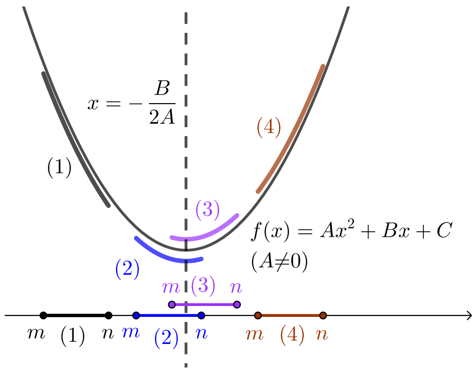
1 2020 年 10 月 2 日答疑记录

1.1 二次函数的值域 (取值范围)

求关于 x 的二次函数 $f(x)=Ax^2+Bx+C$ $(A\neq 0)$ 的值域时需利用定义域 (x 的取值范围) 和单调性 (从左往右观察其图象时, 图象是上升还是下降), 而该函数的单调性可以通过观察其图象 (抛物线) 的开口方向和对称轴的位置得出, 其中由 A 的正负号决定, 对称轴的公式为 $x=-\dfrac{B}{2A}$. 注意, 写对称轴时, 只需按照公式的格式写出对应的式子, 无需明确地写出公式. 如果对称轴容易口算, 也可直接写出, 如函数 $f(x)=x^2-2ax+1$ 的对称轴为 $x=a$.

具体地, 对二次函数 $y=f(x)=Ax^2+Bx+C$ $(A\neq 0)$, 其中 $x\in[m,n]$, 参考下图 (为方便起见, 图中故意将不同定义域对应的函数图象画得与原图象分离)



(仅列出开口向上即 $A>0$ 的情形, 开口向下的情形结论类似)

(1) 若对称轴在定义域右侧, 即 $n\leqslant -\dfrac{B}{2A}$, 则

$$y_{\min}=f(n),\quad y_{\max}=f(m),$$

即 $y\in[f(n),f(m)]$;

(2) 若对称轴在定义域内部偏右, 即 $\dfrac{m+n}{2}\leqslant -\dfrac{B}{2A}<n$, 则

$$y_{\min}=f\left(-\frac{B}{2A}\right),\quad y_{\max}=f(m),$$

即 $y\in\left[f\left(-\dfrac{B}{2A}\right),f(m)\right]$;

(3) 若对称轴在定义域内部偏左, 即 $m\leqslant -\dfrac{B}{2A}<\dfrac{m+n}{2}$, 则

$$y_{\min}=f\left(-\frac{B}{2A}\right),\quad y_{\max}=f(n),$$

即 $y\in\left[f\left(-\dfrac{B}{2A}\right),f(n)\right]$;

(4) 若对称轴在定义域左侧, 即 $-\dfrac{B}{2A}<m$, 则

$$y_{\min}=f(m),\quad y_{\max}=f(n),$$

即 $y\in[f(m),f(n)]$.

讨论时应注意 “不重不漏” (不重复且不遗漏). 实际解题时, 不用写得很详细, 只写主要步骤即可, 见下一小节的例子.

1.2 含参数的二次函数的值域

一般遇到的二次函数值域问题, 有时函数表达式含参数 (代表已知数的字母, 但取值不固定), 有时定义域含参数, 偶尔两者兼有. 无论哪种情形, 都可以用上一小节的结论来解题, 即"看图说话".

例 1.1 已知二次函数 $f(x)=x^2$, $x\in[-1,a)$, 求 $f(x)$ 的值域.

解 由题意, $a>-1$, 故考虑 a 从 -1 开始不断增大时, 定义域与对称轴 $x=0$ 的位置关系.

(1) 若 $-1<a\leqslant 0$, 则 $f(x)\in(f(a),f(-1)]=(a^2,1]$;

(2) 若 $0<a\leqslant 1$, 则 $f(x)\in[f(0),f(-1)]=[0,1]$;

(3) 若 $a>1$, 则 $f(x)\in[f(0),f(a))=[0,a^2)$.

综上所述,

$$f(x)\in\begin{cases}(a^2,1], & a\in(-1,0],\\ [0,1], & a\in(0,1],\\ [0,a^2), & a\in(1,+\infty).\end{cases}$$

注 1.1 (1) 例 1.1 只有上一小节的结论中 (1)—(3), 且容易看出对称轴在定义域正中间的时候, $a=1$, 所以按 $a\in(-1,0]$, $(0,1]$, $(1,+\infty]$ 三种情况讨论.

(2) 最后的结论可以写为分段的形式, 方便查看, 其中大括号后先写值域, 再写参数范围; 也直接罗列 (见例 1.2).

讨论时, 既可以将对称轴视为运动的, 也可以将定义域视为运动的. 一般建议将含参数的部分视为运动的. 在不熟悉解题过程之前, 解题时应画草图帮助思考.

例 1.2 已知二次函数 $f(x)=x^2-2x+2$, $x\in[t,t+1]$, 求 $f(x)$ 的值域.

解 $f(x)$ 的对称轴为 $x=1$, 考虑其与定义域的位置可知

(1) 若 $t+1\leqslant 1$ 即 $t\leqslant 0$, 则

$$f(x)\in[f(t+1),f(t)]=[t^2+1,t^2-2t+2];$$

(2) 若 $\dfrac{t+(t+1)}{2}\leqslant 1<t+1$ 即 $0<t\leqslant\dfrac{1}{2}$, 则

$$f(x)\in[f(1),f(t)]=[1,t^2-2t+2];$$

(3) 若 $t\leqslant 1\leqslant\dfrac{t+(t+1)}{2}$ 即 $\dfrac{1}{2}<t\leqslant 1$, 则

$$f(x)\in[f(1),f(t+1)]=[1,t^2+1];$$

(4) 若 $t>1$, 则

$$f(x)\in[f(t),f(t+1)]=[t^2-2t+2,t^2+1].$$

综上所述, 若 $t\in(-\infty,0]$, 则 $f(x)\in[t^2+1,t^2-2t+2]$;

若 $t\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$, 则 $f(x)\in[1,t^2-2t+2]$;

若 $t\in\left(\dfrac{1}{2},1\right]$, 则 $f(x)\in[1,t^2+1]$;

若 $t\in(1,+\infty)$, 则 $f(x)\in[t^2-2t+2,t^2+1]$.

熟悉以上解题步骤后, 可以直接脑补草图, 并根据对称轴与定义域 (及其中点) 的位置关系写解题过程.

例 1.3 已知二次函数 $f(x)=x^2-2ax-1\ (a\in\mathbf{R})$, $x\in[0,2]$, 求 $f(x)$ 的值域.

解 $f(x)$ 的对称轴为 $x=a$, 故

(1) 若 $a\leqslant 0$, 则

$$f(x)\in[f(0),f(2)]=[-1,3-4a];$$

(2) 若 $0<a\leqslant 1$, 则

$$f(x)\in[f(a),f(2)]=[-a^2-1,3-4a];$$

(3) 若 $1<a\leqslant 2$, 则

$$f(x)\in[f(a),f(0)]=[-a^2-1,-1];$$

(4) 若 $a>2$, 则

$$f(x)\in[f(2),f(0)]=[3-4a,-1].$$

综上所述,

$$f(x)\in\begin{cases}[-1,3-4a], & a\in(-\infty,0],\\ [-a^2-1,3-4a], & a\in(0,1],\\ [-a^2-1,-1], & a\in(1,2],\\ [3-4a,-1], & a\in(2,+\infty).\end{cases}$$

2 2020 年 10 月 4 日答疑记录

2.1 二次函数的图象

例 2.1 已知二次函数 $y=ax^2+bx+10$ 当 $x=3$ 时的函数值与当 $x=2017$ 时的函数值相等, 求当 $x=2020$ 时的函数值.

解 由题意, 函数图象的对称轴 $x=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{3+2017}{2}=2010$.

