1 2020 年 12 月 5 日答疑记录

1.1 函数的零点与方程的根

求方程的根可以转化为求对应函数图形交点的横坐标, 或求对应函数的零点. 一般有如下两种转化方法:

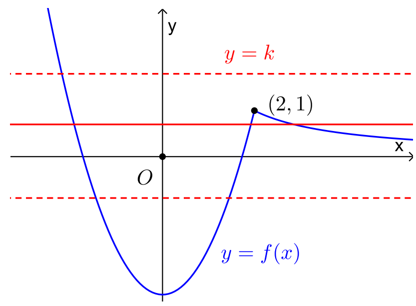
$$f(x)=0 \text{ 的根} \Leftrightarrow f(x) \text{ 的图形与 } x \text{ 轴交点的横坐标;}$$
$$f(x)+g(x)=0 \text{ 的根} \Leftrightarrow f(x) \text{ 与 } -g(x) \text{ 的图形交点的横坐标.}$$

前一种方法可视为后一种方法的特例, 而两种方法在使用时都需要考虑函数的单调性. 此外还有 (画图更容易理解)

零点存在性定理: 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(a)f(b)<0$, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 上至少有一根.

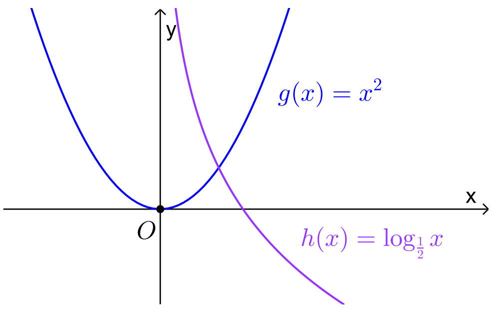
例 1.1 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x}, & x\geqslant 2,\\ x^2-3, & x<2,\end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x)=k$ 有三个不等的实根, 求 k 的取值范围.

解 此题应考虑函数 $y=f(x)$ 与 $y=k$ 的图形的交点恰有三个的情形. 画出两者的图形示意图, 容易知道 $k\in(0,1)$.



例 1.2 求函数 $f(x)=x^2-\log_{\frac{1}{2}} x$ 的零点个数.

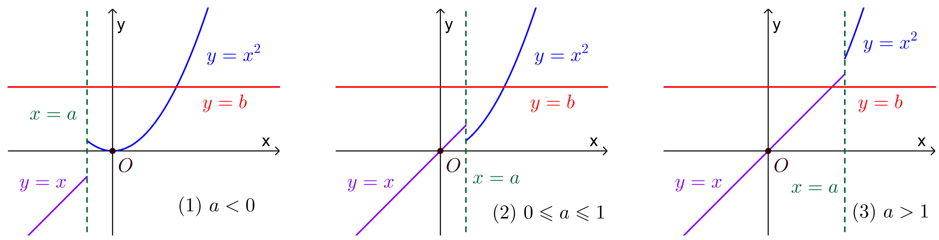
解 由 $f(x)=x^2-\log_{\frac{1}{2}} x=0$ 可得 $x^2=\log_{\frac{1}{2}} x$, 故设 $g(x)=x^2$, $h(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$, 并考虑两者图形的交点个数. 画图可知, 只有一个交点.



注 1.1 可以进一步用零点存在性定理来估计例 1.2 中的 $f(x)$ 的零点所在的大致区间. 因为已经由图知道 $f(x)$ 的零点为正数, 所以只需考虑 $x \in (0, +\infty)$ 的情形. 又因为此时 $\log_{\frac{1}{2}} x$ 单调递减, 而 $-\log_{\frac{1}{2}} x$ 单调递增, 所以 $f(x) = x^2 - \log_{\frac{1}{2}} x$ 单调递增. 计算知, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{3}{4}$, $f(1) = 1$, 由零点存在性定理, 零点在区间 $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$ 内.

例 1.3 设函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x < a, \\ x^2, & x \geqslant a, \end{cases}$ 若对于任意实数 b, 关于 x 的方程 $f(x) - b = 0$ 总有实根, 求 a 的取值范围.

解 由 $f(x)$ 的表达式可知, 其图形在 $(-\infty, a)$ 上为直线 $y = x$ 的一部分, 在 $[a, +\infty)$ 上为抛物线 $y = x^2$ 的一部分. 而方程 $f(x) - b = 0$ 等价于 $f(x) = b$, 则 a 的取值应使得 $y = f(x)$ 与 $y = b$ 的图形总有交点. 画图可知, 仅当 $a \in [0, 1]$ 时满足题意.



例 1.4 "$t \geqslant 0$" 是 "函数 $f(x) = x^2 + tx - t$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内存在零点" 的什么条件?

解 函数 $f(x) = x^2 + tx - t$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内存在零点的充要条件是 $\Delta = t^2 - 4(-t) \geqslant 0$ 即 $t \in (-\infty, -4] \cup [0, +\infty)$, 所以 "$t \geqslant 0$" 是 "函数 $f(x) = x^2 + tx - t$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内存在零点" 的充分不必要条件.

1.2 解简单的指数、对数方程或不等式

解简单的指数、对数方程或不等式, 一般是利用指数、对数的单调性 (参考 "2020 年 11 月 21 日答疑记录"). 具体来说, 有两种方法.

方法一: 化为同底的指数或对数 (简记为 "化同底"). 例如, 指数方程 $2^x = 4$ 可化为 $2^x = 2^2$, 由 $y = 2^x$ 单调递增可知, $x = 2$. 类似地, $\log_2 x = 2$ 可化为 $\log_2 x = \log_2 4$, 由 $y = \log_2 x$ 单调递增可知, $x = 4$. 再如, $2^x > 4$ 可化为 $2^x > 2^2$, 则 $x > 2$; $\log_{0.5} x > 2$ 可化为 $\log_{0.5} x > \log_{0.5} 0.5^2$, 由 $y = \log_{0.5} x$ 单调递减可知, $0 < x < 0.25$. 注意, 对数函数有自然定义域, 即真数 (此处的 x) 大于零.

方法二: 直接取对数或构造指数式. 此方法涉及指数和对数的运算法则 (参考 "2020 年 11 月 8 日答疑记录"). 例如, 对方程 $2^x = 4$ 两边取以 2 为底的对数, 可得 $\log_2 2^x = \log_2 4$, 即 $x = 2$. 类似地, 将 $\log_2 x < 2$ 化为 $2^{\log_2 x} < 2^2$, 可知 $0 < x < 4$ (注意对数函数的自然定义域). 再如, 由 $2^x > 3$ 可得 $x > \log_2 3$ (这个例子用前一个方法来解并不方便). 在这些例子中, 新构造的对数式或指数式的底均应与原式中的相同.

例 1.5 解下列不等式:

(1) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x > 4$; (2) $\log_3 x > 2$; (3) $3^{x^2+x} > 9$; (4) $\log_5(x^2-4x) \leqslant 1$.

