

两轮平衡车的建模与控制研究

薛凡 孙京浩 严怀成

(华东理工大学化工过程先进控制和优化技术教育部重点实验室, 上海 200237)

摘要 从两轮平衡车的物理结构出发, 分析车体在平衡瞬间的力学平衡, 得到平衡方程式, 由此计算并建立对应的数学模型。仿真结果表明: 从开环系统构建闭环系统, 并选择适当的反馈增益, 控制系统的角度、角速度、位移和速度都能趋近稳定, 从而验证了系统的可控性。

关键词 平衡车 力学平衡 极点配置 开环 闭环 反馈增益 仿真

中图分类号 TH89

文献标识码 A

文章编号 1000-3932(2012)11-1450-06

符号说明

- C_L, C_R ——左、右车轮的转矩, $N \cdot m$;
 D ——两轮之间的距离, m ;
 f_L, f_R ——左、右车轮与地面的摩擦力, N ;
 g ——重力加速度, m/s^2 ;
 H_L, H_R ——底盘与轮子在水平方向的作用力, N ;
 J_ϕ, J_p, J_ψ ——轮子、摆和车体的转动惯量, $kg \cdot m^2$;
 L ——轮子轴心到质心 m 的距离, m ;
 M_L, M_R ——左、右轮子的质量, kg ;
 m ——两轮车除了轮子以外的质量, kg ;
 P_L, P_R ——底盘与轮子在垂直方向的作用力, N ;
 R ——左、右轮半径, m ;
 x_L, x_R, x_m ——左、右轮子的位移和平均位移, m ;
 x_p, x_z ——质心 m 的水平位移和垂直位移, m ;
 \dot{x} ——直线速度, m/s ;
 \ddot{x} ——直线加速度, m/s^2 ;
 ϕ_L, ϕ_R ——左、右轮子的旋转角度, rad ;
 $\ddot{\phi}_L, \ddot{\phi}_R$ ——左、右轮子旋转角的角加速度, rad/s^2 ;
 θ ——摆杆与 z 平面的倾斜角, rad ;
 $\dot{\theta}$ ——角速度, rad/s ;
 $\ddot{\theta}$ ——角加速度, rad/s^2 ;
 ψ ——两轮车的行驶方位角, rad ;
 $\ddot{\psi}$ ——两轮车行驶方位角的角加速度, rad/s^2 。

两轮平衡车是一种两轮左右分布, 中间带类似倒立摆的车子。这种车子是一种不稳定体, 因此需要设计相应的控制系统以控制其保持平衡。两轮平衡车除了开关, 基本没有其他按钮用于加速、减速及刹车等。其工作原理是: 系统利用陀螺仪、加速度传感器及倾斜计等传感器, 检测出车身的俯仰状态以及状态变化率。通过中央处理器计算

并发出指令, 驱动电机进行加速向前或向后等动作保持车体平衡。驾驶者通过前倾或后仰来控制车子的速度, 通过倾斜把手来控制其左右转向。

笔者通过分析两轮平衡车的物理结构以及在平衡瞬间的力学平衡, 得到两轮车的力学平衡方程, 并建立其数学模型。运用 MATLAB 和 SIMULINK 仿真系统的角度 θ 、角速度 $\dot{\theta}$ 、位移 x 和速度 \dot{x} 的变化过程, 以验证该系统是否可以通过外部控制器来控制其平衡。

1 建模

两轮平衡车的瞬时力平衡分析如图 1 所示。下面将分析归纳此时的力平衡方程^[1~3], 并逐步建立其数学模型。

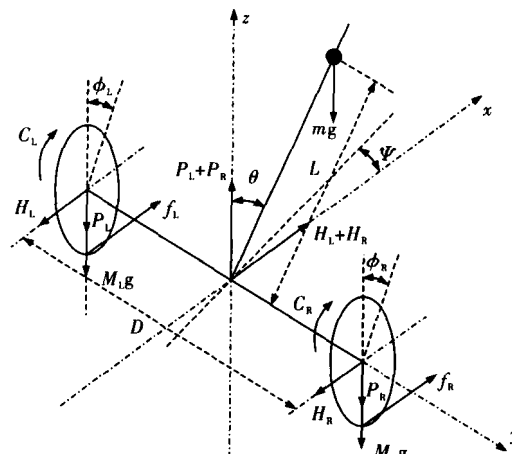


图1 两轮平衡车力学平衡分析

收稿日期: 2012-09-11 (修改稿)

