

薇閣資研社上課簡報

動態規劃 Dynamic Programming

講師：副社長 劉威廉

簡介

動態規劃 (Dynamic Programming) 是分治法的延伸。當分治法分割出來的問題，一而再、再而三出現，就運用記憶法儲存這些問題的答案，避免重複求解，以空間換取時間。

動態規劃的過程，就是反覆地讀取數據、計算數據、儲存數據。

基礎 DP

階乘問題

有 Q 次詢問，每次問你 $N!$ 取除以 $10^9 + 7$ 的餘數是多少？
($1 \leq N \leq 10^5, 1 \leq Q \leq 10^5$)

方法一：一個一個算

每次詢問一個 N 後算出 $N!$ 的大小

```
const int MOD = 1e9 + 7;

int q;  cin >> q;

while (q--) {
    int n;  cin >> n;

    int an = 1;
    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        an *= i;
        an %= MOD;
    }

    cout << an << '\n';
}
```

時間複雜度： $O(QN) \Rightarrow \text{TLE}$

方法二：使用 DP

因為上一個方法你會發現到同樣的一種階層會算到好幾次，那我們就把他們存起來，下次要用的時候直接拿出來就好

e.g. 算 $10!$ 和 $12!$ 都會用到 $8!$ ，如果我們有把 $8!$ 的答案存下來就可以必面重複算的時間

【DP 三步驟】

1. 定義： $dp(x)$ 為 $x!$ 的答案
2. 初始值： $dp(1) = 1$
3. 轉移式： $dp(x) = dp(x - 1) \times x$

```
const int MOD = 1e9 + 7;
const int maxn = (int)2e5 + 5;

int dp[maxn];

dp[1] = 1;
for (int i = 2; i <= 10000; i++) {
    dp[i] = dp[i - 1] * i;
    dp[i] %= MOD;
}

int q;  cin >> q;

while (q--) {
    int n;  cin >> n;

    cout << dp[n] << '\n';
}
```

時間複雜度： $O(N + Q)$

💡 利用了 DP 的轉移來成功用空間換取時間

走樓梯問題

有一個人要走樓梯，總共有 N 層階梯，每走一步可以往上走 1 或 2 格階梯，請問走上樓梯有幾種方法？請輸出答案除以 $10^9 + 7$ 的餘數。

$(1 \leq N \leq 10^5)$

我們一樣用 DP 三步驟來解決這一題：

1. 定義： $dp(x)$ 為走上 x 個階梯的方法數
2. 初始值： $dp(0) = 1$
3. 轉移式： $dp(x) = dp(x - 1) + dp(x - 2)$

而計算 DP 值又有分為兩種方法：Top-down & Bottom-up

Top-down

顧名思義就是從上往下的順序來求 DP 值

- 好處
 - 不必斤斤計較計算順序
 - 只計算必要的問題，而不必計算所有可能的問題
- 壞處
 - 程式碼採用遞迴結構，不斷呼叫函式，執行效率較差
 - 無法自由地控制計算順序，因而無法妥善運用記憶體，浪費了可回收再利用的記憶體

```
const int maxn = (int)2e5 + 5;
const int MOD = 1e9 + 7;

int dp[maxn];

int f(int x) {
    if (dp[x]) return dp[x];
    if (x == 0 or x == 1) return dp[x] = 1;

    return dp[x] = (f(x - 1) + f(x - 2)) % MOD;
}

void solve() {
    int q; cin >> q;

    while (q--) {
        int n; cin >> n;

        cout << f(n) << '\n';
    }
}
```

Bottom-up

訂定一個計算順序，然後由最小的問題開始計算，通常只有幾個迴圈

- 好處：與 Top-down 相反
- 壞處：與 Top-down 相反

```
const int maxn = (int)2e5 + 5;
const int MOD = 1e9 + 7;

int dp[maxn];

void solve() {
    dp[0] = dp[1] = 1;
    for (int i = 2; i < maxn; i++) {
        dp[i] = dp[i - 1] + dp[i - 2];
        if (dp[i] >= MOD) dp[i] -= MOD;
    }

    int q;  cin >> q;

    while (q--) {
        int n;  cin >> n;

        cout << dp[n] << '\n';
    }
}
```

背包問題

0/1 背包問題

題目：[CSES - Book Shop](#)

You are in a book shop which sells n different books. You know the price (h_i) and number of pages (s_i) of each book.