方法一: 上式化为 $b=-2020a$, 所以当 $x=2020$ 时,

$$\begin{aligned}y&=a\cdot 2020^2+b\cdot 2020+10\\&=a\cdot 2020^2-2020a\cdot 2020+10=10.\end{aligned}$$

方法二: 画草图易知, 点 $x=2020$ 关于对称轴 $x=1010$ 的对称点为 $x=0$, 此时函数值为二次函数的常数项, 即 0.

例 2.2 已知抛物线 $y=(x-c)(x-d)-4$ 与 x 轴的交点为 $(6,0)$ 和 $(1,0)$, 求 c, d 的值.

解 方法一: 由已知可直接写出抛物线的两根式为

$$y=(x-6)(x-1),$$

所以

$$(x-c)(x-d)-4=(x-6)(x-1)$$

即

$$(x-c)(x-d)=x^2-7x+10=(x-2)(x-5),$$

所以 $c=2$, $d=5$ 或 $c=5$, $d=2$.

方法二: 将点 $(6,0)$ 和 $(1,0)$ 的坐标代入抛物线表达式,

$$\begin{cases}(6-c)(6-d)-4=0,\\(1-c)(1-d)-4=0,\end{cases}\quad 即\quad\begin{cases}c+d=7,\\cd=10,\end{cases}$$

所以 $c=2$, $d=5$ 或 $c=5$, $d=2$.

2.2 二次不等式恒成立

例 2.3 如果 $kx^2-2x+6k<0$ $(k\neq 0)$ 的解集为全体实数, 求 k 的取值范围.

解 题意表明对应的抛物线恒在 x 轴下方, 所以

$$\begin{cases} k<0, \\ \Delta=(-2)^2-4k\cdot 6k<0, \end{cases} \quad \text{解得} \quad k<-\frac{\sqrt{6}}{6},$$

即 $k\in\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$.

关于 x 的形如 $Ax^2+Bx+C>0$ 的不等式恒成立问题, 解题步骤如下:

(1) (**重要步骤**) 确认不等式的次数, 即考虑二次项系数 A 是否为 0;

(2) 若 $A=0$, 则不等式化为一次不等式 $Bx+C>0$, 它恒成立的充要条件是

$$B=0 \text{ 且 } C>0;$$

(3) 若 $A\neq 0$, 则不等式为二次不等式, 它恒成立的充要条件是

$$A>0 \text{ 且 } \Delta=B^2-4AC<0.$$

(4) 综合 (2)(3) 中的取值范围 (取并集).

注意, 如果已知的不等式为 $Ax^2+Bx+C\geqslant(<,\leqslant)0$, 则上述解题步骤应相应调整.

例 2.4 如果不等式 $(a-2)x^2+2(a-2)x-4<0$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

解 (1) 若 $a-2=0$ 即 $a=2$, 不等式化为 $-4<0$, 恒成立.

(2) 若 $a-2\neq 0$ 即 $a\neq 2$, 不等式为二次不等式, 所以

$$\begin{cases} a-2<0, \\ \Delta=[2(a-2)]^2-4(a-2)(-4)<0, \end{cases} \quad \text{解得} \quad -2<a<2,$$

即 $a\in(-2,2)$.

综上所述, 所求 a 的取值范围是 $(-2,2]$.

例 2.5 若不等式 $\dfrac{2x^2+2kx+k}{4x^2+6x+3}<1$ 对于一切实数 x 都成立, 求实数 k 的取值范围.

解 因为分母的判别式 $6^2-4\cdot 4\cdot 3<0$ 且二次项系数 $4>0$, 所以分母恒正, 不等式化为 $2x^2+(6-2k)x+(3-k)>0$, 则

$$\Delta=(6-2k)^2-4\cdot 2(3-k)<0, \quad \text{解得} \quad 1<k<3,$$

即 $k\in(1,3)$.

例 2.5 中分母恒正也可以通过配方确定:

$$4x^2+6x+3=4\left(x^2+\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}\right)=4\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{3}{16}\right].$$

2.3 二次方程根的分布 (选学)

例 2.6 若方程 $2(m+1)x^2+4mx+3m-2=0$ 有两个负实根, 求实数 m 的取值范围.

解 由题意, 已知的方程为二次方程, 即 $2(m+1)\neq 0$. 设方程的两根为 x_1, x_2, 则这两个根均为负数的充要条件是

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{4m}{2(m+1)}<0, \\ x_1x_2=\dfrac{3m-2}{2(m+1)}>0, \end{cases} \quad \text{解得} \quad m<-1 \text{ 或 } m>\frac{2}{3},$$

所求的 m 的取值范围是 $(-\infty,-1)\cup\left(\dfrac{2}{3},+\infty\right)$.

设关于 x 的二次方程 $Ax^2+Bx+C=0$ $(A\neq 0)$ 的两根为 x_1, x_2, 则有以下结论 (为什么?):

(1) 两根为正的充要条件是

$$\begin{cases} x_1+x_2>0, \\ x_1x_2>0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} -\dfrac{B}{A}>0, \\ \dfrac{C}{A}>0; \end{cases}$$

(2) 两根为负的充要条件是

$$\begin{cases} x_1+x_2<0, \\ x_1x_2>0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} -\dfrac{B}{A}<0, \\ \dfrac{C}{A}>0; \end{cases}$$

(3) 两根一正一负的充要条件是

$$x_1x_2<0 \quad \text{即} \quad \frac{C}{A}<0.$$

3　2020 年 10 月 6 日答疑记录

3.1　集合的子集的个数

例 3.1　已知集合 $A=\{0,1,2\}$, 求 A 的非空子集的个数.

解　A 的子集是从 A 中取一些元素构成的集合, 可以不取 (对应空集 $\varnothing$), 也可以全取 (对应 A 本身). 因为 0, 1, 2 都有 “取” 或 “不取” 两种选择, 所以 A 的子集共有 $2\times2\times2=2^3$ 种可能. 非空子集不包括空集 $\varnothing$, 所以共有 $2^3-1=7$ 种可能.

例 3.1 中的结论可以一般化:

定理 3.1　若 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 是含 n 个元素的集合, 则 A 有 2^n 个子集, (2^n-1) 个非空子集 (不含空集 $\varnothing$), (2^n-1) 个真子集 (不含 A 本身), (2^n-2) 个非空真子集 (不含 A 本身和空集 $\varnothing$).

其他类型的子集个数的问题, 可以考虑先转化为能利用该结论来解答的形式.

例 3.2　已知集合 M 满足 $\{1,2\}\subseteq M\subseteq\{1,2,3,4,5\}$, 求这样的 M 的个数.

解　由题意, M 中必含 1, 2, 所以只需考虑 M 中是否含有 3, 4, 5. 易知此时 M 有 $2^3=8$ 种可能.

在例 3.2 中若已知 $\{1,2\}\subset M\subseteq\{1,2,3,4,5\}$, 或 $\{1,2\}\subseteq M\subset\{1,2,3,4,5\}$, 则所求 M 的个数均为 $2^3-1=7$ 个; 若已知 $\{1,2\}\subset M\subset\{1,2,3,4,5\}$, 则所求 M 的个数均为 $2^3-2=6$ 个.

3.2　集合的包含关系

例 3.3　已知集合 $A=\{-1,1\}$, $B=\{x\mid mx=1\}$, 且 $B\subseteq A$, 求实数 m 的值.

解　集合 B 表示关于 x 的方程 $mx=1$ 的解集, 而该方程至多只有一个解 (为什么?). 因为 $B\subseteq A$, 所以 $B=\varnothing$, $\{-1\}$ 或 $\{1\}$, 对应的, $m=0$, -1 或 1.

在解集合的包含关系的问题 (如例 3.3) 时, 除了要考虑集合本身的含义 (如该例中 B 表示一元一次方程的解集), 务必注意子集 (该例中的 B) 可能是空集.

例 3.4 已知集合 $A=\{1,3,m\}$, $B=\{3,m^2\}$, 若 $B\subsetneqq A$, 求实数 m 的值.

