VIETNAM NATIONAL UNIVERSITY, HO CHI MINH CITY
UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
FACULTY OF COMPUTER SCIENCE AND ENGINEERING

MATHEMATICAL MODELING (CO2011)

Assignment

"Dynamics of Love"

Advisor: -
Students: Nguyên Thi Thanh Uyên - 2133187.
Nguyễn Trung Nghĩa - 2010448
Lưu Quốc Bình - 2033009

HO CHI MINH CITY, SEPTEMBER 2022

Contents

1 Member list & Workload

No.	Fullname	Student ID	Problems	Percentage of work
1	Lưu Quốc Bình	2033009	- Exercise 1	70%
2	Nguyễn Trung Nghĩa	2010448	- Exercise 2	100%
3	Nguyên Thi Thanh Uyên	2133187	- Exercise 3	100%

2 Relation & Counting

2.1 Problem 1

Write on the report a very detailed introduction to the IVPs Sys. (3) and the formulae of its exact solutions for general a, b, c, and d and initial condition R0 and J0. Then complete Tab. 2 for all possible cases of eigenvalues of general 2 × 2 matrix A

2.1.1 Method of solving system of differential equations

Xét hệ:

$$\begin{cases} R' = aR + bJ \\ J' = cR + dJ \\ R(0) = R_0 \; J(0) = J_0 \end{cases} \tag{1}$$

dược viết dưới dạng vector

$$\vec{x'} = A\vec{X}$$

sẽ có công thức nghiệm là

$$\vec{X} = \vec{\eta}e^{\lambda t}$$

ở lây λ and $\vec{\eta}$ là eigenvalues và eigenvectors của , ma trận A , và

$$\vec{x'} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \vec{X}(t) = \begin{pmatrix} R(t) \\ J(t) \end{pmatrix}; \vec{X}(0) = \begin{pmatrix} R_0 \\ J_0 \end{pmatrix}$$

Đầu tiên, chúng ta tìm eigenvalues của ma trận A.

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

triển khai và rút gọn,

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$$

tính delta,

$$\Delta = [-(a+d)]^2 - 4(ad - bc)$$

dạng chung của nghiệm sẽ là

$$\vec{X}(t) = C_1X_1 + C_2X_2 \tag{2}$$

2.1.1.a $\Delta > 0$, $(Real\ Eigenvalues)$, $(4)\ c\ 2\ nghim \lambda_1, \lambda_2$

Với λ_1, chúng ta sẽ xử lý như sau,

$$\begin{pmatrix} a-\lambda_1 & b \\ c & d-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} (a-\lambda_1)\eta_1 + b\eta_2 \\ (d-\lambda_1)\eta_2 + c\eta_1 \end{pmatrix} 0 \Rightarrow \eta_1 = \frac{-b}{a-\lambda_1}\eta_2 = \frac{d-\lambda_1}{-c}\eta_2 \tag{3}$$

eigenvector trong trường hợp này sẽ là,

$$\vec{\eta^{(1)}} = \begin{pmatrix} \frac{-b}{a-\lambda_1}\eta_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \eta_2 \in R \tag{4}$$

tương tự với λ_2

$$\vec{\eta^{(2)}} = \begin{pmatrix} \frac{-b}{a-\lambda_2}\eta_2' \\ \eta_2' \end{pmatrix}, \eta_2' \in R$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \vec{X}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} \frac{-b}{a-\lambda_1}\eta_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} + C_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} \frac{-b}{a-\lambda_2}\eta_2' \\ \eta_2' \end{pmatrix}}$$

Tìm các hằng số C_1, C_2 với điều kiện khởi tạo R_0, J_0

$$\begin{pmatrix} R_0 \\ J_0 \end{pmatrix} = \vec{X}(0) = C_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} \frac{-b}{a-\lambda_1}\eta_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} + C_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} \frac{-b}{a-\lambda_2}\eta_2' \\ \eta_2' \end{pmatrix}$$

