1 2020 年 9 月 21 日答疑记录

例 1.1 集合 $A=\{x \mid x^2=1\}$, $B=\{x \mid ax=1\}$, 若 $B\subseteq A$, 求实数 a 的值.

解 集合 A 描述的是方程 $x^2=1$ 的根, 即 $A=\{-1,1\}$; 集合 B 描述的是方程 $ax=1$ 的根.

(1) 若 $B=\varnothing$, 即方程 $ax=1$ 无根, 此时 $a=0$.

(2) 若 $B\neq\varnothing$, 即方程 $ax=1$ 有根, 由该方程为一次方程知 $B=\{-1\}$ 或 $\{1\}$, 相应的 $a=-1$ 或 1.

综上所述, $a=-1$, 0 或 1.

注 1.1 (1) 集合的包含关系隐含 "小的集合可能是空集" (如上题中的 B 可能为空集, 需分类讨论).

(2) 关于 x 的一次方程 $ax=b$ 无解的充要条件是 $a=0$ 且 $b\neq 0$; 有解的充要条件是 $a\neq 0$ (为什么?).

例 1.2 (1) "$x\in A$" 是 "$x\in A\cup B$" 的 ___________ 条件;

(2) "x, y 为无理数" 是 "$x+y$ 为无理数" 的 ___________ 条件.

解 (1) 因为 $A\cup B\subseteq A$, 所以 "$x\in A$" 是 "$x\in A\cup B$" 的必要不充分条件.

(2) 若 $x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$, 则 $x+y=0$ 为有理数; 若 $x+y=\sqrt{2}$ 为无理数, 则可能 $x=\sqrt{2}$ 为无理数, $y=0$ 非无理数. 由这两个反例知, "x, y 为无理数" 与 "$x+y$ 为无理数" 没有必然的因果关系, 所以 "x, y 为无理数" 是 "$x+y$ 为无理数" 的既不充分也不必要条件.

注 1.2 (1) 判断两个条件的充分必要性, 一般是看两个条件对应集合的包含关系: 若 $A\subseteq B$, 则 "$x\in A$" 是 "$x\in B$" 的充分不必要条件 (简记为 "小范围为充分的, 大范围为必要的").

(2) 判断两个条件没有充分或必要关系, 也是应该考虑对应集合没有包含关系, 一般是举反例说明. 再举一例. 考虑 "$x+y\geqslant 1$" 与 "$x^2+y^2\geqslant 1$" 的关系. 若 $x+y\geqslant 1$, 不妨取 $x=y=\dfrac{1}{2}$, 则 $x^2+y^2=\dfrac{1}{2}<1$; 若 $x^2+y^2\geqslant 1$, 不妨取 $x=0$, $y=1$, 则 $x+y=-1<1$. 由这两个反例知, "$x+y\geqslant 1$" 是 "$x^2+y^2\geqslant 1$" 的既不充分也不必要条件.

2 2020 年 9 月 22 日答疑记录

例 2.1 已知二次函数 $y=x^2-2ax+1$, 当 $2<x<3$ 时, 函数值 y 随 x 的增大而减小, 求实数 a 的取值范围.

解 $y=x^2-2ax+1$ 的图象为开口向上的抛物线, 对称轴为 $x=-\dfrac{-2a}{2\cdot 1}=a$. 由题意, 当 $2<x<3$ 时, x 在对称轴的左侧, 所以 $3\leqslant a$, 即 $a\in[3,+\infty)$.

注 2.1 (1) 二次函数 $y=Ax^2+Bx+C$ $(A\neq 0)$ 的单调性可以通过观察其图象 (抛物线) 的开口方向 (由 A 的正负号决定) 和对称轴 $x=-\dfrac{B}{2A}$ 的位置得出.

(2) 写二次函数的对称轴时, 只需按照公式的格式写出对应的式子 (见解答第 1 行), 无需明确地写出公式. 如果对称轴容易口算, 也可直接写出, 如本题可直接写 "对称轴为 $x=a$".

例 2.2 对二次函数 $y=x^2-2x+2$, 当 $t\leqslant x\leqslant t+1$ 时, 求函数值 y 的最大值与最小值.

解 $y=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$ 的图象为开口向上的抛物线, 对称轴为 $x=1$. 下面考虑定义域与对称轴的相对位置, 再确定对应函数值的最大 (小) 值.

