薇閣資研社上課簡報

數論 Math Theory

講師：副社長 劉威廉

Table of Contents

- 質因數分解
- 最大公因數 GCD & 最小公倍數 LCM
- 擴展歐幾里得演算法 Extended Euclidean Algorithm
- 模運算 Modular Arithmetics
- 快速冪
- 結論

質因數分解

檢查一個數 x 是不是質數

數學課都學過對吧！我們只要檢查 2 到 $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$ 有沒有都跟 x 互質就好啦！

```cpp
bool isPrime(int x) {
    for (int i = 2; i * i <= x; i++) {
        if (x % i == 0) {
            return false;
        }
    }
    return true;
}
```

程式碼：質數測試

時間複雜度：$O(\sqrt{x})$

檢查好多數是不是質數

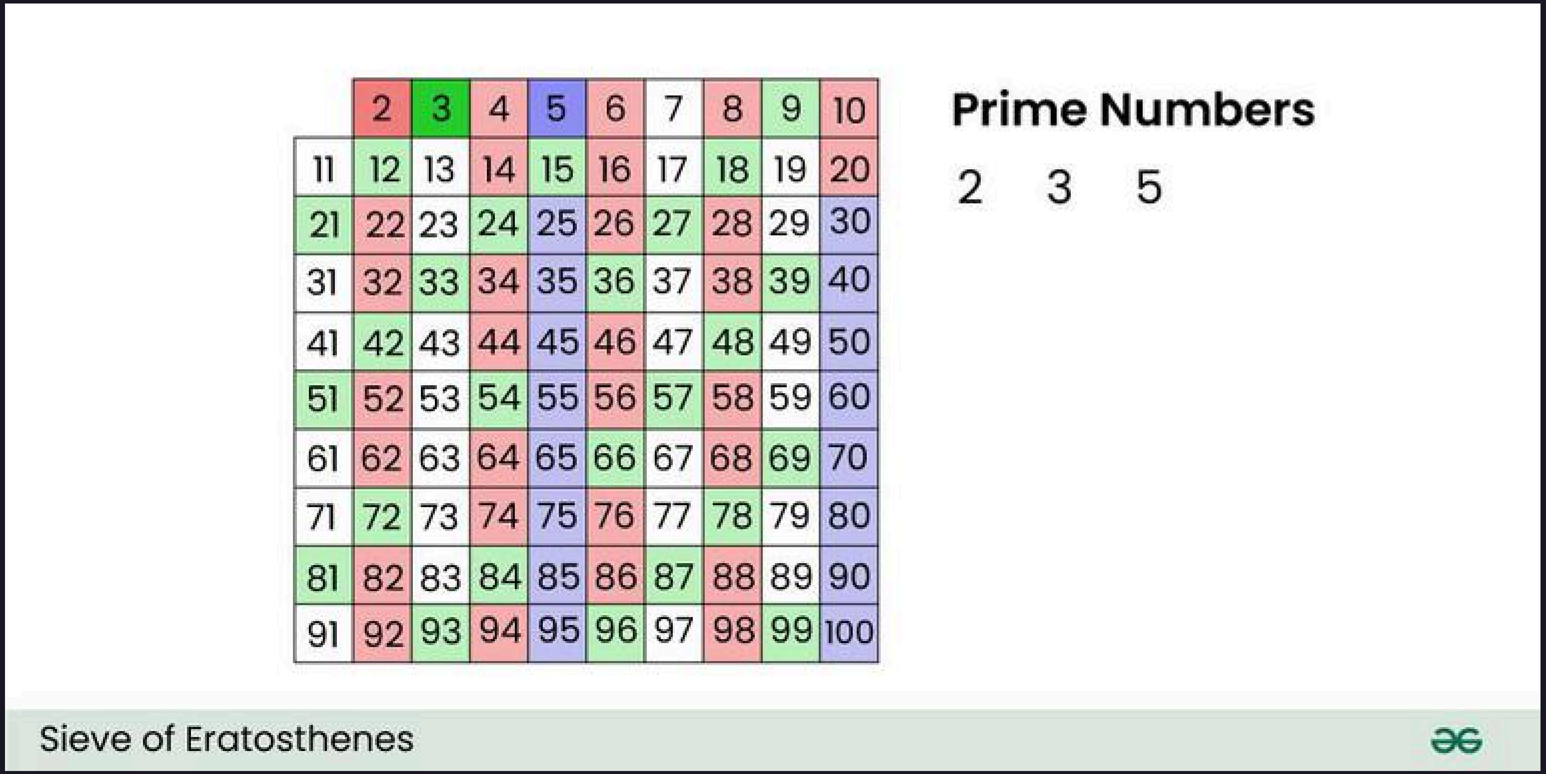
如果給我 n 個數要我判斷是不是質數，用剛剛的方法需要 $O(n\sqrt{x})$