Nhân các hệ số với nhau, ta sẽ có hệ phương trình với biến cần tìm là C_1, C_2

$$\boxed{\left.\begin{matrix} \frac{-b}{a-\lambda_1}\eta_2 C_1 + \frac{-b}{a-\lambda_2}\eta_2' C_2 = R_0 \\ \eta_2 C1 + \eta_2' C2 = J_0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow C1, C2}$$, với $\eta_2 \in R$ tuỳ ý , λ_1, λ_2 là eigenvalues

2.1.1.b $\Delta < 0$, $Complex\ Eigenvalues$, $\lambda_{1,2} = \mathbf{p} \pm qi$

Dựa vào (3), với $\lambda = p + qi$ (chọn 1 nghiệm phức với dấu âm hoặc dương , trong trường hợp này em/tôi chọn nghiệm phức dương.), chúng ta có

$$\eta_1 = \frac{-b}{a-(p+qi)}\eta_2 = \frac{d-(p+qi)}{c}\eta_2 \tag{5}$$

eigenvector đầu tiên là,

$$\vec{\eta^{(1)}} = \begin{pmatrix} \frac{d-(p+qi)}{-c}\eta_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \eta_2 \in R$$

Dựa vào công thức nghiệm ở phía trên, $\vec{X_1}$ là

$$\vec{X_1}(t) = e^{(p+qi)t} \begin{pmatrix} \frac{d-(p+qi)}{-c}\eta_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \eta_2 \in R$$

$$\vec{X_1}(t) = e^{pt} e^{qit} \begin{pmatrix} \frac{d-(p+qi)}{-c}\eta_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

Áp dụng công thức Euler (https://tutorial.math.lamar.edu/Classes/DE/ComplexRoots.aspxEulerFormula),

$$\vec{X_1}(t) = e^{pt}(cos(qt) + isin(qt)) \begin{pmatrix} \frac{d-(p+qi)}{-c}\eta_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

Rút gọn η_2,

$$\vec{X_1}(t) = e^{pt}\eta_2(cos(qt) + isin(qt)) \begin{pmatrix} \frac{d-(p+qi)}{-c} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Các bước biến đổi,

$$\vec{X_1}(t) = e^{pt}\eta_2(cos(qt) + isin(qt)) \begin{pmatrix} \frac{d-p-qi}{-c} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{X_1}(t) = e^{pt}\eta_2(cos(qt) + isin(qt)) \begin{pmatrix} \frac{(d-p)-qi}{-c} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{X_1}(t) = e^{pt}\eta_2 \begin{pmatrix} \frac{[cos(qt)+isin(qt)][(d-p)-qi]}{-c} \\ (cos(qt)+isin(qt)) \end{pmatrix}$$

$$\vec{X_1}(t) = e^{pt}\eta_2 \begin{pmatrix} \frac{cos(qt)(d-p)+isin(qt)(d-p)-qicos(qt)-qiisin(qt))]}{-c} \\ (cos(qt)+isin(qt)) \end{pmatrix}$$

$$\vec{X_1}(t) = e^{pt}\eta_2 \begin{pmatrix} \frac{(d-p)cos(qt)+i(d-p)sin(qt)-qicos(qt)+qsin(qt))]}{-c} \\ (cos(qt)+isin(qt)) \end{pmatrix}$$

$$\vec{X_1}(t) = e^{pt}\eta_2 \begin{pmatrix} \frac{[(d-p)cos(qt)+qsin(qt)]+[i(d-p)sin(qt)-qicos(qt))]}{-c} \\ (cos(qt)+isin(qt)) \end{pmatrix}$$

$$\vec{X_1}(t) = e^{pt}\eta_2 \begin{pmatrix} \frac{[(d-p)cos(qt)+qsin(qt)]+i[(d-p)sin(qt)-qcos(qt))]}{-c} \\ (cos(qt)+isin(qt)) \end{pmatrix}$$

$$\vec{X_1}(t) = e^{pt}\eta_2 \begin{pmatrix} \frac{[(d-p)cos(qt)+qsin(qt)]}{-c} \\ cos(qt) \end{pmatrix} + e^{pt}\eta_2 i \begin{pmatrix} \frac{[(d-p)sin(qt)-qcos(qt))]}{-c} \\ sin(qt) \end{pmatrix}$$