解 由题意, B 中的 m^2 是 A 中的元素, 且不为 3.

(1) 若 $m^2=1$, 则 $m=\pm 1$. 当 $m=1$ 时, $A=\{1,3,1\}$, 不符合集合的定义 (不满足互异性); 当 $m=-1$ 时, $A=\{1,3,-1\}$, $B=\{3,1\}$, 符合题意.

(2) 若 $m^2=m$, 则 $m=1$ 或 0, 且 $m=1$ 已符合题意. 当 $m=0$ 时, $A=\{1,3,0\}$, $B=\{3,0\}$, 也符合题意.

综上所述, $m=0$ 或 1.

解含参数 (如例 3.4 中的 m) 的集合包含问题, 需要根据集合的相关定义讨论, 算出参数的值之后, **必须回代检验**, 即检查是否满足题中的包含关系, 以及是否符合集合的定义 (互异性及无序性).

例 3.5 设 $A=\{x\mid x^2-5x+6=0\}$, $B=\{x\mid ax-1=0\}$. 若 $B\subsetneqq A$, 求实数 a 的取值集合.

解 显然 $A=\{2,3\}$, B 表示关于 x 的方程 $ax-1=0$ 的解集, 该方程至多有一个解. 由 $B\subsetneqq A$ 知, $B=\varnothing$, $\{2\}$ 或 $\{3\}$.

若 $B=\varnothing$, 则 $a=0$; 若 $B=\{2\}$, 则 $a=\dfrac{1}{2}$; 若 $B=\{3\}$, 则 $a=\dfrac{1}{3}$. 所以 a 的取值集合为 $\left\{0,\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right\}$.

4 2020 年 10 月 11 日答疑记录

此次答疑为月考试卷部分习题解析, 个别题的叙述略有改变. 为方便起见, 略去了一些图示, 可自行补画草图.

例 4.1 若 $a>b$, 则 ( ).

A. $\sqrt[3]{a}>\sqrt[3]{b}$ B. $\sqrt{a}>\sqrt{b}$ C. $a^3>b^2$ D. $a^2>b^3$

解 (1) 由 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ $(x\in\mathbf{R})$ 的函数图象 (可通过描点作图得到) 知, $f(x)$ 为增函数, 所以 $a>b\Leftrightarrow\sqrt[3]{a}>\sqrt[3]{b}$.

(2) 函数 $g(x)=\sqrt{x}$ 也为增函数, 但其定义域为 $[0,+\infty)$ (非负实数), 所以当 $a>b$ 时, a, b 不一定在定义域内, 不能得出 $\sqrt{a}>\sqrt{b}$.

(3) 取 $a=-1$, $b=-2$ 可知, 此时 $a>b$, 但 $a^3=-1<4=b^2$.

(4) 取 $a=4$, $b=3$ 可知, 此时 $a>b$, 但 $a^2=16<27=b^3$. (也可以这样理解: 对于比较大的正数, 其三次方的增长速度比其二次方的增长速度要快得多, 所以较小正数的三次方也能大于较大正数的二次方.)

例 4.2 设 $a\in\mathbf{R}$ 且 $a\neq 0$, 则四个数 a^3+1, a^4-a^2+2, $a+\dfrac{1}{a}$, $a^2+\dfrac{1}{a^2}$ 中, 恒大于 1 的数有哪些?

解 由 $f(x)=x^3+1$ 的图象 (可由 $g(x)=x^3$ 的图象向上平移一个单位长度得到) 可知, 其值域为 $\mathbf{R}$, 所以 $a^3+1=f(a)\in\mathbf{R}$, 不恒大于 1.

因为

$$a^4-a^2+2=\left(a^2-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{4}\geqslant\frac{7}{4},$$

所以 a^4-a^2+2 恒大于 1.

由均值不等式的等价形式 $x+y \geqslant 2\sqrt{xy}$ $(x, y \geqslant 0)$ 知, 当 $a>0$ 时, $a+\dfrac{1}{a} \geqslant 2$; 当 $a<0$ 时, $a+\dfrac{1}{a} \leqslant -2$, 所以 $a+\dfrac{1}{a}$ 不恒大于 1.

同理可知, $a^2+\dfrac{1}{a^2} \geqslant 2$ (注意, $a^2>0$).

恒成立问题基本都应该转化为值域问题来解决, 对于不同的题型, 有相应的快速解法: 二次函数应先考虑对称轴和开口方向, 简单的题也可以直接配方 (如例 4.2 中的 a^4-a^2+2 可视为 a^2 的二次函数); 形如 $x+\dfrac{k}{x}$ (常数 $k>0$) 的式子, 优先考虑均值不等式 (需注意检验等号成立的条件, 该例中暂时略掉了).

例 4.3　某房地产公司计划出租 70 套相同的公寓，当每套公寓月租金定为 3000 元时, 这 70 套公寓能全租出去; 当月租金每增加 50 元时 (设月租金为 50 元的整数倍), 就会多一套公寓不能出租. 设已出租的每套公寓当月需要花费 100 元的日常维修等费用 (设未出租的公寓不需要花这笔费用). 要使公司获得最大利润, 每套公寓月租金应定为多少元?

解　由题意可设租金应在 3000 元的基础上增加 x 个 50 元, 此时租金为 $(3000+50x)$ 元, 出租 $(70-x)$ 套公寓. 再记出租公寓的月收入为 y 元, 则

$$y=(3000+50x-100)(70-x)=50(x+58)(70-x).$$

上式为二次函数的两根式且图象开口向上, 对称轴为 $x=\dfrac{-58+70}{2}=6$, 所以每套公寓月租金应定为 $3000+50\cdot 6=3300$ 元.

答　每套公寓月租金应定为 3300 元.

例 4.4　条件 “$a=-1$” 是 “函数 $y=ax^2+2x-1$ 的图象与 x 轴只有一个交点” 的什么条件?

解　对函数 $y=ax^2+2x-1$,

若 $a=0$, 则其为一次函数, 图象与 x 轴只有一个交点;

若 $a \neq 0$, 则其为二次函数, 只需 $\Delta=2^2-4a\cdot(-1)=0$, 解得 $a=-1$. 反之, 容易验证当 $a=0$ 或 -1 时, 函数 $y=ax^2+2x-1$ 的图象与 x 轴只有一个交点.

所以条件 “$a=-1$” 是 “函数 $y=ax^2+2x-1$ 的图象与 x 轴只有一个交点” 的充分不必要条件.

判断充要性 (充分条件、必要条件) 的问题, 仍然是先考虑参数 (例 4.4 中的 a) 的取值范围. 解该例还需注意, 形如 $f(x)=Ax^2+Bx+C$ 的函数, **必须**先考虑 A 是否为零, 即要先判断该函数到底是一次函数还是二次函数.

例 4.5　使不等式 $1+\dfrac{1}{x}>0$ 成立的一个充分不必要条件是 (　　).

A. $x>2$　　B. $x>0$

C. $x<-1$ 或 $x>1$　　D. $-1<x<0$

解　不等式 $1+\dfrac{1}{x}>0$ 化为

$$\frac{1+x}{x}>0 \quad 即 \quad (1+x)x>0,$$

也就是 $x<-1$ 或 $x>0$. 该条件的充分不必要条件中 x 的范围应更小一些, 结合数轴表示范围, 选项中 A, B, C 符合题意.

例 4.6 下列命题中是假命题的有 (　　).

A. $|x|^2+|x|-2=0$ 有四个实数解

B. 若函数 $y=x^2-2ax+1$ 当 $2<x<3$ 时为增函数, 则 $a>2$

C. 若 $x^2-3x+2\neq 0$, 则 $x\neq 2$

D. 若 $x\in\mathbf{R}$, 则函数 $y=\sqrt{x^2+4}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ 的最小值为 2

解 对 A, 方程为 $(|x|+2)(|x|-1)=0$, 则 $|x|=-2$ (舍) 或 1, 所以 $x=\pm1$, 原方程只有两个实数解.

