Homework - 布朗运动

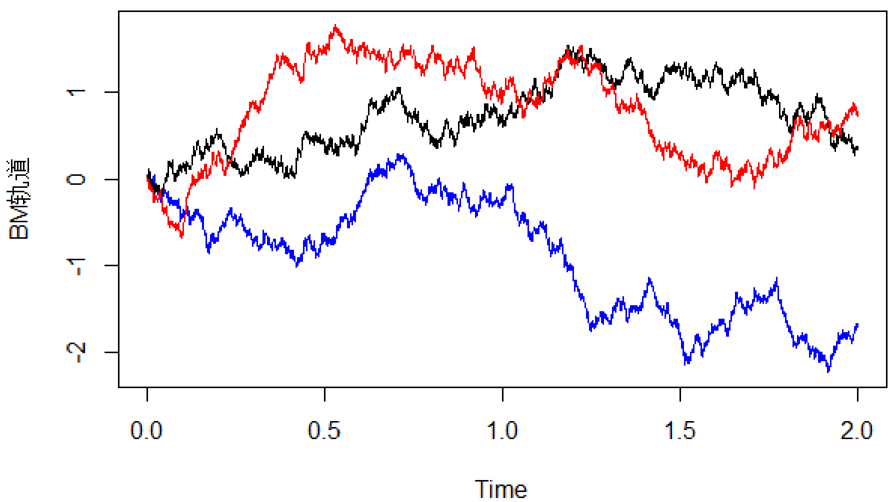
刘彧麟

2022.4.29

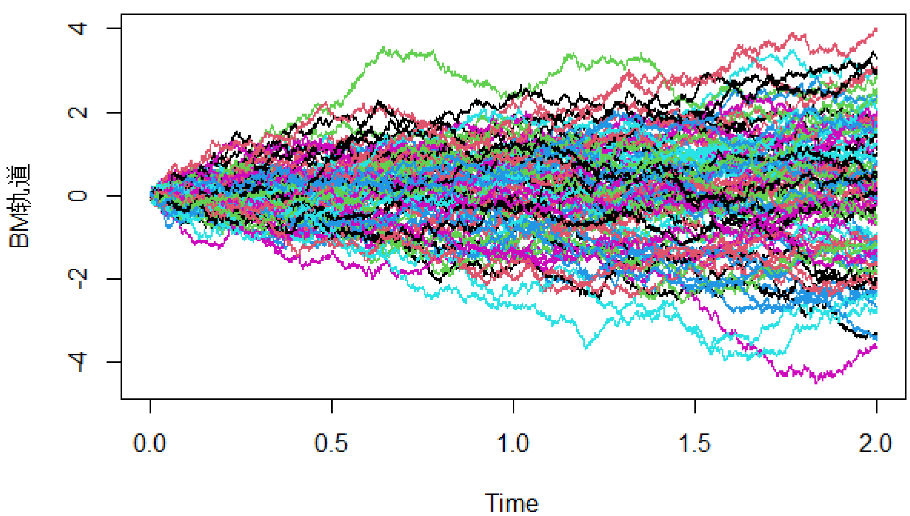
编程语言: R

T1

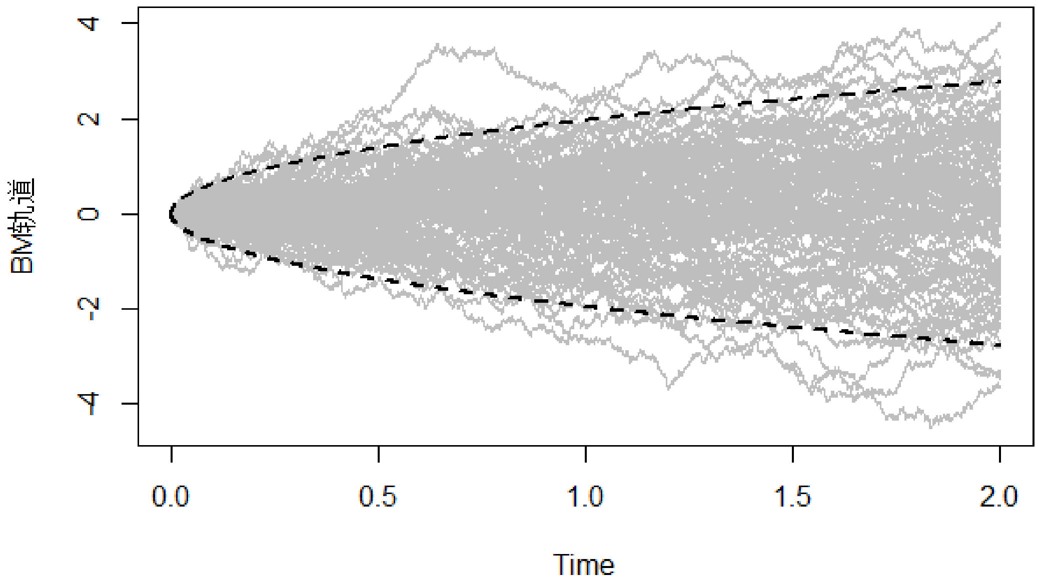
生成三条初始值为 0 的标准布朗运动轨道如下图：



增大值 200 条：



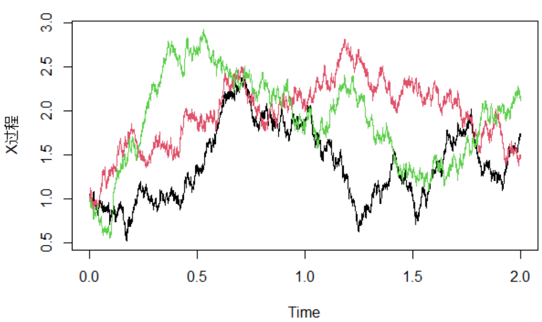
可以看到其分布大约在一个抛物线区间内，这和正态分布理论一致。给出其正态95%的置信区间$x = \pm 1.96\sqrt{t}$的边界轨道：

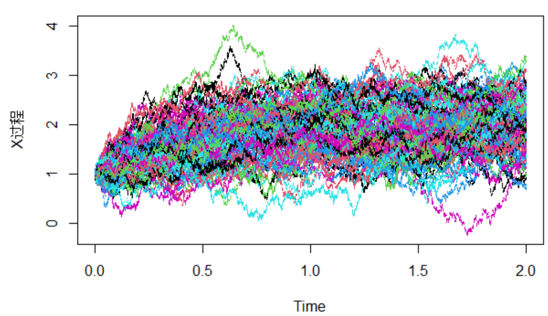


T2

(1)

首先取 $\alpha = 2, \nu = 2, \sigma = 1, x_0 = 1$ 生成 3 条和 200 条的轨道如下图:



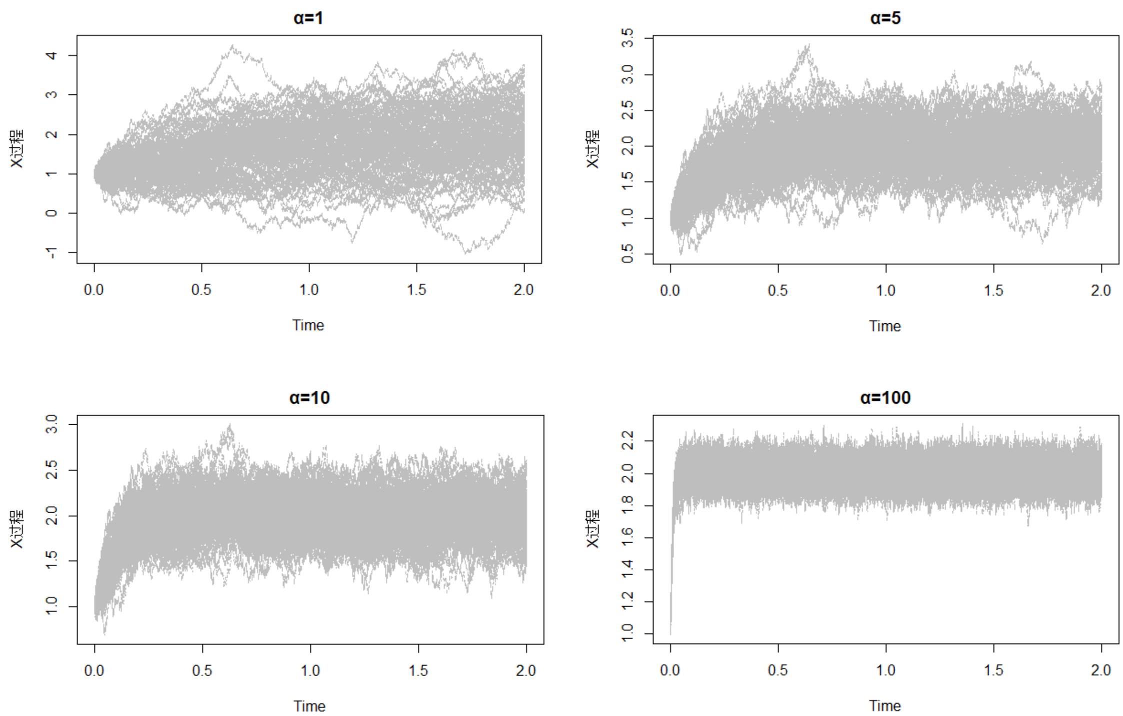


(2)

取 $\alpha = 2, \nu = 2, \sigma = 1, x_0 = 1$； 在此基础上作改变

I.改变α值

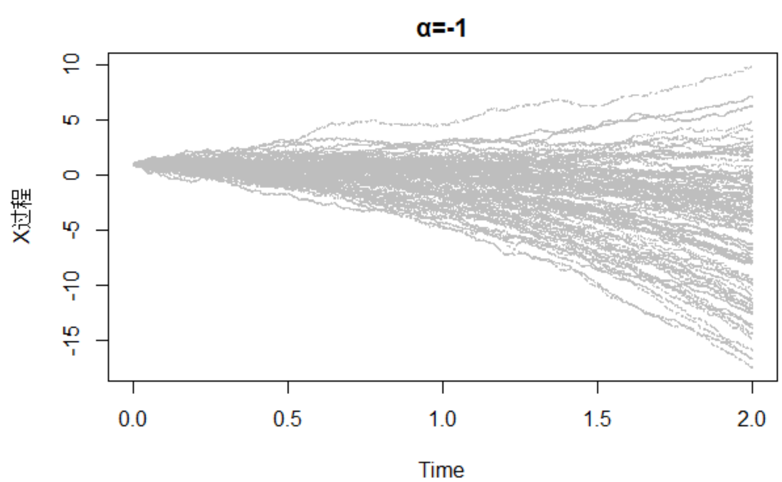
$\alpha > 0$ 时：（取值$\alpha = 1, 5, 10, 100$，其余值不变）