$$\vec{X_1}(t) = e^{pt} \begin{pmatrix} \frac{\eta_2[(d-p)cos(qt)+qsin(qt)]}{-c} \\ \eta_2 cos(qt) \end{pmatrix} + ie^{pt} \begin{pmatrix} \frac{\eta_2[(d-p)sin(qt)-qcos(qt))]}{-c} \\ \eta_2 sin(qt) \end{pmatrix}$$

$$\vec{X_1}(t) = \vec{u}(t) + i\vec{v}(t)$$

Vậy công thức nghiệm chung trong trường hợp $\Delta < 0$ sẽ là

$$\boxed{\vec{X_1}(t) = C_1e^{pt} \begin{pmatrix} \frac{\eta_2[(d-p)cos(qt)+qsin(qt)]}{-c} \\ \eta_2 cos(qt) \end{pmatrix} + C_2e^{pt} \begin{pmatrix} \frac{\eta_2[(d-p)sin(qt)-qcos(qt))]}{-c} \\ \eta_2 sin(qt) \end{pmatrix} \quad (6)}$$

Áp dụng điều kiện khởi tạo để tìm các hằng số C_1, C_2.

$$\begin{pmatrix} R_0 \\ J_0 \end{pmatrix} = \vec{X}(0) = C_1 \begin{pmatrix} \frac{\eta_2(d-p)}{-c} \\ \eta_2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \frac{\eta_2(-q)}{-c}\eta_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\dfrac{\eta_2(d-p)}{-c}C_1 + \dfrac{\eta_2(-q)}{-c}\eta_2 C_2 = R_0 \\ \eta_2 C1 = J_0\end{array}\right\} \Rightarrow C1, C2}$$

Với η_1, η_2 tính từ (5), p là $Re(\lambda_1)$, q là $Im(\lambda_1)$.

2.1.1.c $\Delta = 0$, *Repeated Eigenvalues*

Mô tả vấn đề. Chúng ta mong muốn có 2 nghiệm phân biệt, không phụ thuộc nhau để tạo thành một nghiệm chung Tuy nhiên, trong trường hợp này, eigenvalues là nghiệm kép. Thep bài viết này, em tìm được cách giải quyết như sau.

Nghiệm đầu tiên, chúng ta sẽ làm tương tự như trường hợp $\Delta > 0$,

$$\vec{X_1} = \vec{\eta}e^{\lambda t} = \begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix} e^{\lambda t} = \begin{pmatrix}\dfrac{-b}{a-\lambda_1}\eta_2 \\ \eta_2\end{pmatrix} e^{\lambda t} = \begin{pmatrix}\dfrac{d-\lambda_1}{-c}\eta_2 \\ \eta_2\end{pmatrix} e^{\lambda t}, (\forall \eta_2 \in R), because (3), (4) \tag{7}$$

sau khi tính được η, ta sẽ sử dụng η để tính nghiệm 2.

Nghiệm thứ hai,

$$\vec{X_2} = te^{\lambda t}\vec{\eta} + e^{\lambda t}\vec{\rho} \tag{8}$$

với $\vec{\rho}$ sẽ thoả

$$(A - \lambda I)\vec{\rho} = \vec{\eta}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}a-\lambda_1 & b\\ c & d-\lambda_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rho_1\\ \rho_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix}$$

dựa vào (4), va thực hiện biến đổi tương tự, ta có

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}a-\lambda_1 & b\\ c & d-\lambda_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{\rho_1}\\ \vec{\rho_2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{-b}{a-\lambda_1}\eta_2 \\ \eta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{d-\lambda_1}{-c}\eta_2 \\ \eta_2\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}(a-\lambda_1)\rho_1 + b\rho_2\\ (d-\lambda_1)\rho_2 + c\rho_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{-b}{a-\lambda_1}\eta_2 \\ \eta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{d-\lambda_1}{-c}\eta_2 \\ \eta_2\end{pmatrix}$$