解 (1) 方法一: 不等式化为 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x > \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$, 所以 $x \in (-\infty, -2)$.

方法二: 不等式化为 $\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x < \log_{\frac{1}{2}} 4 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$, 所以 $x \in (-\infty, -2)$.

(2) 方法一: 不等式化为 $\log_3 x > \log_3 9$, 所以 $x \in (9, +\infty)$.

方法二: 不等式化为 $3^{\log_3 x} > 3^2$, 所以 $x \in (9, +\infty)$.

(3) 方法一: 不等式化为

$$3^{x^2+x} > 3^2, \quad 即 \quad x^2+x > 2,$$

解得 $x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$.

方法二: 不等式化为 $\log_3 3^{x^2+x} > \log_3 9$, 仍可解得 $x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$.

(4) 方法一: 不等式化为

$$\log_5(x^2-4x) \leqslant \log_5 5, \quad 即 \quad 0 < x^2-4x \leqslant 5,$$

解得 $x \in [-1, 0) \cup (4, 5]$.

方法二: 不等式化为 $5^{\log_5(x^2-4x)} \leqslant 5^1$, 仍可解得 $x \in [-1, 0) \cup (4, 5]$.

2 2020 年 12 月 6 日答疑记录

2.1 图形变换

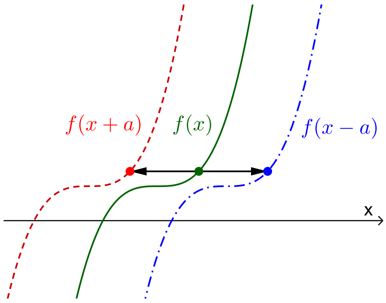
先考虑函数 $y = f(x)$ 与 $y = f(x+1)$ 的图形. 因为点 $A(n, f(n))$ 满足 $y = f(x)$ (此时 $x = n$), 而点 $A'(n-1, f(n))$ 满足 $y = f(x+1)$ (此时 $x = n-1$), 且点 A 向左平移一个单位长度可得点 A', 所以将 $y = f(x)$ 图形上的所有点向左平移一个单位长度可得 $y = f(x+1)$ 的图形.

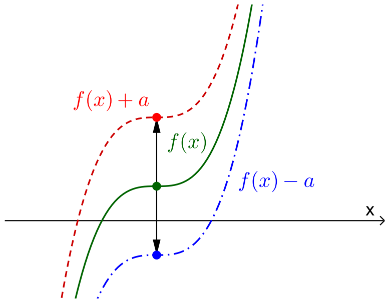
再考虑函数 $y = f(x)$ 与 $y = f(x)+1$ 的图形. 因为点 $B(n, f(n))$ 满足 $y = f(x)$ (此时 $x = n$), 而点 $B'(n, f(n)+1)$ 满足 $y = f(x+1)$ (此时 $x = n$), 且点 B 向上平移一个单位长度可得点 B', 所以将 $y = f(x)$ 图形上的所有点向上平移一个单位长度可得 $y = f(x)+1$ 的图形.

设 $a > 0$, 由同样的分析可以知道,

$$\begin{aligned} &\text{向左平移 } a \text{ 个单位长度: } f(x) \to f(x+a); \\ &\text{向右平移 } a \text{ 个单位长度: } f(x) \to f(x-a); \\ &\text{向上平移 } a \text{ 个单位长度: } f(x) \to f(x)+a; \\ &\text{向下平移 } a \text{ 个单位长度: } f(x) \to f(x)-a. \end{aligned}$$

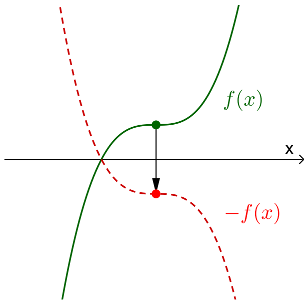
以上结论可以简记为 “左加右减, 上加下减”. 示意图如下 ($a > 0$):

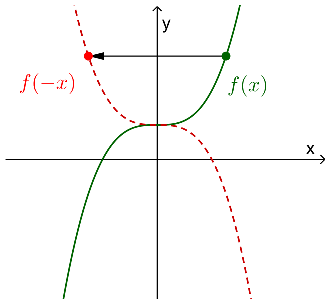




注意, 这些结论均是对 x 或 $f(x)$ (即 y) 的整体变换. 例如 $f(2x)$ 的图形往左平移 1 个单位长度, 得到 $f(2(x+1))$ 即 $f(2x+2)$ 的图形; 而由 $f(3x)$ 的图形要得到 $f(3x-1)$ 的图形, 需将前者往右平移 $\dfrac{1}{3}$ 个单位长度.

接着考虑函数 $y=f(x)$ 与 $y=-f(x)$ 的图形. 因为点 $C(n,f(n))$ 满足 $y=f(x)$ (此时 $x=n$), 而点 $C'(n,-f(n))$ 满足 $y=f(x+1)$ (此时 $x=n$), 且点 C 与 C' 关于 x 轴对称, 所以作 $y=f(x)$ 图形上的所有点关于 x 轴的对称点可得 $y=-f(x)$ 的图形 (两个图形上对应点横坐标相同, 纵坐标互为相反数, 简记为 “上下翻转”). 类似地, 作 $y=f(x)$ 图形上的所有点关于 y 轴的对称点可得 $y=f(-x)$ 的图形 (两个图形上对应点横坐标互为相反数, 纵坐标相同, 简记为 “左右翻转”). 示意图如下:



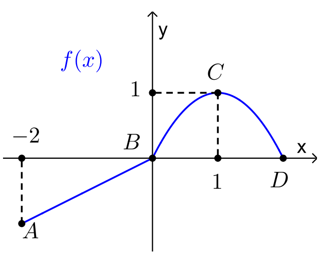


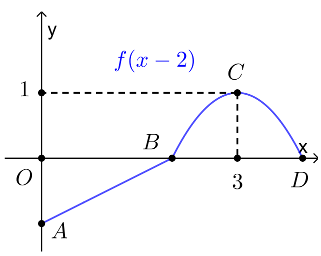
上述六种图形变换可以叠加. 例如, $f(x)$ 的图形先上下翻转可得 $-f(x)$ 的图形, 再左右翻转可得 $-f(-x)$ 的图形; $f(x)$ 的图形先左右翻转可得 $f(-x)$ 的图形, 再向右平移 4 个单位长度 (将 x 替换为 $x-4$) 可得 $f(4-x)$ 的图形.