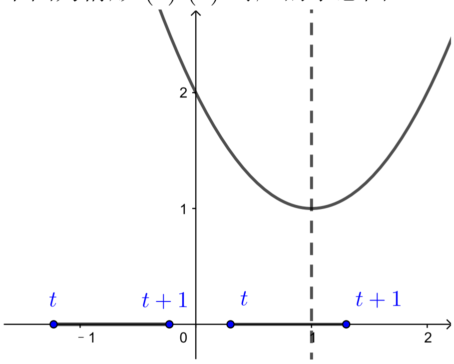
(1) 若 $t+1\leqslant 1$ 即 $t\leqslant 0$, 则当 $x=t$ 时, $y=t^2-2t+2$ 为最大值; 当 $x=t+1$ 时, $y=t^2+1$ 为最小值.

(2) 若 $\frac{t+(t+1)}{2} \leqslant 1 < t+1$ 即 $0 < t \leqslant \frac{1}{2}$, 则当 $x = t$ 时, $y = t^2 - 2t + 2$ 为最大值; 当 $x = 1$ 时, $y = 1$ 为最小值.

(3) 若 $t \leqslant 1 < \frac{t+(t+1)}{2}$ 即 $\frac{1}{2} < t \leqslant 1$, 则当 $x = t+1$ 时, $y = t^2 + 1$ 为最大值; 当 $x = 1$ 时, $y = 1$ 为最小值.

(4) 若 $1 < t$ 即 $t > 1$, 则当 $x = t+1$ 时, $y = t^2 + 1$ 为最大值; 当 $x = t$ 时, $y = t^2 - 2t + 2$ 为最小值.

下图为情形 (1) (2) 对应的示意图:



注 2.2 (1) 除了直接用公式, 二次函数的对称轴也可以通过配方得出, 如解答第 1 行.

(2) 求二次函数部分图像的最大 (小) 值, 需要考虑定义域与对称轴的相对位置, 共四种: 对称轴在定义域右侧 (情形 (1)); 对称轴在定义域内偏右 (情形 (2)); 对称轴在定义域内偏左 (情形 (3)); 对称轴在定义域左侧 (情形 (4)), 其中情形 (2) (3) 均需考虑定义域的中点.

(3) 分类讨论时需注意 “不重不漏”, 且应明确写出参数的范围 (如各种情形的第 1 行).

3　2020 年 9 月 26 日答疑记录

3.1　简单的分式不等式的解法

关于 x 的形如 $\frac{Ax+B}{Cx+D} > (\geqslant)\, 0$ 的分式不等式, 可以利用分子和分母的正负号关系转化为二次不等式来解. 具体地,

$$\frac{Ax+B}{Cx+D} > 0 \Leftrightarrow (Ax+B)(Cx+D) > 0, \tag{3.1}$$

$$\frac{Ax+B}{Cx+D} \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (Ax+B)(Cx+D) \geqslant 0, \\ Cx+D \neq 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

(3.1) 式中右边不用限制分母非零, 因为乘积非零隐含两个因子均非零; 而 (3.2) 式中右边必须限制分母非零, 因为乘积为零隐含两个因子均可能为零.

例 3.1　解下列不等式:

(1) $\frac{x-2}{x-5} > 0$;　　(2) $\frac{x-2}{x-5} \geqslant 0$.

解　(1) 原不等式等价于 $(x-2)(x-5) > 0$, 所以 $x \in (-\infty, 2) \cup (5, +\infty)$.

(2) 原不等式等价于

$$\begin{cases} (x-2)(x-5) \geqslant 0, \\ x-5 \neq 0, \end{cases} \quad \text{解得 } x \in (-\infty, 2] \cup (5, +\infty).$$

解二次不等式时, 需要考虑对应抛物线的图象, 尤其应注意开口方向. 也可以先将不等式各因子化为最高次项系数为正的形式, 然后再根据抛物线的图象写出相应的解集.

例 3.2 解下列不等式:

(1) $\dfrac{2-x}{x-5}>0$; (2) $\dfrac{2-x}{x-5}\geqslant 0$.

解 (1) 原不等式等价于 $(2-x)(x-5)>0$ 即 $(x-2)(x-5)<0$, 所以 $x\in(2,5)$.