Suy ra cong thức ρ_1 dựa vào $\rho_2 \in R$ tuỳ ý

$$\Rightarrow \rho_1 = (\frac{\frac{-b}{a-\lambda_1}\eta_2 - b\rho_2}{a-\lambda_1}), and \rho_2 \in R \tag{9}$$

hoặc

$$\rho_1 = (\frac{\frac{d-\lambda_1}{-c}\eta_2 - b\rho_2}{a-\lambda_1}), and \rho_2 \in R \tag{10}$$

hoặc

$$\rho_1 = (\frac{\frac{-b}{a-\lambda_1}\eta_2 - (d-\lambda_1)\rho_2}{c}), and \rho_2 \in R \tag{11}$$

hoặc

$$\rho_1 = (\frac{\frac{d-\lambda_1}{-c}\eta_2 - (d-\lambda_1)\rho_2}{c}), and \rho_2 \in R \tag{12}$$

Công thức nghiệm $\vec{X}$ của hệ sẽ là

$$\vec{X} = C_1\vec{X_1} + C_2\vec{X_2}$$

$$\Leftrightarrow \vec{X} = C_1\vec{\eta}e^{\lambda t} + C_2(te^{\lambda t}\vec{\eta} + e^{\lambda t}\vec{\rho})$$

$$\Leftrightarrow \vec{X} = C_1\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix}e^{\lambda t} + C_2e^{\lambda t}(t\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\rho_1\\ \rho_2\end{pmatrix})$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \vec{X} = C_1\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix}e^{\lambda t} + C_2e^{\lambda t}\begin{pmatrix}t\eta_1 + \rho_1\\ t\eta_2 + \rho_2\end{pmatrix}}$$

Áp dụng điều kiện khởi tạo để tìm các hằng số C_1, C_2.

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}R_0\\ J_0\end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix}e^{\lambda t} + C_2\begin{pmatrix}t\eta_1 + \rho_1\\ t\eta_2 + \rho_2\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\Rightarrow \left.\begin{matrix}\eta_1C_1 + \rho_1C_2 = R_0\\ \eta_2C_1 + \rho_2C_2 = J_0\end{matrix}\right\} \Rightarrow C1, C2}$$

Với $_{1,2}$ tính từ (7), và ρ_1, ρ_2 được tính từ (9) hoặc (10) hoặc (11) hoặc (12).

2.2 Problem 2

wdwdwd

2.3 Problem 3

2.4 Bài tập 3:

Giả sử rằng tình yêu của Romeo và Juliet bị xáo trộn bởi các điều kiện bên ngoài. Trong trường hợp này, tình yêu giữa họ được mô hình hoá bởi Hệ phương trình vi phân như sau:

$$\begin{cases} R' = aR + bJ + f(t) \\ J' = cR + dJ + g(t) \\ R(0) = R_0 \\ J(0) = J_0 \end{cases} \tag{13}$$

Trong đó f và g là hai hàm thực phụ thuộc vào t.

Để giải được hệ phương trình vi phân trên thì f(t) và g(t) phải có những dạng đặc biệt sau:

$e^{\alpha t}.P_n(t)$

$e^{\alpha t}[P_n(t).sin\beta t + Q_m(t).cos\beta t]$

Cách giải:

Từ 1 trong 2 phương trình rút 1 ẩn theo ẩn kia suy ra đẳng thức (*)

Thế đẳng thức (*) vào phương trình còn lại suy ra phương trình vi phân cấp 2 hệ số hằng (**)

Giải phương trình vi phân cấp 2 hệ số hằng (**) suy ra ẩn thứ nhất

Thế ẩn thứ nhất vào đẳng thức (*) suy ra ẩn thứ hai.

Phương trình vi phân cấp 2:
1) Phương trình vi phân cấp 2 tuyến tính thuần nhất hệ số hằng:

$$y'' + p.y' + q.y = 0$$

Xét phương trình đặc trưng:

$$k^2 + p.k + q = 0$$

Nếu $\delta > 0$
$\Rightarrow$ phương trình có 2 nghiệm k_1, k_2
$\Rightarrow$ Phương trình (*) có nghiệm là: $y = C_1.e^{k_1 t} + C_2.e^{k_2 t}$

Nếu $\delta = 0$
$\Rightarrow$ Phương trình có nghiệm kép k
$\Rightarrow$ Phương trình (*) có nghiệm là: $y = C_1.e^{kt} + C_2.x.e^{kt}$

