1 2020 年 11 月 3 日答疑记录

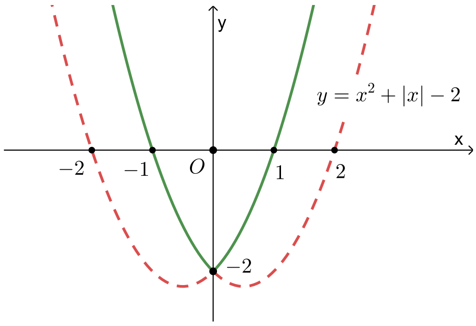
例 1.1 指出下列函数的单调性和值域:

(1) $f(x) = x^2 + |x| - 2$; (2) $g(x) = \dfrac{3x+1}{x-1}$.

解 (1) 方法一: 根据绝对值的定义可知,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2, & x \geqslant 0, \\ x^2 - x - 2, & x < 0. \end{cases}$$

函数的图形如下 (分别作 y 轴左侧和右侧的图形):



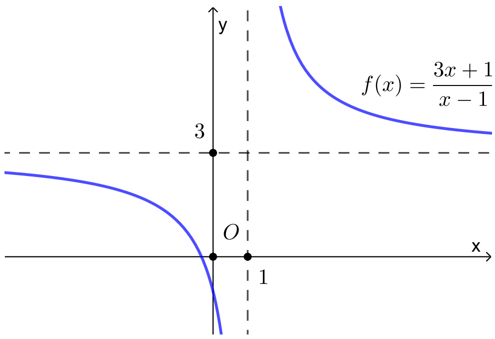
由图得, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 值域为 $[-2, +\infty)$.

方法二: 因为 $f(-x) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 为偶函数, 图形关于 y 轴对称. 令 $x \geqslant 0$ 知, $f(x) = x^2 + x - 2$, 可作出 $f(x)$ 在 y 轴右侧的图形, 再关于 y 轴作对称图形即可. 答案同上.

(2) 将函数变形 (把分子写成 "分母的倍数" 加 "常数" 的形式, 再拆项),

$$g(x) = \frac{3(x-1)+4}{x-1} = 3 + \frac{4}{x-1},$$

由此可知, $g(x)$ 的图形可由 $h(x) = \dfrac{4}{x}$ 的图形向右平移一个单位长度, 再向上平移三个单位长度得到:



所以, $g(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 和 $(1, +\infty)$ 上均单调递减, 值域为 $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

例 1.2 已知 $f(2x)$ 的定义域为 $[0, 1)$, 求 $f(x)$ 和 $f(x+3)$ 各自的定义域.

解 注意, 定义域是当前函数表达式中 x 的取值范围, 而同一个函数 (作用法则) 的作用范围是不会改变的.

因为 $f(2x)$ 的定义域为 $[0, 1)$, 此时 $x \in [0, 1)$ 且 f 作用在 $2x$ 上, 所以 f 的作用范围为 $[0, 2)$, 表明 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 2)$ (因为此时 f 作用在 x 上, 定义域与作用范围相同).

对 $f(x+3)$, 因为 f 作用在 $x+3$ 上, 所以 $x+3 \in [0, 2)$, 解得 $x \in [-3, -1)$, 即 $f(x+3)$ 的定义域为 $[-3, -1)$.

例 1.3 已知 $A=\{x \mid a+1<x<2a+4\}$, $B=\{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 5\}$, 且 $A \subseteq B$ 成立, 求 a 的取值范围.

解 (1) 若 $A=\varnothing$, 则 $a+1 \geqslant 2a+4$, 解得 $a \in(-\infty,-3]$.

(2) 若 $A \neq \varnothing$, 则

$$-1 \leqslant a+1<2a+4 \leqslant 5,$$

解得 $a \in\left[-2, \dfrac{1}{2}\right]$.

综上所述, $a \in(-\infty,-3] \cup\left[-2, \dfrac{1}{2}\right]$

例 1.4 解不等式:

(1) $|4-2x|>2$; (2) $\dfrac{1}{x+1} \geqslant 2$.

解 (1) 绝对值的几何意义是: $|a|$ 表示数轴上点 a 到原点的距离, 所以 $|4-2x|>2$ 表明

$$4-2x<-2 \quad \text{或} \quad 4-2x>2,$$

解得 $x \in(-\infty, 1) \cup(3,+\infty)$.

(2) 移项通分, 化成分式与 0 比, 再转化为等价的乘积与 0 比:

$$\frac{1}{x+1}-2 \geqslant 0 \Rightarrow \frac{-1-2x}{x+1} \geqslant 0 \Rightarrow \begin{cases}(2x+1)(x+1) \geqslant 0, \\ x+1 \neq 0,\end{cases}$$

解得 $x \in\left(-1, \dfrac{1}{2}\right]$.

2 2020 年 11 月 8 日答疑记录

2.1 利用函数性质解题

常见的函数性质有: 单调性, 奇偶性, 对称性, 周期性等. 解题时, 适当运用这些性质可以达到事半功倍的效果.

例 2.1 若 $a>\dfrac{1}{a}$, 求 a 的取值范围.

解 方法一: 不等式化为

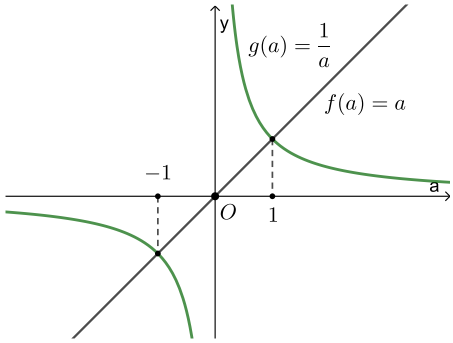
$$a-\frac{1}{a}>0 \Rightarrow \frac{a^2-1}{a}>0 \Rightarrow (a^2-1) a>0,$$

所以

$$\begin{cases}a^2-1>0, \\ a>0,\end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases}a^2-1<0, \\ a<0,\end{cases}$$

解得 $a>1$ 或 $a<-1$, 即 $a \in(-\infty,-1) \cup(1,+\infty)$.

方法二: 画出函数 $f(a)=a$ 和 $g(a)=\dfrac{1}{a}$ 的图形. 不等式表明 $f(a)>g(a)$, 对应前者图形在后者图形上方的情形 (即直线在上方, 双曲线在下方). 由图可知 $a \in(-\infty,-1) \cup(1,+\infty)$.



方法三: 也可以将不等式化为 $a-\dfrac{1}{a}>0$, 令 $h(a)=a-\dfrac{1}{a}$, 再作图求解. 只需留意函数 $h(a)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上均单调递增, 且与横轴的交点为 $(-1,0)$ 和 $(1,0)$ (参考 "2020 年 11 月 8 日答疑记录" 的例 4.2).

注 2.1 (1) 例 2.1 的方法一是代数解法, 变形后的式子 $(a^2-1)a>0$ 是三次不等式, 仍需要分类讨论, 各自求解后再取并集.

(2) 方法二和方法三均利用了函数图形 (前者两个, 后者一个), 用这种方法时需要根据题意构造容易画出大致图形的函数, 也就是要事先了解函数的特点 (单调性、奇偶性、对称性、与坐标轴的交点, 等等).

例 2.2 设定义在 $(-1,1)$ 上的奇函数 $f(x)$ 是增函数, 且 $f(a)+f(2a-1)<0$, 求 a 的取值范围.

解 因为 $f(x)$ 是奇函数, 所以不等式化为

$$f(a)<-f(2a-1)=f(1-2a).$$

结合 $f(x)$ 是定义在 $(-1,1)$ 上的增函数知

$$\begin{cases}-1<a<1,\\ -1<1-2a<1,\\ a<1-2a,\end{cases}\quad \text{解得}\quad 0<a<\frac{1}{3},$$

即 $a\in\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$.