(2) 原不等式等价于

$$\begin{cases}(2-x)(x-5)\geqslant 0,\\ x-5\neq 0,\end{cases}\quad \text{解得 } x\in[2,5).$$

关于 x 的形如 $\dfrac{Ax+B}{Cx+D}>(\geqslant)\,E$ 的分式不等式, 也可以改写为

$$\frac{Ax+B}{Cx+D}-E>(\geqslant)\,0\quad \text{即}\quad \frac{Ax+B-E(Cx+D)}{Cx+D}>(\geqslant)\,0,$$

从而化为前面形式的不等式来求解.

例 3.3 解下列不等式:

(1) $\dfrac{2x-3}{x-5}>1$; (2) $\dfrac{2-x}{x-5}\geqslant 2$.

解 (1) 原不等式化为

$$\frac{2x-3}{x-5}-1>0\quad \text{即}\quad \frac{x+2}{x-5}>0,$$

所以等价于 $(x+2)(x-5)>0$, 解得 $x\in(-\infty,-2)\cup(5,+\infty)$.

(2) 原不等式化为

$$\frac{2-x}{x-5}-2\geqslant 0\quad \text{即}\quad \frac{12-3x}{x-5}\geqslant 0,$$

所以等价于

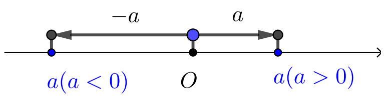
$$\begin{cases}(12-3x)(x-5)\geqslant 0,\\ x-5\neq 0,\end{cases}\quad \text{解得 } x\in[4,5).$$

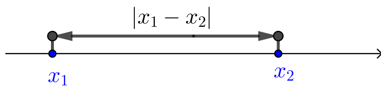
3.2 绝对值的几何意义

实数 a 的绝对值定义为

$$|a|=\begin{cases}a, & a>0,\\ 0, & a=0,\\ -a, & a<0\end{cases}=\begin{cases}a, & a\geqslant 0,\\ -a, & a<0,\end{cases}$$

其几何意义为数轴上坐标为 a 的点到原点的距离. 进而可以知道, 数轴上两点 x_1, x_2 之间的距离为 $|x_1-x_2|$, 如下图所示.

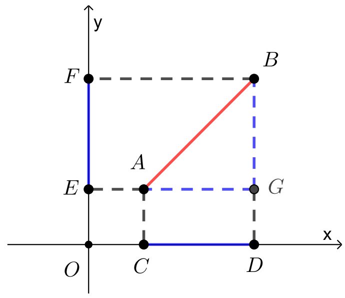




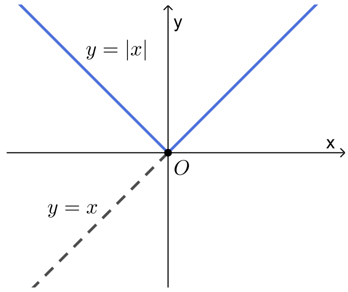
例如, $|x-1|$ 表示点 x 到 1 的距离; $|x+2|=|x-(-2)|$ 表示点 x 到 -2 的距离; $|2x-2|=2|x-1|$ 表示点 x 到 1 的距离的 2 倍; $|4+2x|=2|x-(-2)|$ 表示点 x 到 -2 的距离的 2 倍. 注意, 前面运用了绝对值的运算法则: $|ka|=|k|\,|a|$ (为什么?).

再由勾股定理可知, 平面直角坐标系中两点 $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$ 之间的距离为

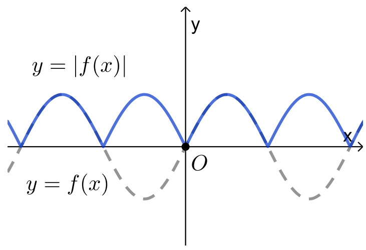
$$\begin{aligned}AB&=\sqrt{CD^2+EF^2}=\sqrt{|x_A-x_B|^2+|y_A-y_B|^2}\\&=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}.\end{aligned}$$



函数 $y=|x|$ 的图象可以通过描点画图或图象变换 (即先画 $y=x$ 的图象, 再把 x 轴下方的部分关于 x 轴对称翻折到 x 轴上方) 得到, 如下图所示:



一般的, $y=|f(x)|$ 的图象可以由 $y=f(x)$ 的图象经过变换得到, 如下图所示:



简单的带绝对值的不等式, 可以根据绝对值的几何意义直接求解. 如不等式 $|x|<3$, 由 $|x|$ 表示点 x 到原点的距离可知, $x\in(-3,3)$; 而由不等式 $|x|\geqslant 3$, 可解得 $x\in(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$.