Nếu Nếu $\delta < 0$
$\Rightarrow$ Phương trình có nghiệm phức $\alpha \pm i.\beta$
$\Rightarrow$ Phương trình (*) có nghiệm là: $y = e^{\alpha t}.(C_1.cos\beta t + C_2.sin\beta t)$

2) Phương trình vi phân cấp 2 tuyến tính hệ số hằng với vế phải đặc biệt:
a) Định lý:

Giả sử:
$y'' + p.y' + q.y = f(t)$ có nghiệm $y = Y_1$
$y'' + p.y' + q.y = g(t)$ có nghiệm $y = Y_2$
Khi đó:
$y'' + p.y' + q.y = f(t) + g(t)$ có nghiệm $y = Y_1 + Y_2$
b) $y'' + p.y' + q.y = e^{\alpha t}.P_n(t)$ với $P_n(t)$ là đa thức bận n

Giải phương trình: $y'' + p.y' + q.y = 0 \Rightarrow y_c = Y$
Nghiệm riêng α không là nghiệm của phương trình đặc trưng.
$\Rightarrow y_p = e^{\alpha t}.Q_n(t)$

Nghiệm riêng α là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng.
$\Rightarrow y_p = t.e^{\alpha t}.Q_n(t)$

Nghiệm riêng α là nghiệm kép của phương trình đặc trưng.
$\Rightarrow y_p = t^2.e^{\alpha t}.Q_n(t)$

Với $Q_n(t)$ là đa thức bậc n tổng quát
$y'' + p.y' + q.y = e^{\alpha t}.[P_n(t).sin\beta t + Q_m(t).cos\beta t]$

Giải phương trình:
$y'' + p.y' + q.y = 0 \Rightarrow y_c = Y$

Nghiệm riêng $\alpha \pm i\beta$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng.
$\Rightarrow y_p = e^{\alpha t}.[H_l(t).sin\beta t + K_l(t).cos\beta t]$

Nghiệm riêng $\alpha \pm i\beta$ là nghiệm của phương trình đặc trưng.
$\Rightarrow y_p = t.e^{\alpha t}.[H_l(t).sin\beta tt + K_l(t).cos\beta tt]$

Với $l = max(n; m)$
Ví dụ 1:

$$\begin{cases} R' = 2R - J(1) \\ J' = -2R + J + 18t(2) \\ R(0) = 2 \\ J(0) = -1 \end{cases} \tag{14}$$

(1) $\Rightarrow J = -R' + 2R(3)$
$\Rightarrow J' = -R'' + 2R'$

Thế vào (2) ta được:
$-R'' + 2R' = -2R - R' + 2R + 18t$
$\Rightarrow R'' - 3R' = -18t$ (4)

Phương trình đặc trưng:
$k^2 - 3k = 0$
$\iff k = 0hock = 3$
$\Rightarrow R_c = C_1 + C_2.e^{3t}$

Ta có:
$-18t = e^{0t}.(-18t)$
$\Rightarrow \alpha = 0$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng.
Suy ra, nghiệm riêng của (4) có dạng:
$R_p = t.(At + B) = At^2 + Bt$
$\Rightarrow R'_P = 2At + B$
$\Rightarrow R''_P = 2A$

Thế vào (4) ta được:

$2A - 3.(2At + B) = -18t$

$$\iff \begin{cases} 6At + 2A - 3B = -18t \\ 2A - 3B = 0 \end{cases} \tag{15}$$

$$\iff \begin{cases} A = 3 \\ B = 3 \end{cases} \tag{16}$$

$\Rightarrow R_p = 3t^2 + 2t$
$\Rightarrow R = C_1 + C_2.e^3t + 3t^2 + 2t$
$\Rightarrow R' = 3C_2.e^3t + 6t + 2$

Thế vào (3) ta được:

$J = -(3C_2.e^{3t} + 6t + 2) + 2(C_1 + C_2.e^{3t} + 3t^2 + 2t)$
$\Rightarrow J = 2C_1 - C_2.e^{3t} + 6t^2 - 2t - 2$