例 2.2 中主要利用 "$f(x)$ 是增函数" 将抽象的不等式 (没有具体解析式的不等式)

$$f(a)<f(1-2a)$$

化为具体的不等式

$$a<1-2a.$$

再如, 若 $f(x)$ 是减函数, 则由 $f(a)<f(2a+1)$ 可知 $a>2a+1$. 在去掉 "f" 时, 也需要注意 f 的作用范围 (即题中 $f(x)$ 的定义域).

2.2 对数练习

对数的主要运算法则如下 (以下均设底数 $a\in(0,1)\cup(1,+\infty)$, 真数 $x,\ y>0$):

$$a^x=y\Leftrightarrow x=\log_a y,\quad \text{由此可得 } a^{\log_a y}=y,\ x=\log_a a^x,$$

$$\log_a x+\log_a y=\log_a xy,\quad \log_a x-\log_a y=\log_a\frac{x}{y},$$

$$\frac{\log_a x}{\log_a y}=\log_y x\ (\text{换底公式}),\quad \log_a x^\beta=\beta\log_a x\ (\beta\in\mathbf{R}).$$

以上公式均可以逆用, 如

$$\log_2 6 = \log_2 2 + \log_2 3 = 1 + \log_2 3.$$

此外还应注意恒等式 $\log_a a = 1$ 和 $\log_a 1 = 0$ (均由对数定义可得). 有两个取特殊底的对数是常用的: $\log_{10} x$ 记为 $\lg x$ (**常用对数**), $\log_{\mathrm{e}} x$ 记为 $\ln x$ (**自然对数**), 其中 $\mathrm{e} = 2.718\cdots$ 称为自然对数的底数.

例 2.3 对数练习:
(1) $\lg 0.0001$; (2) $\log_2 6 - \log_2 3$; (3) $\ln \sqrt{\mathrm{e}}$; (4) $\log_3 5 - \log_3 15$;
(5) $\lg \dfrac{1}{4} - \lg 25$; (6) $\log_2(\log_2 16)$; (7) $(\log_4 3 + \log_8 3)(\log_3 2 + \log_9 2)$.

解 (1) $\lg 0.0001 = \lg 10^{-4} = -4$ (注意 $0.1 = \dfrac{1}{10} = 10^{-1}$).

(2) $\log_2 6 - \log_2 3 = \log_2 \dfrac{6}{3} = \log_2 2 = 1$.

(3) $\ln \sqrt{\mathrm{e}} = \ln \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$.

(4) $\log_3 5 - \log_3 15 = \log_3 \dfrac{5}{15} = \log_3 \dfrac{1}{3} = -1$.

(5) $\lg \dfrac{1}{4} - \lg 25 = \lg \dfrac{1}{100} = -2$.

(6) $\log_2(\log_2 16) = \log_2 4 = 2$.

(7) 由换底公式 (不妨均化为自然对数),

$$\begin{aligned}
&(\log_4 3 + \log_8 3)(\log_3 2 + \log_9 2) \\
=&\left(\frac{\ln 3}{\ln 4} + \frac{\ln 3}{\ln 8}\right)\left(\frac{\ln 2}{\ln 3} + \frac{\ln 2}{\ln 9}\right) \\
=&\left(\frac{\ln 3}{2\ln 2} + \frac{\ln 3}{3\ln 2}\right)\left(\frac{\ln 2}{\ln 3} + \frac{\ln 2}{2\ln 3}\right) \\
=&\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\frac{\ln 3}{\ln 2}\left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{\ln 2}{\ln 3} \\
=&\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{2} = \frac{5}{4}.
\end{aligned}$$

3 2020 年 11 月 14 日答疑记录

例 3.1 *求函数* $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 4}{x}$ $(x > 0)$ *的最小值.*

解 方法一: 先拆项, 再用均值不等式, 即

$$f(x) = x + \frac{4}{x} - 1 \geqslant 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} - 1 = 3,$$

"=" 成立当且仅当 $x = \dfrac{4}{x}$ 即 $x = 2$ (因为 $x > 0$). 所以 $f(x)$ 的最小值为 3.

方法二: 直接对分子用均值不等式. 因为 $x^2 + 4 \geqslant 2\sqrt{x^2 \cdot 4} = 4x$, 所以

$$f(x) = \frac{x^2 + 4 - x}{x} \geqslant \frac{4x - x}{x} = 3,$$

"=" 成立当且仅当 $x^2 = 4$ 即 $x = 2$. 所以 $f(x)$ 的最小值为 3.

方法三: 考虑 "对勾函数" $g(x) = x + \dfrac{4}{x}$ 的图形 (参考 "2020 年 10 月 31 日答疑记录" 中第二个例子), 可知其在 $(0, 2]$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增, 所以最小值为 $g(2) = 4$. 又因为

$$f(x) = x + \frac{4}{x} - 1 = g(x) - 1,$$

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(2) = 3$.

例 3.1 中三个方法都是常见解法, 前两个方法都使用了均值不等式, 需注意该不等式及其中等号成立的前提条件 (参考 "2020 年 9 月 29 日答疑记录"), 第三个方法需要对 "对勾函数" 的图形非常熟悉. 此外, 第三个方法是通用解法, 例如由图形可知, 函数 $h(x)=x+\dfrac{4}{x}$ 在 $[3,+\infty)$ 上的值域为 $[h(3),+\infty)=\left[\dfrac{13}{3},+\infty\right)$, 而在 $[1,3]$ 上的值域为 $[h(2),h(1)]=[4,5]$. 对前例的第一种情形, 均值不等式的等号不成立, 而对后一种情形, 利用均值不等式只能求得最小值.

例 3.2　已知函数

$$f(x)=\begin{cases}(4a-3)x+a+\dfrac{1}{2}, & x<0,\\ a^x, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

(1) 若函数的图形经过点 $\left(3,\dfrac{1}{8}\right)$, 求 a 的值.

(2) 若对任意的 $x_1\neq x_2$, 都有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$ 成立, 求 a 的取值范围.

解　(1) 由题意, $f(3)=\dfrac{1}{8}$ 即 $a^3=\dfrac{1}{8}$, 所以 $a=\dfrac{1}{2}$.

(2) $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$ 表明 x_1, x_2 的大小关系与 $f(x_1)$, $f(x_2)$ 的大小关系恰好反过来 (即若 $x_1<x_2$, 则 $f(x_1)>f(x_2)$), 也就是 $f(x)$ 单调递减. 再由 $f(x)$ 的解析式知 (参考 "2020 年 10 月 31 日答疑记录" 的第三个例子)

$$\begin{cases}4a-3<0,\ 0<a<1,\\ a+\dfrac{1}{2}\geqslant a^0,\end{cases}\quad \text{解得}\quad 0<a<\frac{1}{2},$$

所以 $a\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.

例 3.2 中 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$ 表明 $f(x)$ 单调递减, 类似的结论 (需理解并熟记) 还有

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0\Leftrightarrow (f(x_1)-f(x_2))(x_1-x_2)>0\Leftrightarrow f(x)\text{ 单调递增},$$
$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0\Leftrightarrow (f(x_1)-f(x_2))(x_1-x_2)<0\Leftrightarrow f(x)\text{ 单调递减}.$$

例 3.3　计算: $\log_4 3\cdot\log_9 2-\log_{\frac{1}{2}}32$.

解　由对数的运算法则 (参考 "2020 年 11 月 8 日答疑记录" 对数练习小节),

$$\begin{aligned}\log_4 3\cdot\log_9 2-\log_{\frac{1}{2}}32&=\frac{\ln 3}{\ln 4}\cdot\frac{\ln 2}{\ln 9}-\frac{\ln 32}{\ln\frac{1}{2}}\\&=\frac{\ln 3}{2\ln 2}\cdot\frac{\ln 2}{2\ln 3}-\frac{5\ln 2}{-\ln 2}\\&=\frac{1}{4}+5=\frac{21}{4}.\end{aligned}$$

计算例 3.2 时, 其中的对数都化为以 e 为底, 也就是化为自然对数. 在计算时, 也可以都化为以 10 为底, 即化为常用对数. 此外, 也可以由 $32=2^5=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-5}$ 知 $\log_{\frac{1}{2}}32=-5$.