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (61004028, 61272064); 中央高校基本科研业务费资助项目 (WH1014013); 上海市教育委员会科研创新项目 (12zz052)

对两轮平衡车的右轮进行力学分析,如图 2 所示。

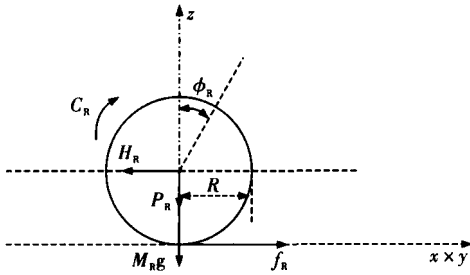


图 2 两轮平衡车右轮力学分析

依据图 2 对右轮进行受力分析,并建立其平衡方程:

$$M_R \ddot{x}_R = f_R - H_R \quad (1)$$

$$J_R \ddot{\phi}_R = C_R - f_R R \quad (2)$$

同理,对左轮进行受力分析,并建立其平衡方程:

$$M_L \ddot{x}_L = f_L - H_L \quad (3)$$

$$J_L \ddot{\phi}_L = C_L - f_L R \quad (4)$$

同时,令 $M_L = M_R = M, J_L = J_R = J_\phi$ 。

两轮平衡车摆杆的受力分析如图 3 所示,由图 3 可以得到水平和垂直方向的平衡方程以及转矩方程。

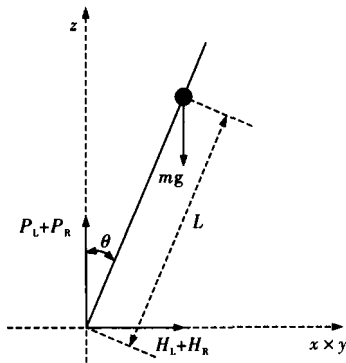


图 3 车摆杆瞬时力学分析

水平方向的平衡方程:

$$m \ddot{x}_p = H_L + H_R \quad (5)$$

其中 $x_p = x_m + L \sin \theta$, 则有:

$$\ddot{x}_p = \ddot{x}_m - L \sin \theta \cdot \dot{\theta}^2 + L \cos \theta \cdot \ddot{\theta} \quad (6)$$

$$x_m = \frac{x_L + x_R}{2} \quad (7)$$

垂直方向的平衡方程:

$$m \ddot{x}_z = P_L + P_R - mg \quad (8)$$

其中 $x_z = L \cos \theta - L$, 则有:

$$\ddot{x}_z = -L \cos \theta \cdot \dot{\theta}^2 - L \sin \theta \cdot \ddot{\theta} \quad (9)$$

转矩方程为:

$$J_p \ddot{\theta} = (P_L + P_R) L \sin \theta - (H_L + H_R) L \cos \theta \quad (10)$$

两轮平衡车的转向平衡受力分析如图 4 所示。

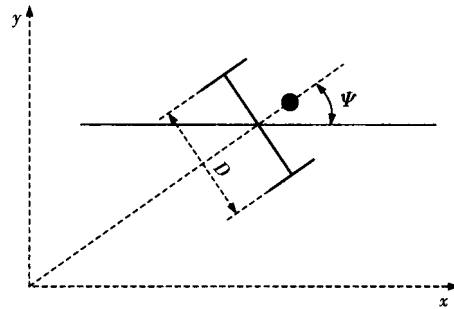


图 4 两轮车转向平衡分析

由图 4 对转向运动分析可得:

$$J_\psi \ddot{\psi} = \frac{(H_L - H_R) D}{2} \quad (11)$$

$$\psi = \frac{x_L - x_R}{D} \quad (12)$$

至此,两轮平衡车的所有平衡方程建立完毕。

当 θ 在 $\pm 5^\circ$ 变化时, $\sin \theta \approx \theta, \cos \theta \approx 1, \dot{\theta}^2 \approx 0$, 由此可得两轮车的数学模型:

$$\left(2M + \frac{2J_\phi}{R^2} + m \right) \ddot{x}_m + m L \ddot{\theta} = \frac{C_L + C_R}{R} \quad (13)$$

$$J_p \ddot{\theta} + m L^2 \ddot{\theta} - m g L \theta = -m L \ddot{x}_m \quad (14)$$

$$\left(D M + \frac{D J_\phi}{R^2} + \frac{2 J_\psi}{D} \right) \ddot{\psi} = \frac{C_L - C_R}{R} \quad (15)$$

由式(13)~(15)可得系统状态方程:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_L \\ C_R \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_L \\ C_R \end{bmatrix}$$

设 $M = 0.8 \text{ kg}, R = 0.1 \text{ m}, L = 0.5 \text{ m}, J_\psi = 0.001 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, m = 10 \text{ kg}, J_\phi = 0.002 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, J_p = 0.0034 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, D = 0.5 \text{ m}$ 。则控制系统的状态方程可以写成:

$$\dot{X} = AX + Bu$$

$$Y = CX + Du$$

式中 A ——系统矩阵;

B ——输入矩阵;

C ——输出矩阵;

D ——直接传递矩阵;

u ——输入向量;

X ——状态向量;

Y ——输出向量。

即:

$$X = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \theta \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -48.603 & 0 & 0 \\ 0 & 116.648 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4.966 \\ -9.919 \end{bmatrix} u$$

$$Y = \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

此时,两轮平衡车的状态方程建立完毕。

2 仿真

根据系统的状态方程对矩阵 A , 可以利用 MATLAB 的函数 $[V, T] = \text{eig}(A)$ 计算其特征值: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 10.8004, \lambda_4 = -10.8004$ 。

显然 $\lambda_3 > 0$, 说明两轮平衡车系统是不稳定的。

$\dot{X} = AX + Bu, Y = CX + Du$ 是一个开环系统, 不稳定。因此, 需要对该系统引入一个由角度和位移组成反馈量, 将此系统构成一个可控的闭环系统, 即:

$$u = r - KX$$

则:

$$\dot{X} = AX + B(r - KX) = (A - BK)X + Br$$

式中 K ——闭环系统的反馈增益;

r ——系统的参考输入。

可以看出, 只要合理选择矩阵 K 的值, 就能将原开环系统转换成闭环系统。 K 的选择有多种取最佳值的方法。MATLAB 中有 `acker`、`place`、`es-`

`tim` 及 `reg` 等函数, 可以根据期望极点求取反馈增益^[4,5]。以 `place` 为例, 用法为 $K = \text{place}(A, B, P)$ 。其中 A, B 为原状态方程的状态矩阵; P 为期望的极点。

对于上文求得的开环系统的状态方程, 有:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -48.63 & 0 & 0 \\ 0 & 116.648 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4.966 \\ -9.919 \end{bmatrix}$$

取 $P = [-2 + j*4 \quad -2 - j*4 \quad -10 \quad -20]$, P 中极点都位于直角坐标平面的左半平面, 则有:

$$K = \text{place}(A, B, P)$$

$$\text{sys} = \text{ss}(A - B * K, B, \text{eye}(4), 0)$$

$$t = 0:0.01:4$$

$$x = \text{initial}(\text{sys}, [1; 0; 0; 0], t)$$

$$x_1 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] * x'$$

$$x_2 = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] * x'$$

$$x_3 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] * x'$$

$$x_4 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] * x'$$

$$\text{subplot}(2, 2, 1)$$

$$\text{plot}(t, x_1), \text{grid}$$

...