例 3.4　解下列不等式:

(1) $|x-1|\leqslant 2$;　　(2) $|2x+1|>3$;　　(3) $|1-2x|\geqslant 5$.

解　(1) 由题可将 $x-1$ 视为整体, 则 $-2\leqslant x-1\leqslant 2$, 即 $-1\leqslant x\leqslant 3$, 所以 $x\in[-1,3]$.

(2) 由题, $2x+1<-3$ 或 $2x+1>3$, 即 $x<-2$ 或 $x>1$, 所以 $x\in(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$.

(3) 由题, $1-2x\leqslant -5$ 或 $1-2x\geqslant 5$, 即 $x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant -2$, 所以 $x\in(-\infty,-2]\cup[3,+\infty)$.

稍微复杂一些的带绝对值的不等式, 有的也可以根据绝对值的几何意义来求解. 只含一个绝对值的不等式, 可以按绝对值的几何意义适当讨论; 含两个绝对值的不等式, 讨论起来麻烦一点, 可以先尝试不等式两边平方.

例 3.5　解下列不等式:

(1) $|x+1|<2x$;　　(2) $|x-1|\geqslant 2x$;　　(3) $|2x+1|>|x|$.

解　(1) 由题意,

$$\begin{cases}2x>0,\\ -2x<x+1<2x,\end{cases}\quad \text{解得 } x\in(1,+\infty).$$

(2) 若 $2x \leqslant 0$ 即 $x \leqslant 0$, 则不等式已成立.

若 $2x > 0$ 即 $x > 0$, 则不等式等价于

$$x-1 \leqslant -2x \quad 或 \quad x-1 \geqslant 2x,$$

解得 $x \leqslant \dfrac{1}{3}$ 或 $x \leqslant -1$. 结合 $x > 0$ 知, 此时 $0 < x \leqslant \dfrac{1}{3}$.

综上所述, $x \in \left(-\infty, \dfrac{1}{3}\right]$.

(3) 不等式两边平方得

$$(2x+1)^2 > x^2 \quad 即 \quad (x+1)(3x+1) > 0,$$

解得 $x \in (-\infty, -1) \cup \left(\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$.

4 2020 年 9 月 27 日答疑记录

例 4.1 解关于 x 的不等式 $x^2-(2+a)x+2a<0$.

解 不等式化为 $(x-2)(x-a)<0$, 所以根据二次函数 $y=(x-2)(x-a)$ 的图象知,

若 $a<2$, 则 $x \in (a, 2)$;

若 $a=2$, 则 $x \in \varnothing$;

若 $a>2$, 则 $x \in (2, a)$.

例 4.1 中关于 x 的不等式虽然系数中带了参数 a, 但是仍然可以用因式分解的方法求得其解集. 由于系数中带了参数, 所以对应的二次函数图象由参数决定, 写解集时需要分类讨论, 讨论的主要依据是图象与 x 轴交点的坐标. 再看一个复杂一点的例子.

例 4.2 解关于 x 的不等式:

(1) $x^2+2x+ax+2a>0$; (2) $2x^2+(2+a)x+a \geqslant 0$;

(3) $x^2+ax-6a^2 \leqslant 0$.

解 (1) 不等式化为

$$x^2+(2+a)x+2a>0 \quad 即 \quad (x+2)(x+a)>0,$$

所以根据二次函数 $y=(x+2)(x+a)$ 的图象知,

若 $-a<-2$ 即 $a>2$, 则 $x \in (-\infty, -a) \cup (-2, +\infty)$;

若 $-a=-2$ 即 $a=2$, 则 $x \in \{x \mid x \neq -2\}$;

若 $-a>-2$ 即 $a<2$, 则 $x \in (-\infty, -2) \cup (-a, +\infty)$.

