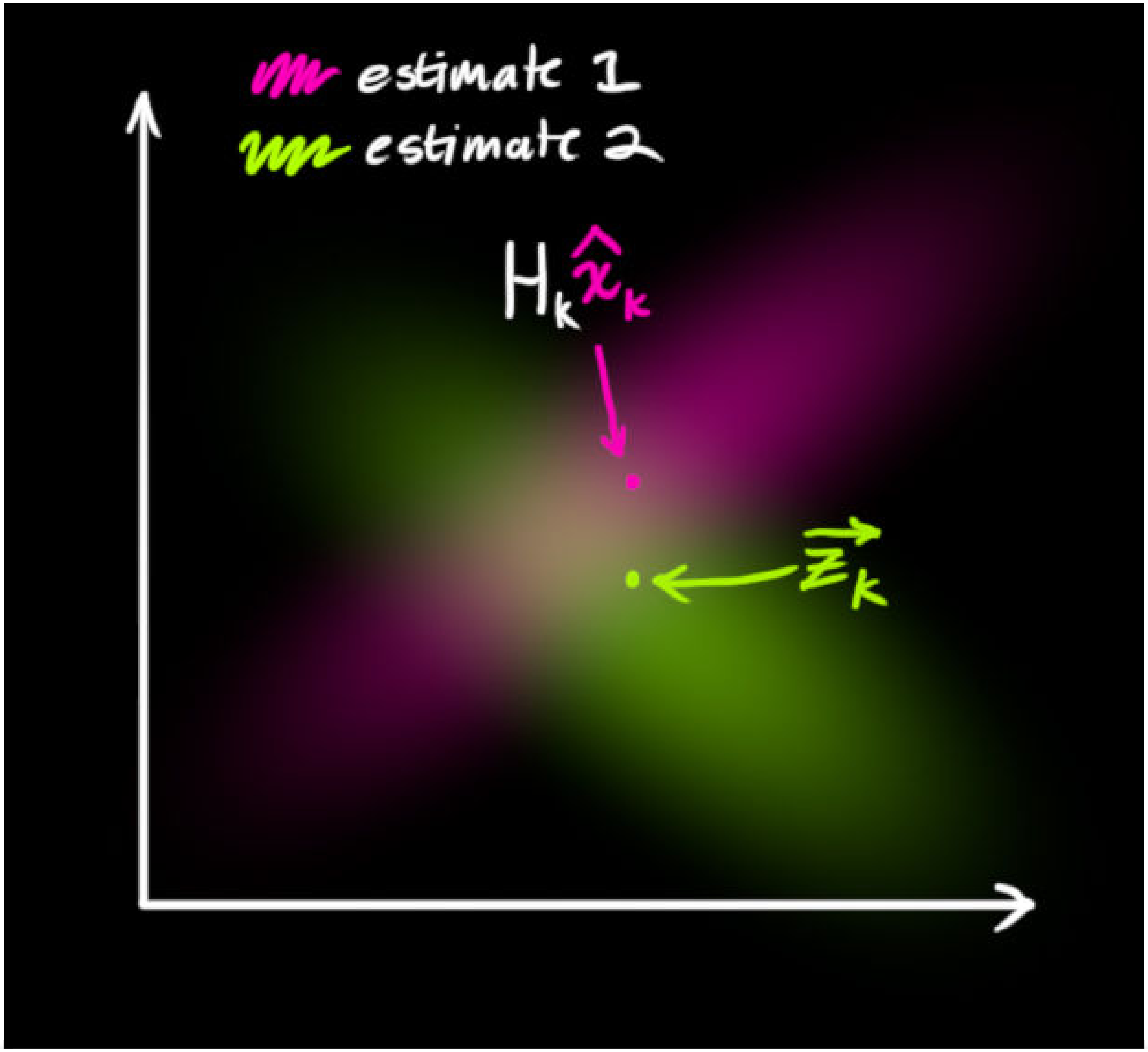

estimate 1
estimate 2
$H_k\hat{x}_k$
$\vec{z}_k$

作者：Bzarg

编译：Bot

编者按：卡尔曼滤波（Kalman filter）是一种高效的自回归滤波器，它能在存在诸多不确定性情况的组合信息中估计动态系统的状态，是一种强大的、通用性极强的工具。它的提出者，鲁道夫.E.卡尔曼，在一次访问NASA埃姆斯研究中心时，发现这种方法能帮助解决阿波罗计划的轨道预测问题，后来NASA在阿波罗飞船的导航系统中确实也用到了这个滤波器。最终，飞船正确驶向月球，完成了人类历史上的第一次登月。

本文是国外博主Bzarg在2015年写的一篇图解。虽然是几年前的文章，但是动态定位、自动导航、时间序列模型、卫星导航——卡尔曼滤波的应用范围依然非常广。那么，作为软件工程师和机器学习工程师，你真的了解卡尔曼滤波吗？

什么是卡尔曼滤波?

对于这个滤波器，我们几乎可以下这么一个定论：只要是存在不确定信息的动态系统，卡尔曼滤波就可以对系统下一步要做什么做出有根据的推测。即便有噪声信息干扰，卡尔曼滤波通常也能很好的弄清楚究竟发生了什么，找出现象间不易察觉的相关性。

因此卡尔曼滤波非常适合不断变化的系统，它的优点还有内存占用较小（只需保留前一个状态）、速度快，是实时问题和嵌入式系统的理想选择。

如果你曾经Google过卡尔曼滤波的教程（如今有一点点改善），你会发现相关的算法教程非常可怕，而且也没具体说清楚是什么。事实上，卡尔曼滤波很简单，如果我们以正确的方式看它，理解是很水到渠成的事。

本文会用大量清晰、美观的图片和颜色来解释这个概念，读者只需具备概率论和矩阵的一般基础知识。

我们能用卡尔曼滤波做什么?

让我们举个例子：你造了一个可以在树林里四处溜达的小机器人，为了让它实现导航，机器人需要知道自己所处的位置。

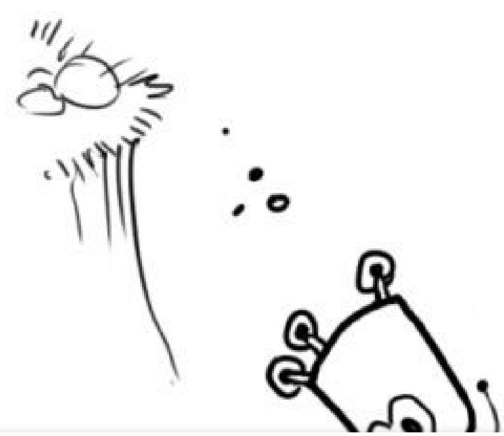
赞同 1.3K

分享

也就是说，机器人有一个包含位置信息和速度信息的状态 $\vec{x}_k$ ：

注意，在这个例子中，状态是位置和速度，放进其他问题里，它也可以是水箱里的液体体积、汽车引擎温度、触摸板上指尖的位置，或者其他任何数据。

我们的小机器人装有GPS**传感器**，定位精度10米。虽然一般来说这点精度够用了，但我们希望它的定位误差能再小点，毕竟树林里到处都是土坑和陡坡，如果机器人稍稍偏了那么几米，它就有可能滚落山坡。所以GPS提供的信息还不够充分。