例 3.4　已知函数 $f(x)=\dfrac{ax^2+b}{x}$, 且 $f(1)=2$, $f(2)=\dfrac{5}{2}$.

(1) 确定函数 $f(x)$ 的解析式, 并判断其奇偶性;

(2) (选学) 用定义证明函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 上单调递增;

(3) 求满足 $f(1+2t^2)-f(3+t^2)<0$ 的实数 t 的取值范围.

解 (1) 由题意,

$$\begin{cases} a+b=2, \\ \dfrac{4a+b}{2}=\dfrac{5}{2}, \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} a=1, \\ b=1, \end{cases}$$

所以 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$. 因为

$$f(-x)=\frac{(-x)^2+1}{-x}=-\frac{x^2+1}{x}=-f(x),$$

且 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, 关于原点对称, 所以 $f(x)$ 为奇函数.

(2) 任取 $x_1<x_2<-1$, 则

$$\begin{aligned} f(x_1)-f(x_2) &= \frac{x_1^2+1}{x_1}-\frac{x_2^2+1}{x_2}=\frac{x_2(x_1^2+1)-x_1(x_2^2+1)}{x_1x_2} \\ &= \frac{x_1^2x_2-x_1x_2^2+x_2-x_1}{x_1x_2}=\frac{x_1x_2(x_1-x_2)-(x_1-x_2)}{x_1x_2} \\ &= (x_1-x_2)\frac{x_1x_2-1}{x_1x_2}. \end{aligned}$$

由 $x_1<x_2<-1$ 知,

$$x_1-x_2<0, \quad x_1x_2>1 \text{ 即 } x_1x_2-1>0,$$

所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$, 说明函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 上单调递增.

(3) 不等式化为 $f(1+2t^2)<f(3+t^2)$. 因为 $1+2t^2>1$, $3+t^2>1$, 且

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x}=x+\frac{1}{x} \quad (\text{对勾函数})$$

在 $(1,+\infty)$ 上单调递增, 所以前述不等式等价于

$$1+2t^2<3+t^2, \quad \text{解得 } t\in(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty).$$

例 3.5 已知函数 $f(x)$ 为奇函数, 且当 $x>0$ 时, $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$, 求当 $x<0$ 时 $f(x)$ 的解析式.

解 方法一: 若 $x<0$, 则 $-x>0$, 由题意, 此时

$$f(-x)=(-x)^2+\frac{1}{-x}=x^2-\frac{1}{x}.$$

因为 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $f(-x)=-f(x)$, 代入上式可得

$$-f(x)=x^2-\frac{1}{x}, \quad \text{即} \quad f(x)=-x^2+\frac{1}{x}.$$

此即为当 $x<0$ 时 $f(x)$ 的解析式.

方法二 (将方法一的步骤压缩): 因为 $f(x)$ 为奇函数, 所以当 $x<0$ 时,

$$f(x)=-f(-x)=-\left(x^2-\frac{1}{x}\right)=-x^2+\frac{1}{x}.$$

例 3.6 近年来大气污染防治工作得到各级部门的重视. 某企业每日生产总成本 y (单位: 万元) 与日产量 x (单位: 吨) 之间的函数关系式为

$$y=2x^2+(15-4k)x+120k+2.$$

现为了配合环境卫生综合整治, 该企业引进了除尘设备, 每吨产品除尘费用为 k 万元, 除尘后当日产量为 1 吨时, 生产总成本为 253 万元.

(1) 求实数 k 的值; (2) 若每吨产品出厂价为 59 万元, 并假设每天的产品均能卖出, 当除尘后日产量为多少时, 平均每吨产品的利润最大? 最大利润为多少?

解 (1) 设除尘后的每日生产总成本为 $f(x)$ (单位: 万元), 则

$$f(x) = y + kx = 2x^2 + (15-3k)x + 120k + 2.$$

由题意, $f(1) = 253$, 所以

$$2 + (15-3k) + 120k + 2 = 253, \quad \text{解得 } k = 2.$$

(2) 除尘后每天的收入为 $59x$ (单位: 万元), 所以利润为 $59x - f(x)$ (单位: 万元), 平均每吨产品的利润为

$$\frac{59x - f(x)}{x} = 59 - \frac{2x^2 + (15-6)x + 240 + 2}{x} = 50 - 2\left(x + \frac{121}{x}\right) \quad (\text{万元}).$$

由均值不等式, $x + \dfrac{121}{x} \geqslant 22$, “=” 成立当且仅当 $x = 11$, 则

$$\frac{59x - f(x)}{x} \leqslant 50 - 2 \cdot 22 = 6,$$

表明当日产量为 11 吨时, 平均每吨产品的利润最大, 且最大值为 6 万元.

4 2020 年 11 月 15 日答疑记录

例 4.1 若 $a > b$, 且 $a - \dfrac{1}{a} > b - \dfrac{1}{b}$, 求 ab 的取值范围.

解 后一不等式变形为

$$a - b - \frac{1}{a} + \frac{1}{b} > 0, \quad \text{即} \quad a - b + \frac{a-b}{ab} > 0.$$

由 $a > b$ 知 $a - b > 0$, 上式两边同时除以 $a - b$ 得

$$1 + \frac{1}{ab} > 0, \quad \text{即 (通分后化为乘法)} \quad (1+ab)ab > 0.$$

将 ab 视为整体, 解得 $ab \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.

例 4.2 若 $a, b > 0$, 则 “$a > b$” 是 “$a - \dfrac{1}{a} > b - \dfrac{1}{b}$” 的什么条件?

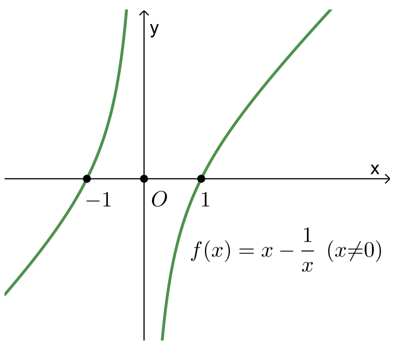
解 方法一: 由例 4.1 中的变形过程可知

$$a - \frac{1}{a} > b - \frac{1}{b} \Rightarrow (a-b)\left(1 + \frac{1}{ab}\right) > 0.$$

再由 $a, b > 0$ 得 $ab > 0$, 即 $1 + \dfrac{1}{ab} > 0$, 所以上式等价于 $a - b > 0$. 这表明 “$a > b$” 是 “$a - \dfrac{1}{a} > b - \dfrac{1}{b}$” 的充要条件.

方法二: 构造函数 $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$, 则不等式 $a - \dfrac{1}{a} > b - \dfrac{1}{b}$ 化为 $f(a) > f(b)$. 因为 $\dfrac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $-\dfrac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 而 x 在 $(0, +\infty)$ 上也单调递增, 所以 $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$ 单调递增. 这表明 $f(a) > f(b) \Leftrightarrow a > b$, 所求为充要条件.

重要结论 (建议理解记忆) 实际上 $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上都是单调递增的, 其图形如下:



例 4.3 判断函数 $y=|x+2|$ 在区间 $[-3,0]$ 上的单调性.

解 方法一: 当 $x\in[-3,-2]$ 时,

$$y=|x+2|=\begin{cases}x+2, & -2\leqslant x\leqslant 0,\\ -x-2, & -3\leqslant x<-2,\end{cases}$$

由此可知, 该函数在 $[-3,-2)$ 上单调递减, 在 $[-2,0]$ 上单调递增.