(2) 不等式化为 $(2x+a)(x+1) \geqslant 0$, 所以根据二次函数 $y=(2x+a)(x+1)$ 的图象知,

若 $-\dfrac{a}{2}<-1$ 即 $a>2$, 则 $x \in \left(-\infty, -\dfrac{a}{2}\right] \cup [-1, +\infty)$;

若 $-\dfrac{a}{2}=-1$ 即 $a=2$, 则 $x \in \mathbf{R}$;

若 $-\dfrac{a}{2}>-1$ 即 $a<2$, 则 $x \in (-\infty, -1] \cup \left[-\dfrac{a}{2}, +\infty\right)$.

(3) 不等式化为 $(x+3a)(x-2a) \leqslant 0$, 所以根据二次函数 $y=(x+3a)(x-2a)$ 的图象知,

若 $-3a<2a$ 即 $a>0$, 则 $x \in [-3a, 2a]$;

若 $-3a=2a$ 即 $a=0$, 则 $x \in \{0\}$;

若 $-3a>2a$ 即 $a<0$, 则 $x \in [2a, -3a]$.

从例 4.2 可以看出, 解系数带参数的关于 x 的不等式, 步骤一般为: 把不等式整理为 $Ax^2+Bx+C>0$ 的形式 (建议 $A>0$), 再对二次式因式分解, 接着讨论对应二次方程的根的大小, 最后根据讨论的情况和二次函数图象写出对应的解集.

5 2020 年 9 月 28 日答疑记录

5.1 高次多项式的因式分解

因式分解时一般只需要考虑二次多项式的因式分解, 步骤为: 一提二套三十字, 即先提公因式, 接着套公式 (平方差公式, 完全平方公式); 如果无法套公式, 再考虑十字相乘法.

例 5.1 因式分解:

(1) x^3+x^2-2x; (2) $x^3-x^2y-6xy^2$;

(3) $2x^2-2xy-24y^2$; (4) $x^2+(3y^2-1)x-3y^2$.

解 (1) 原式 $=x(x^2+x-2)=x(x-1)(x+2)$.

(2) 原式 $=x(x^2-xy-6y^2)=x(x+2y)(x-3y)$.

(3) 原式 $=2(x^2-xy-12y^2)=x(x+3y)(x-4y)$.

(3) 原式 $=(x+3y^2)(x-1)$.

复杂一些的高次多项式, 一般也仍用上面的解法, 但有时需要结合整体思想. 注意, 有时可能需要分解多次, 直至不能继续分解.

例 5.2 因式分解:

(1) x^4+x^2-2; (2) $x^4-2x^2y^2-8y^4$;

(3) $4x^4-37x^4y^2+9x^2y^4$; (4) $x^6-2x^3y^2-3y^4$.

解 (1) 把 x^2 看成整体, 则原式为关于 x^2 的二次多项式,

$$\begin{aligned}原式&=(x^2)^2+x^2-2=(x^2-1)(x^2+2)\\&=(x+1)(x-1)(x^2+2).\end{aligned}$$

(2) 把 x^2 和 y^2 看成整体, 则原式为关于 x^2 和 y^2 的二次多项式,

$$\begin{aligned}原式&=(x^2)^2-2x^2y^2-8(y^2)^2=(x^2-4y^2)(x^2+2y^2)\\&=(x+2y)(x-2y)(x^2+2y^2).\end{aligned}$$

(3) 仍用整体思想,

$$\begin{aligned}原式&=x^2[4(x^2)^2-37x^2y^2+9(y^2)^2]\\&=x^2(4x^2-y^2)(x^2-9y^2)\\&=x^2(2x+y)(2x-y)(x+3y)(x-3y).\end{aligned}$$

(4) 把 x^3 和 y^2 看成整体,

$$原式=(x^3)^2-2x^3y^2-3(y^2)^2=(x^3+y^2)(x^3-3y^2).$$

5.2 比较两个式子的大小

比较 a 与 b 的大小一般转化为比较 $a-b$ 与 0 的大小, 即把 “比较两个变量的大小” 转化为 “比较一个变量与定值的大小”, 所以降低了难度. 容易知道,

$$a>b\Leftrightarrow a-b>0,$$

$$a=b\Leftrightarrow a-b=0,$$

$$a<b\Leftrightarrow a-b<0.$$

在比较 $a-b$ 与 0 的大小时, 一般是判断 $a-b$ 的正负号或计算其值域 (求最大值与最小值), 然后与 0 比较. 偶尔也需要将式子适当的变形, 如例 5.3 中的 (4).