状态不是全知的：它可能会逆风行驶，轮子打滑，滚落颠簸地形……所以车轮转动次数并不能完全代表实际行驶距离，基于这个距离的预测也不完美。

这个问题下，GPS为我们提供了一些关于状态的信息，但那是间接的、不准确的；我们的预测提供了关于机器人轨迹的信息，但那也是间接的、不准确的。

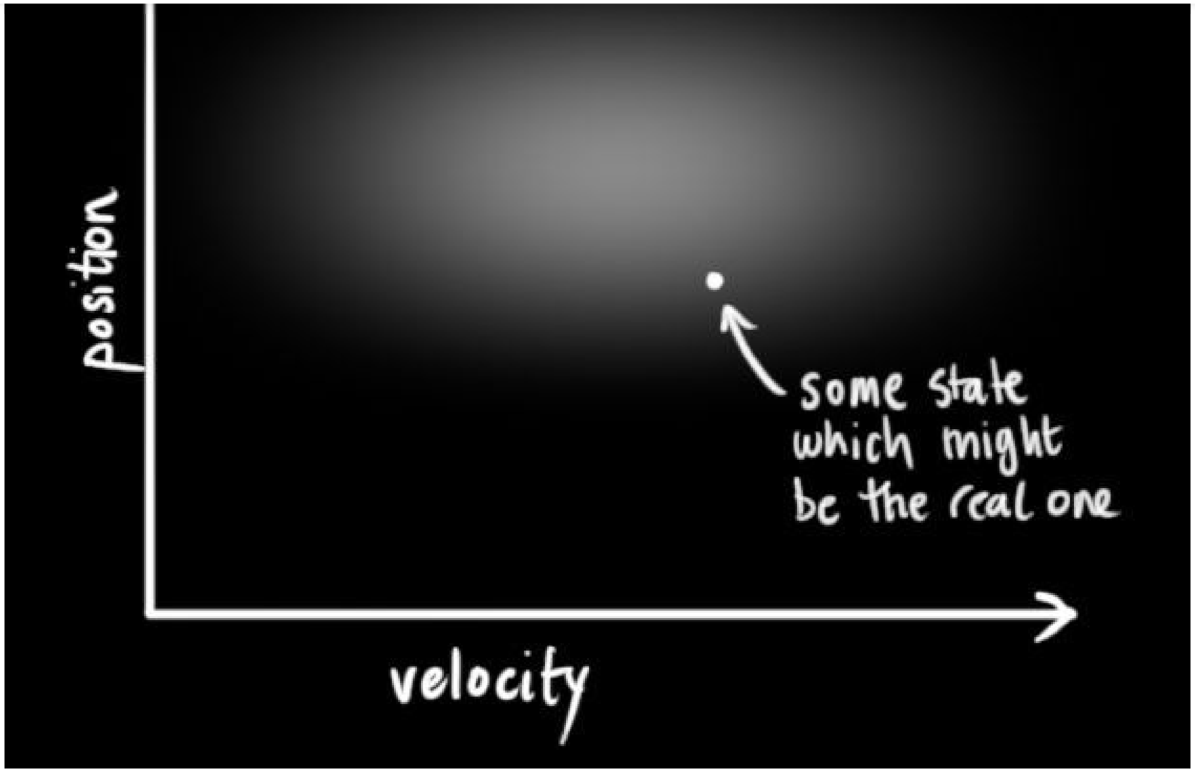
但以上就是我们能够获得的全部信息，在它们的基础上，我们是否能给出一个完整预测，让它的准确度比机器人搜集的单次预测汇总更高？用了卡尔曼滤波，这个问题可以迎刃而解。

卡尔曼滤波眼里的机器人问题

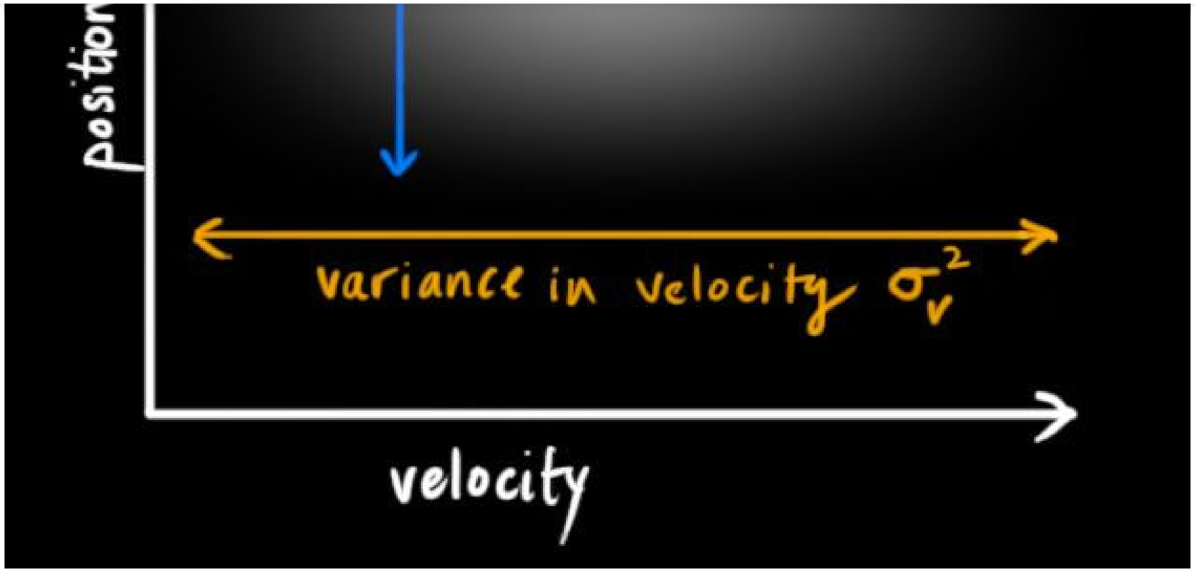
还是上面这个问题，我们有一个状态，它和速度、位置有关：

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} p \\ v \end{bmatrix}$$

我们不知道它们的实际值是多少，但掌握着一些速度和位置的可能组合，其中某些组合的可能性更高：

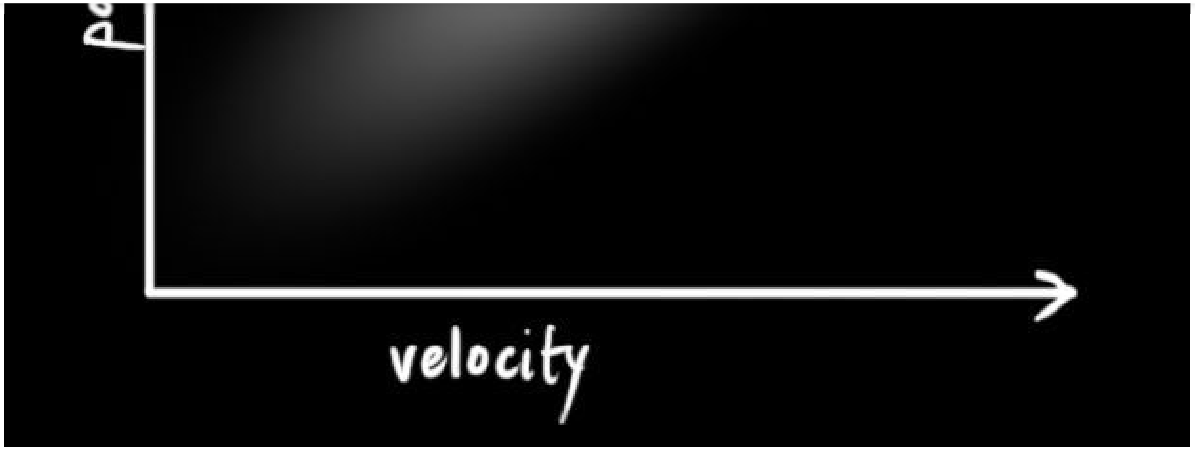


卡尔曼滤波假设两个变量（在我们的例子里是位置和速度）都应该是**随机的**，而且符合**高斯分布**。每个变量都有一个**均值** μ ，它是随机分布的中心；有一个方差 σ^2 ，它衡量组合的不确定性。



在上图中，位置和速度是**不相关**的，这意味着我们不能从一个变量推测另一个变量。

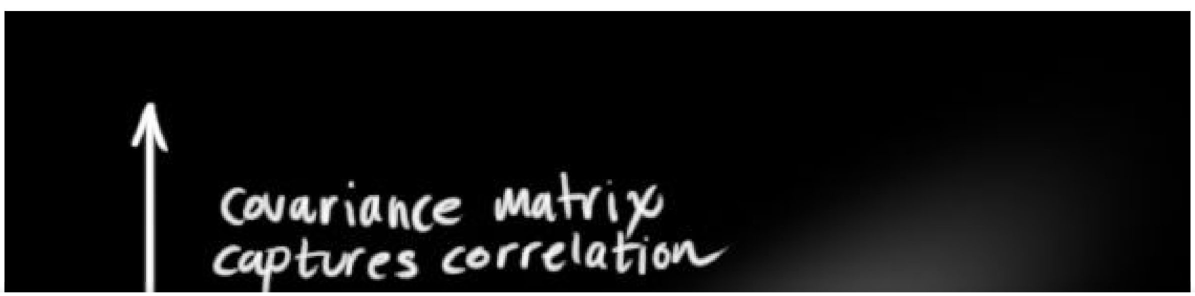
那么如果位置和速度相关呢？如下图所示，机器人前往特定位置的可能性取决于它拥有的速度。