MATLAB 仿真得到如图 5 所示的结果, 可以看出各变量都能随时间变化趋近于稳定。

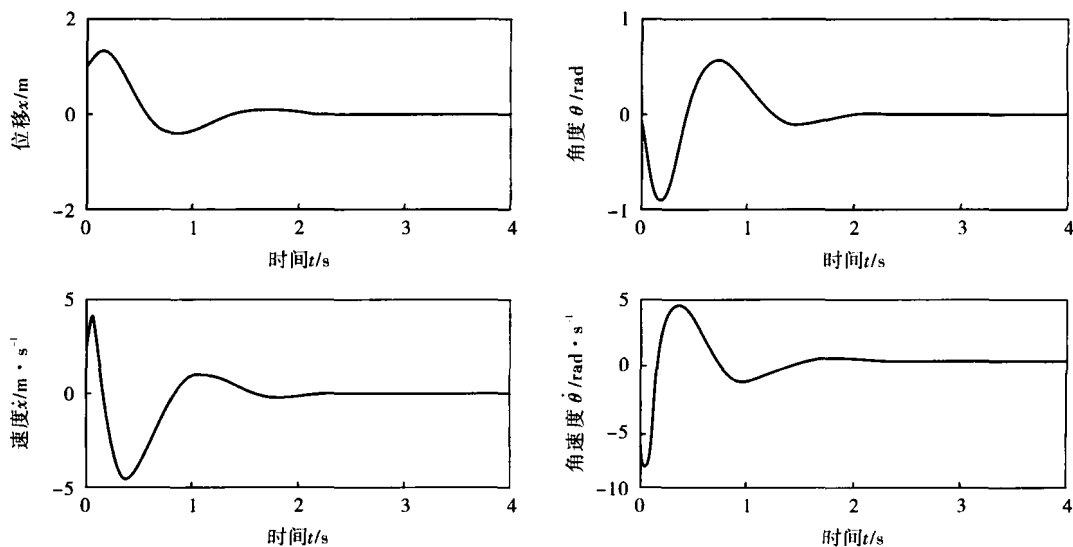


图5 MATLAB 仿真结果

运行 MATLAB 的 SIMULINK 工具^[6], 将上述过程形象地绘制为如图 6 所示的结构图, 其中状

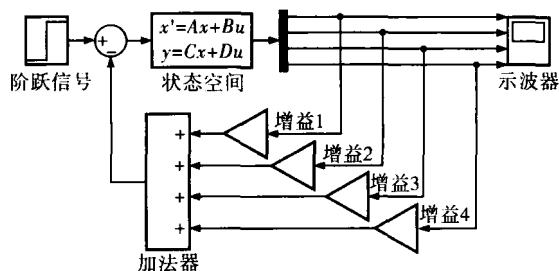


图 6 两轮车平衡系统的 SIMULINK 结构

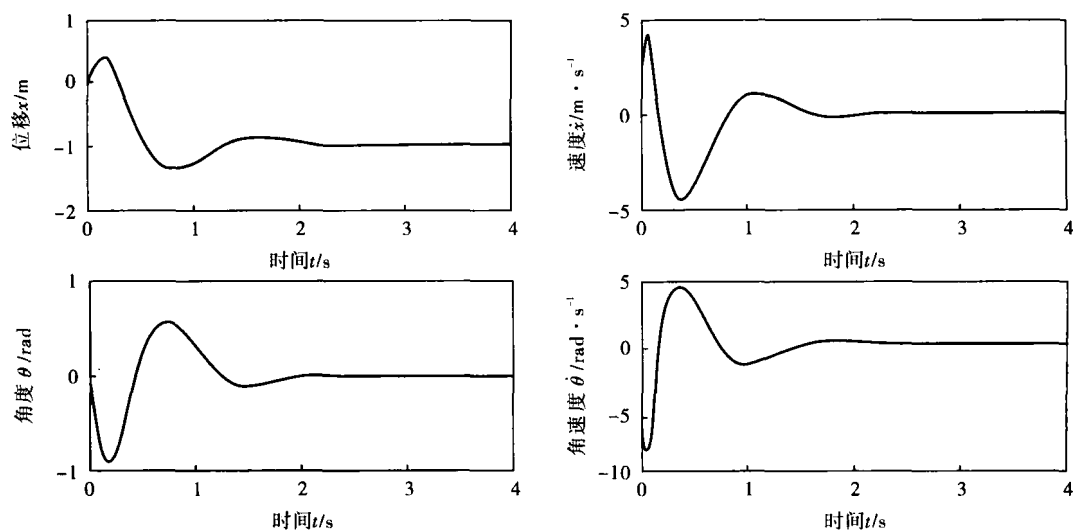


图 7 SIMULINK 仿真结果

为了能更好地得到反馈控制增益, 对于系统的期望极点, 取以下几组不同值:

$$P_1 = [-2 + j*4 \quad -2 - j*4 \quad -10 \quad -20]$$

$$P_2 = [-4 + j*8 \quad -4 - j*8 \quad -10 \quad -20]$$

$$P_3 = [-8 + j*16 \quad -8 - j*16 \quad -10 \quad -20]$$

以位移和角度为研究对象, 经过 MATLAB 仿真后得到如图 8 所示的收敛曲线, 随着配置极点不

态空间模块中的内容即为前文求得的状态空间方程, 其输出 y 即为位移 x 、角度 θ 、速度 \dot{x} 和角速度 $\dot{\theta}$, 分别乘以对应的增益 K , 并与阶跃输入相加, 就可以得到两轮平衡车模型的输入量。