对 B, 可知函数图象的对称轴 $x=a$ 在定义域 $(2,3)$ 左侧, 故 $a\leqslant 2$.

对 C, 不等式化为 $(x-1)(x-2)\neq 0$, 所以 $x\neq 1$ **且** $x\neq 2$.

对 D, 由均值不等式, $y\geqslant 2$. 但等号成立的条件是

$$\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\quad 即\quad x^2+4=1\ (无解),$$

说明前述等号无法成立, 即只能判断 $y>2$. (可以证明, 此时 $y\geqslant\dfrac{5}{2}$, 即最小值为 $\dfrac{5}{2}$, 等号成立当且仅当 $x=0$.)

例 4.7 已知某二次函数满足: 当 $x=2$ 时, $y=-1$; 当 $x=-1$ 时, $y=-1$, 且最大值为 8, 求此二次函数的解析式.

解 方法一 (通用解法): 设此二次函数的解析式为 $f(x)=Ax^2+Bx+C$. 由题意, $f(2)=f(-1)=-1$, $A<0$ 且顶点纵坐标 $\dfrac{4AC-B^2}{4A}=8$. 解前述方程可得答案.

方法二 (特殊解法): 由题意, 点 $(2,-1)$, $(-1,-1)$ 均在二次函数图象上, 而这两个点纵坐标相同, 所以图象的对称轴为 $x=\dfrac{2+(-1)}{2}=\dfrac{1}{2}$. 再由二次函数最大值为 8, 可直接设顶点式 $f(x)=A\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+8$, 再把点 $(2,-1)$ 代入, 可解得 A 的值.

例 4.8 已知二次函数 $y=-x^2+2ax+1-a$ 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时有最大值 2, 求 a 的值.

解 函数 $y=-x^2+2ax+1-a$ 图象的对称轴为 $x=a$, 且开口向下.

(1) 当 $a\leqslant 0$ 时, $y_{\max}=y(0)$ 即 $2=1-a$, 解得 $a=-1$.

(2) 当 $0<a\leqslant 1$ 时, $y_{\max}=y(a)$ 即 $2=a^2+1-a$, 解得 $a=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. 因为 $\sqrt{5}\approx 2.236$, 所以 $a\approx 0.618$ 或 -1.618. 由 $0<a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 知, $a=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

(3) 当 $a>1$ 时, $y_{\max}=y(1)$ 即 $2=a$, 所以 $a=2$.

综上所述, $a=-1$, $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 或 2.

注 4.1 (1) 一般二次函数的值域讨论, 有四种情形. 但例 4.8 中只考虑最大值, 且图象开口向下, 所以可以精简为三种情形 (轴在定义域内的两种情形并为一种).

(2) 建议记住三个常用的算术平方根的近似值: $\sqrt{2}\approx 1.414$, $\sqrt{3}\approx 1.732$, $\sqrt{5}\approx 2.236$. 如果未记住 $\sqrt{5}$ 的近似值, 也可估计 $\sqrt{5}\in(2,3)$, 然后对所的式子进一步估值 (如例 4.8 (2) 中的式子).

例 4.9 设二次函数 $y=\dfrac{1}{2}x^2-x-\dfrac{1}{2}$, 若当 $-1\leqslant x\leqslant m$ 时, $-1\leqslant y\leqslant m$, 求 m 的值.

解 函数 $y=\dfrac{1}{2}x^2-x-\dfrac{1}{2}$ 图象开口向上, 对称轴为 $x=1$. 由题意, $m\geqslant -1$.

方法一: (1) 当 $-1\leqslant m\leqslant 1$ 时,

$$\begin{cases} y_{\min}=y(m), \\ y_{\max}=y(-1), \end{cases}\quad 即\ \begin{cases} -1=\dfrac{1}{2}m^2-m-\dfrac{1}{2}, \\ m=1, \end{cases}$$

解得 $m=1$.

(2) 当 $1<m\leqslant 3$ 时,

$$\begin{cases} y_{\min}=y(1), \\ y_{\max}=y(-1), \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} -1=-1, \\ m=1, \end{cases}$$

解得 $m=1$ (舍).

(3) 当 $m>3$ 时,

$$\begin{cases} y_{\min}=y(1), \\ y_{\max}=y(m), \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} -1=-1, \\ m=\frac{1}{2}m^2-m-\frac{1}{2}, \end{cases}$$

解得 $m=2\pm\sqrt{3}$. 由 $m>3$ 知 $m=2+\sqrt{3}$.

综上所述, $m=1$ 或 $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$.

方法二: 因为

$$y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(x-1)^2-1,$$

所以由 $-1\leqslant y\leqslant m$ 知 $m\geqslant 1$. 可以只讨论 $1\leqslant m\leqslant 3$ 和 $m>3$ 两种情形. 具体计算同方法一.

例 4.9 仍为常见的求值域问题, 只需注意将定义域与对应的值域和题中的范围对比.

5 2020 年 10 月 14 日答疑记录

本次答疑主要讲解均值不等式及其应用, 2020 年 9 月 29 日答疑记录中已有该不等式的详细推导过程, 这里仅罗列相关结论:

$$\begin{aligned} \text{均值不等式: } & \frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}, \quad x,y\geqslant 0, \\ \text{其等价形式: } & x+y\geqslant 2\sqrt{xy}, \quad x,y\geqslant 0, \\ & \frac{x^2+y^2}{2}\geqslant xy, \quad x,y\in\mathbf{R}. \\ & x^2+y^2\geqslant 2xy, \quad x,y\in\mathbf{R}. \end{aligned}$$

式中 “=” 成立当且仅当 $x=y$. 此外, 如下结论 (均设 x, $y\geqslant 0$):

(1) 若 $xy=L$ 为定值, 则 $x+y$ 的最小值为 $2\sqrt{L}$, “=” 成立当且仅当 $x=y=\sqrt{L}$;

(2) 若 $x+y=M$ 为定值, 则 xy 的最大值为 $\dfrac{M^2}{4}$, “=” 成立当且仅当 $x=y=\dfrac{M}{2}$.

用均值不等式解题时, 应想办法凑出两个式子, 使它们的积或和为定值, 如对 $x>-1$,

$$x+\frac{1}{1+x}=(1+x)+\frac{1}{1+x}-1\geqslant 2\sqrt{1}-1=1.$$

除了应注意式中字母的范围 (是非负还是任意实数), 还应检验等号成立的条件, 如对 $x>2$, 虽然由均值不等式知 $x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$, 但等号成立当且仅当 $x=\dfrac{1}{x}$ 即 $x=1$, 与 $x>2$ 不符, 所以只能写 $x+\dfrac{1}{x}>2$.

例 5.1 若 a, $b\in\mathbf{R}$ 且 $ab>0$, 则下列不等式恒成立的是 ( ).

A. $a^2+b^2>2ab$　　B. $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$

C. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{2}{\sqrt{ab}}$　　D. $\dfrac{b}{a}+\dfrac{b}{a}\geqslant 2$

解 若只对这四个选项简单地套用均值不等式, 可能会错误地认为全都正确. 但如果仔细检查不等式成立的前提, 可发现其中有三个选项是错的.

对 A, 当 $a=b$ 时, $a^2+b^2=2ab$, 所以 A 不正确.

对 B, 只有 $a, b\geqslant 0$ 时, 原不等式才正确, 而题中的 $ab>0$ 可能有 $a, b<0$, 无法用均值不等式.

对 C, 当 $a=b>0$ 时, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{2}{\sqrt{ab}}$, 所以 C 不正确. 此外, 题中的 $ab>0$ 可能有 a, $b<0$, 无法用均值不等式.

对 D, 由 $ab>0$ 知 $\dfrac{b}{a}, \dfrac{a}{b}>0$, 所以可用均值不等式得出结论.

