VIETNAM NATIONAL UNIVERSITY, HO CHI MINH CITY
UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
FACULTY OF COMPUTER SCIENCE AND ENGINEERING

DISCRETE STRUCTURES FOR COMPUTING (CO1007)

Assignment

Relation - Counting - Probability and Graph

Advisor: Fullname
Students: Fullname of Student 1 - Student 1 ID numbers.
Fullname of Student 2 - Student 2 ID numbers.

HO CHI MINH CITY, SEPTEMBER 2020

Contents

1 Member list & Workload

No.	Fullname	Student ID	Problems	Percentage of work
1	Lưu Quốc Bình	2033009	- Exercise 1 Bonus: 1, 2, 3. - Probability: 1, 2, 3.	30%
2	Nguyễn Văn B	19181717	- Relation & Counting: 4, 5, 6 Bonus: 4, 5, 6. - Graph: 1, 2, 3, Bonus: 1, 2, 3.	20%
1	Nguyễn Văn A	19181716	- Relation & Counting: 1, 2, 3 Bonus: 1, 2, 3. - Probability: 1, 2, 3.	30%
1	Nguyễn Văn A	19181716	- Relation & Counting: 1, 2, 3 Bonus: 1, 2, 3. - Probability: 1, 2, 3.	30%

2 Relation & Counting

2.1 Problem 1

Write on the report a very detailed introduction to the IVPs Sys. (3) and the formulae of its exact solutions for general a, b, c, and d and initial condition R0 and J0. Then complete Tab. 2 for all possible cases of eigenvalues of general 2 × 2 matrix A

2.1.1 Method of solving system of differential equations

Xét hệ:

$$\begin{cases} R' = aR + bJ \\ J' = cR + dJ \\ R(0) = R_0 \, J(0) = J_0 \end{cases} \tag{1}$$

dược viết dưới dạng vector

$$\vec{x'} = A\vec{X}$$

sẽ có công thức nghiệm là

$$\vec{X} = \vec{\eta}e^{\lambda t}$$

ở lấy λ and $\vec{\eta}$ là eigenvalues và eigenvectors của , ma trận A , và

$$\vec{x'} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \vec{X}(t) = \begin{pmatrix} R(t) \\ J(t) \end{pmatrix}; \vec{X}(0) = \begin{pmatrix} R_0 \\ J_0 \end{pmatrix}$$

Đầu tiên, chúng ta tìm eigenvalues của ma trận A.

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

triển khai và rút gọn,

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$$

tính delta,

$$\Delta = [-(a+d)]^2 - 4(ad - bc)$$

dạng chung của nghiệm sẽ là

$$\vec{X}(t) = C_1 X_1 + C_2 X_2 \tag{2}$$

2.1.1.a $\Delta > 0$, *(Real Eigenvalues)*, (4) *c 2 nghim*λ_1, λ_2

Với λ_1, chúng ta sẽ xử lý như sau,

$$\begin{pmatrix} a-\lambda_1 & b \\ c & d-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} (a-\lambda_1)\eta_1 + b\eta_2 \\ (d-\lambda_1)\eta_2 + c\eta_1 \end{pmatrix} 0 \Rightarrow \eta_1 = \frac{-b}{a-\lambda_1}\eta_2 = \frac{d-\lambda_1}{-c}\eta_2 \tag{3}$$

eigenvector trong trường hợp này sẽ là,

$$\vec{\eta^{(1)}} = \begin{pmatrix} \frac{-b}{a-\lambda_1}\eta_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \eta_2 \ \in \ R \tag{4}$$

tương tự với λ_2

$$\vec{\eta^{(2)}} = \begin{pmatrix} \frac{-b}{a-\lambda_2}\eta'_2 \\ \eta'_2 \end{pmatrix}, \eta'_2 \ \in \ R$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \vec{X}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} \frac{-b}{a-\lambda_1}\eta_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} + C_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} \frac{-b}{a-\lambda_2}\eta'_2 \\ \eta'_2 \end{pmatrix}}$$

Tìm các hằng số C_1, C_2 với điều kiện khởi tạo R_0, J_0

$$\begin{pmatrix} R_0 \\ J_0 \end{pmatrix} = \vec{X}(0) = C_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} \frac{-b}{a-\lambda_1}\eta_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} + C_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} \frac{-b}{a-\lambda_2}\eta'_2 \\ \eta'_2 \end{pmatrix}$$

Nhân các hệ số với nhau, ta sẽ có hệ phương trình với biến cần tìm là C_1, C_2

$$\boxed{\left.\begin{matrix} \frac{-b}{a-\lambda_1}\eta_2 C_1 + \frac{-b}{a-\lambda_2}\eta'_2 C_2 = R_0 \\ \eta_2 C1 + \eta'_2 C2 = J_0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow C1, C2}$$, với $\eta_2 \in R$ tuỳ ý , λ_1, λ_2 là eigenvalues