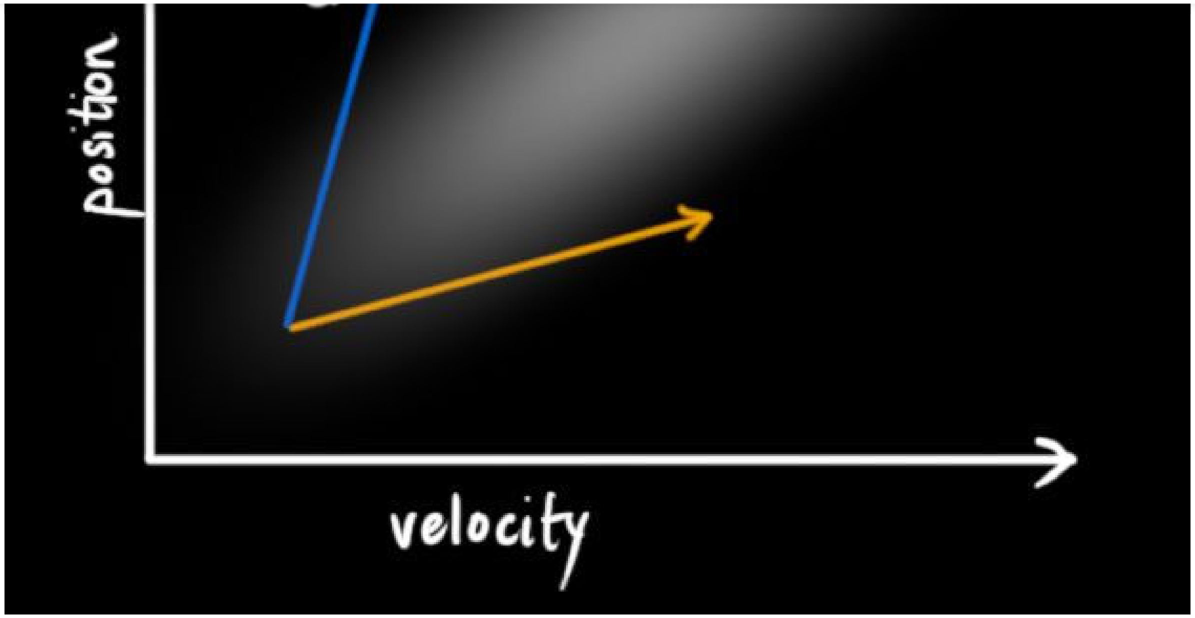


这不难理解，如果基于旧位置估计新位置，我们会产生这两个结论：如果速度很快，机器人可能移动得更远，所以得到的位置会更远；如果速度很慢，机器人就走不了那么远。

这种关系对目标跟踪来说非常重要，因为它提供了更多信息：一个可以衡量可能性的标准。这就是卡尔曼滤波的目标：从不确定信息中挤出尽可能多的信息！

为了捕获这种相关性，我们用的是协方差矩阵。简而言之，矩阵的每个值是第 i 个变量和第 j 个变量之间的相关程度（由于矩阵是对称的， i 和 j 的位置可以随便交换）。我们用 Σ 表示协方差矩阵，在这个例子中，就是 Σ_{ij} 。

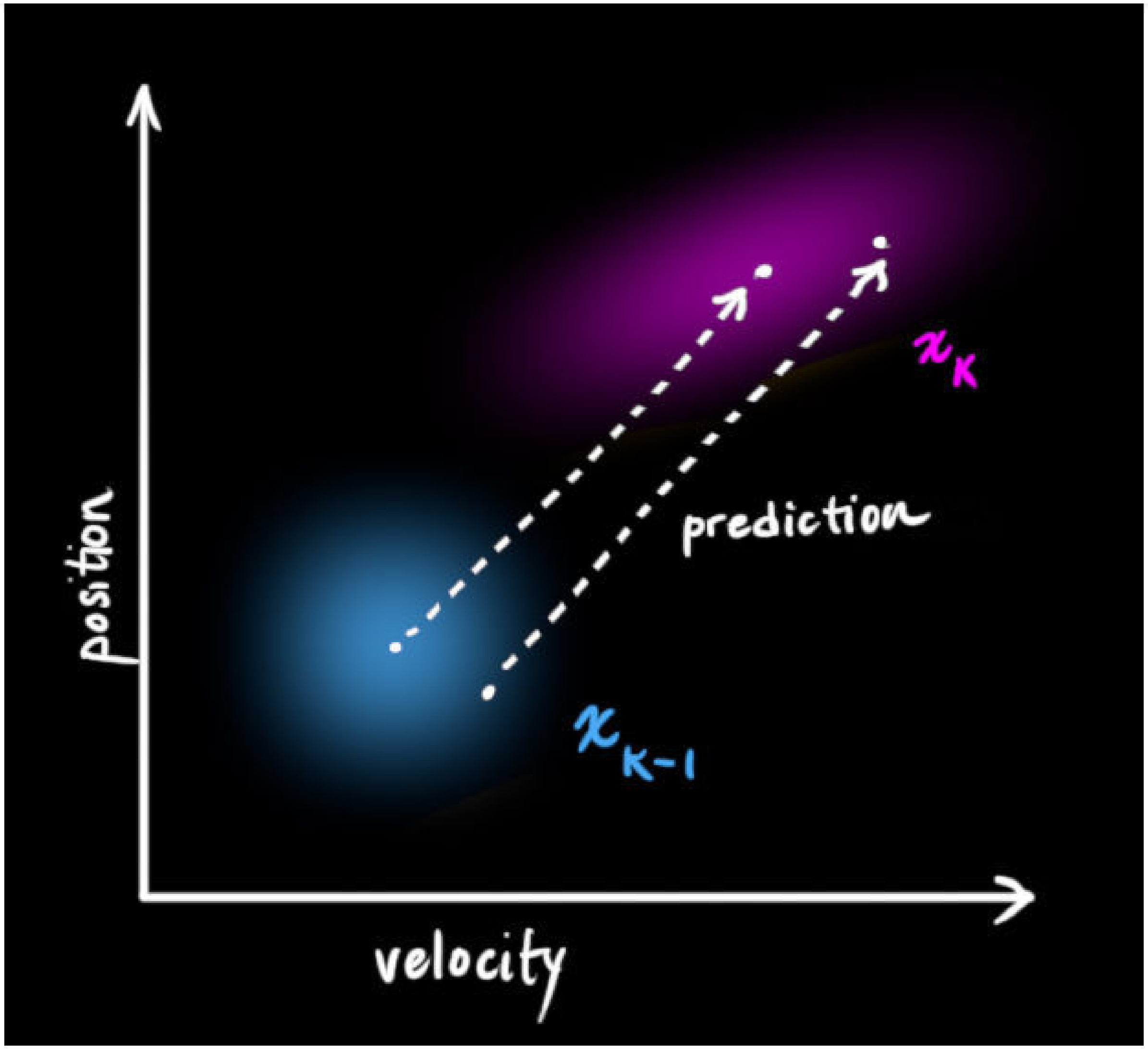




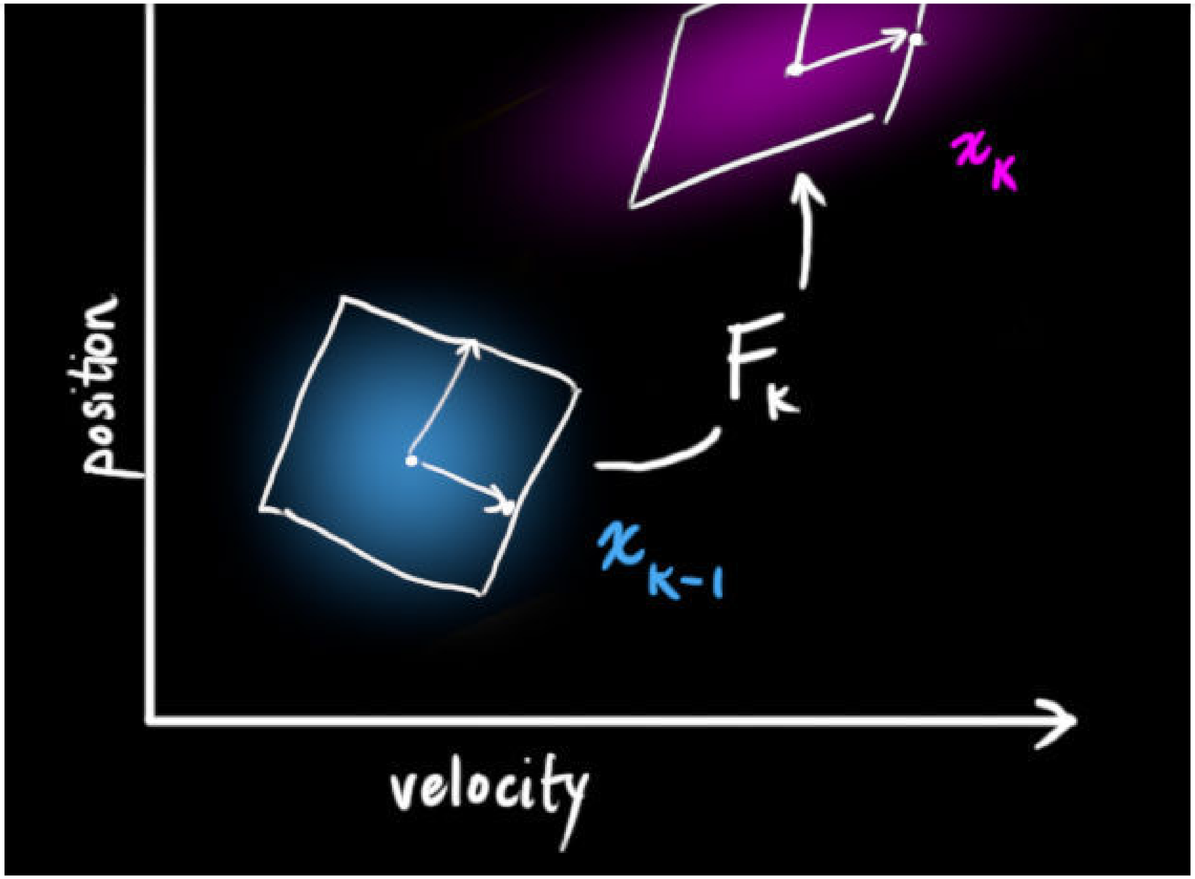
用矩阵描述问题

为了把以上关于状态的信息建模为高斯分布（图中色块），我们还需要 k 时的两个信息：最佳估计 $\hat{x}_k$ （均值，也就是 μ ），协方差矩阵 P_k 。（虽然还是用了位置和速度两个变量，但只要和问题相关，卡尔曼滤波可以包含任意数量的变量）