例 5.3 比较下列各组式子的大小:

(1) x^2+1, $2x$; (2) x^2+5x+6, $2x^2+3x+9$;

(3) $\dfrac{b}{a}$, $\dfrac{b+m}{a+m}$, 其中 $a>b>0$, $m>0$;

(4) x^2+y^2+1, $2(x+y-1)$.

解 (1) 因为 $x^2+1-2x=(x-1)^2\geqslant 0$, 所以 $x^2+1\geqslant 2x$.

(2) 因为

$$
\begin{aligned}
&2x^2+3x+9-(x^2+5x+6)\\
&=x^2-2x+3=(x-1)^2+2>0,
\end{aligned}
$$

所以 $x^2+5x+6<2x^2+3x+9$.

(3) 因为

$$\frac{b+m}{a+m}-\frac{b}{a}=\frac{a(b+m)-b(a+m)}{a(a+m)}=\frac{m(a-b)}{a(a+m)},$$

由 $a>b>0$, $m>0$ 知 $m(a-b)>0$, $a(a+m)>0$, 所以

$$\frac{b+m}{a+m}-\frac{b}{a}>0,\quad 即\quad \frac{b}{a}<\frac{b+m}{a+m}.$$

(4) 因为

$$
\begin{aligned}
&x^2+y^2+1-2(x+y-1)\\
&=x^2-2x+y^2-2y+3\\
&=(x-1)^2+(y-1)^2+1>0,
\end{aligned}
$$

所以 $x^2+y^2+1>2(x+y-1)$.

6 2020 年 9 月 29 日答疑记录

对于任意 x, $y\in\mathbf{R}$, 恒有 $(x-y)^2\geqslant 0$, 展开后移项得

$$x^2+y^2\geqslant 2xy\quad 即\quad \frac{x^2+y^2}{2}\geqslant xy.$$

不等式中等号成立的条件是 $x=y$, 也记为: “=” 成立当且仅当 $x=y$. 把上面两个式子中的 x 和 y 分别换成 $\sqrt{x}$ 和 $\sqrt{y}$ (此时必须限制 x, $y\geqslant 0$), 可知

$$x+y\geqslant 2\sqrt{xy}\quad 即\quad \frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}.$$

因为 $\dfrac{x+y}{2}$ 与 $\sqrt{xy}$ 分别叫做非负实数 x 与 y 的**算术平均值**与**几何平均值**, 所以上面最后一个不等式也称为**均值不等式**, 即

$$均值不等式: \frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy},\quad x,y\geqslant 0.$$

以上不等式均为常用不等式, 且都可以互相推出.

利用均值不等式 (或其等价形式) 可以很方便地求特殊形式的式子的最大 (小) 值. 例如, 若 $x>0$, 则

$$x+\frac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2,$$

“=” 成立当且仅当 $x=\dfrac{1}{x}$ 即 $x=1$. 一般的, 可得如下结论 (均设 x, $y\geqslant 0$):

(1) 若 $xy=L$ 为定值, 则

$$x+y\geqslant 2\sqrt{xy}=2\sqrt{L},$$

所以 $x+y$ 的最小值为 $2\sqrt{L}$, “=” 成立当且仅当 $x=y=\sqrt{L}$;

(2) 若 $x+y=M$ 为定值, 则

$$\sqrt{xy}\leqslant\frac{x+y}{2}=\frac{M}{2}\quad 即\quad xy\leqslant\left(\frac{M}{2}\right)^2=\frac{M^2}{4},$$

所以 xy 的最大值为 $\dfrac{M^2}{4}$, “=” 成立当且仅当 $x=y=\dfrac{M}{2}$.

例 6.1 解答下列问题:

(1) 若 $x>0$, 求 $x+\dfrac{4}{x}$ 的取值范围;

(2) 若 $x, y\geqslant 0$, $xy=1$, 求 $x+2y$ 的取值范围;

(3) 若 $x, y\geqslant 0$, $2x+y=1$, 求 xy 的取值范围.