方法二: 直接作出 $y=|x+2|$ 的图形 (可先化为分段函数, 或参考 "2020 年 9 月 26 日答疑记录" 的第二部分), 单调性同上.

例 4.4 设奇函数函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减, 且 $f(1)=-1$, 求不等式 $-1\leqslant f(x-1)\leqslant 1$ 的解集.

解 因为 $f(x)$ 为奇函数, 所以由 $f(1)=-1$ 可知 $f(-1)=1$, 不等式化为

$$f(1)\leqslant f(x-1)\leqslant f(-1).$$

又因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减, 所以

$$1\geqslant x-1\geqslant -1,\quad \text{解得}\quad 0\leqslant x\leqslant 2,$$

即所求解集为 $[0,2]$.

例 4.5 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+4)=f(x)$ 且 $f(1)=1$, 求 $f(3)+f(4)+f(5)$ 的值.

解 对定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$, 恒有 $f(-x)=-f(x)$. 令 $x=0$ 得 $f(0)=-f(0)$, 所以 $f(0)=0$. 结合 $f(x+4)=f(x)$ 知,

$$\text{令 } x=0\text{: } f(4)=f(0)=0,$$
$$\text{令 } x=1\text{: } f(5)=f(1)=1,$$
$$\text{令 } x=-1\text{: } f(3)=f(-1)=-f(1)=-1.$$

所以 $f(3)+f(4)+f(5)=(-1)+0+1=0$.

注 4.1 (1) 由上面的解法可知, 条件 "$f(1)=1$" 是多余的, 因为只需要推出 $f(4)=0$ 和 $f(3)=-f(1)$ 即可得到最终结论.

(2) 例 4.5 中还证明了一个结论 (可当作定理直接使用): 若 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 则 $f(0)=0$.

5 2020 年 11 月 21 日答疑记录

5.1 二次函数与集合

例 5.1 某渔业公司今年年初用 98 万元购进艘渔船用于捕捞, 若该渔船捕捞 x $(x\in\mathbf{N}^*)$ 年后, 包括维修费在内, 所需费用的总和为 $(2x^2+10x)$ 万元, 且该渔船每年的捕捞收入为 50 万元.

(1) 捕捞几年后总利润最大? 最大值是多少? (总利润 = 总收入 − 渔船使用费用总和 − 购船费用)

(2) 捕捞几年后的年平均利润最大? 最大值是多少?

解 (1) 设 x 年后总利润为 $f(x)$ 万元, 则

$$f(x) = 50x - (2x^2 + 10x) - 98 = -2x^2 + 40x - 98, \quad x \in \mathbf{N}^*.$$

因为 $f(x)$ 为二次函数, 且其轴为 $x = 10$, 所以最大值为 $f(10) = 102$, 表明捕捞 10 年后总利润最大, 最大值是 102 万元.

(2) 设 x 年后的年平均利润为 $g(x)$ 万元, 则

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{-2x^2 + 40x - 98}{x} = 40 - 2\left(x + \frac{49}{x}\right), \quad x \in \mathbf{N}^*.$$

因为 $x + \dfrac{49}{x} \geqslant 2\sqrt{x \cdot \dfrac{49}{x}} = 14$, “$=$” 成立当且仅当 $x = \dfrac{49}{x}$ 即 $x = 7$, 所以

$$-2\left(x + \frac{49}{x}\right) \leqslant -28, \quad \text{即} \quad g(x) = 40 - 2\left(x + \frac{49}{x}\right) \leqslant 12.$$

因此捕捞 7 年后的年平均利润最大, 最大值是 12 万元.

例 5.2 若函数 $f(x) = x^2 + ax + b$ 在区间 $[0,1]$ 上的最大值是 M, 最小值是 m, 则 $M - m$ 的值与 a, b 是否有关?

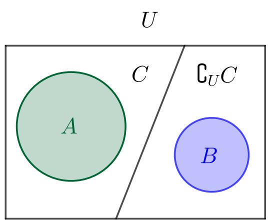
解 函数 $f(x)$ 是二次函数, 轴为 $x = -\dfrac{a}{2}$, 即 a 决定了轴的位置. 由二次函数图形容易知道, 当轴恰好过区间 $[0,1]$ 的中点时, $M - m = 0$; 否则 $M - n \neq 0$, 且当轴在区间 $[0,1]$ 外离该区间越远时, $M - m$ 越大. 所以 $M - m$ 的值与 a 有关.

当常数 b 变化时, $f(x)$ 的图形相应上下平移, 所以 $M - m$ 固定不变, 即 $M - m$ 的值与 b 无关.

例 5.3 设 U 为全集, A, B 是其子集, 则 “存在集合 C 使得 $A \subseteq C$, $B \subseteq \complement_U C$” 是 “$A \cap B = \varnothing$” 的什么条件?

解 (此题建议画草图) 因为 $C \cap \complement_U C = \varnothing$, 即 C 与 $\complement_U C$ 是互不相交的集合, 所以由 $A \subseteq C$, $B \subseteq \complement_U C$ 可知 A 与 B 也是互不相交的集合, 即 $A \cap B = \varnothing$.

反之, 若 $A \cap B = \varnothing$, 即 A 与 B 互不相交, 可取 $C = A$ (有多种取法), 此时必有 $A \subseteq C$, $B \subseteq \complement_U C$.



5.2 幂、指数与对数

常用的幂 (指数) 的运算法则有 (以下均假设 $a > 0$, m, $n \in \mathbf{R}$):

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad (ab)^m = a^m b^m,$$

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}.$$

以上法则中, 前四个可以按 m, n 为正整数记忆, 后三个可以由前三个得到. 最后两个可以简记为: 指数中的负号表示 “取倒数”, 分数表示 “开方”. 此外, 这些法则还可以嵌套使用, 比如

$$a^{-\frac{1}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a}}, \quad a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

常用的对数运算法则见 “2020 年 11 月 8 日答疑记录” 的第二部分.

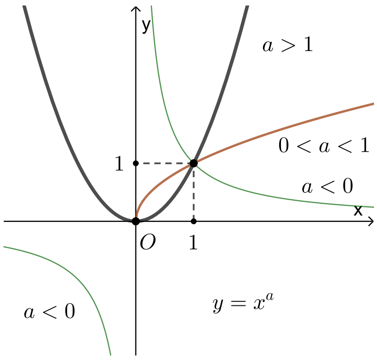
例 5.4 计算: (1) $2\sqrt{3}\times 3\sqrt[3]{1.5}\times\sqrt[6]{12}$; (2) $32^{-\frac{3}{5}}-\left(2\dfrac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}+0.5^{-2}$.

解 根据指数的运算法则,

$$\begin{aligned}2\sqrt{3}\times 3\sqrt[3]{1.5}\times\sqrt[6]{12}&=2\times 3^{\frac{1}{2}}\times 3\times\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\times(2^2\times 3)^{\frac{1}{6}}\\&=2^{1-\frac{1}{3}+\frac{2}{6}}\times 3^{\frac{1}{2}+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}\\&=2\times 3^2=18,\\32^{-\frac{3}{5}}-\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}+0.5^{-2}&=2^{5\times(-\frac{3}{5})}+\left(\frac{64}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}+2^{(-1)\times(-2)}\\&=2^{-3}+\frac{3^{3\times\frac{2}{3}}}{2^{6\times\frac{2}{3}}}+2^2\\&=\frac{1}{8}-\frac{9}{16}+4=\frac{57}{16}.\end{aligned}$$

计算指数式, 一般先化为整数表示, 即小数化最简分数, 根式化分数指数, 同时注意分解质因数, 然后合并同底数的指数即可.