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \begin{bmatrix} \text{position} \\ \text{velocity} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} \Sigma_{pp} & \Sigma_{pv} \\ \Sigma_{vp} & \Sigma_{vv} \end{bmatrix}$$



我们可以用矩阵 F_k 表示这个预测步骤：



它从原始预测中取每一点，并将其移动到新的预测位置。如果原始预测是正确的，系统就会移动到新位置。

这是怎么做到的？为什么我们可以用矩阵来预测机器人下一刻的位置和速度？下面是个简单公式：

$$p_k = p_{k-1} + \Delta t v_{k-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \\ = \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1}$$

这是一个预测矩阵，它能给出机器人的下一个状态，但目前我们还不知道协方差矩阵的更新方法。这也是我们要引出下面这个等式的原因：如果我们将分布中的每个点乘以矩阵A，那么它的协方差矩阵会发生什么变化

$$Cov(x) = \Sigma \\ Cov(\mathbf{A}x) = \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}^T$$

把这个式子和上面的最佳估计 $\hat{x}_k$ 结合，可得：

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \\ \mathbf{P}_k = \mathbf{F}_\mathbf{k} \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{F}_k^T$$

外部影响

但是，除了速度和位置，外因也会对系统造成影响。比如模拟火车运动，除了列车自驾系统，列车操作员可能会手动调速。在我们的机器人示例中，导航软件也可以发出停止指令。对于这些信息，我们把它作为一个向量 $\vec{u}_k$ ，纳入预测系统作为修正。

假设油门设置和控制命令是已知的，我们知道火车的预期加速度 a 。根据运动学基本定理，我们可得：

把它转成矩阵形式：

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_k &= \mathbf{F}_k\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \begin{bmatrix}\frac{\Delta t^2}{2} \\ \Delta t\end{bmatrix} a \\ &= \mathbf{F}_k\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}_k\vec{\mathbf{u}}_k\end{aligned}$$

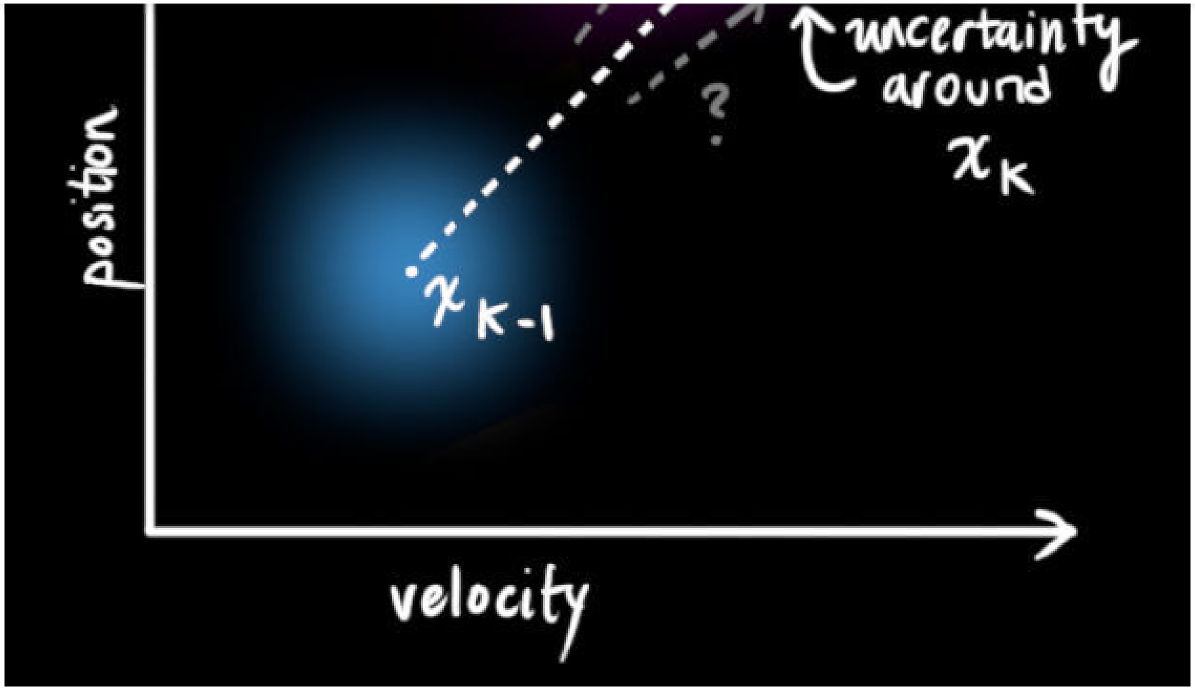
B_k 是控制矩阵，$\vec{u}_k$ 是控制向量。如果外部环境异常简单，我们可以忽略这部分内容，但是如果添加了外部影响后，模型的准确率还是上不去，这又是为什么呢？

外部不确定性

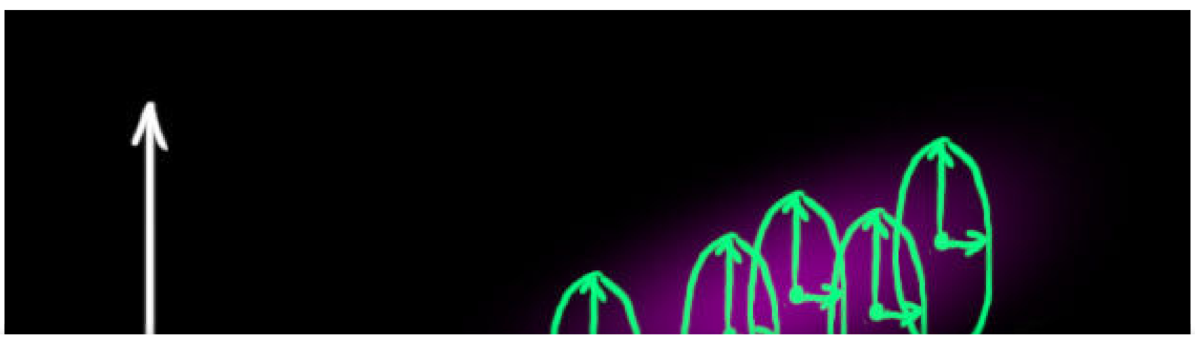
当一个国家只按照自己的步子发展时，它会自生自灭。当一个国家开始依赖外部力量发展时，只要这些外部力量是已知的，我们也能预测它的存亡。

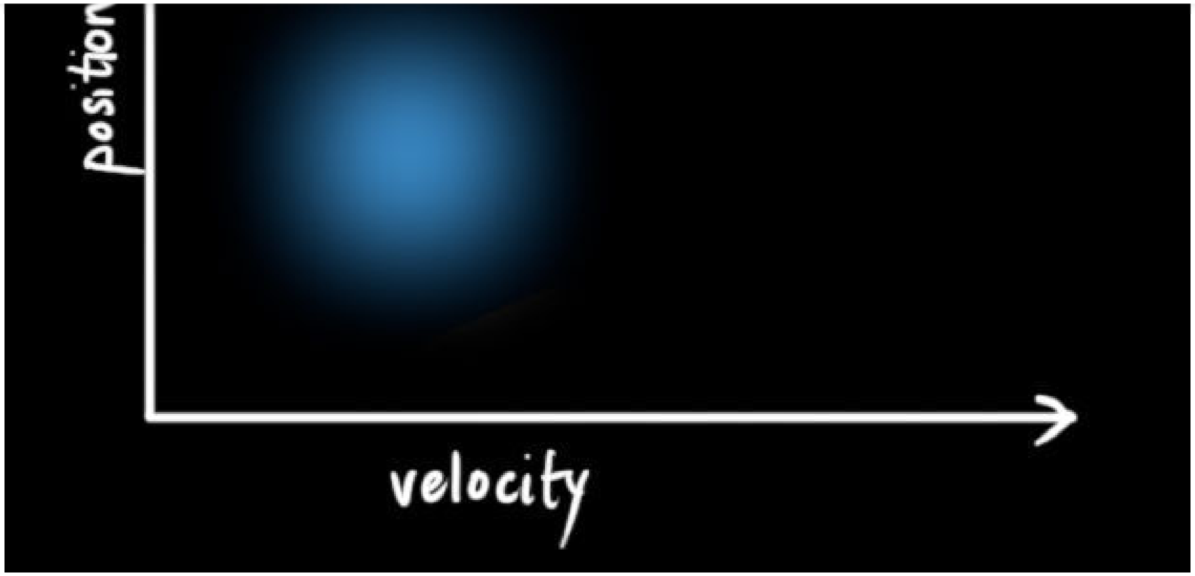
但是，如果存在我们不知道的力量呢？当我们监控无人机时，它可能会受到风的影响；当我们跟踪轮式机器人时，它的轮胎可能会打滑，或者粗糙地面会降低它的移速。这些因素是难以掌握的，如果出现其中的任意一种情况，预测结果就难以保障。