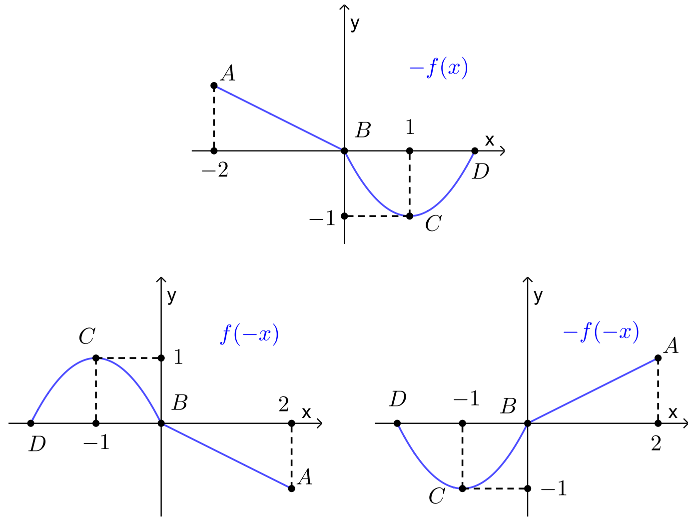
例 2.1 已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x, & -2\leqslant x\leqslant 0,\\ -x^2+2x, & 0<x\leqslant 2,\end{cases}$ 画出下列函数的图形:

(1) $f(x)$; (2) $f(x-2)$; (3) $-f(x)$; (4) $f(-x)$; (5) $-f(-x)$.

解 各函数图形依次如下:







2.2 恒成立问题

恒成立问题一般化为值域问题来求解. 例如, 设 D 为函数 $f(x)$ 的定义域, 则

$$\forall x \in D, f(x) \leqslant m \Leftrightarrow f_{\max} \leqslant m,$$
$$\forall x \in D, f(x) \geqslant m \Leftrightarrow f_{\min} \geqslant m.$$

例 2.2 已知函数 $f(x) = x^2 + ax - b$, 正数 a, b 满足 $a + \dfrac{4}{b} \leqslant 3$. 若对任意的 $x \in [1, +\infty)$, $f(x) \geqslant 0$ 恒成立, 求 a, b 的值.

解 由题意, 在 $[1, +\infty)$ 上 $f_{\min} \geqslant 0$. 因为 a 为正数, $f(x)$ 的图形的对称轴为 $x = -\dfrac{a}{2} < 0$ 且图形开口向上, 所以此时 $f_{\min} = f(1) = 1 + a - b$. 因此

$$\begin{cases} a + \dfrac{4}{b} \leqslant 3, \\ 1 + a - b \geqslant 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} a \leqslant 3 - \dfrac{4}{b}, \\ a \geqslant b - 1. \end{cases}$$

由不等式的传递性,

$$3 - \frac{4}{b} \geqslant b - 1, \quad \text{移项整理得} \quad 0 \geqslant (b-2)^2.$$

因为 $(b-2)^2 \geqslant 0$ 恒成立, 所以只能 $(b-2)^2 = 0$, 即 $b = 2$. 回代可知 $a = 2$, 所以 $a = b = 2$.

3 2020 年 12 月 11 日答疑记录

例 3.1 判断下列函数的奇偶性, 并求函数的零点.

(1) $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$; (2) $g(x) = x + \dfrac{1}{x}$; (3) $h(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$; (4) $i(x) = \ln |x|$.

解 (1) $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ 的定义域为 $[0,+\infty)$, 不关于原点对称, 所以是非奇非偶函数. 令 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}=0$, 解得 $x=0$, 所以 $f(x)$ 的零点为 0.

(2) $g(x)=x+\dfrac{1}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, 关于原点对称. 而

$$g(-x)=(-x)+\frac{1}{-x}=-\left(x+\frac{1}{x}\right)=-g(x),$$

所以 $g(x)$ 是奇函数. 令 $g(x)=x+\dfrac{1}{x}=0$, 得 $x^2+1=0$ $(x\neq 0)$, 无解, 所以 $g(x)$ 没有零点.

(3) $h(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 而

$$h(-x)=\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}=h(x),$$

所以 $h(x)$ 是偶函数. 令 $h(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}=0$, 得 $(\mathrm{e}^x)^2+1=0$, 无解, 所以 $h(x)$ 没有零点. (注意, $h(x)$ 不是对勾函数, 其图形不像对勾.)

(4) $i(x)=\ln|x|$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, 关于原点对称. 而

$$i(-x)=\ln|-x|=\ln|x|=i(x),$$

所以 $i(x)$ 是偶函数. 令 $i(x)=\ln|x|=0$, 得 $|x|=1$ 即 $x=\pm 1$, 所以 $i(x)$ 的零点为 ± 1.

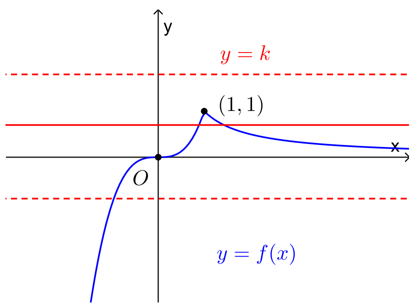
注 3.1 (1) 函数奇偶性的定义为

$$\text{函数 } f(x) \text{ 的图形关于原点对称} \Leftrightarrow f(x) \text{ 为奇函数} \Leftrightarrow f(-x)=-f(x),$$
$$\text{函数 } f(x) \text{ 的图形关于 } y \text{ 轴对称} \Leftrightarrow f(x) \text{ 为偶函数} \Leftrightarrow f(-x)=f(x).$$

(2) 因为函数的奇偶性描述的是函数图形关于原点 (奇函数) 或 y 轴 (偶函数) 的对称性, 所以函数若有奇偶性, 则定义域必关于原点对称 (否则无法画出带对称性的图形).

例 3.2 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\geqslant 1,\\ x^3, & x<1,\end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x)=k$ 有两个不等的实根, 求 k 的取值范围.

解 此题与 “2020 年 12 月 5 日答疑记录” 的例 1.1 类似, 画图可知, $k\in(0,1)$.



4　2020 年 12 月 12 日答疑记录

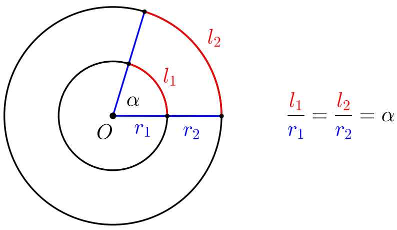
4.1　弧度制

角的大小用来描述角的两边 (始边和终边) 张开的幅度. 度量角的大小的方法中, 常见的为如下两种:

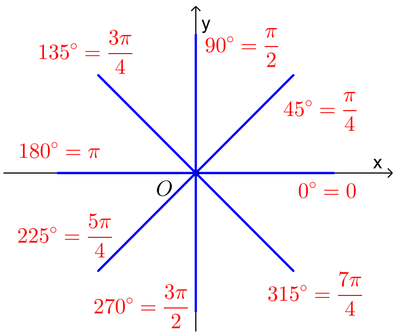
(1) 将射线绕定点旋转一周所形成的角 (称为周角) 等分为 360 份, 每一份的大小记为 1°. 所以周角的大小是 360°, 并这种方法称为角度制.