图 7 为图 6 的仿真结果, 可以明显地看到: 两种仿真工具的结果很相似, 角度、速度和角速度的收敛曲线几乎相同, 只有位移的收敛曲线稍有不同。MATLAB 仿真中, 位移从一个起始位置收敛于 0; SIMULINK 仿真中, 位移从 0 收敛于一个终值。但也说明在此闭环系统中, 系统的 4 个输出值都能够被控制并使系统趋于稳定。

断远离原点, K 不断增大, 曲线的收敛速度越快, 动态响应好, 到达稳定的时间越短, 但相对波动幅度也越大, 在实际控制中需要的控制力也越强; 但当极点越远, 增益过大时, 又会引起波动幅值过大, 导致控制过量, 引起控制的不稳定。因此, 需要合理选取期望极点的值 (如 P_1), 这样既能获得较好的收敛速度, 也不会引起过大的超调量。

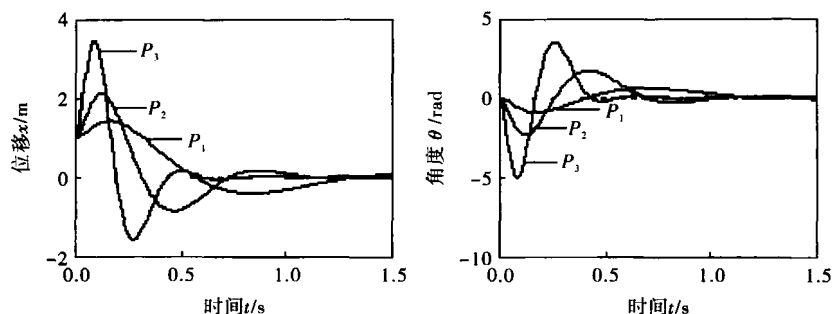


图 8 不同期望极点下收敛曲线变化

除了用极点配置来求取反馈增益外, 还可以通过 MATLAB 的 LQR 函数来求取。通过 LQR 可

以得到状态线性反馈的最优控制规律,易于构成闭环最优控制。 Q 和 R 的值用于平衡状态向量和输入向量的权重,使性能指标 J 达到最优。对此,

$$\text{取: } Q = \begin{bmatrix} 250 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, R = 1。$$

