



arrows,snakes,backgrounds

VIETNAM NATIONAL UNIVERSITY, HO CHI MINH CITY  
UNIVERSITY OF TECHNOLOGY  
FACULTY OF COMPUTER SCIENCE AND ENGINEERING



## MATHEMATICAL MODELING (CO2011)

---

### Assignment

# “Dynamics of Love”

---

Advisor: -  
Students: Nguyễn Thi Thanh Uyên - 2133187.  
Nguyễn Trung Nghĩa - 2010448  
Lữ Quốc Bình - 2033009

HO CHI MINH CITY, SEPTEMBER 2022



## Contents

<b>1</b>	<b>Member list &amp; Workload</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Relation &amp; Counting</b>	<b>2</b>
2.1	Problem 1 . . . . .	2
2.1.1	Method of solving system of differential equations . . . . .	2
2.1.1.a	$\Delta > 0$ , ( <i>Real Eigenvalues</i> ), (4) c 2 nghim $\lambda_1, \lambda_2$ . . . . .	3
2.1.1.b	$\Delta < 0$ , ( <i>Complex Eigenvalues</i> ), $\lambda_{1,2} = p \pm qi$ . . . . .	3
2.1.1.c	$\Delta = 0$ , ( <i>Repeated Eigenvalues</i> ) . . . . .	5
2.2	Problem 2 . . . . .	6
2.3	Problem 3 . . . . .	6



## 1 Member list & Workload

No.	Fullname	Student ID	Problems	Percentage of work
1	Lưu Quốc Bình	2033009	- Exercise 1	70%
2	Nguyễn Trung Nghĩa	2010448	- Exercise 2	100%
3	Nguyễn Thi Thanh Uyên	2133187	- Exercise 3	100%

## 2 Relation & Counting

### 2.1 Problem 1

Write on the report a very detailed introduction to the IVPs Sys. (3) and the formulae of its exact solutions for general  $a, b, c$ , and  $d$  and initial condition  $R_0$  and  $J_0$ . Then complete Tab. 2 for all possible cases of eigenvalues of general  $2 \times 2$  matrix  $A$

#### 2.1.1 Method of solving system of differential equations

Xét hệ:

$$\begin{cases} R' = aR + bJ \\ J' = cR + dJ \\ R(0) = R_0, J(0) = J_0 \end{cases} \quad (1)$$

được viết dưới dạng vector

$$\vec{x}' = A\vec{x}$$

sẽ có công thức nghiệm là

$$\vec{X} = \vec{\eta}e^{\lambda t}$$

ở đây  $\lambda$  and  $\vec{\eta}$  là eigenvalues và eigenvectors của , ma trận  $A$  , và

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \vec{X}(t) = \begin{pmatrix} R(t) \\ J(t) \end{pmatrix}; \vec{X}(0) = \begin{pmatrix} R_0 \\ J_0 \end{pmatrix}$$

Đầu tiên, chúng ta tìm eigenvalues của ma trận  $A$ .

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

triển khai và rút gọn,

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$$

tính delta,

$$\Delta = [-(a + d)]^2 - 4(ad - bc)$$

dạng chung của nghiệm sẽ là

$$\vec{X}(t) = C_1X_1 + C_2X_2 \quad (2)$$

**2.1.1.a**  $\Delta > 0$ , (*Real Eigenvalues*), (4) c 2 nghiệm  $\lambda_1, \lambda_2$

Với  $\lambda_1$ , chúng ta sẽ xử lý như sau,

$$\begin{pmatrix} a - \lambda_1 & b \\ c & d - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} (a - \lambda_1)\eta_1 + b\eta_2 \\ (d - \lambda_1)\eta_2 + c\eta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \eta_1 = \frac{-b}{a - \lambda_1}\eta_2 = \frac{d - \lambda_1}{-c}\eta_2 \quad (3)$$

eigenvector trong trường hợp này sẽ là,

$$\vec{\eta}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{-b}{a - \lambda_1}\eta_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \eta_2 \in R \quad (4)$$

tương tự với  $\lambda_2$

$$\vec{\eta}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{-b}{a - \lambda_2}\eta'_2 \\ \eta'_2 \end{pmatrix}, \eta'_2 \in R$$

$$\Leftrightarrow \vec{X}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} \frac{-b}{a - \lambda_1}\eta_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} + C_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} \frac{-b}{a - \lambda_2}\eta'_2 \\ \eta'_2 \end{pmatrix}$$