这要求我们在每个预测步骤后再加上一些新的不确定性，来模拟和“世界”相关的所有不确定性：

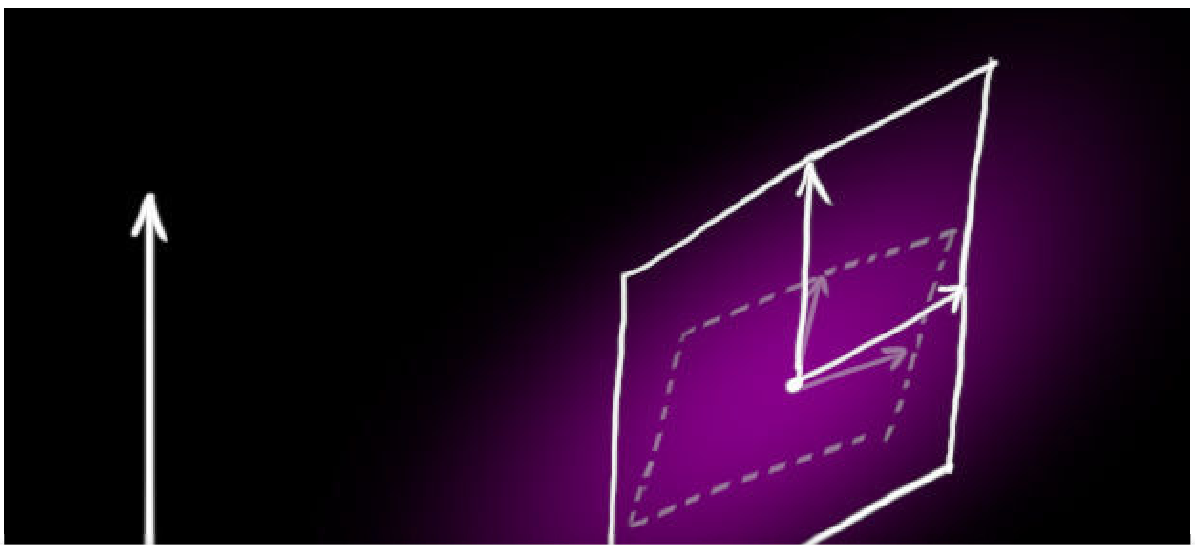


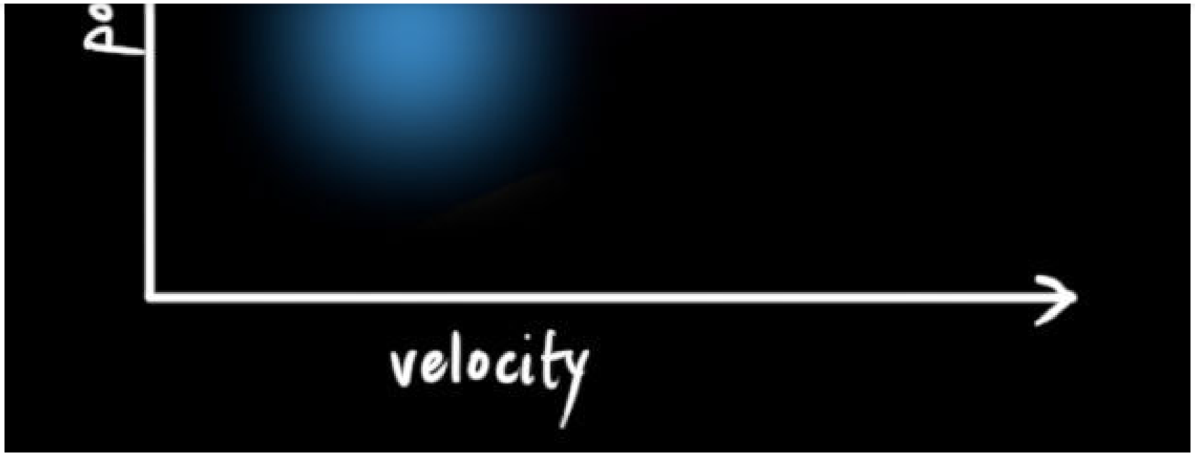
如上图所示，加上外部不确定性后，$\hat{x}_{k-1}$ 的每个预测状态都可能会移动到另一点，也就是蓝色的高斯分布会移动到紫色高斯分布的位置，并且具有协方差 Q_k 。换句话说，我们把这些不确定影响视为协方差 Q_k 的噪声。





这个紫色的高斯分布拥有和原分布相同的均值，但协方差不同。





我们在原式上加入 Q_k ：

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_k &= \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}_k \vec{\mathbf{u}_k} \\ \mathbf{P}_k &= \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{F}_k^T + \mathbf{Q}_k\end{aligned}$$

