开始深切体会到“树欲静而风不止，子欲养而亲不待”这句话的含义。谨以本文献给我最尊敬与爱戴的外公！

致 谢

在读期间发表的学术论文与取得的研究成果

已发表论文:

1. Yingfeng Xu, Xiaotao Xiao, Shaojie Wang. Linear gyrokinetic theory and computation of the gyrocenter motion based on the exact canonical variables for axisymmetric tokamaks. *Physics of Plasmas*, vol 18(4), 042505, 2011.
2. Huishan Cai, Shaojie Wang, Yingfeng Xu, Jintao Cao, Ding Li. Influence of Energetic Ions on Tearing Modes. *Physical Review Letters*, vol 106(7), 075002, 2011.

待发表论文:

1. Yingfeng Xu, Shaojie Wang. Electromagnetic gauge invariance of the nonlinear gyrokinetic theory and its implication for truncation in gyrokinetic simulation. submitted to *Physics of Plasmas*.
2. Yingfeng Xu, Shaojie Wang. Properties of the Lie-transform in the nonlinear gyrokinetic theory. submitted to *Physics of Plasmas*.