You have decided that the total price of your purchases will be at most x . What is the maximum number of pages you can buy? You can buy each book at most once.

$$(1 \leq n \leq 10^3, 1 \leq x \leq 10^5)$$

【DP 三步驟】

1. 定義： $dp(i, x)$ 為考慮 $1 \dots i$ 個書本並且選擇的書總共 x 元的最大頁數
2. 初始值： $dp() = 0$
3. 轉移式：
$$dp(i, x) = \max \begin{cases} dp(i-1, x) \\ dp(i-1, x - h_i) + s_i, & x - h_i \geq 0 \end{cases}$$

```
const int maxn = (int)1005;
const int maxx = (int)1e5 + 5;

int n, x;
int h[maxn], s[maxn];
int dp[maxn][maxx];

void solve() {
    cin >> n >> x;

    for (int i = 1; i <= n; i++) cin >> h[i];
    for (int i = 1; i <= n; i++) cin >> s[i];

    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        for (int j = 0; j <= x; j++) {
            dp[i][j] = dp[i - 1][j];
            if (j - h[i] >= 0) {
                dp[i][j] = max(dp[i][j], dp[i - 1][j - h[i]] + s[i]);
            }
        }
    }

    int an = 0;
    for (int j = 0; j <= x; j++) {
        an = max(an, dp[n][j]);
    }

    cout << an << '\n';
}
```

發現到陣列太大了，所以我們可以用一個方法叫做：**滾動 DP**

- 注意到每次算 DP 值的時候只會用到 $i - 1$ 的地方
- 把 DP 陣列想像成一個表格的話就是我們只會用到前一排的值
- 可以使用兩個一維的 DP 陣列或者壓成一個一維的 DP 陣列

兩個一維的 DP：

```
const int maxn = (int)1005;
const int maxx = (int)1e5 + 5;

int n, x;
int h[maxn], s[maxn];
int dp[2][maxx];

void solve() {
    cin >> n >> x;

    for (int i = 1; i <= n; i++) cin >> h[i];
    for (int i = 1; i <= n; i++) cin >> s[i];

    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        for (int j = 0; j <= x; j++) {
            dp[i % 2][j] = dp[(i - 1) % 2][j];
            if (j - h[i] >= 0) {
                dp[i % 2][j] = max(dp[i % 2][j], dp[(i - 1) % 2][j - h[i]] + s[i]);
            }
        }
    }

    int an = 0;
    for (int j = 0; j <= x; j++) {
        an = max(an, dp[n % 2][j]);
    }

    cout << an << '\n';
}
```

一個一維的 DP：

```
const int maxn = (int)1005;
const int maxx = (int)1e5 + 5;

int n, x;
int h[maxn], s[maxn];
int dp[maxx];

void solve() {
    cin >> n >> x;

    for (int i = 1; i <= n; i++) cin >> h[i];
    for (int i = 1; i <= n; i++) cin >> s[i];

    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        for (int j = x; j >= 0; j--) {
            if (j - h[i] >= 0) {
                dp[j] = max(dp[j], dp[j - h[i]] + s[i]);
            }
        }
    }

    int an = 0;
    for (int j = 0; j <= x; j++) {
        an = max(an, dp[j]);
    }

    cout << an << '\n';
}
```

時間複雜度： $O(nx)$

提醒

- 注意題目的範圍來決定 DP 的定義
- 注意滾動後的 j 的迴圈順序

題目：

- CSES - Book Shop
- AtCoder ABC275 - pF. Erase Subarrays
- AtCoder ABC317 - pD. President

區間 DP

題目 : *AtCoder Educational DP Contest - pN. Slimes*

There are N slimes lining up in a row. Initially, the i -th slime from the left has a size of a_i .

Taro is trying to combine all the slimes into a larger slime. He will perform the following operation repeatedly until there is only one slime:

- Choose two adjacent slimes, and combine them into a new slime. The new slime has a size of $x + y$, where x and y are the sizes of the slimes before combining them. Here, a cost of $x + y$ is incurred. The positional relationship of the slimes does not change while combining slimes.