简而言之，这里：

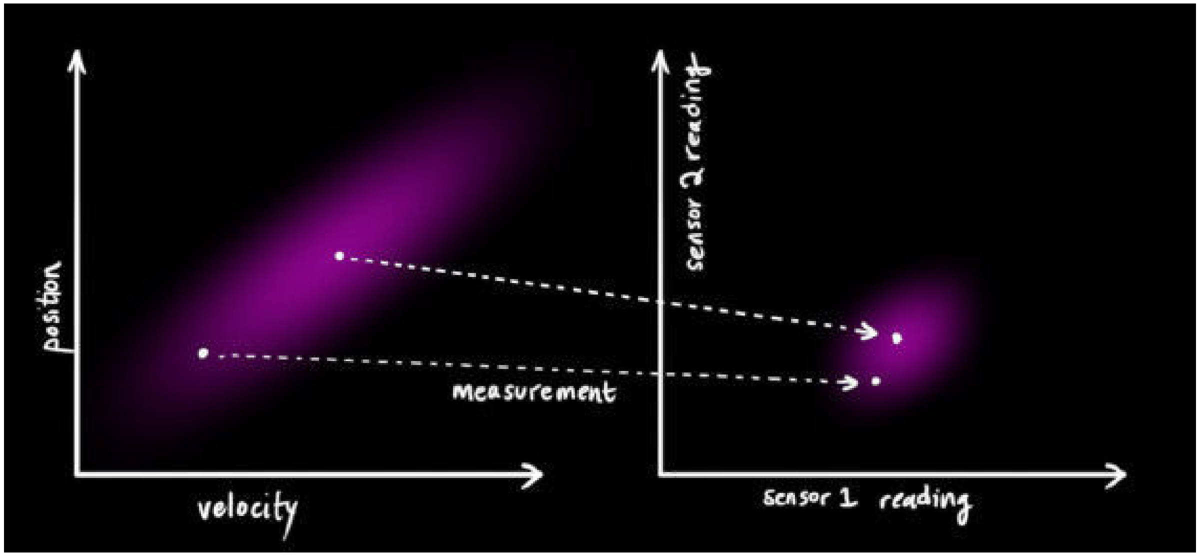
新的最佳估计 是基于 原最佳估计 和 已知外部影响 校正后得到的预测。

新的不确定性 是基于 原不确定性 和 外部环境的不确定性 得到的预测。

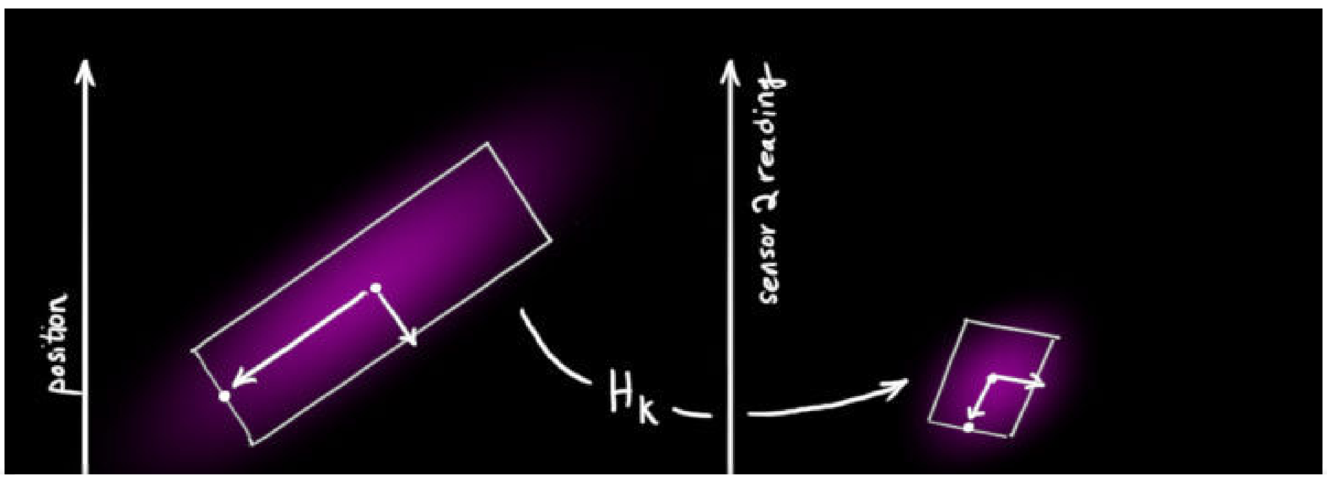
现在，有了这些概念介绍，我们可以把传感器数据输入其中。

通过测量来细化估计值

下产生的一组读数。



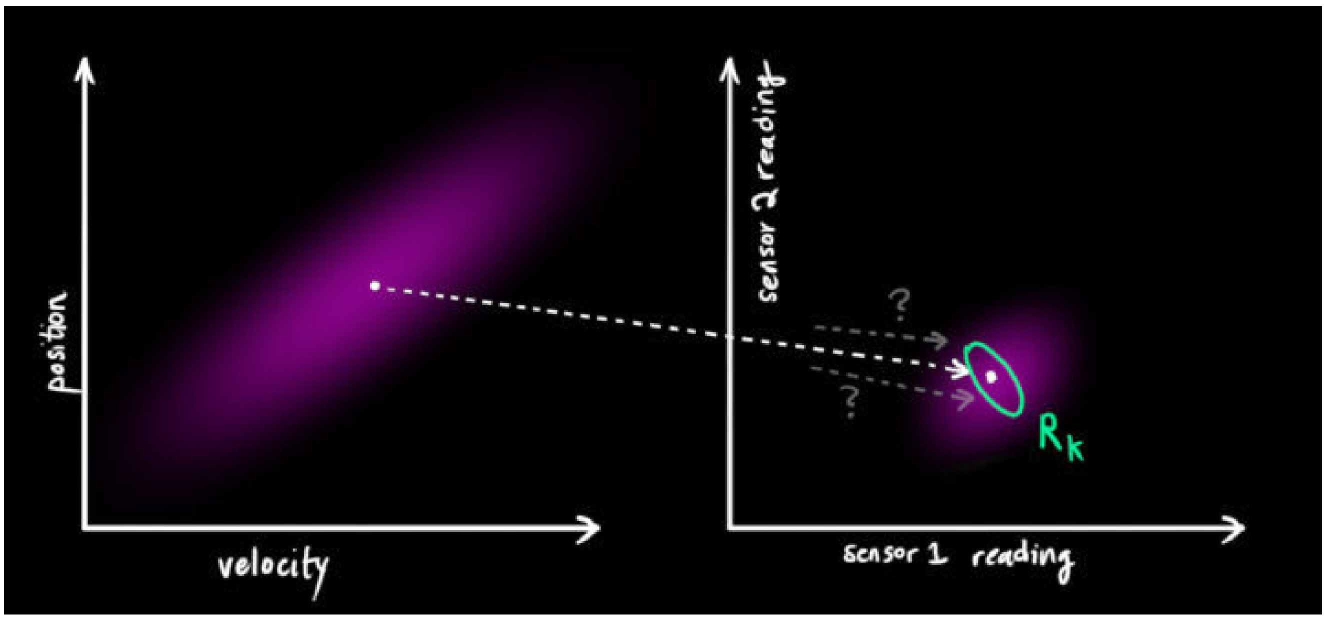
请注意，读数的规模和状态的规模不一定相同，所以我们把传感器读数矩阵设为 H_k 。



把这些分布转换为一般形式：

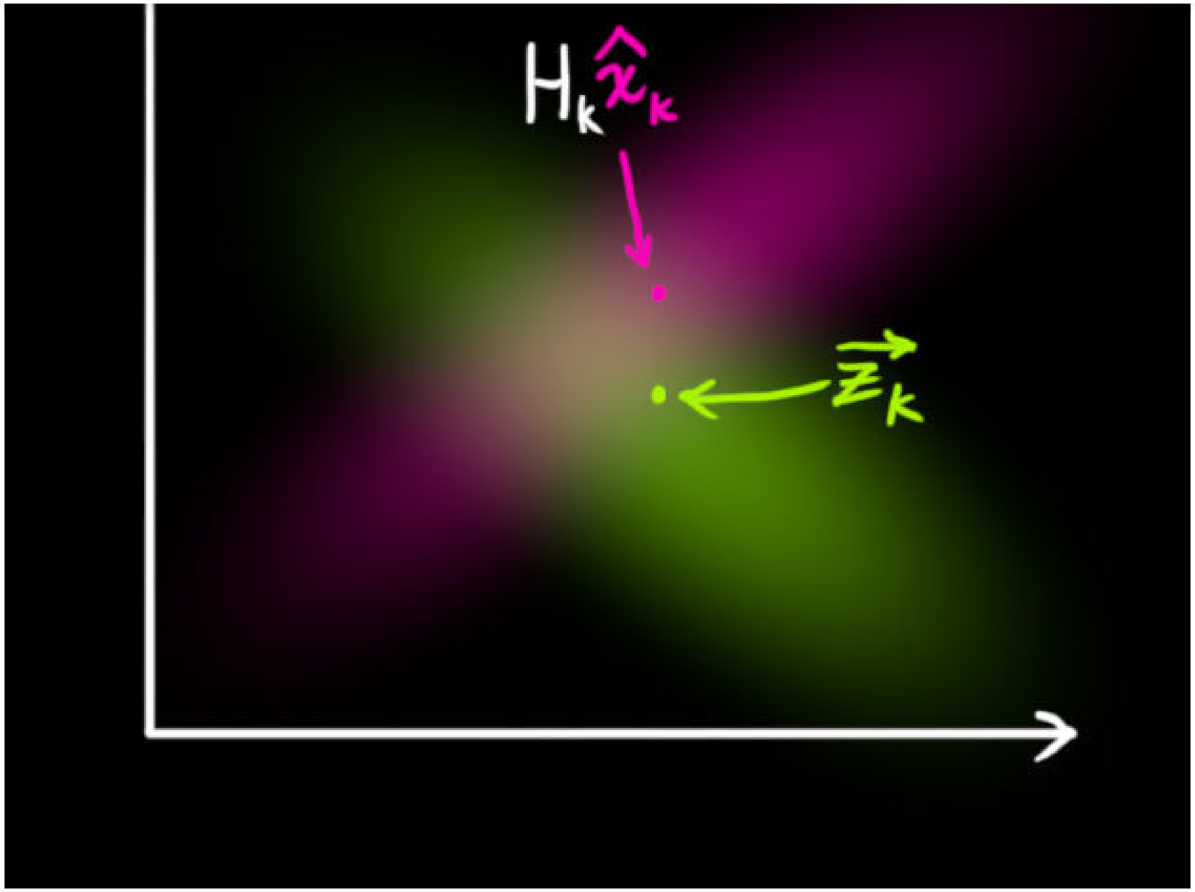
$$\vec{\mu}_{\text{expected}} = \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k$$
$$\mathbf{\Sigma}_{\text{expected}} = \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k \mathbf{H}_k^T$$