例 5.2 条件 “$x>0$” 是 “$x^2+\dfrac{1}{x^2}\geqslant 2$” 的什么条件?

解 因为 x^2 恒非负, 所以只要 $x^2\neq 0$, 就有 $x^2>0$, 此时 $x^2+\dfrac{1}{x^2}\geqslant 2$. 这表明 $x^2+\dfrac{1}{x^2}\geqslant 2$ 的充要条件是 $x\neq 0$. 再与 $x>0$ 对比可知, “$x>0$” 是 “$x^2+\dfrac{1}{x^2}\geqslant 2$” 的充分不必要条件.

例 5.3 若函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x-2}$ $(x>2)$ 在 $x=a$ 处取最小值, 求 a 的值.

解 由 $x>2$ 知 $x-2>0$, 所以

$$x+\frac{1}{x-2}=(x-2)+\frac{1}{x-2}+2\geqslant 2\sqrt{1}+2=4,$$

等号成立当且仅当 $x-2=\dfrac{1}{x-2}$ 即 $x=3$ (注意 $x>2$). 故所求的 $a=3$.

例 5.4 若 $x, y\in\mathbf{R}^+$ 且 $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}=1$, 求 xy 的最大值.

解 由均值不等式,

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\geqslant 2\sqrt{\frac{xy}{12}},\quad \text{即}\quad 1\geqslant 2\sqrt{\frac{xy}{12}},$$

解得 $xy\leqslant 3$, 所以 xy 的最大值为 3.

6 2020 年 10 月 19 日答疑记录

本次答疑主要讲解常见的定义域的求法. 如果没有特殊说明, 函数的定义域是使函数的表达式有意义的自变量的取值范围. 现阶段常见的表达式对其中的变量限制如下:

$$\text{二次根式 } \sqrt{x}\text{: 被开方数非负, 即 } x\geqslant 0;$$

$$\text{分式 } \frac{1}{x}\text{: 分母不为零, 即 } x\neq 0;$$

$$\text{零次式 } x^0\text{: 底数不为零, 即 } x\neq 0,$$

其中的零次式 x^0 定义为 $\dfrac{x}{x}$, 所以需要限制 $x\neq 0$. 这些限制可以组合使用, 如对 $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, 应限制

$$\begin{cases}\sqrt{x}\neq 0 & \text{(分母不为零)},\\ x\geqslant 0 & \text{(被开方数非负)},\end{cases}\qquad \text{解得}\quad x>0.$$

上述结论可以直接使用. 类似地, 对 $\sqrt{\dfrac{1}{x}}$, 同样应限制 $x>0$.

例 6.1 求下列函数的定义域:

(1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-3}}{|x+1|-5}$; (2) $f(x)=\dfrac{(x+1)^0}{|x|-x}$;

(3) $f(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{x}}$.

解 (1) 由题意,

$$\begin{cases}x-3\geqslant 0,\\|x+1|-5\neq 0,\end{cases}\quad \text{解得}\quad x\geqslant 3 \text{ 且 } x\neq 4,$$

所求定义域为 $[3,4)\cup(4,+\infty)$.

(2) 由题意,

$$\begin{cases}x+1\neq 0,\\|x|-x\neq 0,\end{cases}\quad \text{解得}\quad x<0 \text{ 且 } x\neq -1,$$

所求定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$.

(3) 由题意,

$$\begin{cases}1+\dfrac{2}{x}\neq 0,\\x\neq 0,\end{cases}\quad \text{解得}\quad x\neq 0 \text{ 且 } x\neq -2,$$

所求定义域为 $(-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(0,+\infty)$.

例 6.1 的 (2) 中, 由 $|x|-x\neq 0$ 可得 $x<0$, 因为此时 $|x|\neq x$ 只在 $x<0$ 时才成立.

对于其他问题, 需要根据题意对自变量增加更多的限制, 例如三角形三边中任意两边之和大于第三边; 在实际问题中, 人数只能为非负整数, 等等.

在求抽象函数 (无具体表达式) 的定义域时, 需要注意函数的作用范围和定义域的区别. 函数是一个数集到另一个数集的对应关系, 前一个数集就是函数的作用范围, 不随表达式的变化而变化.

例如, 对定义在 $(0,2)$ 上的函数 $f(x)$, 其定义域和作用范围均为 $(0,2)$ (两者相同). 再考虑 $f(2x)$, 此时函数 f 的作用范围仍为 $(0,2)$ 且 f 作用在 $2x$ 上, 所以 $2x$ 应在作用范围内, 即满足 $2x\in(0,2)$, 解得 $x\in(0,1)$, 表明 $f(2x)$ 的定义域 (即 x 的取值范围) 为 $(0,1)$ (与作用范围不同). 注意, 这里 $f(x)$ 和 $f(2x)$ 中的 x 含义不同, 其取值范围分别是对应函数的定义域.

再如, 对定义在 $(0,2)$ 上的函数 $g(x+1)$, 其定义域 (即 x 的取值范围) 是 $(0,2)$, 但函数 g 作用在 $x+1$ 上, 由 $x+1\in(1,3)$ 知其作用范围为 $(1,3)$ (与定义域不同). 再考虑 $g(x)$, 此时 g 作用在 x 上, 所以 x 应在作用范围内, 即满足 $x\in(1,3)$, 表明 $g(x)$ 的定义域为 $(1,3)$ (与作用范围相同).

以上两个例子说明, 函数 $f(x)$ 的定义域与作用范围相同, 而函数 $f(ax+b)$ 的定义域与作用范围一般不同, 但是两个 f 的作用范围相同, 即 $f(x)$ 中的 x 与 $f(ax+b)$ 中的 $ax+b$ 都在同一取值范围内. 解题时**只需关注函数的作用范围不变即可** (即先求出该范围), 并注意定义域是当前表达式中 x 的取值范围, 解题过程可适当简化.

例 6.2 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1)$, 求 $f(2x)$ 的定义域和 $f(x+3)$ 的定义域.

解 对 $f(2x)$, 由已知 $2x\in[0,1)$, 所以 $x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right)$, 即 $f(x)$ 的定义域为 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right)$.

而对 $f(x+3)$, 有 $x+3\in[0,1)$, 所以 $x\in[-3,-2)$, 即 $f(x+3)$ 的定义域为 $[-3,-2)$.

例 6.3 已知函数 $f(2x)$ 的定义域为 $[0,1)$, 求 $f(x)$ 的定义域和 $f(x+3)$ 的定义域.

解 对 $f(2x)$, 由已知 $x\in[0,1)$, 所以 $2x\in[0,2)$, 即 $f(x)$ 的定义域为 $[0,2)$.

而对 $f(x+3)$, 有 $x+3\in[0,2)$, 所以 $x\in[-3,-1)$, 即 $f(x+3)$ 的定义域为 $[-3,-1)$.

例 6.4 *已知函数 $f(x+3)$ 的定义域为 $[0,1)$, 求 $f(x)$ 的定义域和 $f(2x)$ 的定义域.*

解 对 $f(x+3)$, 由已知 $x\in[0,1)$, 所以 $x+3\in[3,4)$, 即 $f(x)$ 的定义域为 $[3,4)$.

而对 $f(2x)$, 有 $2x\in[3,4)$, 所以 $x\in\left[\dfrac{3}{2},2\right)$, 即 $f(x+3)$ 的定义域为 $\left[\dfrac{3}{2},2\right)$.

7 2020 年 10 月 21 日答疑记录

7.1 求已知类型的函数解析式

当函数的类型已知时, 用待定系数法来解, 即只需按题意设函数解析式, 并写出其中的系数满足的条件, 再解相应的方程组即可.

例 7.1 *已知 $f(x)$ 是一次函数,*

$$\begin{cases}2f(1)+3f(2)=5,\\ 2f(-1)-f(0)=-1,\end{cases}$$

求 $f(x)$ 的解析式.