随着α增大，轨道的非线性性越明显。当α足够大，其轨道的平均分布区间快速地趋于一个稳定的范围内，该范围中心不随α改变，宽度随α减小。

$\alpha = 0$ 时，X_t轨道就是布朗运动；

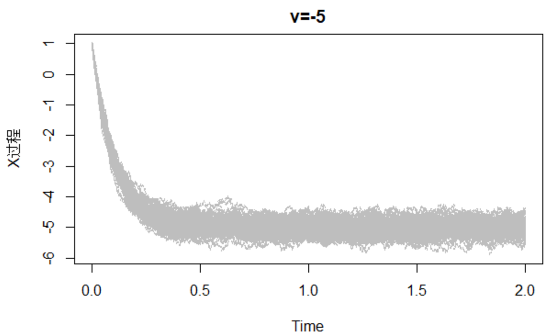
$\alpha < 0$ 时，取$\alpha = -1$

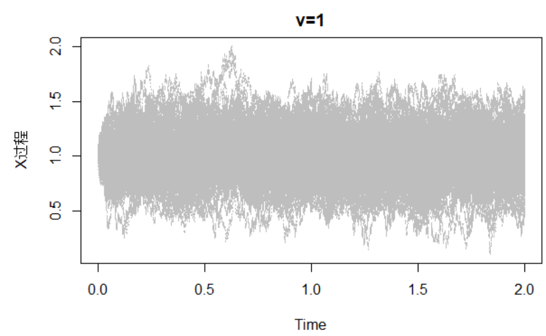


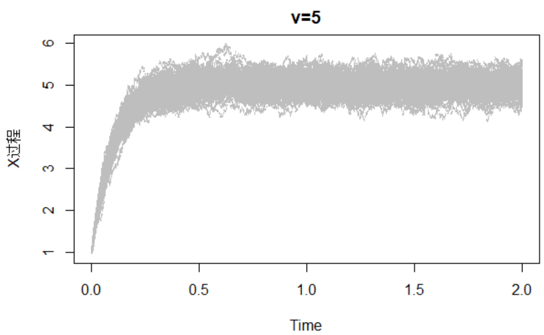
此时轨道并不收敛，而且局部的波动较小。

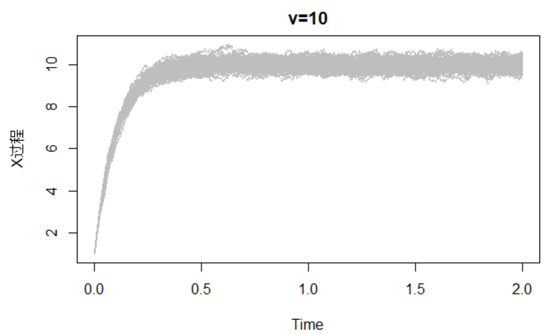
II.改变v

取测试值$\nu =-5, 1, 5, 10$，为便于观察，取$\alpha = 10$：





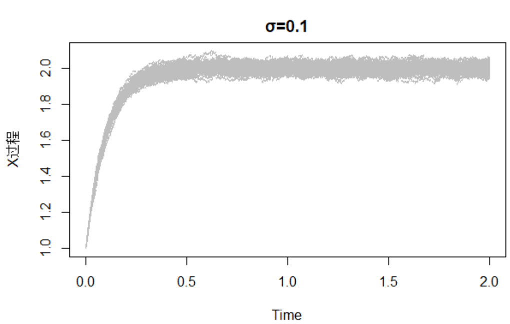


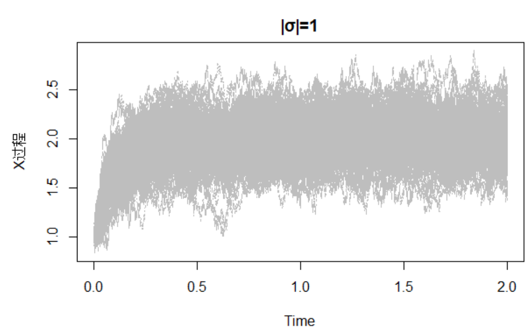


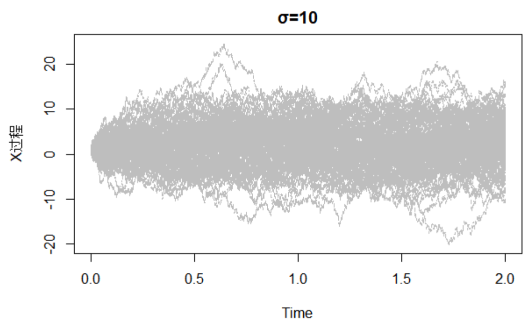
注意到随着ν增大，轨道的趋近区间的中心位置也在增大，但是宽度基本不变。特别地，当$\nu = x_0 = 1$ 时,轨道的中心位置大致为定值。根据图像结果，趋近区间的中心应当就是ν.

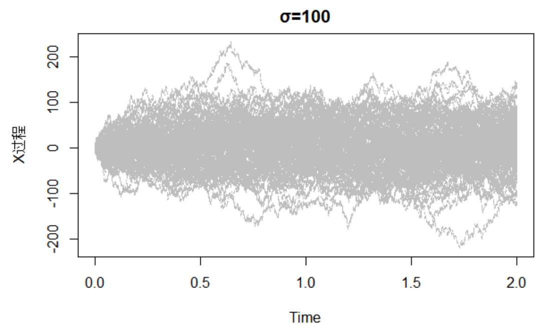
III.改变sigma

取测试值$\sigma = 0.1, -1, 10$，为便于观察取$\alpha = 10$：





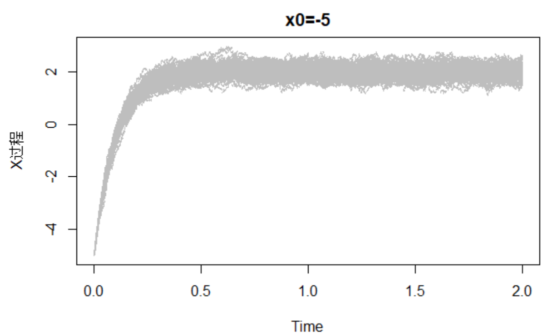


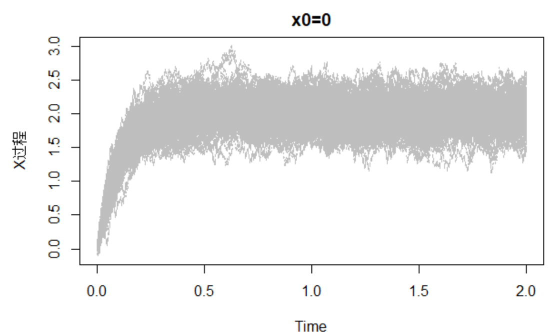


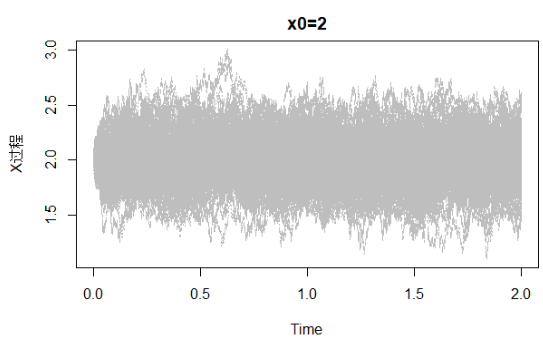
显然随着$|\sigma|$增大，轨道的波动范围越大，但其平均位置不随之改变。

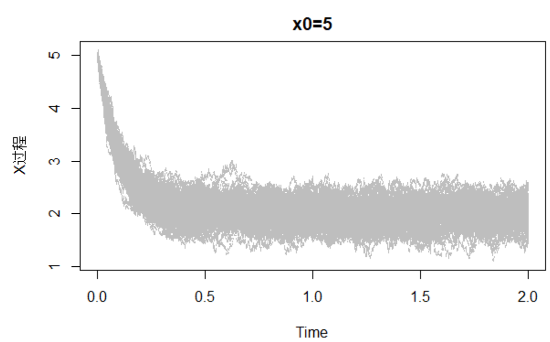
IV.改变x_0

取测试值$x_0 = -5, 0, 2, 5$，为便于观察，取$\alpha = 10$：









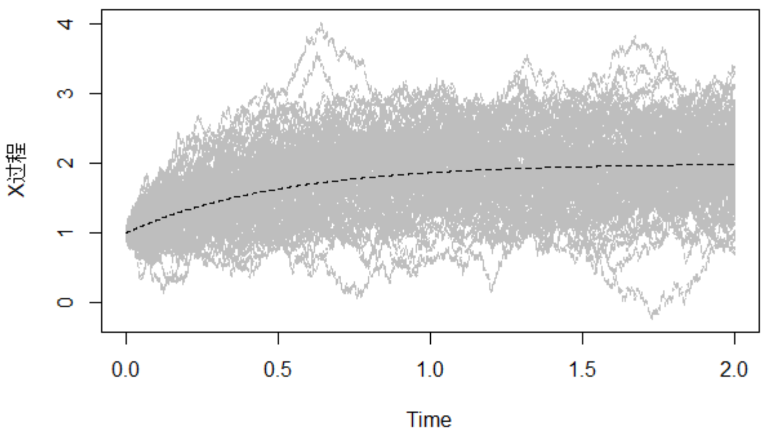
趋近区间的范围的中心和宽度不随初始值改变。

总结：

以上过程对应$X_t\ (\sigma = 0)$的理论轨道：

$$X_t = \nu - (\nu - x_0)e^{-\alpha t}$$

绘制到$\alpha = 2, \nu = 2, \sigma = 1, x_0 = 1$ 图中所示：



结果是一致的。

(3)