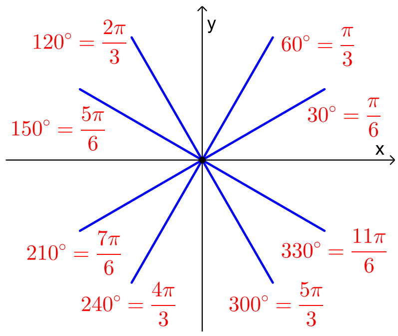
(2) 将角的顶点放在圆心, 利用所截弧长来定义角的大小. 当圆心角固定时, 若半径越大, 则所对弧长也越大, 所以定义弧长与半径的比例为圆心角的大小, 并称这种方法为弧度制. 此时周角的大小是 $\dfrac{2\pi r}{r} = 2\pi\,\mathrm{rad}$. rad 是弧度制的单位, 念作 "弧度" (radian), 通常略去不写.

根据相似形对应线段或弧成比例, 对固定的圆心角, 弧长与半径的比例为定值, 所以第二种方法是合理的.



高中数学更常用的是弧度制. 由定义, $360^\circ = 2\pi$, 并应熟记特殊角 $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 180^\circ$ 的角度和弧度.





容易得到弧度与角度互换公式:

$$1\,\mathrm{rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.3^\circ, \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180}\,\mathrm{rad}.$$

若圆心角 α (弧度制, 可能为负) 所对的弧长为 l, 则 $|\alpha| = \dfrac{l}{r}$, 其中 r 是圆的半径. 此外还有弧长公式 $l = |\alpha| r$, 和扇形面积公式

$$S = \frac{1}{2} l r = \frac{1}{2} |\alpha| r^2 \quad (\text{类似于三角形面积公式}).$$

例 4.1　求终边落在直线 $y = -x$ 上的角 α 的集合.

解 直线 $y=-x$ 为第二、四象限的角平分线, 作图易知, 所求集合为

$$\{\alpha \mid\ 135^\circ + k\cdot 180^\circ\} = \left\{\alpha \,\middle|\, \frac{3\pi}{4}+k\pi\right\}.$$

以上两个集合, 只写其中一个即可 (用弧度制相对来说更简洁).

例 4.2 已知某扇形的半径为 10, 面积为 $\dfrac{50\pi}{3}$, 求该扇形的圆心角大小.

解 设该扇形的圆心角弧度大小为 α, 半径为 r, 则其面积

$$S=\frac{1}{2}\alpha r^2,\quad \text{即}\quad \frac{50\pi}{3}=\frac{1}{2}\alpha\cdot 10^2.$$

解得 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$.

注 4.1 例 4.2 也可以用角度制来解: 设该扇形的圆心角角度大小为 α, 半径为 r, 则其面积 $S=\dfrac{\alpha}{360^\circ}\pi r^2$, 可求得 $\alpha=60^\circ$. 用角度制计算相对更简单一些.

4.2 任意角三角函数的定义

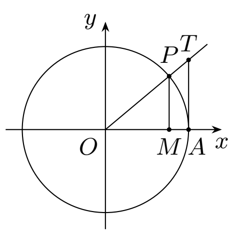
如下方左图, 设 α 是任意一个角, 顶点为坐标原点, 始边为 x 正半轴, $P(x,y)$ 是终边上任意一点 (异于原点), 它与原点的距离是 $r=\sqrt{x^2+y^2}>0$, 那么

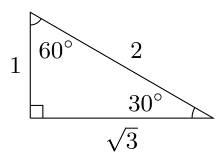
$$\sin\alpha=\frac{y}{r},\quad \cos\alpha=\frac{x}{r},\quad \tan\alpha=\frac{y}{x}\ (x\neq 0).$$

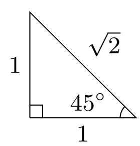
三角函数值只与角的大小有关, 而与终边上点 P 的位置无关. 由定义容易判断各象限内的角的三角函数值的正负号. 若点 P 恰在单位圆 (圆心为原点且半径为 1) 上, 取点 $A(1,0)$, 并作 $PM\perp OA$ 于点 M, 作 $TA\perp OA$ 并交射线 OP 于点 T, 则此时 $r=1$, 且 (类似锐角三角函数的定义)

$$\sin\alpha=y,\quad \cos\alpha=x,\quad \tan\alpha=\frac{AT}{OA}=AT\ (x\neq 0).$$

对 $\angle POA$ 来说, MP 为正弦线, OM 为余弦线, AT 为正切线, 且各线段均为有向线段 (即规定了正方向, 所以表示时带正负号). 常用的三角函数值, 参考下方右图. 由此可以写出其他特殊角 (120°, 135°, 150° 等) 的各三角函数值, 如 $\sin 120^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 135^\circ=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.







例 4.3 $\sin 6$____0. (填 "$>$" 或 "$<$")

解 注意题中的 6 是弧度制, 而 $360° = 2\pi \approx 6.28$, 所以 6 弧度在第四象限. 由正弦的定义, $\sin 6 < 0$.

注 4.2 类似地, 1 弧度在第一象限, 2 弧度和 3 弧度都在第二象限, 所以

$$\sin 1,\ \sin 2,\ \sin 3 > 0, \quad \cos 1 > 0, \quad \cos 2,\ \cos 3 < 0.$$

此外, 画图可知 $\sin 1 < \sin 2$.

例 4.4 已知角 α 的终边经过点 $P(-x, -12)$, 且 $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$, 求 x 的值.

解 由余弦定义,

$$\cos\alpha = \frac{-x}{\sqrt{(-x)^2 + (-12)^2}} = -\frac{5}{13}, \quad \text{解得 } x = \pm 5.$$

经检验, $x = 5$ (或由余弦值为负知点 P 在第二、三象限, 所以 $-x < 0$ 即 $x > 0$).

5 2020 年 12 月 13 日答疑记录

例 5.1 求函数 $f(x) = 4^x - 2^x - 2$ 的零点.

解 令 $f(x) = 0$, 则 $4^x - 2^x - 2 = 0$, 即

$$(2^x)^2 - 2^x - 2 = 0, \quad (2^x - 2)(2^x + 1) = 0.$$

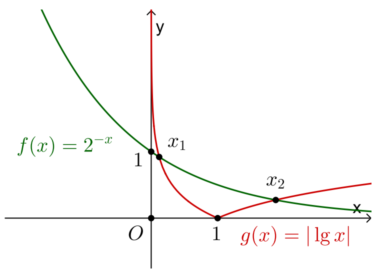
因为恒有 $2^x > 0$, 所以 $2^x = 2$, 解得 $x = 1$. 故所求零点为 $x = 1$.

例 5.2 设方程 $2^{-x} = |\lg x|$ 的两个根为 x_1, x_2, 求 x_1x_2 的取值范围.