2.1.1.b $\Delta < 0$, *Complex Eigenvalues*, $\lambda_{1,2}$= **p** $\pm qi$

Dựa vào (3), với $\lambda = p + qi$ (chọn 1 nghiệm phúc với dấu âm hoặc dương , trong trường hợp này em/tôi chọn nghiệm phức dương.), chúng ta có

$$\eta_1 = \frac{-b}{a-(p+qi)}\eta_2 = \frac{d-(p+qi)}{c}\eta_2 \tag{5}$$

eigenvector đầu tiên là,

$$\vec{\eta^{(1)}} = \begin{pmatrix} \frac{d-(p+qi)}{-c}\eta_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \eta_2 \ \in \ R$$

Dựa vào công thức nghiệm ở phía trên, $\vec{X_1}$ là

$$\vec{X_1}(t) = e^{(p+qi)t}\begin{pmatrix}\frac{d-(p+qi)}{-c}\eta_2\\ \eta_2\end{pmatrix}, \eta_2 \in R$$

$$\vec{X_1}(t) = e^{pt}e^{qit}\begin{pmatrix}\frac{d-(p+qi)}{-c}\eta_2\\ \eta_2\end{pmatrix}$$

Áp dụng công thức Euler (https://tutorial.math.lamar.edu/Classes/DE/ComplexRoots.aspxEulerFormula),

$$\vec{X_1}(t) = e^{pt}(cos(qt)+isin(qt))\begin{pmatrix}\frac{d-(p+qi)}{-c}\eta_2\\ \eta_2\end{pmatrix}$$

Rút gọn η_2,

$$\vec{X_1}(t) = e^{pt}\eta_2(cos(qt)+isin(qt))\begin{pmatrix}\frac{d-(p+qi)}{-c}\\ 1\end{pmatrix}$$

Các bước biến đổi,

$$\vec{X_1}(t) = e^{pt}\eta_2(cos(qt)+isin(qt))\begin{pmatrix}\frac{d-p-qi}{-c}\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\vec{X_1}(t) = e^{pt}\eta_2(cos(qt)+isin(qt))\begin{pmatrix}\frac{(d-p)-qi}{-c}\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\vec{X_1}(t) = e^{pt}\eta_2\begin{pmatrix}\frac{[cos(qt)+isin(qt)][(d-p)-qi]}{-c}\\ (cos(qt)+isin(qt))\end{pmatrix}$$

$$\vec{X_1}(t) = e^{pt}\eta_2\begin{pmatrix}\frac{cos(qt)(d-p)+isin(qt)(d-p)-qicos(qt)-qiisin(qt))]}{-c}\\ (cos(qt)+isin(qt))\end{pmatrix}$$

$$\vec{X_1}(t) = e^{pt}\eta_2\begin{pmatrix}\frac{(d-p)cos(qt)+i(d-p)sin(qt)-qicos(qt)+qsin(qt))]}{-c}\\ (cos(qt)+isin(qt))\end{pmatrix}$$

$$\vec{X_1}(t) = e^{pt}\eta_2\begin{pmatrix}\frac{[(d-p)cos(qt)+qsin(qt)]+[i(d-p)sin(qt)-qicos(qt))]}{-c}\\ (cos(qt)+isin(qt))\end{pmatrix}$$

$$\vec{X_1}(t) = e^{pt}\eta_2\begin{pmatrix}\frac{[(d-p)cos(qt)+qsin(qt)]+i[(d-p)sin(qt)-qcos(qt))]}{-c}\\ (cos(qt)+isin(qt))\end{pmatrix}$$

$$\vec{X_1}(t) = e^{pt}\eta_2\begin{pmatrix}\frac{[(d-p)cos(qt)+qsin(qt)]}{-c}\\ cos(qt)\end{pmatrix} + e^{pt}\eta_2 i\begin{pmatrix}\frac{[(d-p)sin(qt)-qcos(qt))]}{-c}\\ sin(qt)\end{pmatrix}$$

$$\vec{X_1}(t) = e^{pt}\begin{pmatrix} \dfrac{\eta_2[(d-p)cos(qt)+qsin(qt)]}{-c} \\ \eta_2 cos(qt)\end{pmatrix} + ie^{pt}\begin{pmatrix} \dfrac{\eta_2[(d-p)sin(qt)-qcos(qt))]}{-c} \\ \eta_2 sin(qt)\end{pmatrix}$$

$$\vec{X_1}(t) = \vec{u}(t) + i\vec{v}(t)$$

Vậy công thức nghiệm chung trong trường hợp $\Delta < 0$ sẽ là

$$\boxed{\vec{X_1}(t) = C_1 e^{pt}\begin{pmatrix} \dfrac{\eta_2[(d-p)cos(qt)+qsin(qt)]}{-c} \\ \eta_2 cos(qt)\end{pmatrix} + C_2 e^{pt}\begin{pmatrix} \dfrac{\eta_2[(d-p)sin(qt)-qcos(qt))]}{-c} \\ \eta_2 sin(qt)\end{pmatrix} \quad (6)}$$