Tìm các hằng số  $C_1, C_2$  với điều kiện khởi tạo  $R_0, J_0$

$$\begin{pmatrix} R_0 \\ J_0 \end{pmatrix} = \vec{X}(0) = C_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} \frac{-b}{a - \lambda_1}\eta_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} + C_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} \frac{-b}{a - \lambda_2}\eta'_2 \\ \eta'_2 \end{pmatrix}$$

Nhân các hệ số với nhau, ta sẽ có hệ phương trình với biến cần tìm là  $C_1, C_2$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{-b}{a - \lambda_1}\eta_2 C_1 + \frac{-b}{a - \lambda_2}\eta'_2 C_2 = R_0 \\ \eta_2 C_1 + \eta'_2 C_2 = J_0 \end{array} \right\} \Rightarrow C_1, C_2, \text{ với } \eta_2 \in R \text{ tùy ý, } \lambda_1, \lambda_2 \text{ là eigenvalues}$$

**2.1.1.b**  $\Delta < 0$ , (*Complex Eigenvalues*),  $\lambda_{1,2} = p \pm qi$

Dựa vào (3), với  $\lambda = p + qi$  (chọn 1 nghiệm phức với dấu âm hoặc dương, trong trường hợp này em/tôi chọn nghiệm phức dương.), chúng ta có

$$\eta_1 = \frac{-b}{a - (p + qi)}\eta_2 = \frac{d - (p + qi)}{c}\eta_2 \quad (5)$$

eigenvector đầu tiên là,

$$\vec{\eta}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{d - (p + qi)}{-c}\eta_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \eta_2 \in R$$

Dựa vào công thức nghiệm ở phía trên,  $\vec{X}_1$  là

$$\vec{X}_1(t) = e^{(p+qi)t} \begin{pmatrix} \frac{d - (p + qi)}{-c}\eta_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \eta_2 \in R$$

$$\vec{X}_1(t) = e^{pt} e^{qit} \begin{pmatrix} \frac{d - (p + qi)}{-c}\eta_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

Áp dụng công thức Euler (<https://tutorial.math.lamar.edu/Classes/DE/ComplexRoots.aspxEulerFormula>),

$$\vec{X}_1(t) = e^{pt}(\cos(qt) + i\sin(qt)) \begin{pmatrix} \frac{d - (p + qi)}{-c} \eta_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

Rút gọn  $\eta_2$ ,

$$\vec{X}_1(t) = e^{pt}\eta_2(\cos(qt) + i\sin(qt)) \begin{pmatrix} \frac{d - (p + qi)}{-c} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Các bước biến đổi,

$$\vec{X}_1(t) = e^{pt}\eta_2(\cos(qt) + i\sin(qt)) \begin{pmatrix} \frac{d - p - qi}{-c} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{X}_1(t) = e^{pt}\eta_2(\cos(qt) + i\sin(qt)) \begin{pmatrix} \frac{(d - p) - qi}{-c} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{X}_1(t) = e^{pt}\eta_2 \begin{pmatrix} \frac{[\cos(qt) + i\sin(qt)][(d - p) - qi]}{-c} \\ (\cos(qt) + i\sin(qt)) \end{pmatrix}$$

$$\vec{X}_1(t) = e^{pt}\eta_2 \begin{pmatrix} \frac{\cos(qt)(d - p) + i\sin(qt)(d - p) - qicos(qt) - qiisin(qt)}{-c} \\ (\cos(qt) + i\sin(qt)) \end{pmatrix}$$