解 分别画出函数 $f(x) = 2^{-x}$ 和 $g(x) = |\lg x|$ 的图形, 可知两者交点的横坐标为 x_1, x_2, 且均为正数并分别在 1 的两侧. 不妨设 $x_1 \in (0, 1)$, $x_2 \in (1, +\infty)$, 由 $f(x)$ 单调递减可知, $f(x_1) > f(x_2)$, 即 $g(x_1) > g(x_2)$, 所以

$$|\lg x_1| > |\lg x_2|, \quad -\lg x_1 > \lg x_2,$$

整理可得 $\lg(x_1x_2) < 0$. 进一步有 $x_1x_2 \in (0, 1)$.



注 5.1　若将例 5.2 中的方程改为 $k=|\log_a x|$, 其中 k 为正的常数, $a\in(0,1)\cup(1,+\infty)$, 用同样的方法可以知道 $x_1x_2=1$.

例 5.3　一个容器装有细沙 $a\,\mathrm{cm}^3$, 细沙从容器底部一个细微的小孔慢慢地匀速漏出, $t\,\mathrm{min}$ 后剩余的细沙量为 $y=a\mathrm{e}^{-bt}\,(\mathrm{cm}^3)$, 经过 $8\,\mathrm{min}$ 后发现容器内还有一半的沙子, 求需要再经过多少时间, 容器中的沙子只有开始时的八分之一.

解　设经过 $t\,\mathrm{min}$ 符合题意, 则由已知,

$$\begin{cases} a\mathrm{e}^{-b\cdot 8}=\dfrac{a}{2}, \\ a\mathrm{e}^{-bt}=\dfrac{a}{8}, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} \mathrm{e}^{-8b}=\dfrac{1}{2}, \\ \mathrm{e}^{-bt}=\dfrac{1}{8}. \end{cases}$$

因为 $\dfrac{1}{8}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$, 所以

$$\mathrm{e}^{-bt}=(\mathrm{e}^{-8b})^3=\mathrm{e}^{-24b},$$

即 $-bt=-24b$, 解得 $t=24$. 这表明需要再经过 $(t-8)\,\mathrm{min}=16\,\mathrm{min}$, 才能符合题意.

例 5.4　设函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$, 求下列命题中真命题的个数:

(1) 函数 $f(|x|)$ 为偶函数.

(2) 若 $f(a)=|f(b)|$, 其中 $a,b>0$ 且 $a\neq b$, 则 $ab=1$.

(3) 函数 $f(-x^2+2x)$ 在 $(1,3)$ 上为单调递增函数.

(4) 若 $0<a<1$, 则 $|f(1+a)|<|f(1-a)|$.

解　(1) 设 $g(x)=f(|x|)$, 则

$$g(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=g(x),$$

所以函数 $f(|x|)$ 为偶函数 (此结论无需考虑 $f(x)$ 的具体表达式).

(2) $f(x)=|f(b)|$ 化为 $\log_{\frac{1}{2}}a=|\log_{\frac{1}{2}}b|$, 由此可知 $\log_{\frac{1}{2}}a\geqslant 0$, 即 $a\in(0,1]$. 若 $b\in(0,1]$, 则 $\log_{\frac{1}{2}}a=\log_{\frac{1}{2}}b$, 必有 $a=b$, 与已知矛盾. 若 $b\in(1,+\infty)$, 则

$$\log_{\frac{1}{2}}a=-\log_{\frac{1}{2}}b, \quad \text{即} \quad \log_{\frac{1}{2}}ab=0,$$

所以 $ab=1$.

(3) 函数 $f(-x^2+2x)=\log_{\frac{1}{2}}(-x^2+2x)$, 定义域为 $(0,2)$, 所以在 $(1,3)$ 并非处处有定义, 无法判断定义域. (如果只考虑 $x\in(1,2)$, 则可由复合函数的单调性知, 函数 $f(-x^2+2x)$ 为单调递增函数.)

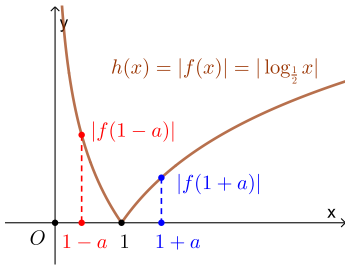
(4) 方法一: 因为 $0<a<1$, 所以 $1-a\in(0,1)$, $1+a\in(1,2)$,

$$\begin{aligned} |f(1+a)|-|f(1-a)| &= |\log_{\frac{1}{2}}(1+a)|-|\log_{\frac{1}{2}}(1-a)| \\ &= -\log_{\frac{1}{2}}(1+a)-\log_{\frac{1}{2}}(1-a) \\ &= -\log_{\frac{1}{2}}(1-a^2)<0, \end{aligned}$$

即 $|f(1+a)|-|f(1-a)|<0$, 因此 $|f(1+a)|<|f(1-a)|$.

方法二: 直接画函数 $h(x)=|\log_{\frac{1}{2}}x|$ 的图形, 并由图形单调性可知,

$$|f(1+a)|<|f(1-a)|.$$



综上所述, (1)(2)(4) 是真命题, 共 3 个.

例 5.5 已知函数 $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$, 求该函数在区间 $[1,4]$ 上的最大值与最小值.

解 用分离常数法,

$$f(x)=\frac{2x+1}{x+1}=\frac{2(x+1)-1}{x+1}=2-\frac{1}{x+1}.$$

因为 $x\in[1,4]$, 所以 $\dfrac{1}{x+1}$ 单调递减, $-\dfrac{1}{x+1}$ 单调递增, $2-\dfrac{1}{x+1}$ 也单调递增, 从而

$$f_{\min}=f(1)=\frac{3}{2},\quad f_{\max}=f(4)=\frac{9}{5}.$$

例 5.6 大气中的温度随着高度的上升而降低, 根据实测的结果, 上升到 12 km 为止温度的降低大体上与升高的距离成正比, 在 12 km 以上温度一定, 保持在 −55 ℃.

(1) 当地表大气的温度是 a ℃ 时, 在 x km 上空的温度为 y ℃, 求 a, x, y 之间的函数关系式;

(2) 当地表大气的温度是 29 ℃ 时, 在 3 km 上空的温度是多少?

解 (1) 设题中的正比例系数为 k, 则 $a-y=kx$. 因为当 $x=12$ 时, $y=-55$, 所以

$$a-(-55)=k\cdot 12,\quad \text{即}\quad k=\frac{a+55}{12}.$$

进一步可得,

$$y=\begin{cases}a-\dfrac{a+55}{12}, & x\in[0,12],\\ -55, & x\in(12,+\infty).\end{cases}$$

(2) 此时 $a=29$, 当 $x=3$ 时, $y=29-\dfrac{29+55}{12}=22$.

例 5.7 已知函数 $f(x)=\log_a(2-x)+\log_a(x+2)$ 的最小值为 -4, 其中 $0<a<1$, 求 a 的值.