取 $\alpha = 2, \nu = 2, \sigma = 1, x_0 = 1, N = 200$:

蒙特卡洛计算X_1的均值与方差(无偏估计) 均值：

$$EX_1 \approx \frac{1}{N}\sum_i x_{1i}$$

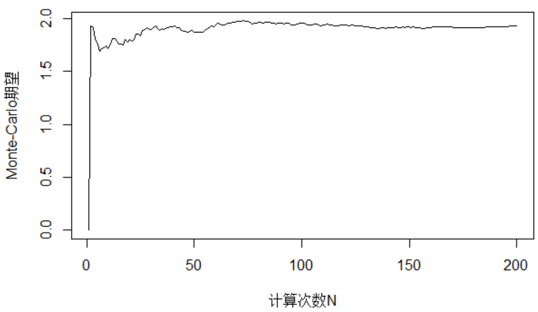
得到结果 $EX_1 \approx 1.92983$；

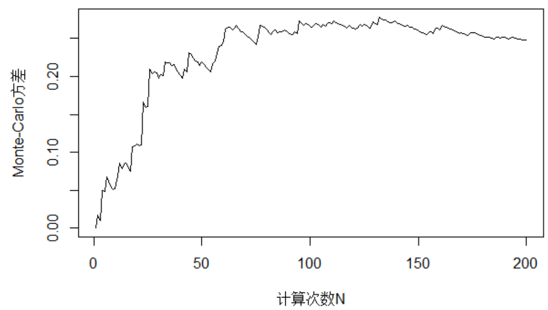
方差：

$$DX_1 \approx \frac{1}{N-1}\left(\sum_i x_{1i}^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_i x_{1i}\right)^2\right)$$

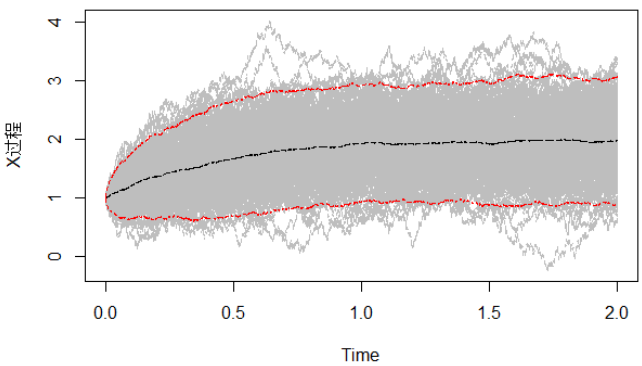
得到结果 $DX_1 \approx 0.2477553$

这个估计值随 n 增大基本收敛，如下图





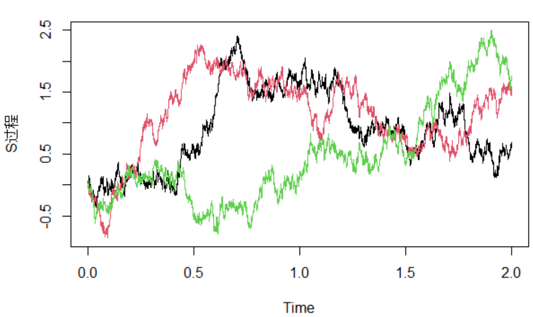
最后绘制出 $2-\hat{\sigma}$的置信范围的边界轨道

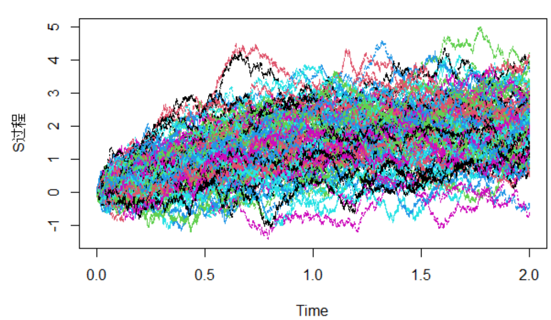


T3

(1)

首先取 $\alpha = 2, \theta = 2, \nu = 2, \sigma = 1, \hat{\sigma}_2 = 1,\ \hat{\sigma}_1 = 1,\ x_0 = 1,\ s_0 = 0$; 生成 3 条和 200 条的轨道如下图



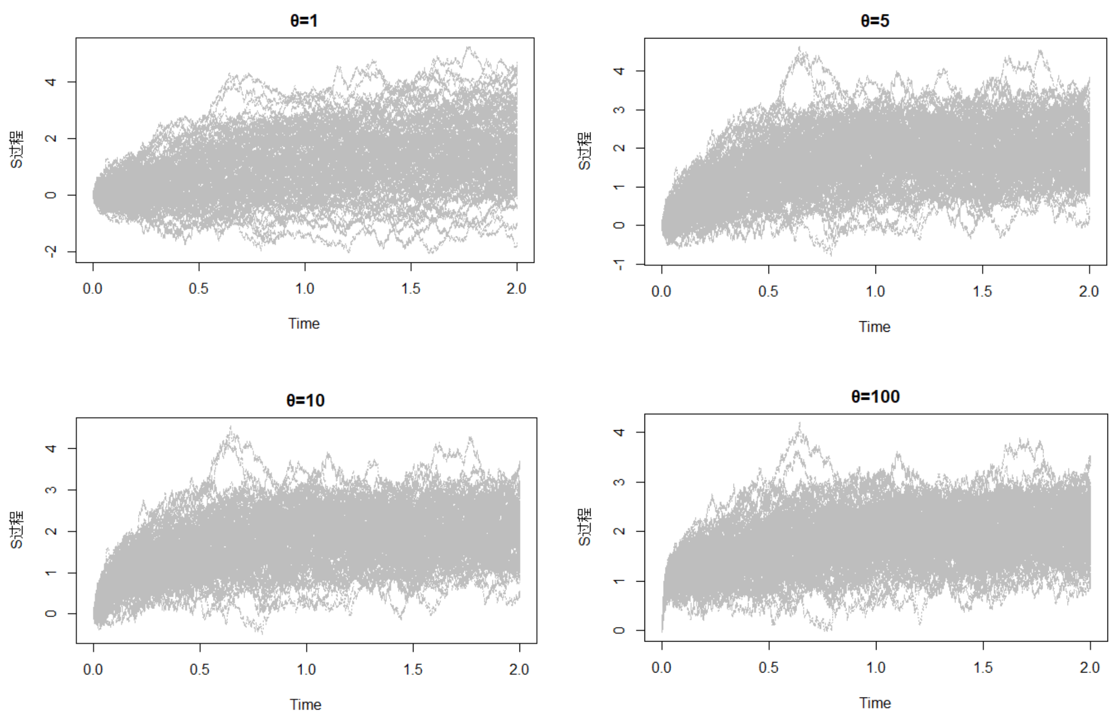


(2)