幂函数 $y=x^a$ (均取由 a 对应的自然定义域) 的大致图形如下:



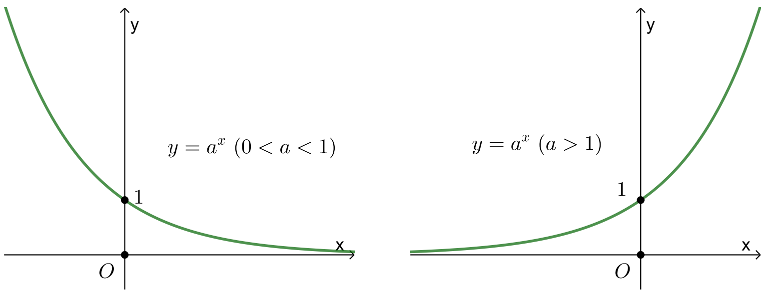
为了整洁起见, 图中并未画出 $a=0$ (对应 $y=1$) 和 $a=1$ (对应 $y=x$) 的情形, 且对 $0<a<1$ 只画了 $x>0$ 对应的图形. 由图可知, 幂函数 $y=x^a$ 的特征有

(1) 当 $a<0$ 且为整数时, 图形有两支, 且以 x 轴和 y 轴为渐近线, 函数分别在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上单调递减;

(2) 当 $a>0$ 时, 在第一象限内, 函数单调递增, 且 a 越大, 函数值增加速度越快;

(3) 恒过点 $(1,1)$ (因为 $1^a=1$).

指数函数 $y=a^x$ ($x\in\mathbf{R}$, $a>0$ 且 $a\neq 1$) 的大致图形如下:

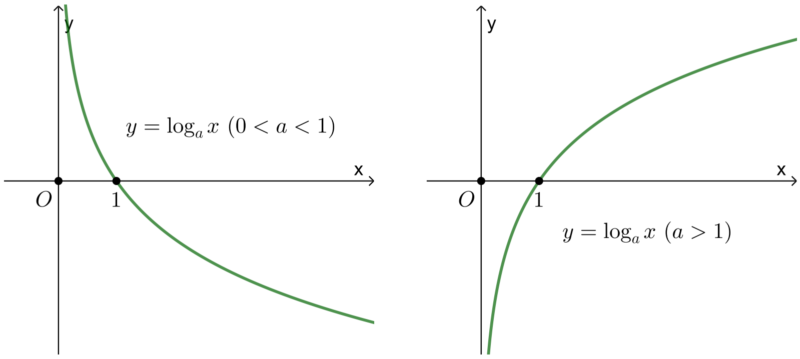


由图可知, 指数函数 $y = a^x$ 的特征有

(1) 当 $0 < a < 1$ 时, 函数单调递减; 当 $a > 1$ 时, 函数单调递增;

(2) 恒过点 $(0, 1)$ (因为 $a^0 = 1$), 且以 x 轴为渐近线.

指数函数 $y = \log_a x$ (x, $a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的大致图形如下:



由图可知, 对数函数 $y = \log_a x$ 的特征有

(1) 当 $0 < a < 1$ 时, 函数单调递减; 当 $a > 1$ 时, 函数单调递增;

(2) 恒过点 $(1, 0)$ (因为 $\log_a 1 = 0$), 且以 y 轴为渐近线.

注 5.1 (1) 指数函数 $y = a^x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 即对 x 没有限制, 而对数函数 $y = \log_a x$ 的自然定义域是 $(0, +\infty)$.

(2) 幂函数 $y = x^a$ 中自变量 x 为底数, 指数函数 $y = a^x$ 中自变量 x 为指数.

例 5.5 比大小: (1) $a = 1$, $b = 0.3^2$, $c = 2^{0.3}$;

(2) $a = 3^{1.2}$, $b = 1.2^0$, $c = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-0.9}$;

(3) $a = 1.7^{\frac{3}{5}}$, $b = 0.7^{-\frac{3}{5}}$, $c = 0.7^{\frac{3}{5}}$;

(4) $a = \sqrt[3]{3}$, $b = 6^{\frac{1}{3}}$, $c = 2^{-\frac{1}{3}}$.

解 (1) 因为 $b = 0.09 < 1$, 由指数函数 $y = 2^x$ (或幂函数 $y = x^{0.3}$) 的图形知 $c = 2^{0.3} > 1$, 所以 $b < a < c$.

(2) 因为 $b = 1 = 3^0$, $c = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-0.9} = 3^{0.9}$, 所以由指数函数 $y = 3^x$ 的图形知 $b < c < a$.

(3) 因为 $b = 0.7^{-\frac{3}{5}} = \left(\dfrac{1}{0.7}\right)^{\frac{3}{5}}$, 而 $1.7 > \dfrac{1}{0.7}$ (为什么?), 所以由幂函数 $y = x^{\frac{3}{5}}$ 的图形知, $c < b < a$.

(4) 因为 $a = 3^{\frac{1}{3}}$, $b = 6^{\frac{1}{3}}$, $c = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$, 由幂函数 $y = x^{\frac{1}{3}}$ 的图形知, $c < a < b$.

判断多个数的大小, 一般的方法是:

(1) 先确定这些数与 0, 1 等数的大小, 将它们分类到 $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, +\infty)$ 等区间中;

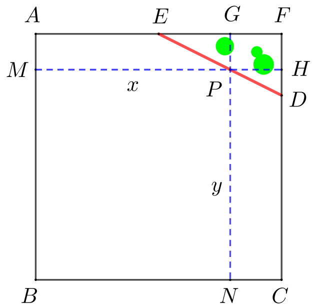
(2) 对各区间中的幂、指数或对数, 再化为同底数或同指数, 根据相应函数的单调性来判断大小.

6 2020 年 11 月 22 日答疑记录

例 6.1 如图所示, 已知边长为 8 米的正方形钢板有一个角被锈蚀, 其中 $AE = 4$ 米, $CD = 6$ 米. 为了合理利用这块钢板, 将在五边形 $ABCDE$ 内截取一个矩形 $BNPM$, 使点 P 在边 DE 上.

(1) 设 $MP = x$ 米, $PN = y$ 米, 将 y 表示成 x 的函数, 并求其定义域;

(2) 求矩形 $BNPM$ 面积 S 的取值范围.



解 (1) 由题意, $\triangle DHP \backsim \triangle DEF$, 所以

$$\frac{DH}{HP} = \frac{DF}{FE}, \quad \text{即} \quad \frac{y-6}{8-x} = \frac{2}{4}.$$

整理得, $y = \dfrac{20-x}{2}$, 且由图可知 $x \in [4, 8]$.

(2) 由 (1) 得,

$$S = xy = \frac{1}{2}x(20-x) \quad (\text{平方米}),$$

且在 $[4, 8]$ 上单调递增, 所以 $S \in [16, 24]$ (平方米).

例 6.2 (1) 若 $f(x)$ 为奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = x(1 - \sqrt[3]{x})$, 求当 $x < 0$ 时, $f(x)$ 的解析式;

(2) 若 $f(x)$ 为偶函数, 当 $-1 \leqslant x < 0$ 时, $f(x) = \sqrt[5]{x} + 1$, 求当 $0 < x \leqslant 1$ 时, $f(x)$ 的解析式;

解 以下过程较简略, 更详细的过程可参考 "2020 年 11 月 14 日答疑记录" 的例 3.5 方法一.

(1) 因为 $f(x)$ 为奇函数, 所以当 $x < 0$ 时,

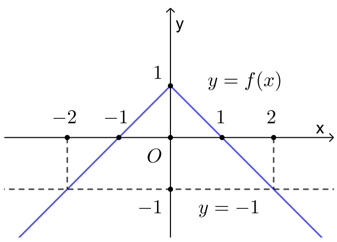
$$f(x) = -f(-x) = -(-x)(1 - \sqrt[3]{-x}) = x(1 + \sqrt[3]{x}).$$

(2) 因为 $f(x)$ 为偶函数, 所以当 $0 < x \leqslant 1$ 时,

$$f(x) = f(-x) = \sqrt[5]{-x} + 1 = -\sqrt[5]{x} + 1.$$

例 6.3 若函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为偶函数, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) = -x + 1$, 求 $f(x) < -1$ 的解集.