解 (1) 由均值不等式,

$$x+\frac{4}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=4,$$

“=” 成立当且仅当 $x=\dfrac{4}{x}$ 即 $x=2$, 所以 $x+\dfrac{4}{x}\in[4,+\infty)$.

(2) 由均值不等式,

$$\frac{2x+y}{2}\geqslant\sqrt{2x\cdot y}\quad 即\quad 2x+y\geqslant 2\sqrt{2},$$

“=” 成立当且仅当 $2x=y$, 结合 $xy=1$ 知 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $y=\sqrt{2}$. 所以 $xy\in[2\sqrt{2},+\infty)$.

(3) 由均值不等式,

$$\sqrt{2x\cdot y}\leqslant\frac{2x+y}{2}\quad 即\quad xy\leqslant\frac{1}{8},$$

“=” 成立当且仅当 $2x=y$, 结合 $2x+y=1$ 知 $x=\dfrac{1}{4}$, $y=\dfrac{1}{2}$. 又因为 $x, y\geqslant 0$, 所以 $xy\geqslant 0$, 即 $xy\in\left[0,\dfrac{1}{4}\right]$.

利用均值不等式求取值范围时, 一般把要求值的式子写在不等号前面, 等于固定值的式子写在不等号后面, 且有时需要适当的变形.

在应用均值不等式时, 必须限制所考虑的式子 (均值不等式中的 x 与 y) 为非负实数, 例如, 对任意的 $x\in\mathbf{R}$, 不能断言 $x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$ (当 $x\leqslant 0$ 时, 不等号显然不成立); 且应考虑等号成立的条件, 例如, 对任意的 $x\geqslant 2$, 不能由 $x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$ 断言 $x+\dfrac{1}{x}\in[2,+\infty)$, 因为此时 “=” 成立的条件 “$x=1$” 与已知条件 $x\geqslant 2$ 冲突 (实际上, 此时 $x+\dfrac{1}{x}\in\left[\dfrac{5}{2},+\infty\right)$, 具体解法以后会学到).

有时, 要求取值范围的式子不能直接用均值不等式, 但可以通过变形化为能用均值不等式的形式.

例 6.2 解答下列问题:

(1) 若 $x>-1$, 求 $x+\dfrac{1}{x+1}$ 的取值范围;

(2) 若 $0<x<4$, 求 $x(8-2x)$ 的取值范围;

(3) 若 $x<0$, 求 $x+\dfrac{1}{x}$ 的取值范围.

解 (1) 由均值不等式,

$$x+\frac{1}{x+1}=(x+1)+\frac{1}{x+1}-1\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x+1}}-1=1,$$

“=” 成立当且仅当 $x+1=\dfrac{1}{x+1}$ 即 $x=0$, 所以 $x+\dfrac{1}{x+1}\in[1,+\infty)$.

(2) 由均值不等式,

$$\sqrt{x(8-2x)} = \sqrt{2}\sqrt{x(4-x)} \leqslant \sqrt{2} \cdot \frac{x+(4-x)}{2} = 2\sqrt{2},$$

即 $x(8-2x) \leqslant 8$, “=” 成立当且仅当 $x = 4 - x$ 即 $x = 2$. 又由 $0 < x < 4$ 和二次函数的性质可知, $x(8-2x)$ 的最小值在定义域端点处取到, 所以 $x(8-2x) \in (0, 8]$. (此题也可以直接用二次函数的性质来解, 即考虑图象的开口方向、对称轴、定义域.)

(3) 因为 $x < 0$, 所以先考虑 $(-x) + \left(-\dfrac{1}{x}\right)$. 由均值不等式,

$$(-x) + \left(-\frac{1}{x}\right) \geqslant 2\sqrt{(-x) \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)} = 2,$$

即 $x + \dfrac{1}{x} \leqslant -2$, “=” 成立当且仅当 $-x = -\dfrac{1}{x}$ 即 $x = -1$ (注意, 此时 $x < 0$), 所以 $x + \dfrac{1}{x} \in (-\infty, -2]$.

从解题过程可以看出, 此时解题的思路是通过适当改变常数项 (如例 6.2 (1)) 或系数 (如例 6.2 (2)(3)), 想办法凑出两个式子, 使它们的积 (如例 6.2 (1)(3)) 或和 (如例 6.2 (2)) 为定值.