中国科学技术大学

2023–2024 秋季实分析试卷

考试时间: 2023 年 11 月 28 日 8:30–10:30　　　　主讲教师: 赵老师、郭老师

姓名: ____________________　　　　学号: ____________________

注意: 所有题目的解答要有详细过程, 其中使用的定理或命题需要注明.

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总 分	阅卷教师
分 数									

阅卷人	
得 分	

一、选择题 (每题 10 分，共 10 分)

1. 设有平面区域 $D=\{(x,y)\mid -a\leqslant x\leqslant a, x\leqslant y\leqslant a\}$, $D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant a, x\leqslant y\leqslant a\}$, 则 $\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ (　)

(A) 0.　　(B) $4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(C) $2\iint\limits_{D_1} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.　　(D) $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

阅卷人	
得 分	

二、填空题 (每题 10 分，共 20 分)

2. 设 $z=u^2\ln v$, 而 $u=\dfrac{x}{y}, v=x-y$, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$______.

3. 把二次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 化为极坐标形式的二次积分为______.

阅卷人	
得 分	

三、解答题 (每题 30 分，共 120 分)

4. (30 分) 设 f 是 $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$ 上不恒为零的可积函数, 证明存在常数 $c>0$ 使得对于所有的 $|x|\geq 1$,

$$f^*\geq \frac{c}{|x|^{\mathrm{d}}}$$

其中

$$f*(x)=\sup_{x\in B}\frac{1}{m(B)}\int_B |f(x)|\,\mathrm{d}y,\ x\in\mathbb{R}^{\mathrm{d}}.$$

5. (30 分) 设 f_n 是区间 $[0,1]$ 上的一列可测函数, 满足

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0,\ \text{a.e. } x\in[0,1]$$

且

$$\sup_n \|f_n\|_{L^2([0,1])}\leq 1$$

证明:

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n\|_{L^1([0,1])}=0.$$

6. (30 分) 令 m 表示 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度, $A\subset\mathbb{R}$ 是 Lebesgue 可测集. 假设对于所有的实数 $a<b$,

$$m(A\cap[a,b])<\frac{b-a}{2}$$

证明: $m(A)=0$.

7. (30 分) 若 f 在 $\mathbb{R}$ 上绝对连续, 且 $f\in L^1(\mathbb{R})$. 如果

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right|\mathrm{d}x=0$$

证明: $f\equiv 0$.