Find the minimum possible total cost incurred.

$$(1 \leq N \leq 400, 1 \leq a_i \leq 10^9)$$

【DP 三步驟】

1. 定義： $dp(l, r)$ 為合併區間 $[l, r]$ 的史萊姆所需要的最短時間
2. 初始值： $dp(i, i) = 0$
3. 轉移式： $dp(l, r) = \min \left\{ dp(l, k) + dp(k + 1, r) + \sum_{i=l}^r a_i \right.$

列出轉移式後可以發現 $\sum_{i=l}^r a_i$ 可以輕鬆的利用前綴合搞定

```

const int maxn = (int)405;

int n;
int ar[maxn], pf[maxn];
int dp[maxn][maxn];

void solve() {
    cin >> n;

    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        cin >> ar[i];
        pf[i] = pf[i - 1] + ar[i];
    }

    memset(dp, 0x3f3f3f3f, sizeof(dp));

    for (int len = 1; len <= n; len++) {
        for (int l = 1, r = l + len - 1; l <= n and r <= n; l++, r++) {
            if (len == 1) dp[l][r] = 0;
            else {
                for (int k = l; k <= r; k++) {
                    dp[l][r] = min(dp[l][r], dp[l][k] + dp[k + 1][r] + pf[r] - pf[l - 1]);
                }
            }
        }
    }

    cout << dp[1][n] << '\n';
}

```

時間複雜度： $O(N^3)$

題目：

- [AtCoder DP Contest - pN. Slimes](#)
- [AtCoder DP Contest - pL. Deque](#)
- [Codeforces 607 - pB. Zuma](#)
- [CSES - Removal Game](#)

LIS (Longest Increasing Subsequence)

最長遞增子序列

Credit : 2023 資訊之芽算法班簡報

子序列

從原本序列中挑幾個數字出來，不改變前後順序而產生的序列

e.g.

陣列是 $\{1, 5, 2, 4, 6, 3\}$ ，則 $\{1, 2, 4\}$, $\{5, 2, 6, 3\}$ 都是它的子序列

這個陣列的 LIS 就是 $\{1, 2, 4, 6\}$ ，注意 LIS 可能不唯一，現在我們只求最長就好

題目：CSES - Increasing Subsequence

You are given an array containing n integers. Your task is to determine the longest increasing subsequence in the array, i.e., the longest subsequence where every element is larger than the previous one.

A subsequence is a sequence that can be derived from the array by deleting some elements without changing the order of the remaining elements.

$$(1 \leq n \leq 2 \times 10^5)$$

【DP 三步驟】

1. 定義： $dp(i)$ 為從 $a_1 \dots a_i$ 中取數字，並且以 a_i 為結尾的 LIS
2. 初始值： $dp(0) = 0$
3. 轉移式： $dp(i) = \max \left\{ dp(j) + 1, \quad a_j < a_i \text{ and } j < i \right\}$


```

const int maxn = (int)2e5 + 5;

int n;
int ar[maxn];
int dp[maxn];

void solve() {
    cin >> n;

    for (int i = 1; i <= n; i++) cin >> ar[i];

    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        for (int j = 0; j < i; j++) {
            if (ar[j] < ar[i])
                dp[i] = max(dp[i], dp[j] + 1);
        }
    }

    int an = 0;
    for (int i = 1; i <= n; i++)
        an = max(an, dp[i]);

    cout << an << '\n';
}

```

時間複雜度： $O(n^2)$

LIS 優化

觀察：對於任一個位置的 i ，如果有一個 j 滿足 $a_j \leq a_i$ 且 $dp(j) \geq dp(i)$ ，則 $dp(i)$ 就永遠不會被用到。

簡單來說就是 i 不管是 a_i 還是 $dp(i)$ 都贏不了別人，那他就沒用了，再見。

arr	1	3	2	5	4
dp	1	2	2	3	

因此我們開一個陣列 tmp 記錄有可能有用的 $\{a_i, dp(i)\}$ 。

又因為 LIS 長度每次只會加 1，因此可以再簡化成只記錄陣列的值即可。

此時， $tmp(i) = \min(a_j)$, where $dp(j) = i$

arr	1	3	2	5	4
dp	1	2	2	3	
tmp (arr, dp)	(1, 1)	(2, 2)	(5, 3)		

可以發現到 tmp 裡面是嚴格遞增的！

所以我們的轉移式可以改成：

$$dp(i) = j + 1, \text{ where } tmp(j) < a_i \text{ and } tmp(j + 1) \geq a_i$$

所以我們可以利用 **二分搜** 來得到我們的 j ，所以轉移的時間就從 $O(n)$ 降到 $O(\log n)$ 了！

```
int n;
vector<int> tmp;

void solve() {
    cin >> n;

    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        int x;  cin >> x;
        auto it = lower_bound(tmp.begin(), tmp.end(), x);
        if (it == tmp.end()) {
            tmp.push_back(x);
        } else {
            *it = x;
        }
    }

    cout << (int)tmp.size() << '\n';
}
```

時間複雜度： $O(n \log n)$

題目：

- CSES - Increasing Subsequence
- LeetCode - 646. Maximum Length of Pair Chain
- Codeforces 977 - pF. Consecutive Subsequence
- Codeforces gym 102951 - pC. LCS on Permutations

LCS (Longest Common Subsequence)

最長共同子序列

Credit : 2023 資訊之芽算法班簡報

題目：[AtCoder Educational DP Contest - pF. LCS](#)

You are given strings s and t . Find one longest string that is a subsequence of both s and t .