取 $\alpha = 2, \theta = 2, \nu = 2, \sigma = 1, \hat{\sigma}_2 = 1,\ \hat{\sigma}_1 = 1,\ x_0 = 1,\ s_0 = 0$：

I. 改变θ

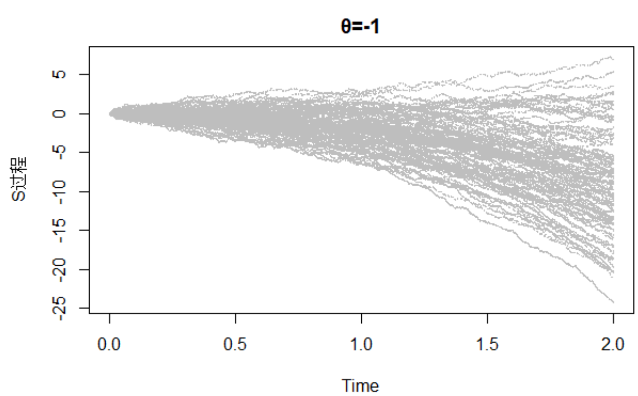
当$\theta > 0$ 时，取值$\theta = 1, 5, 10, 100$:



随着θ的增大，θ前期越快速收敛；但是和X_t不同，之后似乎仍存在缓慢的变化，即平均位置暂时并未稳定。

当$\theta = 0$ 时，S_t是布朗运动；

当$\theta < 0$ 时， 取值 $\theta =- 1$：

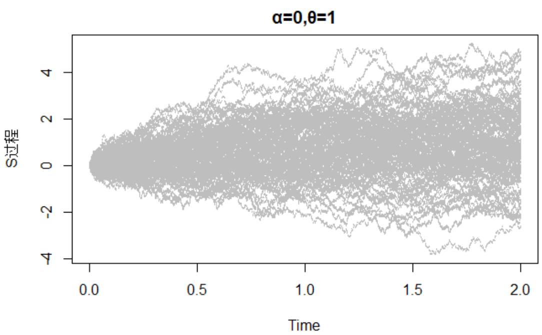


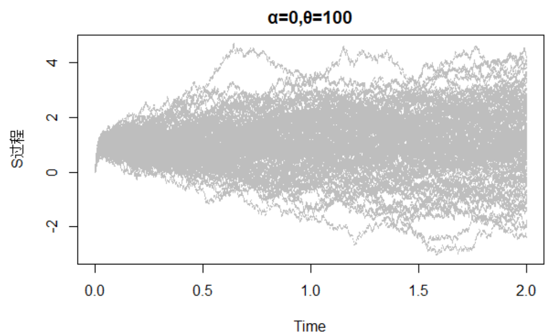
轨道同样不收敛，且局部波动范围较小。

II. 改变X_t的相关参数

i.改变α

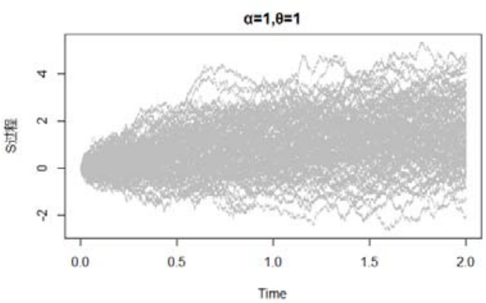
当 $\alpha = 0$ 时，分别取$\theta = 1,100$:

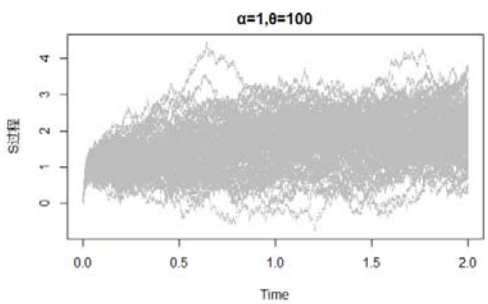


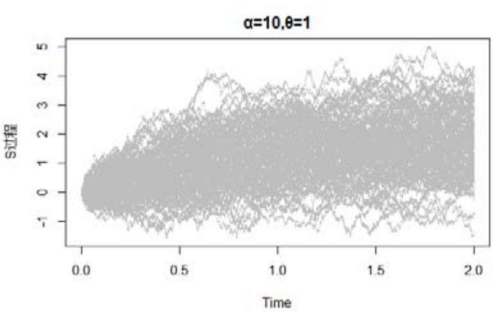


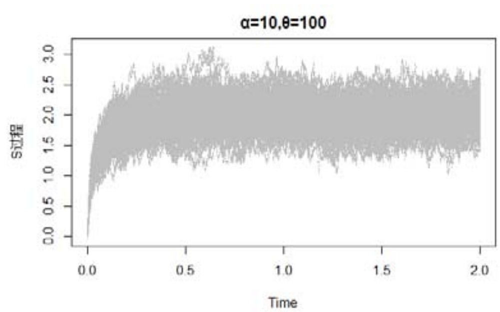
X_t轨道布朗运动，但是S_t有所偏移,具体将就是从初始点s_0偏移到平均位于x_0的分布;

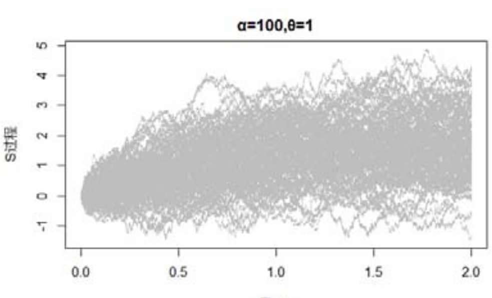
当 $\alpha > 0$ 时，取值$\alpha = 1,10,100$，分别取$\theta = 1,100$：