Áp dụng điều kiện khởi tạo để tìm các hằng số C_1, C_2.

$$\begin{pmatrix} R_0 \\ J_0 \end{pmatrix} = \vec{X}(0) = C_1\begin{pmatrix} \dfrac{\eta_2(d-p)}{-c} \\ \eta_2 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} \dfrac{\eta_2(-q)}{-c}\eta_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \dfrac{\eta_2(d-p)}{-c}C_1 + \dfrac{\eta_2(-q)}{-c}\eta_2 C_2 = R_0 \\ \eta_2 C1 = J_0 \end{array}\right\} \Rightarrow C1, C2}$$

Với η_1, η_2 tính từ (5), p là $Re(\lambda_1)$, q là $Im(\lambda_1)$.

2.1.1.c $\Delta = 0$, *Repeated Eigenvalues*

Mô tả vấn đề. Chúng ta mong muốn có 2 nghiệm phân biệt, không phụ thuộc nhau để tạo thành một nghiệm chung Tuy nhiên, trong trường hợp này, eigenvalues là nghiệm kép. Thep bài viết này, em tìm được cách giải quyết như sau.

Nghiệm đầu tiên, chúng ta sẽ làm tương tự như trường hợp $\Delta > 0$,

$$\vec{X_1} = \vec{\eta}e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} \dfrac{-b}{a-\lambda_1}\eta_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} \dfrac{d-\lambda_1}{-c}\eta_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t}, (\forall \eta_2 \in R), because (3), (4) \quad (7)$$

sau khi tính được η, ta sẽ sử dụng η để tính nghiệm 2.

Nghiệm thứ hai,

$$\vec{X_2} = te^{\lambda t}\vec{\eta} + e^{\lambda t}\vec{\rho} \quad (8)$$

với $\vec{\rho}$ sẽ thoả

$$(A - \lambda I)\vec{\rho} = \vec{\eta}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a-\lambda_1 & b \\ c & d-\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

dựa vào (4), va thực hiện biến đổi tương tự, ta có

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a-\lambda_1 & b \\ c & d-\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{\rho_1} \\ \vec{\rho_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-b}{a-\lambda_1}\eta_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{d-\lambda_1}{-c}\eta_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} (a-\lambda_1)\rho_1 + b\rho_2 \\ (d-\lambda_1)\rho_2 + c\rho_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-b}{a-\lambda_1}\eta_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d-\lambda_1}{-c}\eta_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

Suy ra cong thức ρ_1 dựa vào $\rho_2 \in R$ tuỳ ý

$$\Rightarrow \rho_1 = (\frac{\frac{-b}{a-\lambda_1}\eta_2 - b\rho_2}{a-\lambda_1}), and \rho_2 \in R \tag{9}$$

hoặc

$$\rho_1 = (\frac{\frac{d-\lambda_1}{-c}\eta_2 - b\rho_2}{a-\lambda_1}), and \rho_2 \in R \tag{10}$$

hoặc

$$\rho_1 = (\frac{\frac{-b}{a-\lambda_1}\eta_2 - (d-\lambda_1)\rho_2}{c}), and \rho_2 \in R \tag{11}$$

hoặc

$$\rho_1 = (\frac{\frac{d-\lambda_1}{-c}\eta_2 - (d-\lambda_1)\rho_2}{c}), and \rho_2 \in R \tag{12}$$

Công thức nghiệm $\vec{X}$ của hệ sẽ là

$$\vec{X} = C_1\vec{X}_1 + C_2\vec{X}_2$$

$$\Leftrightarrow \vec{X} = C_1\vec{\eta}e^{\lambda t} + C_2(te^{\lambda t}\vec{\eta} + e^{\lambda t}\vec{\rho})$$

$$\Leftrightarrow \vec{X} = C_1 \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t} + C_2 e^{\lambda t}(t \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix})$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \vec{X} = C_1 \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t} + C_2 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} t\eta_1 + \rho_1 \\ t\eta_2 + \rho_2 \end{pmatrix}}$$

Áp dụng điều kiện khởi tạo để tìm các hằng số C_1, C_2.

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} R_0 \\ J_0 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t} + C_2 \begin{pmatrix} t\eta_1 + \rho_1 \\ t\eta_2 + \rho_2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\Rightarrow \left. \begin{matrix} \eta_1 C_1 + \rho_1 C_2 = R_0 \\ \eta_2 C_1 + \rho_2 C_2 = J_0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow C1, C2}$$

Với $_{1,2}$ tính từ (7), và ρ_1, ρ_2 được tính từ (9) hoặc (10) hoặc (11) hoặc (12).

2.2 Problem 2

...

2.3 Bonus exercises

...

3 Probabilty

3.1 Problem 1

...

3.2 Problem 2

...

3.3 Bonus exercises

...

4 Graph

4.1 Problem 1

...

4.2 Problem 2

...

4.3 Bonus exercises

...

References

[1] ...

[2] ...