Ta có:

$$\begin{cases} R(0) = 2 \\ J(0) = -1 \end{cases} \tag{17}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ 2C_1 - C_2 - 2 = -1 \end{cases} \tag{18}$$

$$\iff \begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ 2C_1 - C_2 = 1 \end{cases} \tag{19}$$

$$\iff \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 1 \end{cases} \tag{20}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} R = e^{3t} + 3t^2 + 2t + 1 \\ J = -e^{3t} + 6t^2 - 2t \end{cases} \tag{21}$$

Ví dụ 2:

$$\begin{cases} R' = 4R + 6J(1) \\ J' = 2R + 3J + t(2) \\ R(0) = \frac{1}{7}\, J(0) = \frac{6}{49} \end{cases} \tag{22}$$

(1) $\Rightarrow 6J = R' - 4R$
$\Rightarrow J = \frac{1}{6}R^{\prime - \frac{2}{3}R(3) \Rightarrow J' = \frac{1}{6}R'' - \frac{2}{3}R'}$
Thế vào (2) ta được:
$\frac{1}{6}R'' - \frac{2}{3}R' = 2R + 3(\frac{1}{6}R' - \frac{2}{3}R) + t$
$\iff R'' - 4R' = 12R + 3R' - 12R + 6t$
$\iff R'' - 7R' = 6t(4)$
Phương trình đặc trưng: $k^2 - 7k = 0$
$\left[\begin{array}{l} k = 0 \\ k = 7 \end{array} \right.$

$\Rightarrow R_C = C_1 + C_2.e^{7t}$

Ta có:; $6t = e^{0t}.(6t)$
$\Rightarrow \alpha = 0$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng. Suy ra, nghiệm riêng của (4) có dạng: $R_p = t.(At + B) = At^2 + Bt$
$\Rightarrow R_p' = 2At + B$
$\Rightarrow R_p'' = 2A$

Thế vào (4) ta được:
$2A - 7.(2At + B) = 6t \iff -14At + 2A - 7B = 6t$

$$\iff \begin{cases} 14A = 6 \\ 2A - 7B = 0 \end{cases} \tag{23}$$

Ví dụ 3:

$$\begin{cases} R^{'} = 4R - 3J + sint(1) \\ J^{'} = 2R - J - 2cost(2) \\ R(0) = 0 \\ J(0) = 2 \end{cases} \tag{24}$$

$(2) \Rightarrow 2R = J' + J + 2cost$
$\Rightarrow R = \frac{1}{2}J' + \frac{1}{2}J + cost(3)$
$\Rightarrow R' = \frac{1}{2}J'' + \frac{1}{2}J' - sint$

Thế vào (1) ta được:

$\frac{1}{2}J'' + \frac{1}{2}J' - sint = 4.(\frac{1}{2}J' + \frac{1}{2}J + cost) - 3J + sint$
$\iff J'' + J' - 2sint = 4J' + 4J + 8cost - 6J + 2sint$
$\iff J'' - 3J' + 2J = 4sint + 8cost(4)$

Phương trình đặc trưng:
$k^2 - 3k + 2 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} k = 1 \\ k = 2 \end{array} \right.$
$\Rightarrow J_C = C_1.e^t + C_2.e^2t$

Ta có:
$4sint + 8cost = e^{0t}.(4sint + 8cost)$
$\Rightarrow \alpha \pm i\beta = \pm i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng.
Suy ra, nghiệm riêng của (4) có dạng:
$J_P = A.sint + B.cost$
$\Rightarrow J'_P = Acost - Bsint$
$\Rightarrow J''_P = -Asint - Bcost$

Thế vào (4) ta được:

$(-A + 3B + 2A)sint + (-B - 3A + 2B)cost = 4sint + 8cost$
$\iff (A + 3B)sint + (-3A + B)cost = 4sint + 8cost$
$\iff$

$$\begin{cases} A + 3B = 4 \\ 3A + B = 8 \end{cases} \tag{25}$$

$$\iff \begin{cases} A = -2 \\ B = 2 \end{cases} \tag{26}$$

2.5 Problem 4

wdwdwd

2.6 Problem 5

wdwdwd