解 函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为偶函数, 表明其图形关于 y 轴对称. 直接根据对称性画图可知, $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.



例 6.4 计算: (1) $\lg \sqrt[5]{100}$; (2) $\ln \sqrt[8]{\mathrm{e}}$; (3) $9^{\log_3 4}$; (4) $\log_9 27$; (5) $\log_{\sqrt{6}} 36$.

解　幂 (指数)、对数的运算法则见“2020 年 11 月 21 日答疑记录”的第二部分.

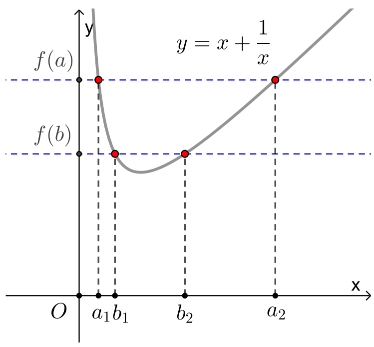
(1) $\lg\sqrt[5]{100}=\lg 10^{\frac{2}{5}}=\dfrac{2}{5}$.　　(2) $\ln\sqrt[8]{\mathrm{e}}=\ln\mathrm{e}^{\frac{1}{8}}=\dfrac{1}{8}$.

(3) $9^{\log_3 4}=\left(3^{\log_3 4}\right)^2=4^2=16$.　　(4) $\log_9 27=\dfrac{\ln 27}{\ln 9}=\dfrac{3\ln 3}{2\ln 3}=\dfrac{3}{2}$.

(5) $\log_{\sqrt{6}}36=\dfrac{\ln 36}{\ln\sqrt{6}}=\dfrac{2\ln 6}{\frac{1}{2}\ln 6}=4$.

例 6.5　“$a+\dfrac{1}{a}>b+\dfrac{1}{b}$”是“$a>b$”的什么条件?

解　利用“对勾”函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ (参考“2020 年 10 月 31 日答疑记录”的第二个例题及其后的说明), 前一个条件等价于 $f(a)>f(b)$. 不妨只考虑 $a, b>0$ 的情况 (此时已可以得到结论). 由 $f(x)$ 的图形知, $f(a)>f(b)$ 与 $a>b$ 并不能互推 (即没有必然联系), 所以“$a+\dfrac{1}{a}>b+\dfrac{1}{b}$”是“$a>b$”的不充分且不必要条件.



例 6.6　写出命题“$\exists x>0, x^3+x>0$”的否定.

解　其否定为“$\forall x>0, x^3+x\leqslant 0$”.

注 6.1　(1) 形如“$\forall x\in M, p(x)$”的命题的否定为“$\exists x\in M, \neg p(x)$”, 而形如“$\exists x\in M$, $p(x)$”的命题的否定为“$\forall x\in M, \neg p(x)$”. 例如“$\forall x>1, x^2>1$”的否定为“$\exists x>1, x^2\leqslant 1$”.

(2) 写命题的否定形式时, 一般只需要把原命题的判断词改为其否定形式, 比如“$=$”改为“$\neq$”, “$>$”改为“$\leqslant$”. 例如, “$x=1$”的否定为“$x\neq 1$”, “$x<1$”的否定为“$x\geqslant 1$” (并非 $x>1$), “正整数 x 至多为 3”的否定为“正整数 x 至少为 4”.

例 6.7　已知全集 $U=\{x\in\mathbf{N}\mid 0<x<6\}$, 集合 $A=\{x\mid x^2-6x+5=0\}$, $B=\{3,4\}$, 求 $(\complement_U A)\cap B$.

解　由题意, $U=\{1,2,3,4,5\}$, $A=\{1,5\}$, 所以 $\complement_U A=\{2,3,4\}$, 而 $(\complement_U A)\cap B=\{3,4\}$.

7　2020 年 11 月 23 日答疑记录

幂函数、指数函数和对数函数相关的“图形过定点”问题, 一般是考虑利用恒等式

$$a^0=1\ (a\neq 0),\quad \log_a 1=0$$

将函数中含参数的部分化为常数.

例 7.1　(1) 若 $a>0$ 且 $a\neq 1$, 求函数 $y=a^x+1$ 的图形所过的定点.

(2) 若 $a>0$ 且 $a\neq 1$, 求函数 $y=\log_a x-1$ 的图形所过的定点.

解 (1) 令 $x=0$ 知, 无论 a 为何值, 总有 $y=2$, 即函数 $y=a^x+1$ 的图形过定点 $(0,2)$.

(2) 令 $x=1$ 知, 无论 a 为何值, 总有 $y=-1$, 即函数 $y=\log_a x-1$ 的图形过定点 $(1,-1)$.

用类似的方法可以求得

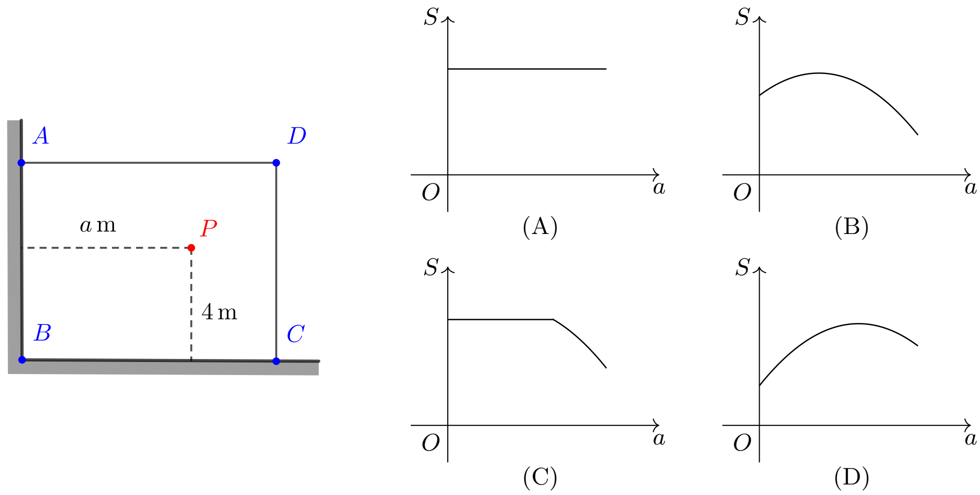
$y=a^x-1$ 的图形过定点 $(0,0)$;

$y=2a^x+1$ 的图形过定点 $(0,3)$;

$y=3a^{x-1}+3$ 的图形过定点 $(1,6)$;

$y=\log_a(2x+1)+4$ 的图形过定点 $(0,4)$; 等等.

例 7.2 如图, 有一直角墙角, 两边的长度足够长, 在点 P 处有一棵树与两墙的距离分别是 $a\,\mathrm{m}$ $(0<a<12)$ 和 $4\,\mathrm{m}$, 不考虑树的粗细. 现在想用 $16\,\mathrm{m}$ 长的篱笆, 借助墙角围成一个矩形的花圃 $ABCD$, 且将这棵树围在花圃内. 设此矩形花圃的最大面积为 $S=f(a)$ (单位: m^2), 则该函数的图形大致为 (　　).