卡尔曼滤波的一大优点是擅长处理传感器噪声。换句话说，由于种种因素，传感器记录的信息其实是不准的，一个状态事实上可以产生多种读数。



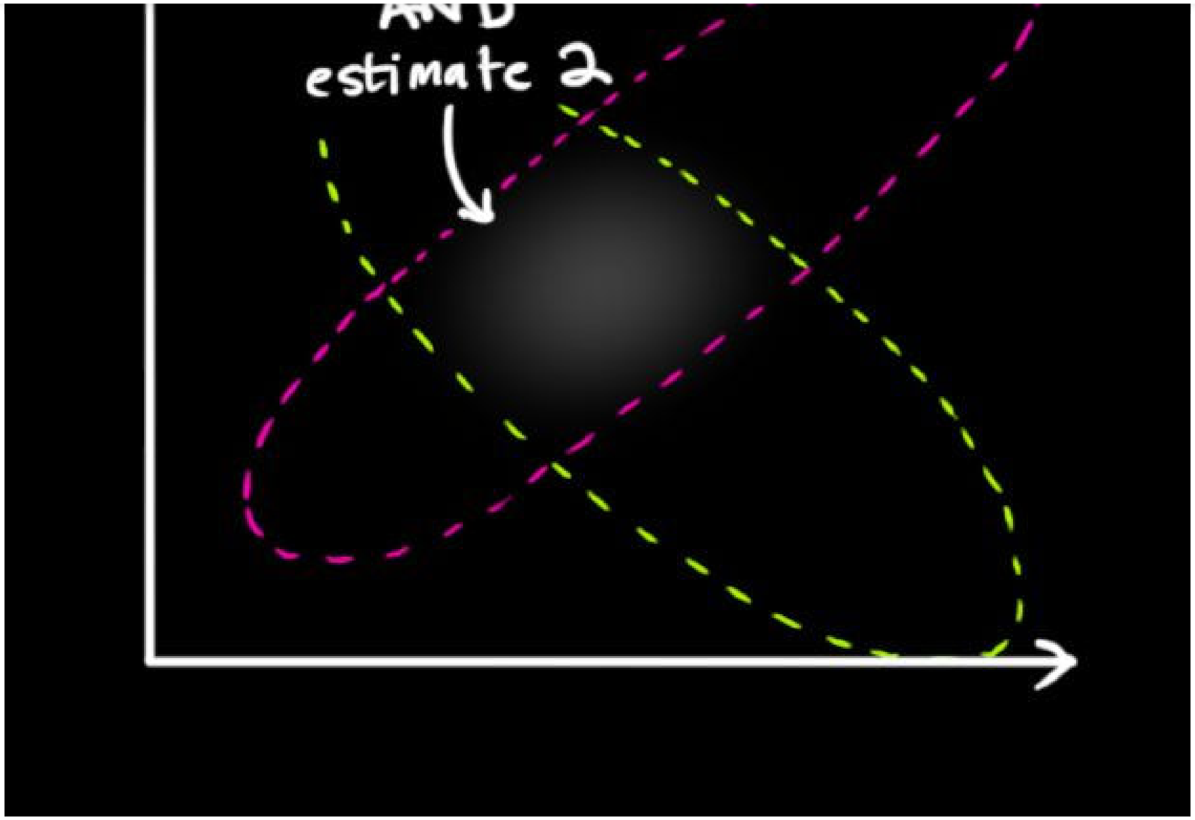
我们将这种不确定性（即传感器噪声）的协方差设为 R_k ，读数的分布均值设为 z_k 。

现在我们得到了两块高斯分布，一块围绕预测的均值，另一块围绕传感器读数。

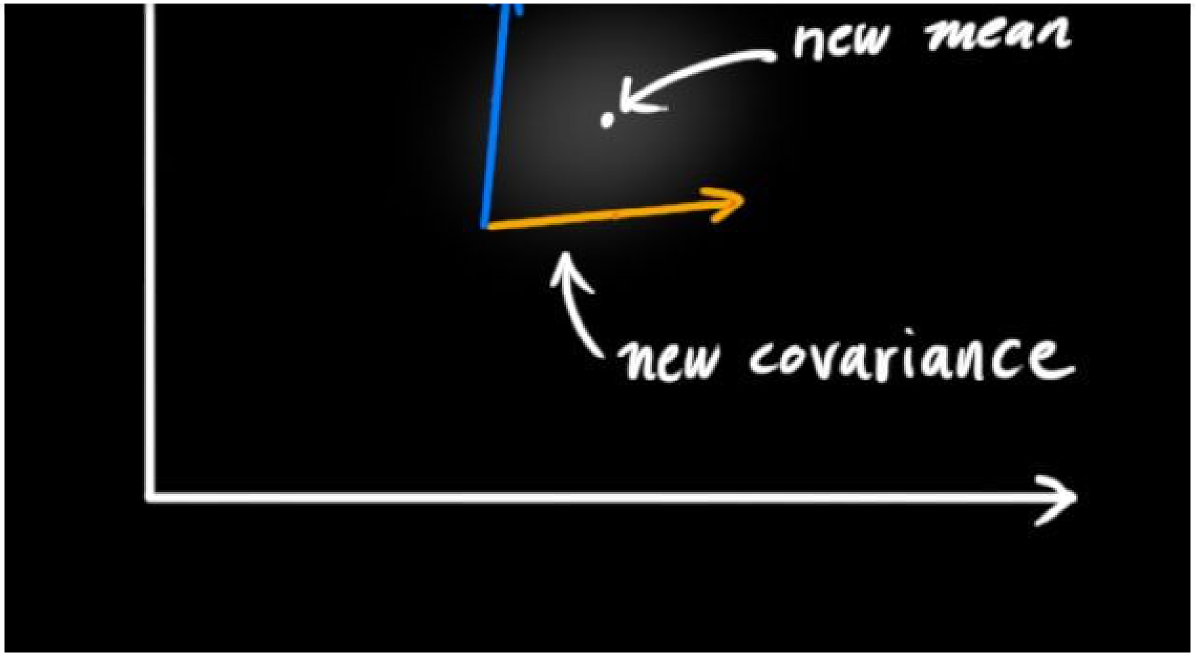


如果要生成靠谱预测，模型必须调和这两个信息。也就是说，对于任何可能的读数 (z_1, z_2) ，这两种方法预测的状态都有可能是准的，也都有可能是不准的。重点是我们怎么找到这两个准确率。

最简单的方法是两者相乘：



两块高斯分布相乘后，我们可以得到它们的重叠部分，这也是会出现最佳估计的区域。换个角度看，它看起来也符合高斯分布：

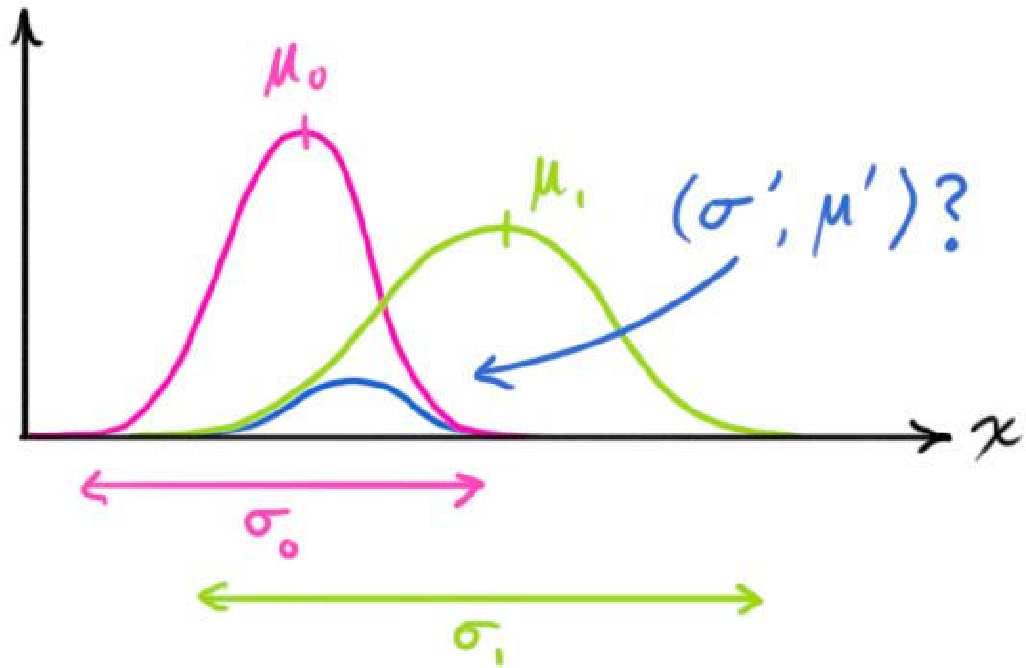


事实证明，当你把两个高斯分布和它们各自的均值和协方差矩阵相乘时，你会得到一个拥有独立均值和协方差矩阵的新高斯分布。最后剩下的问题就不难解决了：我们必须有一个公式来从旧的参数中获取这些新参数！

结合高斯

让我们从一维看起，设方差为 σ^2 ，均值为 μ ，一个标准一维高斯钟形曲线方程如下所示：

$$\mathcal{N}(x,\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



$$\mathcal{N}(x, \mu_0, \sigma_0) \cdot \mathcal{N}(x, \mu_1, \sigma_1) \stackrel{?}{=} \mathcal{N}(x, \mu', \sigma')$$

把这个式子按照一维方程进行扩展，可得：

$$\mu' = \mu_0 + \frac{\sigma_0^2(\mu_1 - \mu_0)}{\sigma_0^2 + \sigma_1^2}$$

$$\sigma'^2 = \sigma_0^2 - \frac{\sigma_0^4}{\sigma_0^2 + \sigma_1^2}$$

$$
\mathbf{k} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2 + \sigma_1^2}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu' &= \mu_0 + \mathbf{k}(\mu_1 - \mu_0) \\
\sigma'^2 &= \sigma_0^2 - \mathbf{k}\sigma_0^2
\end{aligned}
$$

以上是一维的内容，如果是多维空间，把这个式子转成矩阵格式：

$$
\mathbf{K} = \Sigma_0(\Sigma_0 + \Sigma_1)^{-1}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{\mu}' &= \vec{\mu_0} + \mathbf{K}(\vec{\mu_1} - \vec{\mu_0}) \\
\Sigma' &= \Sigma_0 - \mathbf{K}\Sigma_0
\end{aligned}
$$