解 由题意,

$$\begin{cases} 2-x>0, \\ x+2>0, \end{cases} \quad \text{解得} \quad x\in(-2,2).$$

因为 $f(x)=\log_a(4-x^2)$, 而 $4-x^2\in(0,4]$, 所以由 $\log_a x$ 单调递减可知, $f(x)\in[\log_a 4,+\infty)$. 因此

$$\log_a 4=-4, \quad a^{-4}=4, \quad a=4^{-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例 5.8 已知 $\log_a \dfrac{2}{3}<1$, 求实数 a 的取值范围.

解 不等式化为 $\log_a \dfrac{2}{3}<\log_a a$.

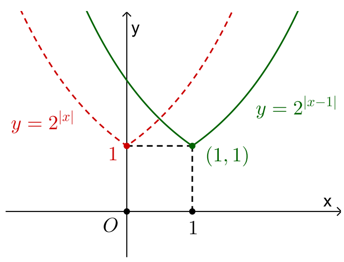
(1) 若 $a\in(0,1)$, 由 $\log_a x$ 单调递减可知, $a<\dfrac{2}{3}$, 所以 $a\in\left(0,\dfrac{2}{3}\right)$.

(2) 若 $a\in(1,+\infty)$, 由 $\log_a x$ 单调递增可知, $a>\dfrac{2}{3}$, 所以 $a\in(1,+\infty)$.

综上所述, $a\in\left(0,\dfrac{2}{3}\right)\cup(1,+\infty)$.

例 5.9 若函数 $y=2^{|x-1|}$ 在区间 $(k-1,k+1)$ 内不单调, 求 k 的取值范围.

解 由 $y=2^{|x|}$ 的图形向右平移一个单位长度可得 $y=2^{|x-1|}$ 的图形, 而前者为偶函数, 且当 $x\geqslant 0$ 时 $y=2^x$. 由此可以画出 $y=2^{|x-1|}$ 的图形如下:



由图可知, $y=2^{|x-1|}$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减, 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. 因为题中要求函数 $y=2^{|x-1|}$ 在区间 $(k-1,k+1)$ 内不单调, 所以

$$1\in(k-1,k+1), \quad \text{解得} \quad k\in(0,2).$$

6 2020 年 12 月 16 日答疑记录

同角三角函数有两个常用基本关系式:

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1, \quad \tan x=\frac{\sin x}{\cos x}.$$

后一个式子也可以认为是正切的定义. 前一个式子等价于勾股定理, 由该式可知

$$(\sin x\pm\cos x)^2=1\pm 2\sin x\cos x,$$

$$\sin^2 x=1-\cos^2 x=(1+\cos x)(1-\cos x).$$

例 6.1 已知 $\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$, 且 $\tan\alpha > 0$, 求 $\dfrac{\sin\alpha\cos^2\alpha}{1-\sin\alpha}$.

解 方法一: 由题意, α 在第三象限, 所以 $\sin\alpha = -\dfrac{4}{5}$,

$$\frac{\sin\alpha\cos^2\alpha}{1-\sin\alpha} = \frac{-\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^2}{1-\left(-\frac{4}{5}\right)} = -\frac{4}{25}.$$

方法二: 也可以利用 $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha = (1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)$ 得,

$$\frac{\sin\alpha\cos^2\alpha}{1-\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)}{1-\sin\alpha} = \sin\alpha(1+\sin\alpha) = -\frac{4}{25}.$$

例 6.2 化简 $\dfrac{\cos\theta}{1+\cos\theta} - \dfrac{\cos\theta}{1-\cos\theta}$.

解 通分后合并可知,

$$\begin{aligned}\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta} - \frac{\cos\theta}{1-\cos\theta} &= \frac{\cos\theta(1-\cos\theta-(1+\cos\theta))}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}\\ &= \frac{\cos\theta(-2\cos\theta)}{1-\cos^2\theta} = -\frac{2\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\\ &= -\frac{2}{\tan^2\theta}.\end{aligned}$$

其中最后一个等号及其后的式子可以不写.

凡正余弦的二次式, 均可以化成正切函数来表示, 例如:

$$\sin x\cos x + \cos^2 x = \frac{\sin x\cos x + \cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{\tan x + 1}{\tan^2 x + 1}.$$

与此类似的还有

$$\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = \frac{\tan x + 1}{\tan x - 1}.$$

这两种变形方法常用来解决正余弦值和正切值的转化问题.

例 6.3 已知 $\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta - 2\cos\theta} = \dfrac{1}{2}$, 求 $\tan\theta$.

解 方法一: 原式分子、分母同除以 $\cos\theta$, 得 $\dfrac{\tan\theta+1}{\tan\theta-2} = \dfrac{1}{2}$, 所以 $\tan\theta = -4$.

方法二: 将原式化为整式,

$$2(\sin\theta+\cos\theta) = \sin\theta - 2\cos\theta,$$

所以 $\sin\theta = -4\cos\theta$, 即 $\tan\theta = -4$.

例 6.4 设角 α 的终边过点 $P(3,4)$, 求 $\dfrac{\sin\alpha + 2\cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$.

解 方法一: 由题意, $\tan\alpha=\dfrac{4}{3}$, 所以

$$\frac{\sin\alpha+2\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\tan\alpha+2}{\tan\alpha-1}=10.$$

方法二: 由题意, $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{4}{3}$, 即 $\sin\alpha=\dfrac{4}{3}\cos\alpha$, 所以

$$\frac{\sin\alpha+2\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\frac{4}{3}\cos\alpha+2\cos\alpha}{\frac{4}{3}\cos\alpha-\cos\alpha}=10.$$

7 2020 年 12 月 18 日答疑记录

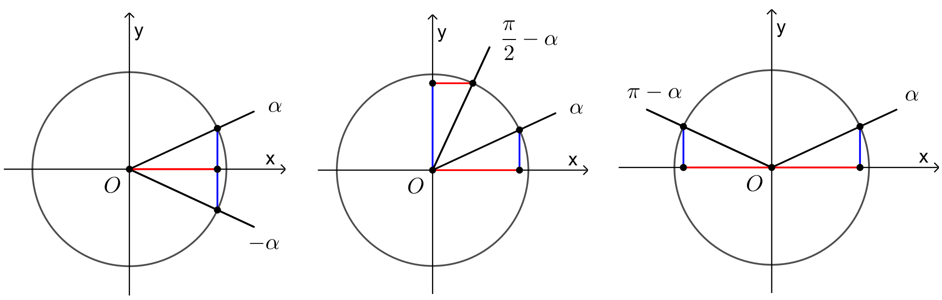
诱导公式指的是已知角加上 90° (或 $\dfrac{\pi}{2}$) 的整数倍后, 所得角与已知角的三角函数值的关系. 最容易理解的是

$$\sin(2\pi+\alpha)=\sin\alpha,\quad \cos(2\pi+\alpha)=\cos\alpha.$$

常用的还有

$$\sin(-x)=-\sin x\ (\text{奇函数}),\quad \cos(-x)=\cos x\ (\text{偶函数}),$$
$$\sin(90^\circ-x)=\cos x,\quad \cos(90^\circ-x)=\sin x,$$
$$\sin(180^\circ-x)=\sin x,\quad \cos(180^\circ-x)=-\cos x.$$