解 设 $AB=x\,\mathrm{m}$, 则 $CD=(16-x)\,\mathrm{m}$. 因为矩形 $ABCD$ 要围住点 P, 所以

$$\begin{cases} AD\geqslant a, \\ DC\geqslant 4, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x\geqslant a, \\ 16-x\geqslant 4, \end{cases} \quad \text{解得} \quad x\in[a,12].$$

设矩形 $ABCD$ 的面积为 $g(x)$, 则 $g(x)=x(16-x)$, $x\in[a,12]$. 易知 $g(x)$ 是二次函数, 其 (完整) 图形的对称轴为 $x=8$. 由此可知,

(1) 若 $0<a\leqslant 8$, 则 $g_{\max}=g(8)=64$, 即 $S=f(a)=64$;

(2) 若 $a>8$, 则 $g_{\max}=g(a)=a(16-a)$, 即 $S=f(a)=a(16-a)$.

画出 $f(a)$ 对应的图形可知, 大致为 (C).

8 2020 年 11 月 24 日答疑记录

本次答疑中的问题均为指数、对数相关问题, 知识点可参考 “2020 年 11 月 21 日答疑记录” 第二部分.

8.1 对数函数的单调性和定义域

例 8.1 已知 $0<a<1$, $\log_a m<\log_a n<0$, 比较 m, n 与 1 的大小.

解 由 $0=\log_a 1$ 知不等式化为 $\log_a m<\log_a n<\log_a 1$. 因为 $0<a<1$, 所以对数函数 $f(x)=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减, 则 $m>n>1$.

注 8.1 若例 8.1 中的不等式 "$\log_a m<\log_a n<0$" 改为 "$\log_a m>\log_a n>0$", 则答案建议写为: $0<m<n<1$ (即对数函数中的真数一定为正数).

例 8.2 (1) 已知 $a, b\in\mathbf{R}$, 则 "$a<b$" 是 "$\log_2 a<\log_2 b$" 的什么条件?

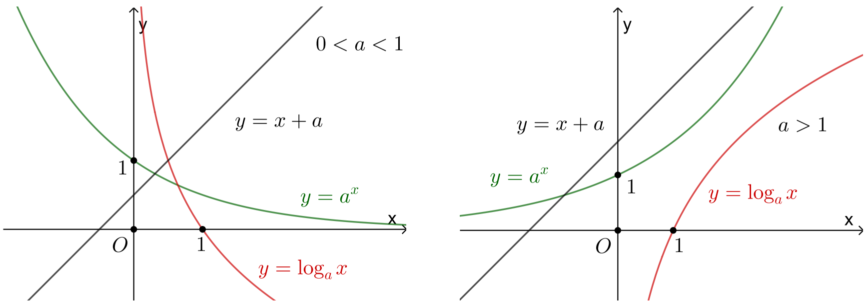
(2) 已知 $x\in\mathbf{R}$, 则 "$x<0$" 是 "$\ln(x+1)<0$" 的什么条件?

解 (1) 由例 8.1 的解答及注可知, $\log_2 a<\log_2 b$ 等价于 $0<a<b$, 所以 "$a<b$" 是 "$\log_2 a<\log_2 b$" 的必要不充分条件.

(2) $\ln(x+1)<0$ 等价于 $0<x+1<1$ 即 $-1<x<0$, 所以 "$x<0$" 也是 "$\ln(x+1)<0$" 的必要不充分条件

例 8.3 已知 $a>0$ 且 $a\neq 1$, 画出函数 $f(x)=\log_a x$, $g(x)=a^x$, $h(x)=x+a$ 在同一坐标系内图形的各种可能情形.

解 对数函数和指数函数的单调性均由底数 (本例中的 a) 与 1 的大小决定, 所以只需分 $0<a<1$ 与 $a>1$ 来讨论. 具体绘图如下:



8.2 比较多个数的大小

关于比较多个数的大小的一般方法, 可参考 "2020 年 11 月 21 日答疑记录" 末尾的说明.

例 8.4 比大小: (1) $a=0.4^2$, $b=3^{0.4}$, $c=\log_4 0.3$;

(2) $a=2^{1.2}$, $b=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-0.8}$, $c=2\log_4 2$;

(3) $a=\log_3 \mathrm{e}$, $b=\ln 3$, $c=\log_3 2$.

解 (1) 分别考查函数 $f(x)=0.4^x$, $g(x)=3^x$, $h(x)=\log_4 x$ 的图形可知, $a=f(2)\in(0,1)$ (实际上 $a=0.16$), $b=g(0.4)\in(1,3)$, $c=h(0.3)\in(-\infty,0)$, 所以 $c<a<b$.

(2) 分别考查函数 $f(x)=2^x$, $g(x)=\log_5 x$ 的图形可知, $a=f(1.2)\in(2,4)$, $b=2^{0.8}=f(0.8)\in(1,2)$, $c=\log_5 4=g(4)\in(0,1)$, 所以 $c<b<a$.

(3) 分别考查函数 $f(x)=\log_3 x$, $g(x)=\ln x$ 的图形可知, $a=f(\mathrm{e})\in(0,1)$ (注意 $\mathrm{e}=2.718\cdots$), $b=g(3)\in(1,2)$ ($\ln x$ 的底数是 e), $c=f(2)\in(0,1)$, 而 $f(2)<f(\mathrm{e})$, 所以 $c<a<b$.

9 2020 年 11 月 26 日答疑记录

本次答疑主要讲解复合函数的值域和单调区间的求法. 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 可以复合成函数 $f(g(x))$, $g(f(x))$, $f(f(x))$ 等, 也可以复合成函数 $f(g(f(x)))$, $g(g(f(x)))$, $g(g(g(g(x))))$

等. 例如, 若 $f(x)=x^2$, $g(x)=x+1$, 则

$$f(g(x))=(x+1)^2,\quad g(f(x))=x^2+1,$$
$$f(f(x))=(x^2)^2=x^4,\quad g(g(x))=(x+1)+1=x+2.$$

"复合函数" 可以简单理解为 "函数套函数".

有时为了理解方便起见, 对函数 $y=f(g(x))$, 可设 $u=g(x)$ 而将其表示为 $y=f(u)$, 即借助中间变量 u 表示为较简单的形式. 例如,

$$y=\sqrt{x^2-2x-3}\colon y=f(u)=\sqrt{u},\ u=g(x)=x^2-2x-3;$$
$$y=\log_{\frac{1}{3}}(-x^2-2x+8)\colon y=f(u)=\log_{\frac{1}{3}}u,\ u=g(x)=-x^2-2x+8;$$
$$y=\frac{1}{x^2-3x}\colon y=f(u)=\frac{1}{u},\ u=g(x)=x^2-3x;$$
$$y=3^{|x|}\colon y=f(u)=3^u,\ u=g(x)=|x|.$$

这时我们可称 $g(x)$ 为 "里层函数", 而 $f(u)$ 为 "外层函数". 在求值域时, 可以先根据定义域 (x 的取值范围) 求里层函数 (即 $g(x)$) 的值域, 从而得到 u 的取值范围 (即 $f(u)$ 的定义域), 再由 $f(u)$ 的表达式求其值域, 最终得到 $f(g(x))$ 的值域, 即有如下求值流程:

$$x\xrightarrow{g}u=g(x)\xrightarrow{f}y=f(u)=f(g(x))$$

或简化为

$$x\xrightarrow{g}g(x)\xrightarrow{f}f(g(x)).$$

例如, 求函数 $y=\sqrt{x^2-2x-3}$ 的值域时, 先由

$$x^2-2x-3\geqslant 0\quad\text{解得}\quad x\in(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)\quad(\text{自然定义域}),$$

所以 $u=x^2-2x-3\in[0,+\infty)$, 再由 $y=\sqrt{u}$ 单调递增可知 $y\in[0,+\infty)$.

判断复合函数的单调性则稍微复杂一些, 不过结论很容易记忆: **同增异减**. 具体来说, 就是若里层函数与外层函数

(1) 单调性相同, 则复合函数单调递增;

(2) 单调性不同, 则复合函数单调递减.