$$\vec{X}_1(t) = e^{pt}\eta_2 \begin{pmatrix} \frac{(d - p)\cos(qt) + i(d - p)\sin(qt) - qicos(qt) + qsin(qt)}{-c} \\ (\cos(qt) + i\sin(qt)) \end{pmatrix}$$

$$\vec{X}_1(t) = e^{pt}\eta_2 \begin{pmatrix} \frac{[(d - p)\cos(qt) + qsin(qt)] + [i(d - p)\sin(qt) - qicos(qt)]}{-c} \\ (\cos(qt) + i\sin(qt)) \end{pmatrix}$$

$$\vec{X}_1(t) = e^{pt}\eta_2 \begin{pmatrix} \frac{[(d - p)\cos(qt) + qsin(qt)] + i[(d - p)\sin(qt) - qcos(qt)]}{-c} \\ (\cos(qt) + i\sin(qt)) \end{pmatrix}$$

$$\vec{X}_1(t) = e^{pt}\eta_2 \begin{pmatrix} \frac{[(d - p)\cos(qt) + qsin(qt)]}{-c} \\ \cos(qt) \end{pmatrix} + e^{pt}\eta_2 i \begin{pmatrix} \frac{[(d - p)\sin(qt) - qcos(qt)]}{-c} \\ \sin(qt) \end{pmatrix}$$

$$\vec{X}_1(t) = e^{pt} \begin{pmatrix} \frac{\eta_2[(d - p)\cos(qt) + qsin(qt)]}{-c} \\ \eta_2\cos(qt) \end{pmatrix} + ie^{pt} \begin{pmatrix} \frac{\eta_2[(d - p)\sin(qt) - qcos(qt)]}{-c} \\ \eta_2\sin(qt) \end{pmatrix}$$

$$\vec{X}_1(t) = \vec{u}(t) + i\vec{v}(t)$$

Vậy công thức nghiệm chung trong trường hợp  $\Delta < 0$  sẽ là

$$\vec{X}_1(t) = C_1 e^{pt} \begin{pmatrix} \frac{\eta_2[(d - p)\cos(qt) + qsin(qt)]}{-c} \\ \eta_2\cos(qt) \end{pmatrix} + C_2 e^{pt} \begin{pmatrix} \frac{\eta_2[(d - p)\sin(qt) - qcos(qt)]}{-c} \\ \eta_2\sin(qt) \end{pmatrix} \quad (6)$$

Áp dụng điều kiện khởi tạo để tìm các hằng số  $C_1, C_2$ .

$$\begin{pmatrix} R_0 \\ J_0 \end{pmatrix} = \vec{X}(0) = C_1 \begin{pmatrix} \frac{\eta_2(d - p)}{-c} \\ \eta_2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \frac{\eta_2(-q)}{-c} \eta_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\eta_2(d-p)}{-c}C_1 + \frac{\eta_2(-q)}{-c}\eta_2C_2 = R_0 \\ \eta_2C_1 = J_0 \end{array} \right\} \Rightarrow C_1, C_2$$

Với  $\eta_1, \eta_2$  tính từ (5),  $p$  là  $Re(\lambda_1)$ ,  $q$  là  $Im(\lambda_1)$ .

### 2.1.1.c $\Delta = 0$ , Repeated Eigenvalues

Mô tả vấn đề. Chúng ta mong muốn có 2 nghiệm phân biệt, không phụ thuộc nhau để tạo thành một nghiệm chung Tuy nhiên, trong trường hợp này, eigenvalues là nghiệm kép. Theo [bài viết này](#), em tìm được cách giải quyết như sau.