解 因为 $f(x)$ 是一次函数, 所以可以设 $f(x)=kx+b$ $(k\neq 0)$. 由题意,

$$\begin{cases}2(k+b)+3(2k+b)=5,\\ 2(-k+b)-b=-1,\end{cases}\quad \text{解得}\ \begin{cases}k=\dfrac{5}{9},\\ b=\dfrac{1}{9},\end{cases}$$

所以 $f(x)=\dfrac{5}{9}x+\dfrac{1}{9}$.

解例 7.1 时应注意, 为使 $f(x)$ 为一次函数, 其解析式的一次项系数非零, 即解题过程中的 $k\neq 0$. 若 $f(x)$ 为二次函数, 也应注意其解析式的二次项系数非零. 其他形式可以类推.

例 7.2 *已知 $f(x)$ 为二次函数, $f(0)=1$, $f(x+1)=f(x)+2x$, 求 $f(x)$ 的解析式.*

解 由 $f(x)$ 为一元二次函数和 $f(0)=1$ 可设

$$f(x)=ax^2+bx+1\quad(a\neq 0),$$

再代入 $f(x+1)=f(x)+2x$ 可得

$$a(x+1)^2+b(x+1)+1=(ax^2+bx+1)+2x,$$

即 $2ax+a+b=2x$, 所以

$$\begin{cases}2a=2,\\ a+b=0,\end{cases}\quad \text{解得}\ \begin{cases}a=1,\\ b=-1,\end{cases}$$

即 $f(x)=x^2-x+1$.

在解例 7.2 时, 设出解析式之后, 因为要确定两个系数 a, b, 所以也可以根据 $f(x+1)=f(x)+2x$ 取两个特殊的 x 值, 得到两个方程从而解出 a 和 b. 由于已有 $f(0)=1$, 所以不妨分别设 $x=0$ 和 -1, 可得

$$f(1)=0,\ f(-1)=2,\quad \text{即}\quad a+b=0,\ a-b=2.$$

用这种方法也可以方便地求出两个系数.

7.2　求未知类型的函数解析式

若函数解析式的类型未知, 则一般是用整体代换来解决. 例如已知 $f(x+1)=2x$ 求 $f(x)$ 时, 应理解前一表达式 (即 $f(x+1)=2x$) 中的 f 是作用在 $x+1$ 上, 而后一表达式 (即 $f(x)$) 中的 f 是作用在 x 上. 想要求出后者相当于是弄清楚前者中的 f 是如何作用在 $x+1$ 上并得出 $2x$ 的. 此时应把 $x+1$ 看成整体, 比如设 $x+1=t$, 再想办法把 $2x$ 用 t 表示出来. 因为 $x=t-1$, 所以 $2x=2(t-1)$, 表明由 $f(x+1)=2x$ 可得 $f(t)=2(t-1)$, 又可写成 $f(x)=2(x-1)$.

由以上分析可知, 解题这类问题时, 主要步骤一般只有两步: 先把 f 作用的式子看成整体, 再把得到的式子用该整体表示.

例 7.3　*设 $f(2x+1)=x^2-2x$, 求 $f(x)$ 和 $f(1)$.*

解　对 $f(2x+1)=x^2-2x$, 令 $2x+1=t$, 则 $x=\dfrac{t-1}{2}$, 所以

$$\begin{aligned}f(t)=f(2x+1)=x^2-2x&=\left(\frac{t-1}{2}\right)^2-2\cdot\frac{t-1}{2}\\&=\frac{1}{4}t^2-\frac{3}{2}t+\frac{5}{4},\end{aligned}$$

即 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{5}{4}$. 而

$$f(1)=\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+\frac{5}{4}=0.$$

例 7.3 中的 $f(1)$ 也可通过在 $f(2x+1)=x^2-2x$ 中令 $x=0$ 得到. 类似地, 若求 $f(3)$, 则可直接令 $x=1$.

例 7.4　*已知 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$, 求 $f(x)$.*

解　设 $x+\dfrac{1}{x}=t$, 则

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=t^2-2,$$

所以 $f(t)=t^2-2$, 即 $f(x)=x^2-2$.

例 7.4 比较特殊, 解题时没有根据 $x+\dfrac{1}{x}=t$ 解出 x 再代入 $x^2+\dfrac{1}{x^2}$, 而是直接利用恒等式做了替换. 类似的恒等式还有 (注意观察恒等式的特征)

$$x^2+\frac{4}{x^2}=\left(x+\frac{2}{x}\right)^2-4,$$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right)^2-2.$$

例 7.5　*若 $2f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3x\ (x\neq 0)$ 恒成立, 求 $f(x)$ 的解析式.*

解　把已知表达式中的所有 x 都换成 $\dfrac{1}{x}$, 得 $2f\left(\dfrac{1}{x}\right)+f(x)=3\dfrac{1}{x}$, 再与已知表达式联立并消去 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, 解得 $f(x)=2x-\dfrac{1}{x}\ (x\neq 0)$.

例 7.5 也是特殊题, 解这种题时, 一般是想办法凑出和已知表达式类似的式子 (通常是把 x 换成其他式子), 联立并解出需要的 $f(x)$. 例如, 若已知 $2f(x)+f\left(-\dfrac{1}{x}\right)=3x$, 则可以把 x 都换成 $-\dfrac{1}{x}$, 可得

$$2f\left(-\frac{1}{x}\right)+f(x)=-\frac{3}{x};$$

若已知 $2f(x)+f(1-x)=3x$, 则可以把 x 都换成 $1-x$, 可得

$$2f(1-x)+f(x)=3(1-x).$$

以上都只进行了一次替换, 即可与已知表达式联立并解出 $f(x)$. 有的时候可能需要替换多次, 才能得到能联立的方程. 例如, 若已知 $f(x)+f\left(\dfrac{1}{1-x}\right)=3x$, 则可以把 x 都换成 $\dfrac{1}{1-x}$, 再把 x 都换成 $\dfrac{x-1}{x}$, 就可以得到关于 $f(x)$, $f\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$ 和 $f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$ 的三元一次方程组 (具体过程可自行写出).

8 2020 年 10 月 24 日答疑记录

8.1 判断两个函数是否相同

因为函数是由其定义域和对应法则决定的, 所以判断两个函数是否相同也应从这两个方面考虑: 先看定义域是否相同, 若不同, 则两个函数不同; 若相同, 再看表达式能否化为相同的形式. 只有定义域和对应法则都相同的函数才是同一个函数. 另外需要注意, 函数是否相同与其所用的字母无关: 定义域是自变量的取值范围 (一个数集), 对应法则是运算规则, 两者都不涉及表达式中的字母选择. 例如,

$f(x)=2x+1$ $(x>1)$ 与 $g(u)=2u+1$ $(u>1)$ 是相同的函数 (仅所用字母不同);

$f(x)=2x+1$ $(x>1)$ 与 $g(u)=2u+1$ $(u>2)$ 是不同的函数 (定义域不同);

$f(x)=2x+1$ $(x>1)$ 与 $g(u)=3u+1$ $(u>1)$ 也是不同的函数 (对应法则不同).

例 8.1 下列各组函数中, ____ 的两个函数为相同的函数.

(1) $f(x)=x^2-2x-1$, $g(s)=s^2-2s-1$;

(2) $f(x)=\dfrac{x}{x}$, $g(x)=\dfrac{1}{x^0}$; (3) $f(x)=\sqrt{-x^3}$, $g(x)=x\sqrt{x}$;

(4) $f(x)=x$, $g(x)=\sqrt{x^2}$; (5) $f(x)=\sqrt{x^3}$, $g(x)=x\sqrt{x}$.

解 (1) $f(x)$ 与 $g(s)$ 定义域均为 $\mathbf{R}$, 且对应法则相同, 所以为相同的函数 (仅自变量所用字母不同).

(2) $f(x)$ 与 $g(x)$ 定义域均为 $\{x \mid x\neq 0\}$, 且

$$f(x)=1,\quad g(x)=\frac{1}{1}=1,$$

所以 $f(x)=g(x)$.