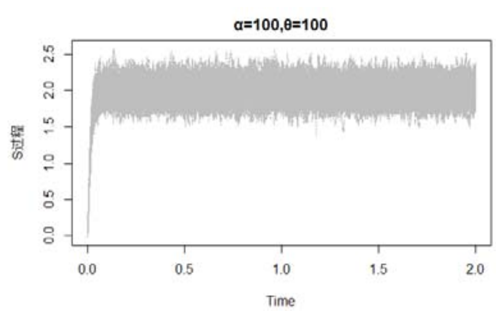






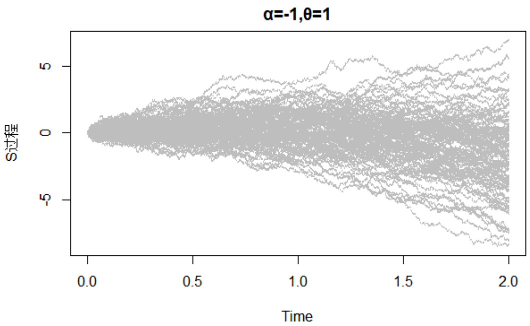


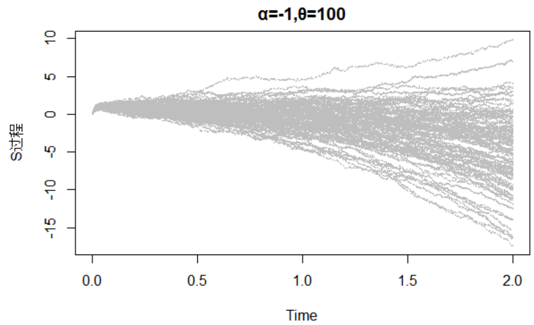




当θ较小时，随着α增大，轨道的变化并不明显；但θ较大时，随着α增大，轨道的中心越快速地收敛到稳定范围，且宽度随之减小。

当 $\alpha < 0$ 时，取$\alpha = -1$：

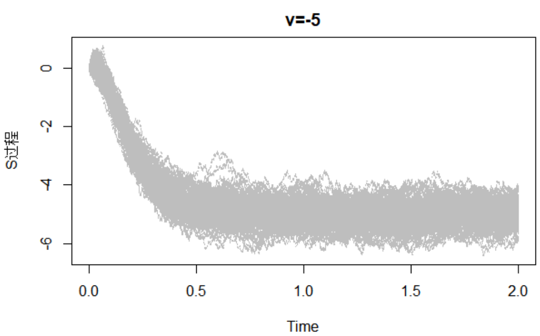


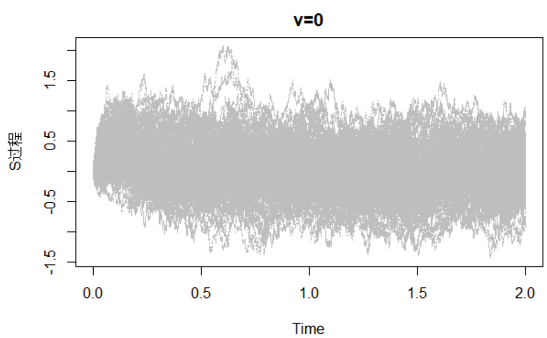


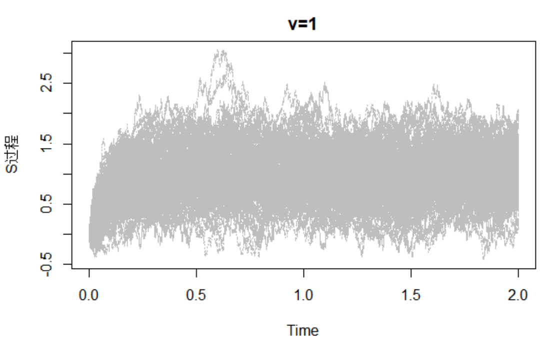
此时轨道同样并不收敛，发散速度随θ增大，局部波动比率（即波动除以 y 轴刻度）随θ减小。

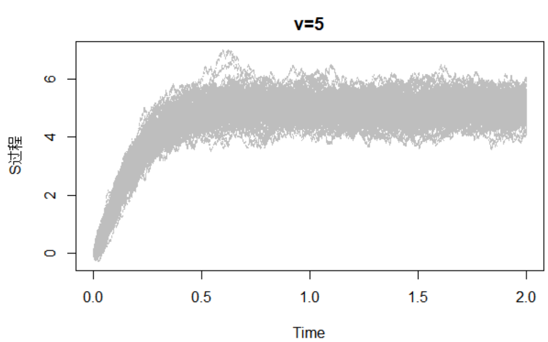
ii.改变ν

取测试值$\nu = -5, 0, 1, 5$，为便于观察取$\alpha = 10, \theta = 10$：





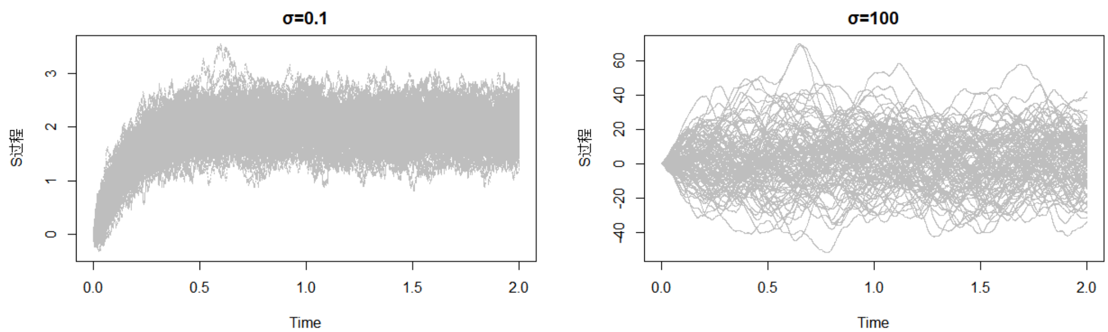




随着ν增大，轨道的趋近区间同样也在增大，其偏移程度也越大。与之前不同，当$\nu = s_0 = -1$时,轨道的平均位置前期存在一定的波动；但根据图像结果，趋近区间的中心同样大致就是ν.