Nghiệm đầu tiên, chúng ta sẽ làm tương tự như trường hợp  $\Delta > 0$ ,

$$\vec{X}_1 = \vec{\eta}e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} \frac{-b}{a-\lambda_1}\eta_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} \frac{d-\lambda_1}{-c}\eta_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t}, (\forall \eta_2 \in R), \text{ because (3), (4)} \quad (7)$$

sau khi tính được  $\eta$ , ta sẽ sử dụng  $\eta$  để tính nghiệm 2.

Nghiệm thứ hai,

$$\vec{X}_2 = te^{\lambda t}\vec{\eta} + e^{\lambda t}\vec{\rho} \quad (8)$$

với  $\vec{\rho}$  sẽ thỏa

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)\vec{\rho} &= \vec{\eta} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a - \lambda_1 & b \\ c & d - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dựa vào (4), và thực hiện biến đổi tương tự, ta có

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a - \lambda_1 & b \\ c & d - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\rho}_1 \\ \vec{\rho}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{-b}{a-\lambda_1}\eta_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d-\lambda_1}{-c}\eta_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} (a-\lambda_1)\rho_1 + b\rho_2 \\ (d-\lambda_1)\rho_2 + c\rho_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{-b}{a-\lambda_1}\eta_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d-\lambda_1}{-c}\eta_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Suy ra công thức  $\rho_1$  dựa vào  $\rho_2 \in R$  tùy ý

$$\Rightarrow \rho_1 = \left( \frac{\frac{-b}{a-\lambda_1}\eta_2 - b\rho_2}{a-\lambda_1} \right), \text{ and } \rho_2 \in R \quad (9)$$

hoặc

$$\rho_1 = \left( \frac{\frac{d-\lambda_1}{-c}\eta_2 - b\rho_2}{a-\lambda_1} \right), \text{ and } \rho_2 \in R \quad (10)$$

hoặc

$$\rho_1 = \left( \frac{\frac{-b}{a-\lambda_1}\eta_2 - (d-\lambda_1)\rho_2}{c} \right), \text{ and } \rho_2 \in R \quad (11)$$

hoặc

$$\rho_1 = \left( \frac{\frac{d - \lambda_1}{-c} \eta_2 - (d - \lambda_1) \rho_2}{c} \right), \text{ and } \rho_2 \in R \quad (12)$$

Công thức nghiệm  $\vec{X}$  của hệ sẽ là

$$\begin{aligned} \vec{X} &= C_1 \vec{X}_1 + C_2 \vec{X}_2 \\ \Leftrightarrow \vec{X} &= C_1 \vec{\eta} e^{\lambda t} + C_2 (t e^{\lambda t} \vec{\eta} + e^{\lambda t} \vec{\rho}) \\ \Leftrightarrow \vec{X} &= C_1 \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t} + C_2 e^{\lambda t} \left( t \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} \right) \\ \boxed{\Leftrightarrow \vec{X} &= C_1 \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t} + C_2 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} t \eta_1 + \rho_1 \\ t \eta_2 + \rho_2 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

Áp dụng điều kiện khởi tạo để tìm các hằng số  $C_1, C_2$ .

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} R_0 \\ J_0 \end{pmatrix} &= C_1 \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t} + C_2 \begin{pmatrix} t \eta_1 + \rho_1 \\ t \eta_2 + \rho_2 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \left. \begin{aligned} \eta_1 C_1 + \rho_1 C_2 &= R_0 \\ \eta_2 C_1 + \rho_2 C_2 &= J_0 \end{aligned} \right\} &\Rightarrow C_1, C_2 \end{aligned}$$

Với  $_{1,2}$  tính từ (7), và  $\rho_1, \rho_2$  được tính từ (9) hoặc (10) hoặc (11) hoặc (12).

## 2.2 Problem 2

## 2.3 Problem 3

### I Nhân đa thức với đa thức

#### 1 Nhân đơn thức với đơn thức

Để nhân hai đơn thức, ta nhân các hệ số với nhau và nhân các phần biến với nhau.

**Ví dụ 1** Tìm tích của

$x$  và  $2xy$

$y$  và  $-2xy$ .