用 MATLAB 的 LQR 函数来求取相应的反馈增益,即 $K = \text{LQR}(A, B, Q, R)$,经仿真运行后与极点配置方法的比较结果如图 9 所示,两种方法的收敛速度基本相同,但是 LQR 方法得到的曲线超调量比极点配置的要小很多,控制性能更好^[7,8]。

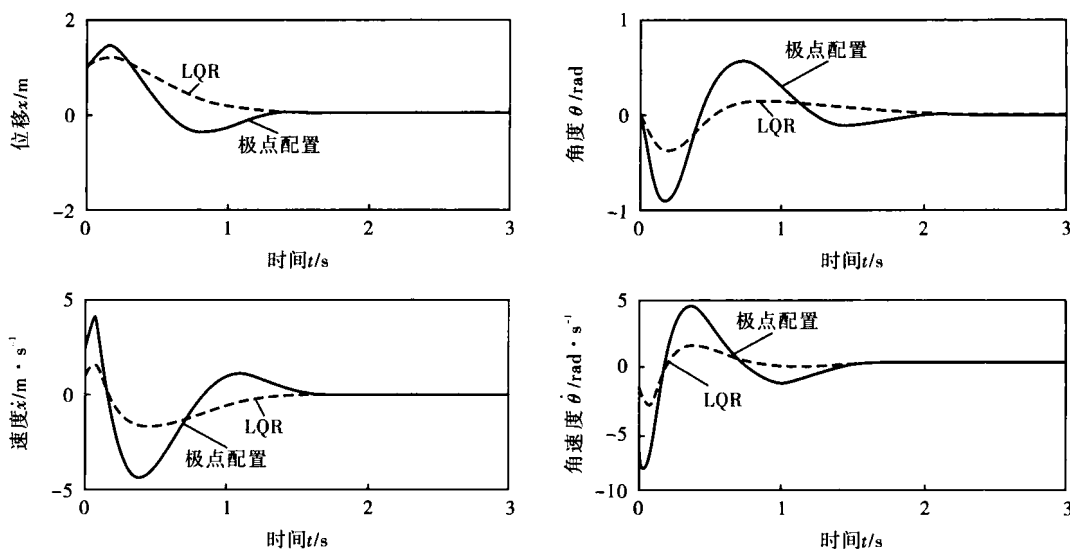


图9 LQR与极点配置比较

3 结束语

两轮平衡车是一种不稳定系统,类似于倒立摆系统,但又是一种可控系统,因此只需要对其施加适当的控制,就可以使之达到稳定。笔者根据两轮平衡瞬间的动力学方程,建立数学模型,并采取适当的反馈控制,将原先的开环系统构建为闭环系统,最终使得平衡车系统的位移、角度、速度和角速度这些变量逐渐趋于稳定值。

笔者在该系统中运用的仿真方法,可以被简单应用于位置式 PID 控制方案,反馈增益矩阵 K 中的元素对应于 PID 参数,能够实现两轮平衡车的稳定控制和抗扰动性。当然,除了运用 PID 控制外,也可以采用智能控制(如模糊控制等)实现对两轮平衡车的快速、稳定控制。

参考文献

[1] 阮晓刚,刘江,狄海江,等.两轮自平衡机器人系统设计、建模及 LQ 控制[J].现代电子技术,2008,18(4):57~60.

[2] Khac Duc Do, Gerald Seet. Motion Control of a Two-Wheeled Mobile Vehicle with an Inverted Pendulum [J]. Journal of Intelligent and Robotic Systems, 2010, 60(3-4): 577~605.

[3] 阮晓刚.两轮自平衡机器人动力学建模及其平衡控制[D].北京:北京工业大学,2006.

[4] 潘晓中.基于 MATLAB 的线性系统极点配置问题的算法分析[J].系统工程与电子技术,2002,24(3): 78~79.

[5] 刘满,井元伟,张嗣瀛.区域极点配置问题的研究方法[J].控制与决策,2005,20(3):241~244.

[6] 曾志新,邹海明,李伟光,等.倒立摆系统的建模及 MATLAB 仿真[J].新技术新工艺,2005,(10):16~18.