(3) 对 $f(x)$, $-x^3\geqslant 0$, 解得 $x\leqslant 0$. 对 $g(x)$, $x\geqslant 0$. 所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域不同, 两者为为不同的函数.

(4) $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域都是 $\mathbf{R}$, 但是 $g(x)=|x|\neq f(x)$.

(5) $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域都是 $[0,+\infty)$, 而

$$f(x)=\sqrt{x^2\cdot x}=|x|\sqrt{x}\neq g(x),$$

所以两者为不同的函数.

综上可知, (1)(2) 的两个函数为相同的函数.

注 8.1 $\sqrt{x^2}=|x|$ 的解释: 当 $x\geqslant 0$ 时, $\sqrt{x^2}=x$; 当 $x<0$ 时, $\sqrt{x^2}=-x$, 恰好符合 $|x|$ 的定义. 另一种推导为

$$\sqrt{x^2}=\sqrt{|x|^2}=|x|.$$

类似的结论还有

$$\sqrt[3]{x^3}=x\ (\text{没有绝对值符号}),\quad \sqrt[4]{x^4}=|x|.$$

8.2 分段函数

分段函数相关的问题, 分段考虑即可.

例 8.2 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\geqslant 0,\\ 3x^2, & x<0\end{cases}$ 且 $f(x_0)=3$, 求实数 x_0 的值.

解 题中没有给 x_0 的取值范围, 所以需要分类讨论.

(1) 若 $x_0\geqslant 0$, 则 $f(x_0)=3$ 化为 $2x_0+1=3$, 解得 $x_0=1$.

(2) 若 $x_0<0$, 则 $f(x_0)=3$ 化为 $3x_0^2=3$, 解得 $x_0=\pm 1$. 结合前提 $x_0<0$ 知, $x=-1$.

综上所述, $x_0=1$ 或 -1.

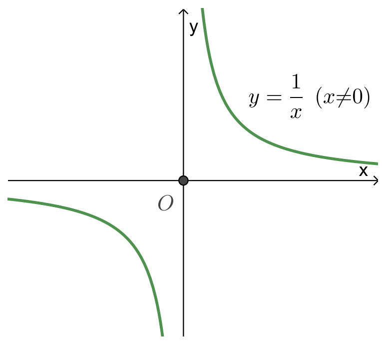
例 8.3 求函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-x+1, & x<1,\\ \dfrac{1}{x}, & x\geqslant 1\end{cases}$ 的值域.

解 (1) 当 $x<1$ 时, $f(x)=x^2-x+1$ 为二次函数, 对称轴为 $x=\dfrac{1}{2}$, 所以此时 $f(x)\in\left[f\left(\dfrac{1}{2}\right),+\infty\right)=\left[\dfrac{3}{4},+\infty\right)$.

(2) 当 $x\geqslant 1$ 时, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 为反比例函数, 由其图象知, 此时 $f(x)\in(0,f(1)]=(0,1]$.

综上所述, $f(x)$ 的值域为 $\left[\dfrac{3}{4},+\infty\right)\cup(0,1]=(0,+\infty)$.

注 8.2 反比例函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\ (x\neq 0)$ 的图象如下:



从图象可以看出, 该函数 (1) 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 均单调递减; (2) 值域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$; (3) 以 x 轴和 y 轴为两条渐近线.

9 2020 年 10 月 26 日答疑记录

例 9.1 已知 $A=\{x\mid y=\sqrt{9-x^2}\}$, $B=\{y\mid y=x^2-2x+3\}$, 求 $A\cap B$.

解 集合 A 表示 $y=\sqrt{9-x^2}$ 中 x 的范围, 即该函数的定义域 $[-3,3]$, 集合 B 表示 $y=x^2-2x+3$ 中 y 的范围, 即该函数的值域 $[2,+\infty)$, 所以 $A\cap B=[2,3]$.

注 9.1 解集合问题时, 一定要注意集合的意义. 例 9.1 中的集合 A 表示的是定义域 (描述的是 x), 而集合 B 表示的是值域 (描述的是 y), 所以应分别按定义域和值域的求法确定这两个集合.

例 9.2 已知函数 $f(x)=4x^2-kx-8$ 在 $[5,20]$ 上单调变化, 求实数 k 的取值范围.

解　$f(x)$ 为二次函数, 单调性由开口方向、对称轴和定义域共同决定. 由题意, $f(x)$ 的对称轴 $x=\dfrac{k}{8}$ 不在区间 $[5,20]$ 内, 所以

$$\frac{k}{8}\leqslant 5 \text{ 或} \frac{k}{8}\geqslant 20, \quad \text{解得 } k\leqslant 40 \text{ 或} k\geqslant 160,$$

即 $k\in(-\infty,40]\cup[160,+\infty)$.

注 9.2　例 9.2 中的二次函数在区间 $[5,20]$ 上若单调递增, 则 $\dfrac{k}{8}\leqslant 5$; 若单调递减, 则 $\dfrac{k}{8}\geqslant 20$ (为什么?).

例 9.3　“$x^2>1$” 是 “$x>1$” 的 ____ 条件.

解　由 $x^2>1$ 知 $x^2-1>0$, 解得 $x<-1$ 或 $x>1$, 所以 “$x^2>1$” 是 “$x>1$” 的必要不充分条件.

注 9.3　由 $x^2>1$ 不能得出 $x>\pm 1$ (与方程不同). 解此不等式时, 建议用普通二次不等式的解法, 即先整理为和 0 比较, 再因式分解.

10　2020 年 10 月 31 日答疑记录

例 10.1　求函数 $f(t)=\dfrac{t^2-4t+1}{t}$ $(t>0)$ 的最小值和对应的 t 的值.

解　因为 $t>0$, 所以由均值不等式,

$$f(t)=\frac{t^2-4t+1}{t}=t+\frac{1}{t}-4\geqslant 2\sqrt{t\cdot\frac{1}{t}}-4=-2,$$

“$=$” 成立当且仅当 $t=\dfrac{1}{t}$ 即 $t=1$. 以上表明 $f_{\min}=-2$, 且对应的 $t=1$.

注 10.1　(1) 求值域的一般方法是讨论单调性, 但对特殊的分式函数, 则一般先考虑用均值不等式. 例 10.1 中还可以推导如下:

$$f(t)=\frac{t^2-4t+1}{t}=\frac{t^2+1-4t}{t}\geqslant\frac{2\sqrt{t^2\cdot 1}-4t}{t}=-2.$$

(2) 用均值不等式时, 必须考虑等号成立的条件. 如果例 10.1 中 $t\geqslant 3$, 那么等号就不能成立, 只能写 $f(t)>-2$, 即不能得到 $f_{\min}=-2$ 的结论. 此时的解法参可借用例 10.2 中的单调性结论.

例 10.2　函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ $(x\neq 0)$ 是奇函数还是偶函数? 写出其单调区间.

解　因为

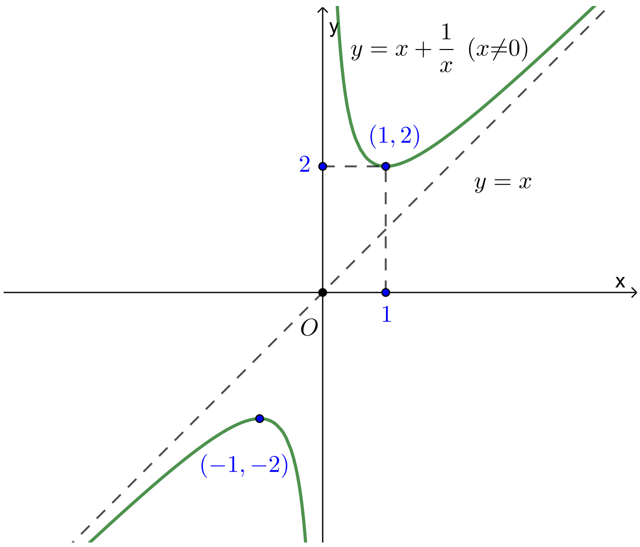
$$f(-x)=(-x)+\frac{1}{-x}=-\left(x+\frac{1}{x}\right)=-f(x),$$

所以 $f(x)$ 是奇函数.