蛤~這樣要好久ㄛ

埃式篩法 Sieve of Eratosthenes

我們每找到一個質數 p，就把他的倍數都刪掉

如果要篩的範圍是 $2 \sim m$，這樣的時間複雜度是 $O(m \log \log m)$



Sieve of Eratosthenes

```cpp
void Sieve_of_Eratosthenes(int m) {
    vector<int> primes;
    vector<bool> isprime(m + 1, true);

    for (int i = 2; i <= m; i++) {
        if (isprime[i]) {
            primes.push_back(i);
            for (int j = i; j <= m; j += i) {
                isprime[j] = false;
            }
        }
    }
}
```

程式碼：埃式篩法

雖然複雜度 $O(m \log \log m)$ 已經很夠了，但是線性是不是更舒服 hehe

線性篩 Linear Sieve

我們可以發現有些數字會被刪掉很多次，像是 6 就會被 $2, 3$ 各被刪掉一次
所以我們控制每個數字都只被刪掉一次 :)

我們儲存一個陣列叫做 lpf (least prime factor)，記錄每個數字的最小質因數

```
lpf[6] = 2
lpf[21] = 3
```

```cpp
void Linear_Sieve(int m) {
    vector<int> primes;
    vector<int> lpf(m + 1, 0);

    for (int i = 2; i < m; i++) {
        // i is a prime number
        if (lpf[i] == 0) {
            primes.push_back(i);
            lpf[i] = i;
        }

        for (int p : primes) {
            if (i * p >= m) break;
            lpf[i * p] = p;
            if (i % p == 0) break;
        }
    }
}
```

程式碼：線性篩

最大公因數 GCD & 最小公倍數 LCM

怎麼找 GCD & LCM？

很簡單啦！C++17 以後可以直接用函式搞定！

```cpp
int myGCD = gcd(12, 18);
int myLCM = lcm(12, 18);
```

輾轉相除法 Euclidean Algorithm

數學課有學過用輾轉相除法求 GCD 對吧！
那我們把他寫成程式碼也可以求ㄛ

```c
int Euclidean_Algorithm(int a, int b) {
    if (a == 0) return b;
    return Euclidean_Algorithm(b % a, a);
}
```

程式碼：輾轉相除法

擴展歐幾里得演算法 Extended Euclidean Algorithm

（警告：等等會包含大量數學，若感到身體不適請洽社團老師）

貝祖定理

對於任何整數 a, b, c，若 $ax + by = c$ 存在整數解，則 $\gcd(a, b) \mid c$

那我們現在的目標是求出一組 $ax + by = \gcd(a, b)$ 的整數解

我們等等設 $\gcd(a, b) = g$

首先，我們可以發現當 $a' = 0, b' = g$ 時有一組解是 $(x', y') = (0, 1)$

而這時的 a', b' 是不是跟輾轉相除法最後一步的結果長一樣呢？

所以我們要將 a', b', x', y' 藉由剛剛輾轉相除法的步驟推到我們的 a, b
這樣我們就可以知道我們要的 x, y 答案是多少了

如果現在的時候是 $a_{i+1}x' + b_{i+1}y' = g$，

則

$$a_{i+1} = b_i \bmod a_i$$
$$b_{i+1} = a_i$$

代入式子以後就變成

$$(b_i \bmod a_i)x' + a_i y' = d$$

剛剛的式子

$$(b_i \bmod a_i)\, x' + a_i y' = d$$

因為我們要步驟 $i+1$ 回到步驟 i，所以我們整理一下

$$b_i \bmod a_i = b_i - a_i \times \left\lfloor \frac{b_i}{a_i} \right\rfloor$$

代回剛剛的式子

$$\left(b_i - a_i \times \left\lfloor \frac{b_i}{a_i} \right\rfloor\right) x' + a_i y' = g$$

整理一下就變成

$$a_i \left(y' - \left\lfloor \frac{b_i}{a_i} \right\rfloor x'\right) + b_i x' = g$$

剛剛的式子

$$a_i\left(y' - \left\lfloor \frac{b_i}{a_i} \right\rfloor x'\right) + b_i x' = g$$

和我們要回去的 $a_i x + b_i y = g$ 相比可以發現

$$\begin{cases} x = y' - \left\lfloor \frac{b_i}{a_i} \right\rfloor x' \\ y = x' \end{cases}$$