分别对应如下图形 (为观察方便, 正弦线、余弦线的位置与通常的定义略有区别):



诱导公式的记忆口诀为: 奇变偶不变, 符号看象限, 其中

(1) “奇”“偶”指所加 90° (或 $\dfrac{\pi}{2}$) 倍数的奇偶性;

(2) “变”指函数名中“正”变“余”或“余”变“正”;

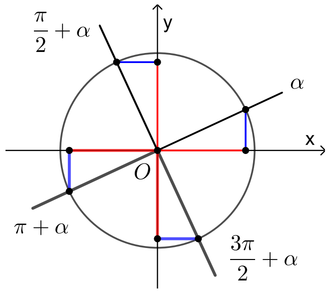
(3) “象限”指把已知角视为锐角时所得角对应的象限;

(4) “符号”是此时原式的符号.

例如:

$$\sin(2x-\pi)=-\sin 2x,\quad \tan(x+180^\circ)=\tan x,$$
$$\cos(3x-270^\circ)=-\sin 3x,\quad \sin\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos 4x.$$

可结合如下图形理解诱导公式:



由上图可知:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha,$$
$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha,\quad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha,$$
$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha,$$

恰好验证了诱导公式.

例 7.1 化简: $\dfrac{\sin\left(\alpha-\dfrac{11}{2}\pi\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\tan(2\pi-\alpha)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos(\alpha-2\pi)\tan(\alpha-5\pi)}$.

解 由诱导公式,

$$\sin\left(\alpha-\frac{11}{2}\pi\right)=\sin\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha,$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha,\qquad \tan(2\pi-\alpha)=\tan(-\alpha)=-\tan\alpha,$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha,\qquad \cos(\alpha-2\pi)=\cos\alpha,$$
$$\tan(\alpha-5\pi)=\tan(\alpha+\pi)=\tan\alpha,$$

所以

$$\text{原式}=\frac{\cos\alpha\sin\alpha(-\tan\alpha)}{-\sin\alpha\cos\alpha\tan\alpha}=1.$$

用诱导公式解题时, 应先利用本节第一个公式, 将式中 π 的系数的绝对值尽可能变小, 最好是将含 π 的项化为 $[-\pi,\pi]$ 内的数.

8 2020 年 12 月 22 日答疑记录

本次答疑记录是 12 月数学月考里选择、填空题的错题讲解, 原先为两次答疑的内容. 为了方便起见, 所有题均改成解答题, 并整合成一次记录.

例 8.1 已知函数 $f(x)=2-\dfrac{3}{x}$, 若 $g(x)=f(x)-m$ 为奇函数, 求实数 m 的值.

解 方法一：由题意，$g(x)=2-\dfrac{3}{x}-m$ 且 $g(-x)=-g(x)$，所以

$$2-\frac{3}{-x}-m=-\left(2-\frac{3}{x}-m\right),\quad \text{整理得}\quad m=2.$$

方法二：因为 $f(x)=2-\dfrac{3}{x}$ 的图形可由 $y=-\dfrac{3}{x}$ 的图形向上平移两个单位长度得到，而后者关于原点对称 (函数为奇函数)，而 $g(x)=f(x)-m$ 的图形可由 $f(x)$ 的图形上、下平移得到，所以只需 $m=2$，即将 $f(x)$ 的图形向下平移两个单位长度，可得 $g(x)=-\dfrac{3}{x}$ 为奇函数.

例 8.2 "$\ln a>\ln b$" 是 "$3^a>3^b$" 的什么条件?

解 有 $y=\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$ 且单调递增，可知 $\ln a>\ln b$ 表明 $a>b>0$. 再由 $y=3^x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ 且单调递增，可知 $3^a>3^b$ 表明 $a>b$. 因此 "$\ln a>\ln b$" 是 "$3^a>3^b$" 的必要不充分条件.

例 8.3 根据有关资料，围棋状态空间复杂度的上限 M 约为 3^{361}，而可观测宇宙中普通物质的原子总数 N 约为 10^{80}. 将 $\dfrac{M}{N}$ 表示为 10 的正整数次方 ($\lg 3\approx 0.48$).

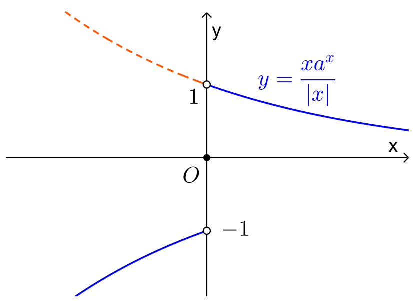
解 根据对数的运算性质，

$$\begin{aligned}\lg\frac{M}{N}&=\lg M-\lg N=\lg 3^{361}-\lg 10^{80}=361\lg 3-80\\&\approx 361\cdot 0.48-80=93.28,\end{aligned}$$

所以 $\dfrac{M}{N}\approx 10^{93}$.

例 8.4 画出函数 $y=\dfrac{xa^x}{|x|}$ $(0<a<1)$ 的图形的大致形状.

解 利用绝对值的定义，原函数化为 $y=\begin{cases}-a^x, & x<0,\\ a^x, & x>0,\end{cases}$ 图形的大致形状如下:

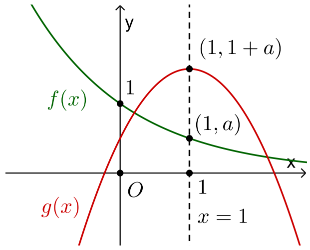


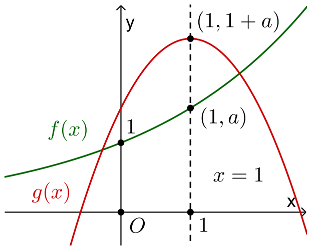
例 8.5 求关于 x 的方程 $x=\log_a(-x^2+2x+a)$ $(a>0$, 且 $a\neq 1)$ 的解的个数.

解 因为 $x=\log_a a^x$, 所以原方程化为

$$\log_a a^x=\log_a(-x^2+2x+a),\quad \text{即}\quad a^x=-(x-1)^2+1+a,$$

故应考虑函数 $f(x)=a^x$ 与 $g(x)=-(x-1)^2+1+a$ 的图形的交点个数. 分 $0<a<1$ 和 $a>1$ 两种情况画图如下:





由图可知, $f(x)=a^x$ 与 $g(x)=-(x-1)^2+1+a$ 的图形总有两个交点, 所以方程 $x=\log_a(-x^2+2x+a)$ 的解的个数为 2.