#### 2 Nhân đơn thức với đa thức

Muốn nhân một đơn thức với một đa thức, ta nhân đơn thức với từng hạng tử của đa thức rồi cộng các tích với nhau.

**Ví dụ 2** Làm tính nhân.

a)  $x(x + y)$

c)  $x(x^2 + 2xy + y^2)$

b)  $y(x - y)$

d)  $y(x^2 + 2xy + y^2)$

#### 3 Nhân đa thức với đa thức

Muốn nhân một đa thức với một đa thức, ta nhân mỗi hạng tử của đa thức này với từng hạng tử của đa thức kia rồi cộng các tích với nhau.

**Ví dụ 3** Làm tính nhân





$$(x + y)(x - y)$$

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

## II Những hằng đẳng thức đáng nhớ

### 1. Bình phương của một tổng.

$$\begin{aligned}(x + y)^2 &= (x + y)(x + y) \\ &= x(x + y) + y(x + y) \\ &= (x^2 + xy) + (yx + y^2) \\ &= x^2 + xy + yx + y^2 \\ &= x^2 + 2xy + y^2.\end{aligned}$$

Thơ để nhớ :

*Bình phương của một tổng  
Tất cả đều bậc hai  
Hệ số ở hàng hai  
Một cộng hai rồi một*

Nếu tổng quát :

*Mũ n của một tổng  
Tất cả đều bậc n  
Hệ số ở hàng n  
Tam giác Pascal*

### 2. Bình phương của một hiệu. Áp dụng hằng đẳng thức số 1 ta có

$$\begin{aligned}(x - y)^2 &= [x + (-y)]^2 \\ &= x^2 + 2x(-y) + (-y)^2 \\ &= x^2 - 2xy + y^2.\end{aligned}$$

Thơ để nhớ :

*Bình phương của một hiệu  
Tất cả đều bậc hai  
Hệ số ở hàng hai  
Một trừ hai rồi một*

### 3. Hiệu hai bình phương

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 &= x^2 - xy + xy - y^2 \\ &= x(x - y) + y(x - y) \\ &= (x + y)(x - y).\end{aligned}$$

Thơ để nhớ:

*Hiệu của hai bình phương  
Tổng bình thường nhân hiệu*

### 4. Lập phương của một tổng

$$\begin{aligned}(x + y)^3 &= (x + y)(x + y)^2 \\ &= (x + y)(x^2 + 2xy + y^2) \\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\ &= x^3 + y^3 + 3xy(x + y)\end{aligned}$$

Thơ để nhớ :

*Lập phương của một tổng*

*Tất cả đều bậc ba*

*Hệ số ở hàng ba*

*Một ba rồi ba một*

5. Lập phương của một hiệu. Áp dụng hằng đẳng thức số 4 bằng cách thay  $y$  bằng  $-y$  ta được

$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

Thơ để nhớ :

*Lập phương của một hiệu*

*Cũng giống tổng lập phương*

*Nhưng tổng với số âm*

*Nên có dấu xen kẽ*

6. Tổng hai lập phương.

Từ hằng đẳng thức số 4 suy ra

$$\begin{aligned}x^3 + y^3 &= (x + y)^3 - 3xy(x + y) \\&= (x + y)[(x + y)^2 - 3xy] \\&= (x + y)(x^2 + 2xy + y^2 - 3xy) \\&= (x + y)(x^2 - xy + y^2)\end{aligned}$$

Thơ để nhớ :

*Tổng của hai lập phương*

*Là tích tổng của nó*

*Nhân với bình phương thiếu*

7. Hiệu hai lập phương

$$\begin{aligned}x^3 - y^3 &= x^3 + (-y)^3 \\&= [x + (-y)][x^2 - x(-y) + (-y)^2] \\&= (x - y)(x^2 + xy + y^2)\end{aligned}$$

Thơ để nhớ :

*Hiệu của hai lập phương*

*Là tích hiệu của nó*

*Nhân với bình phương thiếu*