Example :

$$\begin{tikzcd}
12x + 18y = 6 \arrow[d] & x = -1,\, y = 1 \\
6x + 12y = 6 \arrow[d] & x = 1,\, y = 0 \arrow[u] \\
0x + 6y = 6 \arrow[r] & x = 0,\, y = 1 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

恭喜！我們成功從第 $i+1$ 步回推到第 i 步了！

那我們就一直做一樣的動作，直到最後一層的時候 $(x, y) = (0, 1)$ 我們就可以回推知道答案了！

```cpp
pair<int, int> Extended_GCD(int a, int b) {
    if (a == 0)
        return (pair<int, int>) {0, 1};

    auto [x, y] = Extended_GCD(b % a, a);
    return (pair<int, int>) {y - b / a * x, x};
}
```

程式碼：擴展歐幾里得演算法

時間複雜度：$O(\log \min(a, b))$

模運算 Modular Arithmetics

同餘

一般我們稱兩個數字 a, b 同餘代表 a 除以 p 的餘數和 b 除以 p 的餘數相同

$$a \equiv b \pmod p$$

模運算性質

平常很常用到 mod 對吧，實際上 mod 跟一般的運算很像，可以加減和相乘

$$
\begin{aligned}
a + b \pmod p &\equiv a \pmod p + b \pmod p \\
a - b \pmod p &\equiv a \pmod p - b \pmod p \\
a \times b \pmod p &\equiv a \pmod p \times b \pmod p \\
a \ / \ b \pmod p &\not\equiv a \pmod p \ / \ b \pmod p
\end{aligned}
$$

注意沒有辦法用除的喔！

模逆元

在數學裡面我們學過，要計算 a/b，我們可以寫成 $a \times b^{-1}$，那這樣是不是就解決我們不能用除法的問題了！

這裡我們稱 b^{-1} 是 b 的模逆元或模反元素

不過對於一個數 a 和取餘的數 p 來說，a 對 p 有模逆元若且唯若 $\gcd(a,p)=1$
接下來我們都處理 p 是質數的情形來求模逆元，如果 $\gcd(a,p)\neq 1$ 的話就必須用 Extended Euclidean Algorithm

費馬小定理 Fermat's Little Theorum

> 對於任何整數 a，質數 p 都滿足 $a^p - a \equiv 0 \pmod p$，若 a 不是 p 的倍數，則可以推得 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$

因為

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$$

所以

$$a^{p-2} \times a \equiv 1 \pmod p$$

和這個比較一下

$$a^{-1} \times a \equiv 1 \pmod p$$

結論

$$a^{p-2} \equiv a^{-1} \pmod p$$

這樣我們就成功求出 a 的模反元素了！可以開始除囉！

快速冪

直接算

要我算 a^{100} 這很簡單，直接跑個 for loop 就好了

但是如果要求的是 a^{10^9} 呢，這樣就頭大了 :(

分解算

首先我們可以想到：$a^p = a^{p/2} \times a^{p/2}$

所以我們是不是一直用 $/\ 2$ 的方法分解，直到 $a^0 = 1$

$$a^b = \begin{cases} 1 & ,\text{if } b = 0 \\ (a^{b/2})^2 & ,\text{if } b \text{ is even} \\ (a^{b/2})^2 \times a & ,\text{if } b \text{ is odd} \end{cases}$$

由此可知，我們把 b 分解成 $\log b$ 層，所以時間複雜度是 $O(\log b)$

```cpp
int Fast_Power(int a, int b, int m) {
    if (b == 0)
        return 1;

    int mid = fstpow(a, b / 2, m);

    if (b & 1) return mid * mid % m * a % m;
    else return mid * mid % m;
}
```

程式碼：快速冪（遞迴）

```
int Fast_Power(int a, int b, int m) {
    int ans = 1;
    while (b) {
        if (b & 1)
            ans = ans * a % m;

        a = a * a % m;
        b >>= 1;
    }
    return ans;
}
```

程式碼：快速冪（迴圈）

利用快速冪就可以快速的算出剛剛算不出來的 a^{p-2} 囉！

結論

辛苦啦！一些基本的數論就到這裡！
其實數論還有很多很多的主題，有興趣就去查查看吧

- Mex
- 歐拉函數 Euler's Totient Function
- 中國剩餘定理 Chinese Reminder Theorem
- 賽局理論 Game Theory
- 矩陣 Matrix & 矩陣快速冪
- 離散對數 Discrete Log
- Pollard Rho Algorithm（酷酷的質因數分解）