例 8.5 也可以直接画原方程 $x=\log_a(-x^2+2x+a)$ 对应的两个函数 $y=x$ 和 $y=\log_a(-x^2+2x+a)$ 的大致图形, 画后者之前需适当讨论, 略微麻烦一点.

例 8.6 若 $a>b$, 则下列不等式中哪些一定成立?

(1) $\log_2 a>\log_2 b$; (2) $2^a>2^b$; (3) $a^{\frac{1}{3}}>b^{\frac{1}{3}}$; (4) $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$.

解 此题主要考查函数的定义域和单调性.

(1) 因为函数 $y=\log_2 x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$ 且单调递增, 所以 $\log_2 a>\log_2 b$ 等价于 $a>b>0$, 与已知条件 $a>b$ 不符.

(2) 因为函数 $y=2^x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ 且单调递增, 所以 $2^a>2^b$ 等价于 $a>b$, 与已知条件 $a>b$ 相同.

(3) 因为函数 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ 且单调递增, 所以 $a^{\frac{1}{3}}>b^{\frac{1}{3}}$ 等价于 $a>b$, 与已知条件 $a>b$ 相同.

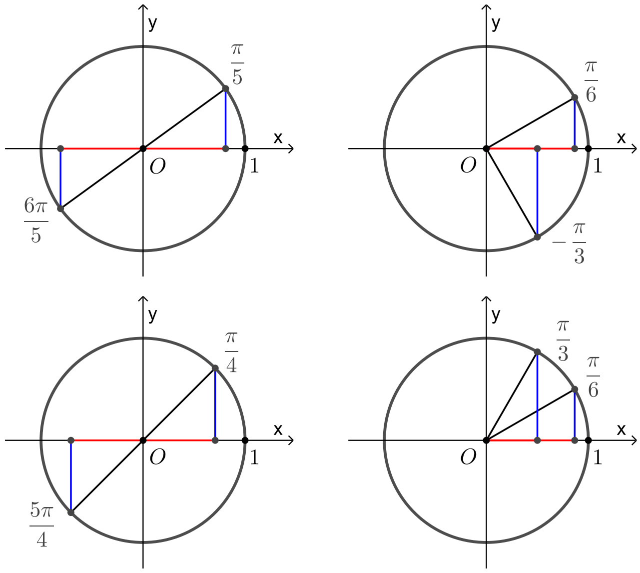
(4) 函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, 所以 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$ 不一定有意义 (如当 $a=0$ 或 $b=0$ 时). 即使该式有意义, 在已知条件 $a>b$ 中取 $a>0$, $b<0$ 可知 $\dfrac{1}{a}>0>\dfrac{1}{b}$, 与本小题结论不符.

例 8.7 下列各式中哪些是正确的?

(1) $\sin\dfrac{\pi}{5}>\sin\dfrac{6\pi}{5}$; (2) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)<\cos\dfrac{\pi}{6}$;

(3) $\tan\dfrac{\pi}{4}>\tan\dfrac{5\pi}{4}$; (4) $\sin\dfrac{\pi}{3}>\sin\dfrac{\pi}{6}$.

解 画正弦线、余弦线如下:



由此可知 (正切值由正弦值比余弦值得到)

$$\sin\frac{\pi}{5} > 0 > \sin\frac{6\pi}{5}, \quad \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6},$$

$$\tan\frac{\pi}{4} = 1 = \tan\frac{5\pi}{4}, \quad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}.$$

例 8.8 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且当 $x \in (-\infty, 0]$ 时, $f(x) = 2^x + \frac{1}{3}$, 求 $f\left(\log_2\frac{3}{2}\right)$ 的值.

解 因为 $\log_2\frac{3}{2} > \log_2 1 = 0$, 所以由偶函数的特征,

$$f\left(\log_2\frac{3}{2}\right) = f(-x) = 2^{-\log_2\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} = 2^{\log_2\frac{2}{3}} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

例 8.8 中也可以先求 $f(x)$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 时的解析式, 可参考 “2020 年 11 月 14 日答疑记录” 的第五个例子和 “2020 年 11 月 22 日答疑记录” 的第二个例子.

例 8.9 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 3^x, & x \leqslant 0, \\ -2x+1, & x > 0, \end{cases}$ 若 $f(x) \leqslant \frac{1}{3}$, 求实数 x 的取值范围.

解 (1) 若 $x \leqslant 0$, 则 $f(x) \leqslant \frac{1}{3}$ 化为

$$3^x \leqslant \frac{1}{3} = 3^{-1}, \quad \text{解得} \quad x \leqslant -1.$$

(2) 若 $x > 0$, 则 $f(x) \leqslant \frac{1}{3}$ 化为

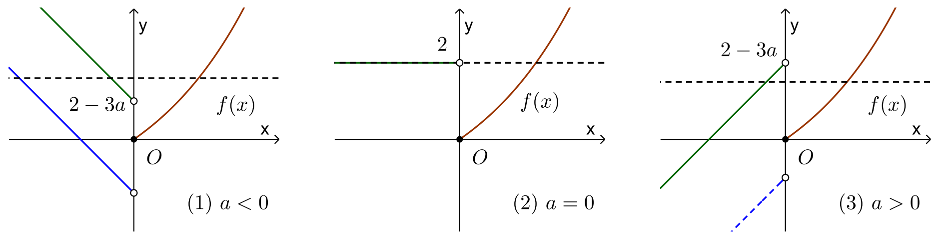
$$-2x + 1 \leqslant \frac{1}{3}, \quad \text{解得} \quad x \geqslant \frac{1}{3}.$$

综上所述, $x \in (-\infty, -1] \cup \left[\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$.

分段函数分段考虑, 下题也是如此.

例 8.10 已知函数 $f(x) = \begin{cases} ax + 2 - 3a, & x < 0, \\ 2^x - 1, & x \geqslant 0. \end{cases}$ 若存在 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 \neq x_2$, 使得 $f(x_2) = f(x_2)$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

解 题中 $f(x)$ 的图形在 $x < 0$ 的部分为半直线, 在 $x \geqslant 0$ 的部分为 $y = 2^x$ 向下平移一个单位长度. 而条件 "存在 $x_1 \neq x_2$ 使得 $f(x_2) = f(x_2)$ 成立" 表明存在水平的直线与 $f(x)$ 的图形有两个不同的交点. 分 $a < 0$, $a = 0$ 和 $a > 0$ 三种情况 (分别对应半直线不同的增减性) 画图如下:



由图可知, 当 $a \leqslant 0$ 时, 图形均合题意; 而当 $a > 0$ 时, 需 $2 - 3a > 0$ 即 $a < \dfrac{2}{3}$. 由此可知, 实数 a 的取值范围为 $\left(-\infty, -\dfrac{2}{3}\right)$.