[7] 彭学锋,鲁兴举,吕鸣.基于 SimMechanics 的两轮机器人建模与仿真[J].系统仿真学报,2010,22(11): 2643~2645.

[8] 程刚.两轮自平衡小车的设计与大范围稳定控制的研究[D].西安:西安电子科技大学,2009.

(下转第 1497 页)

量,减少总的传输时间。但笔者研究的传输方法也有待改进,两台服务器所存放的业务内容相同,提高吞吐量是以牺牲服务器资源为代价的。故在服务器设备充足,终端接口丰富的前提下,笔者研究的并发模型具有较高的实用价值,满足物联网、泛在网的实际需求。

另外,笔者是在实际应用开发平台上对模型进行测试,测试的也是实际的网络环境,加之笔者设计的传输方法是在应用层实现,具有简单易行、方便移植的特点,使得笔者设计的传输方法的应用范围极为广泛。

参 考 文 献

- [1] 薛森,高德云,张思东,等. 面向下一代网络的终端多路径传输层架[J]. 通信学报,2010,31(10): 26 ~ 35.
- [2] 王斌,李方,孟宪晴. 并行传输控制协议与流控制传

输协议多流技术[J]. 江苏通信,2011,(4): 52 ~ 54.

- [3] 朱桂勇,吴庆渡. 基于 SCTP 多宿特点的多路径同时传输研究[J]. 计算机技术与发展,2007,17(3):5 ~ 9.
- [4] Caro A L. SCTP: A Proposed Standard for Robust Internet Data Transport[J]. IEEE Comp,2003,36(11): 56 ~ 63.
- [5] Ahmed A E A,Tarek S,Myung L. LS-SCTP: A Band-Width Aggregation Technique for Stream Control Transmission Protocol [J]. Computer Communications, 27(10):1012 ~ 1024.
- [6] Iyengar J, Amer P, R Stewart R. Concurrent Multipath Transfer Using SCTP Multihoming over Independent End-to-end Paths [J]. IEEE/ACM Transactions on Networking,2006,14(5):951 ~ 964.
- [7] 王枫,罗家融. Linux 下多线程 Socket 通讯的研究与应用[J]. 计算机工程与应用, 2004,40(16):106 ~ 109.

Realization of Multi-path Concurrent Transmission Based on MIF

QI Xue-wen^a, LING Zhi-hao^{a,b}, ZHANG Zhi-fei^b

(a. School of Information Science and Engineering; b. MOE Key Laboratory of Advanced Control

and Optimization for Chemical Processes, East China University of Science and Technology, Shanghai 200237, China)

Abstract Considering the fact that MIF (Multi-interface) terminal and the diversity of Internet access technology can provide powerful technical support, and in terminal control mechanism, to meet the need of both internet of things and ubiquitous network for multi-flow concurrent transmission, a multi-path concurrent transmission model was proposed to transmit traffic flows to MIF terminal concurrently by splitting traffic flows on the server side. The experimental results prove its superiority in improving network throughput and transmission efficiency of traffic flows.

Key words MIF, multi-path, throughput

(上接第 1454 页)

Study on Modeling and Control of Two-wheeled Auto-balancing Vehicle

XUE Fan, SUN Jing-gao, YAN Huan-cheng

(MOE Key Laboratory of Advanced Control and Optimization for Chemical Process,
East China University of Science and Technology, Shanghai 200237, China)

Abstract Basing on physical structure of the two-wheeled vehicle, the mechanical equilibrium of the vehicle at transient equilibrium was analyzed to obtain the balance equation so as to benefit calculation and to establish mathematical model. Simulation with MATLAB and SIMULINK tool box shows that to construct closed loop system based on open system and meanwhile to select a suitable feedback gain can make system's angle, angular velocity, displacement and speed tend to be stable and the controllability of the system can be verified.

Key words balance vehicle, mechanical equilibrium, pole assignment, open loop, closed loop, feedback gain, simulation