iii.改变σ

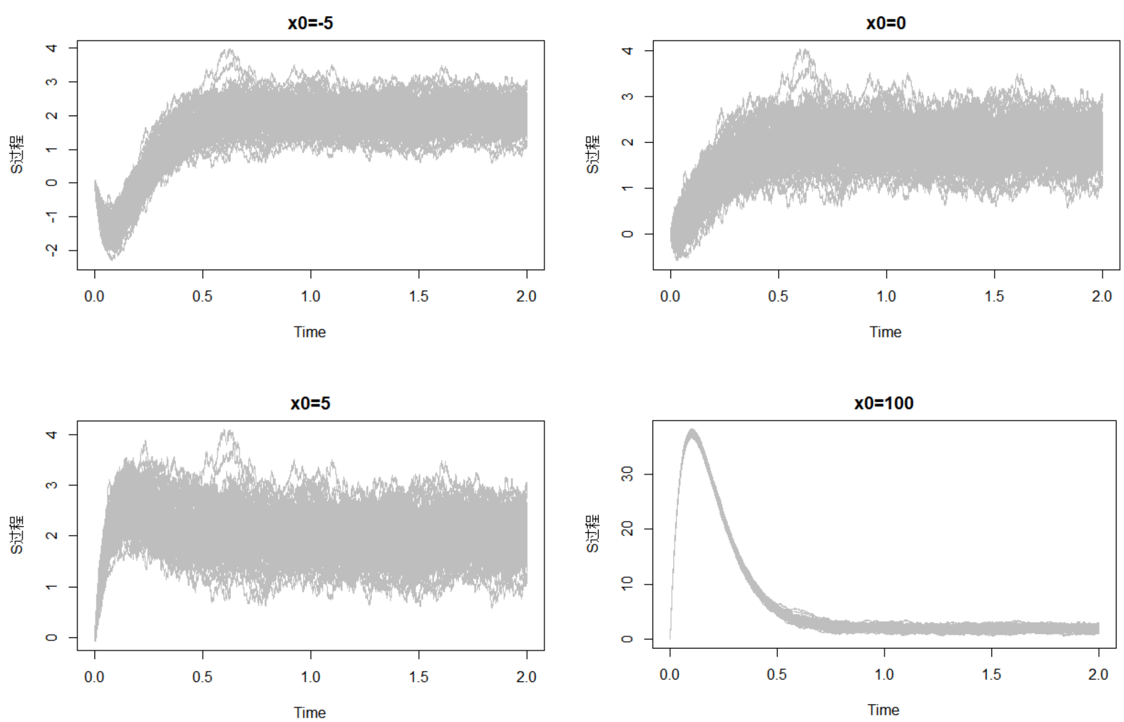
取测试值$\sigma = 0.1, 100$，为便于观察取$\alpha = \theta = 10$



显然随着$|\sigma|$增大，轨道的波动范围同样越大，且平均位置不随之改变。σ较大时，单个曲线波动比率并不强烈，即随着σ的增大反而显得更加平滑。

iv.改变x_0

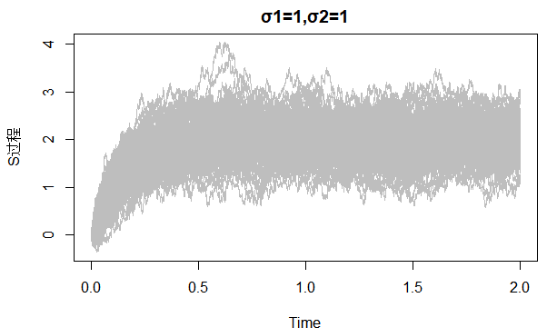
取测试值$x_0 = -5, 0, 5, 100$，为便于观察取,$\alpha = \theta = 10$

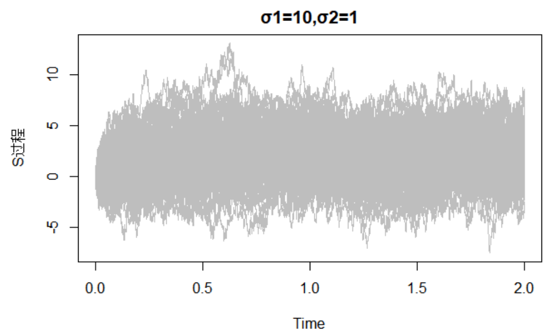


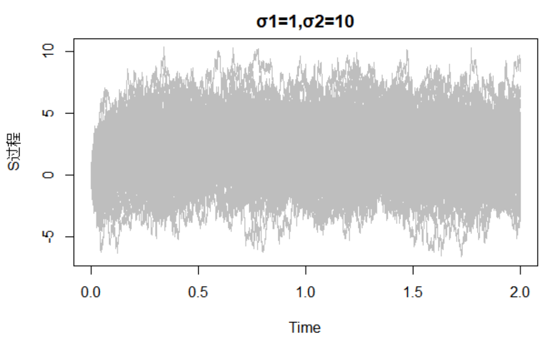
很明显，曲线一开始的变化随X_0改变，随着X_0增大,其初始斜率增大。但是最终稳定的位置不随之变化；因此当X_0和ν区别较大时，中心曲线会出现明显的浮动。

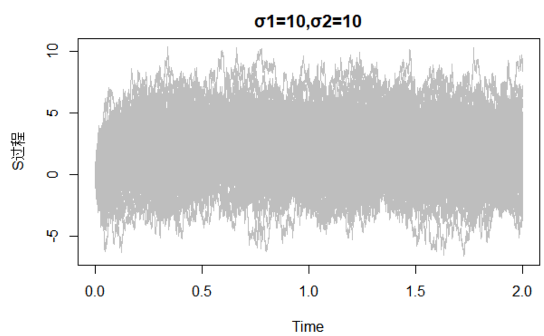
III. 改变$\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2$

取测试值$\hat{\sigma}_1 = 1, 10,\ \hat{\sigma}_2 = 1, 10,$ 为便于观察取$\alpha = \theta = 10$：







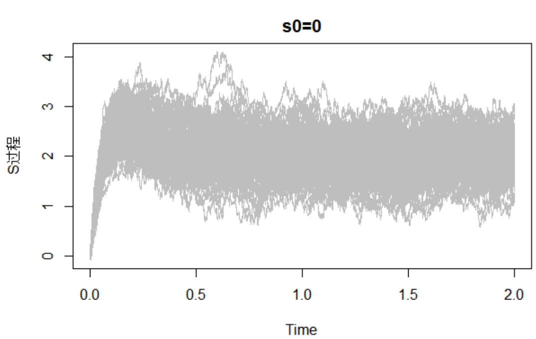


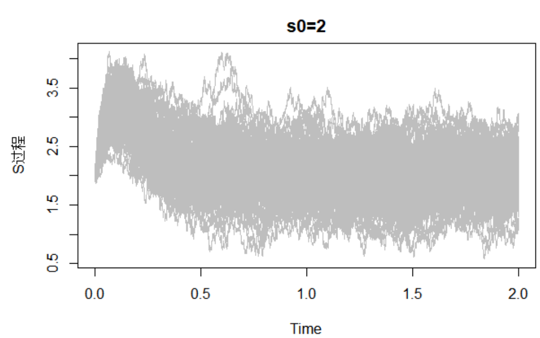
随着$|\hat{\sigma}|$的增大，波动范围越大，但平均位置不改变。

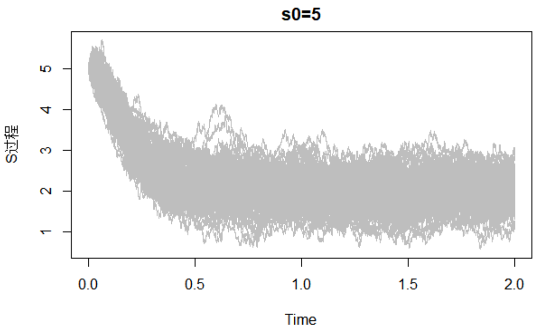
$\hat{\sigma}_1$和$\hat{\sigma}_2$的变化对结果的影响基本是对称的，区别只体现在单个曲线上。同时增大和只增大其中之一对图像的影响也不大。