这个矩阵 K 就是我们说的**卡尔曼增益**，easy！

把它们结合在一起

截至目前，我们有用矩阵 $(\mu_0, \Sigma_0) = (H_k \hat{x}_k, H_k P_k H_k^T)$ 预测的分布，有用传感器读数 $(\mu_1, \Sigma_1) = (\vec{z}_k, R_k)$ 预测的分布。把它们代入上节的矩阵等式中：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k' &= \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}(\vec{\mathbf{z}_k} - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k) \\
\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k' \mathbf{H}_k^T &= \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k \mathbf{H}_k^T - \mathbf{K}\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k \mathbf{H}_k^T
\end{aligned}
$$

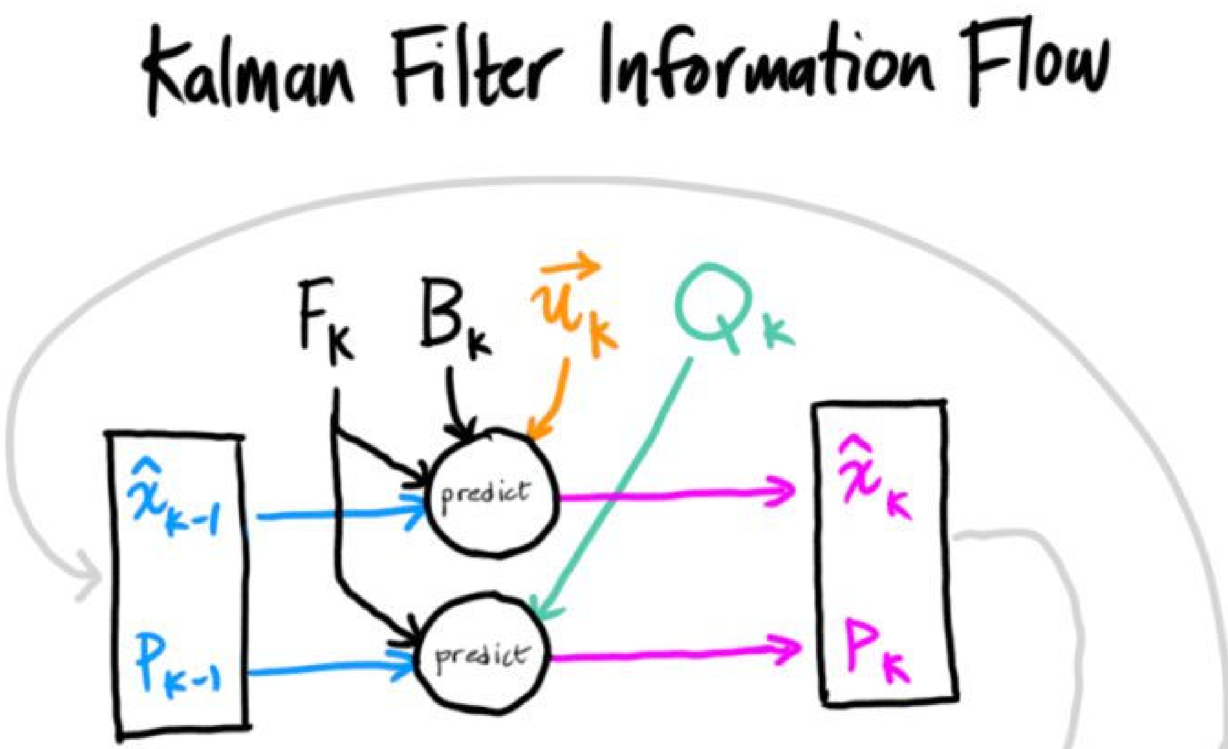
相应的，卡尔曼增益就是：

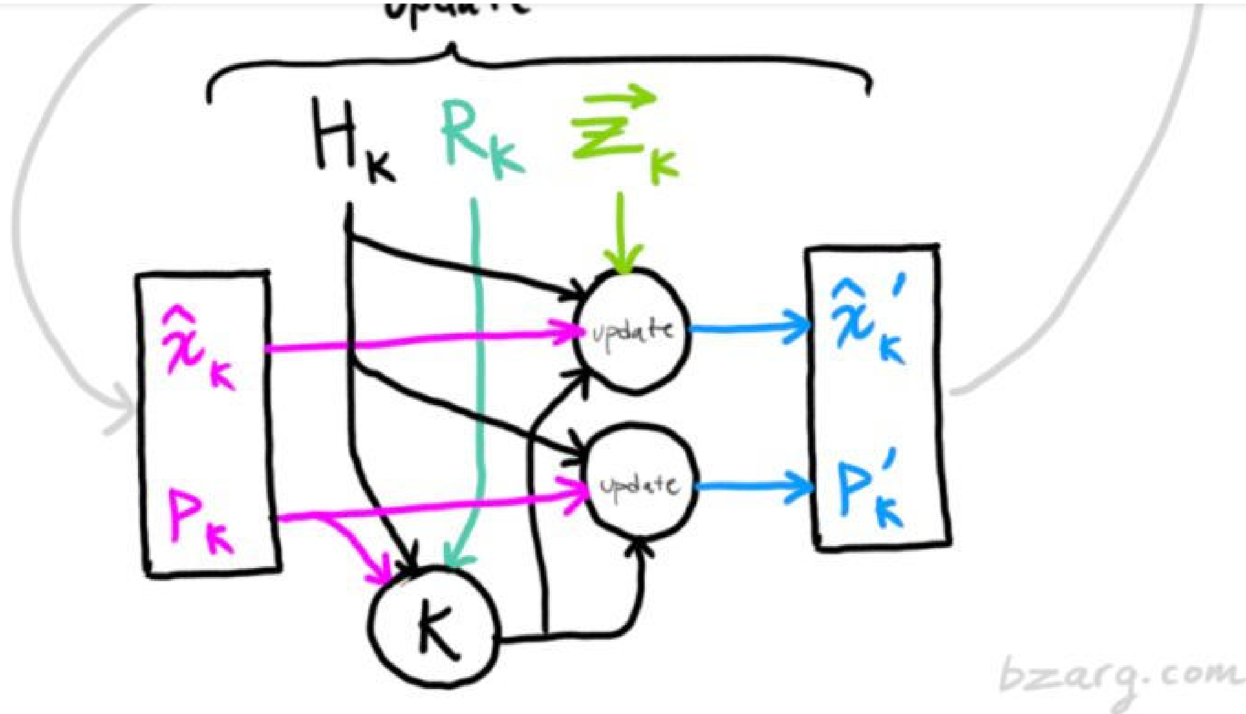
考虑到 K 里还包含着一个 H_k ，我们再精简一下上式：

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}'_k &= \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}'(\vec{\mathbf{z}_k} - \mathbf{H}_k\hat{\mathbf{x}}_k) \\
\mathbf{P}'_k &= \mathbf{P}_k - \mathbf{K}'\mathbf{H}_k\mathbf{P}_k
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{K}' = \mathbf{P}_k\mathbf{H}_k^T(\mathbf{H}_k\mathbf{P}_k\mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}
$$

最后， $\hat{x}'_k$ 是我们的最佳估计值，我们可以把它继续放进去做另一轮预测：





希望这篇文章能对你有用！

编辑于 2018-07-17

线性代数　机器学习　机器人

推荐阅读

卡尔曼滤波：从入门到精通

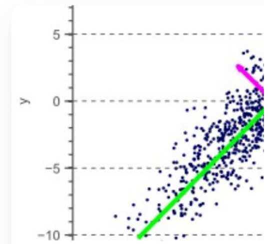
最早接触卡尔曼滤波是在卫星导航课中，GPS 和IMU 结合时常会用到卡尔曼滤波。但学完了也只明白了数学推导，不过是“会做题的机器”。最近在学习SLAM 时想要重新好好温习一下卡尔曼滤波，虽...

David LEE

卡尔曼滤波学习笔记

由于毕业设计所需，这两天学习了一下卡尔曼滤波算法，一开始看了许许多多的教程，但我的感觉是：很多都是定性的讲解（通过举出实例，读者能很好理解该算法的大致过程）但缺乏定量，也即公式...

lim0



详细推导PCA算法

Jason

55 条评论 切换为时间排序

写下你的评论...

赞同 1.3K

分享

superheasy 8 个月前

满足矩阵A分布 是什么？概率没学好，没看懂。。。

2

论智 (作者) 回复 superheasy 8 个月前

多谢指出，可能当时有点脑抽。。是任意矩阵A，用来解释乘上预测矩阵FK后的变化（小编再去检查下）

5

李木子 回复 论智 (作者) 7 个月前

对协方差矩阵的每一个元素乘一个矩阵，等于这个矩阵乘协方差矩阵再乘这个矩阵的转置矩阵，是这么理解么？都毕业好多年了，而且概率论没怎么学懂，麻烦您能稍微解释下么，感谢！

赞

云中客 8 个月前

篇篇精品

赞

TY8822 8 个月前

赞同 1.3K 55 条评论 分享 收藏 ···