理解这一结论时, 需要先弄清楚单调性的定义. 依定义, 若 $f(x)$ 为单调递增函数, 则当 x 增大时, $f(x)$ 也随之增大; 从函数图形来看, 从左往右看时, 图形是上升的. 这一定义表明, 当 x 减小时, $f(x)$ 也随之减小, 即 x 与 $f(x)$ 的**增减性相同**. 类似地, 若 $f(x)$ 为递减函数, 则 x 与 $f(x)$ 的**增减性相反**. (单调性还有另一种表现形式, 见 "2020 年 11 月 14 日答疑记录" 的第二个例题及其后的补充说明.) 结合函数单调性和复合函数的定义, 可得

$$f\nearrow,\ g\nearrow\colon x\nearrow\xrightarrow{g}g(x)\nearrow\xrightarrow{f}f(g(x))\nearrow,$$
$$f\nearrow,\ g\searrow\colon x\nearrow\xrightarrow{g}g(x)\searrow\xrightarrow{f}f(g(x))\searrow,$$
$$f\searrow,\ g\nearrow\colon x\nearrow\xrightarrow{g}g(x)\nearrow\xrightarrow{f}f(g(x))\searrow,$$
$$f\searrow,\ g\searrow\colon x\nearrow\xrightarrow{g}g(x)\searrow\xrightarrow{f}f(g(x))\nearrow.$$

此即 "同增异减". 例如, 对函数 $y=\sqrt{x^2-2x-3}$, 其自然定义域为 $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$, 而 $u=x^2-2x-3$ 分别在 $(-\infty,-1]$ 上单调递减, 在 $[3,+\infty)$ 上单调递增, 所以由 $y=\sqrt{u}$ 单调递增可知 $y=\sqrt{x^2-2x-3}$ 在 $(-\infty,-1]$ 上单调递减, 在 $[3,+\infty)$ 上单调递增.

在求复合函数的值域和单调区间时, 通常需要结合函数图形, 即需要画对应图形的草图. 以下为了过程简便都省略了草图.

例 9.1　求下列函数的定义域、值域和单调区间:

(1) $y=\log_{\frac{1}{3}}(-x^2-2x+8)$;　(2) $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x-3)$;　(3) $y=3^{|x|}$;

(4) $y=\sqrt{4-x^2}$;　(5) $y=\dfrac{1}{x^2-3x}$, $x\in(0,2]$.

解　(1) 由 $-x^2-2x+8>0$ 知 $x\in(-4,2)$, 所以 $u=-x^2-2x+8\in(0,9]$. 由关于 u 的函数 $y=\log_{\frac{1}{3}}u$ 单调递减 (结合函数图形) 知,

$$y=\log_{\frac{1}{3}}(-x^2-2x+8)=\log_{\frac{1}{3}}u\in\left[\log_{\frac{1}{3}}9,+\infty\right)=[-2,+\infty).$$

因为二次函数 $u=-x^2-2x+8$ 在 $(-4,-1)$ 上单调递增, 在 $[-1,2)$ 上单调递减, 所以 $y=\log_{\frac{1}{3}}(-x^2-2x+8)$ 在 $(-4,-1)$ 上单调递减, 在 $[-1,2)$ 上单调递增.

(2) 用与 (1) 中相同的方法可得, $x\in(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$,

$$x^2-2x-3\in(0,+\infty),\quad y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x-3)\in(-\infty,+\infty),$$

且函数在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增, 在 $(3,+\infty)$ 上单调递减.

(3) 显然 $x\in\mathbf{R}$ (不用限制 x 的取值范围). 由 $|x|$ 的图形 (参考 “2020 年 9 月 26 日答疑记录” 的第二部分) 可知, $u=|x|\in(0,+\infty)$ 且在 $(-\infty,0)$ 上单调递减, 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, 所以 $y=3^u\in(1,+\infty)$ 且 $y=3^{|x|}$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减, 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

(4) 用知识点讲解中的方法可知, $y=\sqrt{4-x^2}$ 定义域为 $[-2,2]$, 值域为 $[0,2]$, 且在 $[-2,0]$ 上单调递减, 在 $(0,2]$ 上单调递增.

(5) 因为 $x\in(0,2]$, 所以 $x^2-3x\in\left[-\dfrac{9}{4},0\right)$. 由 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的图形可知, $y=\dfrac{1}{x^2-3x}\in\left(-\infty,-\dfrac{4}{9}\right]$, 且在 $\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$ 上单调递增, 在 $\left[\dfrac{3}{2},2\right)$ 上单调递减.

10　2020 年 11 月 29 日答疑记录

例 10.1　求下列函数的定义域、值域和单调区间:

(1) $y=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$;　(2) $y=\dfrac{1-3^x}{1+3^x}$.

解　(1) x 需满足 $\sqrt{x}+1\neq 0$, 即 $x\in[0,+\infty)$. 先将函数用 “分离常数法” 变形,

$$y=\frac{(\sqrt{x}+1)-2}{\sqrt{x}+1}=1-\frac{2}{\sqrt{x}+1}.$$

因为 $\sqrt{x}\in[0,+\infty)$, 所以

$$\sqrt{x}+1\in[1,+\infty),\quad \frac{2}{\sqrt{x}+1}\in(0,2],$$
$$-\frac{2}{\sqrt{x}+1}\in[-2,0),\quad 1-\frac{2}{\sqrt{x}+1}\in[-1,1),$$

即 $y\in[-1,1)$, 且按上述过程可知函数在 $[0,+\infty)$ 上单调递增.

(2) $1+3^x\neq 0$ 即 $x\in\mathbf{R}$. 由

$$y=\frac{-(1+3^x)+2}{1+3^x}=-1+\frac{2}{1+3^x}$$

并仿 (1) 的过程知 $y\in(-1,1]$, 且在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

分离常数法是对形如 $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 的式子变形的常用方法, 以下再举一些例子:

$$\frac{2x+1}{x+1}=\frac{2(x+1)-1}{x+1}=2-\frac{1}{x+1},$$
$$\frac{x+2}{2x+1}=\frac{\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{3}{2}}{2x+1}=\frac{1}{2}+\frac{\frac{3}{2}}{2x+1},$$
$$\frac{2x+1}{3x-1}=\frac{\frac{2}{3}(3x-1)+\frac{5}{3}}{3x-1}=\frac{2}{3}-\frac{\frac{5}{3}}{x+1}.$$

除了可以用来求函数的值域, 该方法还可以用来画函数图形 (一般需要利用图形变换).

例 10.2 *已知 $x+2y=1$, 求 2^x+4^y 的最小值.*

解 因为 $x+2y=1$, 而由均值不等式,

$$2^x+4^y\geqslant 2\sqrt{2^x\cdot 4^y}=2\sqrt{2^{x+2y}}=2\sqrt{2},$$

"=" 成立当且仅当 $2^x=4^y$ 即 $x=2y=\dfrac{1}{2}$, 所以 2^x+4^y 的最小值为 $2\sqrt{2}$.

例 10.3 *若指数函数 $f(x)=(a+1)^x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数, 求 a 的取值范围.*

解 对指数函数 $y=a^x$ 而言, 其单调递减表明底数 $a\in(0,1)$, 此题中对应有 $a+1\in(0,1)$, 所以 $a\in(-1,0)$.

例 10.4 *设函数 $f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-1, & x<0,\\ x^{\frac{1}{2}}, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求不等式 $f(x)\geqslant 1$ 的解.*

解 (1) 若 $x<0$, 则不等式化为

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x-1\geqslant 1,\quad \text{即}\quad \left(\frac{1}{2}\right)^x\geqslant 2=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}.$$

由函数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 单调递减可知, $x\in(-\infty,-1]$.

(2) 若 $x\geqslant 0$, 则不等式化为 $x^{\frac{1}{2}}\geqslant 1$. 由函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增可知, $x\in[1,+\infty)$.

综上所述, $x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.