$(1 \leq |s|, |t| \leq 3000)$

【DP 三步驟】

1. 定義： $dp(i, j)$ 為 $s_{1\dots i}$ 和 $t_{1\dots j}$ 的 LCS 長度
2. 初始值： $dp(i, 0) = 0$, $dp(0, j) = 0$
3. 轉移式：

$$dp(i, j) = \max \begin{cases} dp(i-1, j-1) + 1, & \text{where } s_i = t_j \\ dp(i-1, j) \\ dp(i, j-1) \end{cases}$$

```

const int maxn = (int)3005;

string s, t;
int dp[maxn][maxn];

void solve() {
    cin >> s >> t;

    int n = s.size(), m = t.size();
    for (int i = 0; i <= n; i++) {
        for (int j = 0; j <= m; j++) {
            if (i == 0 or j == 0) dp[i][j] = 0;
            else if (s[i - 1] == t[j - 1]) dp[i][j] = dp[i - 1][j - 1] + 1;
            else dp[i][j] = max({dp[i][j], dp[i - 1][j], dp[i][j - 1]});
        }
    }

    cout << dp[n][m] << '\n';
}

```

時間複雜度： $O(nm)$

其實也可以求 LCS 的字串ㄟ！

有興趣的同學可以參考這篇文章：[Longest Common Subsequence](#)

題目：

- [AtCoder Educational DP Contest - pF. LCS](#)
- [LeetCode - 72. Edit Distance](#)

位元 DP

Traveling Salesman Problem (TSP)

旅行推銷員問題

題目：CSES - Hamiltonian Flights

There are n cities and m flight connections between them. You want to travel from Syrjälä to Lehmälä so that you visit each city exactly once. How many possible routes are there?

Print one integer: the number of routes modulo $10^9 + 7$.

$(2 \leq n \leq 20, 1 \leq m \leq n^2)$

可以發現到 n 的範圍只有 20，這時候可以往 $O(2^n)$ 思考。
那我們的 DP 狀態就設為 2^n 次方應該沒毛病吧！

【DP 三步驟】

1. 定義： $dp(i, mask)$ 為走過狀態為 $mask$ 的城市並且最後停留在城市 i 的方法數
2. 初始值： $dp(0, 1) = 1$
3. 轉移式：

$$dp(i, mask) = \sum dp(j, mask - 2^j), (i, j) \in E \text{ and } (mask \& 2^j) > 0$$

💡 想一想：這一題要用 Bottom-up 的迴圈還是 Top-down 的遞迴呢？算一下時間複雜度吧！

```

const int maxn = (int)22;
const int MOD = (int)1e9 + 7;

int n, m;
vector<int> e[maxn];
int dp[maxn][1 << maxn];

int f(int i, int mask) {
    if (i == 0)
        return dp[i][mask] = (mask == 1) ? 1 : 0;

    if (!(mask & (1 << i)))
        return 0;

    if (dp[i][mask])
        return dp[i][mask];

    int rtn = 0;
    for (int j : e[i]) {
        if (mask & (1 << j)) {
            rtn += f(j, mask - (1 << i));
            if (rtn >= MOD) rtn -= MOD;
        }
    }
    return dp[i][mask] = rtn;
}

void solve() {
    cin >> n >> m;

    for (int i = 1; i <= m; i++) {
        int u, v; cin >> u >> v;
        e[v - 1].push_back(u - 1);
    }

    cout << f(n - 1, (1 << n) - 1) << '\n';
}

```

時間複雜度： $O(n^2 \times 2^n)$

題目：

- CSES - Hamiltonian Flights
- AtCoder ABC180 - pE. Traveling Salesman among Aerial Cities
- CSES - Elevator Rides

其他的 DP 主題

因為社團時間有限，所以請有興趣的同學自己上網找資料，有問題都可以問我ㄟ

- 無限背包問題、有限背包問題
- DAG DP
- 數位 DP
- 輪廓線 DP
- 各種 DP 優化
 - Bitset 優化
 - 矩陣快速幂優化
 - 資料結構優化
 - 單調對列優化
 - 斜率優化