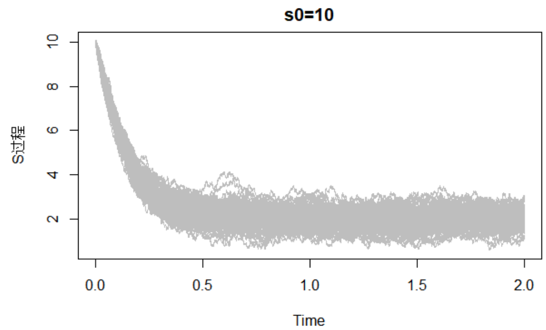
IV. 改变s_0

取测试值$s_0 = 0, 2, 5, 10$，为便于观察，取$\alpha = \theta = 10, x_0 = 5$









趋近区间的范围不随之改变，但初始斜率随s_0的增大而减小。

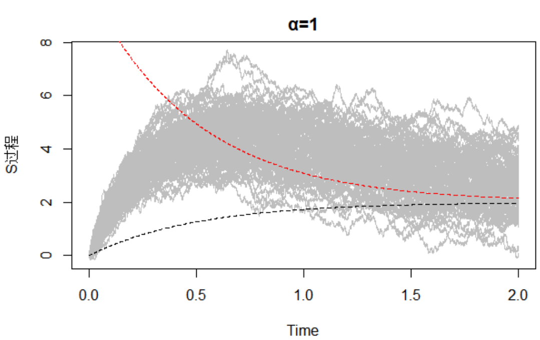
总结：

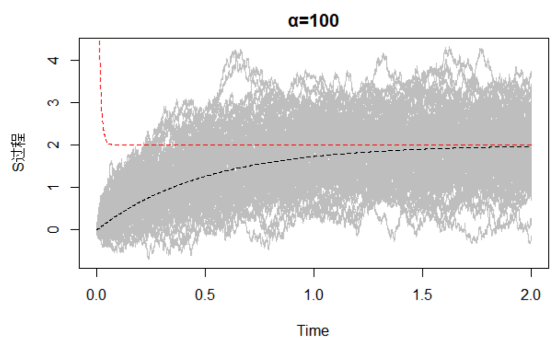
事实上，虽然难以求解$S_t(\sigma = 0, \hat{\sigma} = 0)$的轨道方程,但是$X_t$达到稳定的值$\nu$时，$S_t$的轨道应当趋近于如下轨道$S_t(X_t = \nu, \hat{\sigma} = 0)$

$$S_t = \nu - (\nu - s_0)e^{-\theta t}$$

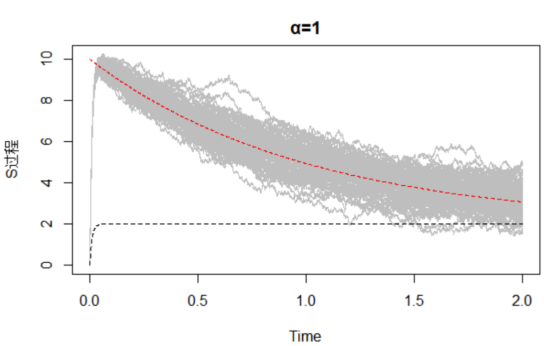
因此最终的位置依然只和ν有关，收敛速度受θ, α影响。

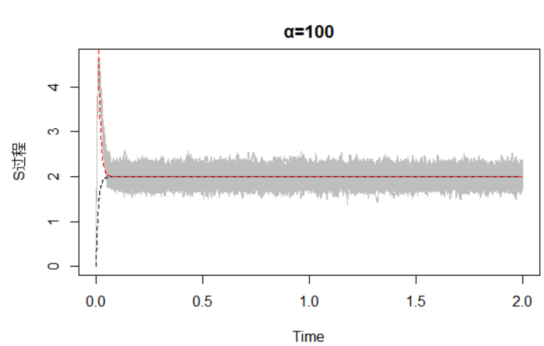
当α较大时，S_t快速接近于$S_t(X_t = \nu, \hat{\sigma} = 0)$。如图所示（取$\nu = 2, \theta = 2, \sigma = 1, \hat{\sigma}_2 = 1$, $\hat{\sigma}_1 = 1$, $x_0 = 10$, $s_0 = 0$，红色虚线为$X_t(\sigma = 0)$的轨道，黑色虚线为该轨道）：





当θ较大时，S_t快速接近于X_t的轨道，此时大致可以描述为从s_0到x_0再到ν的轨道，如图所示（取$\theta = 100$）：





当然地，这和之前的结果完全一致。

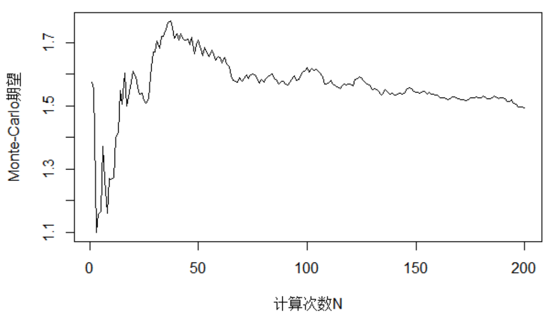
(3)

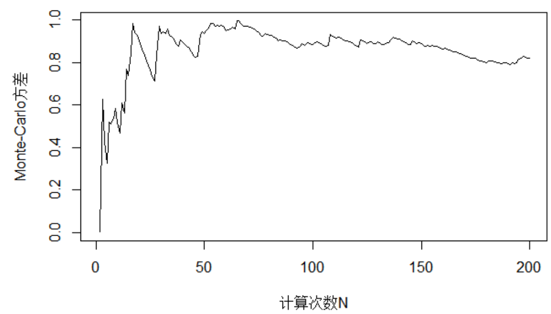
取 $\alpha = 2, \theta = 2, \nu = 2, \sigma = 1, \hat{\sigma}_2 = 1, \hat{\sigma}_1 = 1, x_0 = 1, s_0 = 0$；

蒙特卡洛计算X_1的均值与方差(无偏估计)：

均值 $EX_1 \approx 1.493292$；方差$DX_1 \approx 0.8181581$。

这个估计值同样随 n 增大基本收敛，如图





最后绘制出 $2-\hat{\sigma}$的置信范围的边界轨道