当 x 是充分小的正数时, $f(x)\approx\dfrac{1}{x}$; 当 x 是充分大的正数时, $f(x)\approx x$. 再结合

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=f(4)=\frac{17}{4},\ f\left(\frac{1}{3}\right)=f(3)=\frac{10}{3},\ f\left(\frac{1}{2}\right)=f(2)=\frac{5}{2},\ f(1)=2,$$

可以描点作图如下 (第三象限的图形与第一象限的图形关于原点对称):



由图可以看出 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-1]$ 和 $[1,+\infty)$, 单调递减区间为 $(-1,0)$ 和 $(0,1)$.

例 10.2 中的函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ $(x\neq0)$ 一般形象地称为 "对勾函数", 第一象限图形的最低点 $(1,2)$ 可由均值不等式得到. $f(x)$ 的图形有两条渐近线: $y=x$ 和 $x=0$ (即 y 轴), 符合双曲线的特点 (有两条渐近线). 观察 $f(x)$ 的图形可知, 若 $x\geqslant3$, 则 $f(x)\geqslant f(3)$, 即此时 $f_{\min}=f(3)$. 类似地, 若 $x\geqslant\dfrac{1}{2}$, 则 $f_{\min}=f(1)$.

一般地, $f(x)=x+\dfrac{k}{x}$ $(k>0,\ x\neq0)$ 均可称为 "对勾函数". 由与前面类似的分析可得, $f(x)$ 是奇函数, 有两条渐近线 $y=x$ 和 $x=0$, 第一象限图形的最低点为 $(\sqrt{k},2\sqrt{k})$, 单调递增区间为 $(-\infty,-\sqrt{k}]$ 和 $[\sqrt{k},+\infty)$, 单调递减区间为 $(-\sqrt{k},0)$ 和 $(0,\sqrt{k})$.

例 10.3 若函数 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\leqslant1,\\ x^2+a, & x>1\end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 求实数 a 的取值范围.

解 由题意,

$$1-1\leqslant1^2+a \text{ 即 } a\geqslant-1,$$

所以 $a\in[-1,+\infty)$.

解分段函数单调性问题时, 只需每段函数均单调, 且分段点处的函数值满足题中单调性. 具体来说,

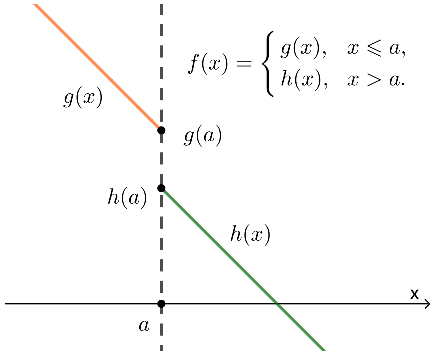
$$f(x)=\begin{cases}g(x), & x\leqslant a,\\ h(x), & x>a\end{cases} \text{ 在 } \mathbf{R} \text{ 上单调递增}$$

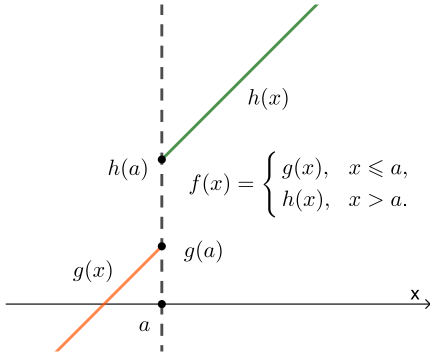
$$\Leftrightarrow \begin{cases}g(x) \text{ 在 } (-\infty,a] \text{ 上}, h(x) \text{ 在 } (a,+\infty) \text{ 上均单调递增},\\ g(a)\leqslant h(a)\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}g(x), & x\leqslant a,\\ h(x), & x>a\end{cases} \text{ 在 } \mathbf{R} \text{ 上单调递减}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}g(x) \text{ 在 } (-\infty,a] \text{ 上}, h(x) \text{ 在 } (a,+\infty) \text{ 上均单调递减},\\ g(a)\geqslant h(a)\end{cases}$$

建议结合如下函数草图记忆上述结论:





如果例 10.3 改为“函数 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x \leqslant 1, \\ x^2+2ax, & x>1 \end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增”, 则应限制

$$\begin{cases} -a \leqslant 1 & \text{(二次函数对称轴在定义域左侧)}, \\ 1-1 \leqslant 1^2+2a\cdot 1 & \text{(分段点处的函数值递增)}. \end{cases}$$

例 10.4 设定义在 $(-1,1)$ 上的奇函数 $f(x)$ 是增函数, 解关于 a 的不等式

$$f(a)+f(2a-1)<0.$$

解 因为 $f(x)$ 是奇函数, 所以已知不等式化为

$$f(a)<-f(2a-1)=f(1-2a).$$

再结合 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上是增函数可知

$$\begin{cases} -1<a<1,\ -1<1-2a<1 \\ a<1-2a, \end{cases} \quad \text{解得} \quad a \in \left(0, \frac{1}{3}\right).$$

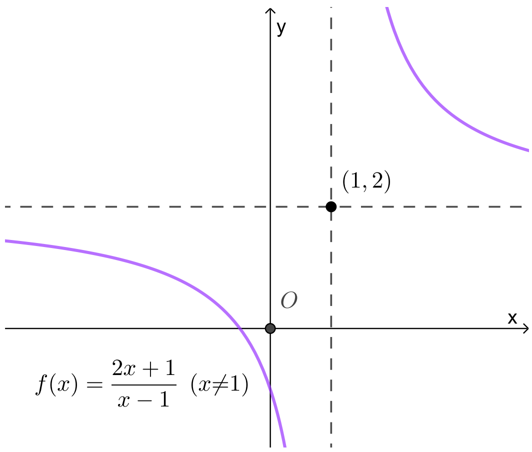
注 10.2 例 10.4 中的不等式 $f(a)+f(2a-1)<0$ 可以称为“抽象不等式”(因为没有具体的表达式), 这类不等式一般先化为“$f(a)<f(b)$”的形式, 再利用函数的单调性去掉“f”而转化为具体不等式“$a<b$”或“$a>b$”.

例 10.5 求函数 $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$, $x \in [-8,-4)$ 的值域.

解 先把已知函数变形 (一次式除以一次式的常用变形方法),

$$f(x)=\frac{2x+1}{x-1}=\frac{2(x-1)+3}{x-1}=2+\frac{3}{x-1},$$

再利用函数图形平移 (上加下减, 左加右减) 利用 $y=\dfrac{3}{x}$ 的图形可知 $f(x)$ 的图形如下:



所以 $f(x)$ 在 $[-8,-4)$ 上单调递减, 值域为 $(f(-4), f(-8)] = \left(\dfrac{7}{5}, \dfrac{5}{3}\right]$ (即最大值为 $\dfrac{5}{3}$, 无最小值).

例 10.6 已知 $f(x) = ax^7 - bx^5 + cx^3 + 2$, 且 $f(-5) = m$, 求 $f(-5) + f(5)$ 的值.

解 直接代入知,

$$\begin{aligned} f(-5) + f(5) &= [a \cdot (-5)^7 - b \cdot (-5)^5 + c \cdot (-5)^3 + 2] \\ &\quad + [a \cdot 5^7 - b \cdot 5^5 + c \cdot 5^3 + 2] \\ &= 4. \end{aligned}$$

例 10.6 中的 "$f(-5) = m$" 是多余的条件. 如果注意到 $g(x) = ax^7 - bx^5 + cx^3$ 是奇函数, 则可以简洁地得到更一般地结论:

$$f(-x) + f(x) = [g(-x) + g(x)] + 2 \cdot 2 = 4.$$