中　山　大　学

二〇一〇年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码 651 　　科目名称 数学分析

(答案必须写在答题纸上, 写在试题上无效)

1. 计算题. (每小题 6 分, 共 48 分)

(1) 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n+1)}.$$

(2) 计算不定积分

$$\int \max(|x|,1)\mathrm{d}x.$$

(3) 已知 $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t}\,\mathrm{d}t$, 求不定积分

$$\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$$

(4) 求二元函数极限

$$\lim_{x\to0,y\to0}\left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2}.$$

(5) 求二次积分

$$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x$$

(6) 计算

$$I=\oint_L \frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

其中 L 为一条无重点, 分段光滑且不经过原点的连续封闭曲线, L 的方向为逆时针方向.

(7) 讨论数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\cos x)\sin nx}{\sqrt{n+x}}$$

在 $[0,2\pi]$ 上的一致收敛性.

(8) 计算

$$\iint_s \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}S.$$

其中 S 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 所围几何体的表面.

2. (12 分) 单位圆盘中切去圆心角为 θ 的扇形, 余下部分粘合成一雉面. 问 θ 为多少时, 该雉面加上底面所围成 的雉体体积最大?

3. (16 分) 设 f(x) 在 $x=0$ 某邻域内有二阶连续导数, 且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$. 证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

绝对收敛.

4. (16 分) 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)^p\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

其中 p 为正数. 试分别确定 p 的值, 使得如下结论分别成立:

(1) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续;

(2) $f_x(0,0)$ 与 $f_y(0,0)$ 都存在;

(3) $f_x(x,y)$ 与 $f_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续.

5. (16 分) 计算由曲面

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1,(x\geqslant0,y\geqslant0,z\geqslant0,a>0,b>0,c>0)$$

所围成几何体的体积, 其中 a,b,c 为正常数.

6. (16 分) 讨论

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n!2^n}x^n$$

的收敛范围, 并求其和函数.

7. (16 分) 设 $u=f(r)$, 其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 变换方程: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$, 使其成为关于 $f(r)$ 的方程.

8. (10 分) 判别级数

$$\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+\cdots$$

的收敛性.

中 山 大 学

二〇一一年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码 **651**　　　　科目名称 数学分析

(答案必须写在答题纸上, 写在试题上无效)

1. 计算题. (每小题 6 分, 共 48 分)

(1) 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x\tan x}.$$

(2) 计算积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\,\mathrm{d}x$$

(3) 已知 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n = A$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=B$, 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的和.

(4) 计算

$$\iint\limits_{\Omega}\left(2x+\frac{4}{3}y+z\right)\mathrm{d}S.$$

其中 Ω 为平面 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ 在第一象限的部分.

(5) 计算

$$\int_L \sqrt{x^2+y^x}\mathrm{d}x+y\left(xy+\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)\mathrm{d}y$$

其中 L 为曲线 $y=\sin x(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 按 x 增大方向.

(6) 判别级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-\ln n}$$

是绝对收敛, 条件收敛, 还是发散?

(7) 设 $\begin{cases}x=t^3-3t\\ y=t^2-2t\end{cases}$, 求二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

(8) 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}.$$

2. (12 分) 设

$$f(x,y)\sqrt{|xy|}.$$

求偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}$, 并讨论 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的可微性.

3. (16 分) 设 $f(x)$ 满足:

① $-\infty<a\leqslant f(x)\leqslant b<+\infty$;

② $|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|$, $0<L<1$, $x,y\in[a,b]$;

任取 $x_1\in[a,b]$, 作序列 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+f(x_n))$, $n=1,2,\cdots$. 求证: $\{x_n\}$ 收敛, 且其极限 $\xi\in[a,b]$ 满足: $f(\xi)=\xi$.

4. (16 分) 设正项级数列 $\{a_n\}$ 单调递增, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}=+\infty$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$$

发散.

5. (16 分) 已知 P 是 $\angle AOB$ 内一固定点, $\angle AOP=\alpha$, $\angle BOP=\beta$, 线段长度 $\overline{OP}=L$, 过 P 的直线交射线 OA 和 OB 于点 X 和 Y. 求线段长度乘积 $\overline{PX}\cdot\overline{PY}$ 的最小值, 说明取最值时 X,Y 的位置.

6. (16 分) 计算由曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Omega}4z\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

其中 Ω 是由曲线 $\begin{cases}z=e^y\\ x=0\end{cases}$, $(0\leqslant y\leqslant a)$ 绕 z 轴旋转一周所成曲面的下侧.

7. (16 分) 设 $f_1(x)=f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, f_{n+1}(x)=f\left(f_n(x)\right), n=1,2,\cdots$. 证明: 函数项级数

$$f_1(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(f_{n+1}(x)-f_n(x)\right)$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于零.

8. (10 分) 设 $0<x<1$, 求

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}$$

的和函数.

中　山　大　学

二〇一二年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码 651　　科目名称 数学分析

(答案必须写在答题纸上, 写在试题上无效)

1. 计算题. (每小题 6 分, 共 48 分)

(1) 求极限

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x^2e^x\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$$

(2) 给定 a_0, a_1, 并设 $a_n=\frac{1}{2}(a_{n-1}+a_{n-2}), n\geqslant 2$, 求: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

(3) 求

$$I_n=\int_0^{n\pi}x|\sin x|\mathrm{d}x.$$

(4) 设 $g(x), f(x,y)$ 均二阶可微, $u(x,y)=yg(\cos x)+f(e^x,xy)$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

(5) 已知二粗圆抛物面为 $\Sigma_1: z=x^2+2y^2+1$, $\Sigma_2: z=2\left(x^2+3y^2\right)$, 计算 Σ_1 被 Σ_2 截下部分的曲面面积.

(6) 求曲线积分

$$\oint_C\frac{(x+4y)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}x}{x^2+4y^2}.$$

其中 C 为以原点为圆心单位圆, 并取正向.

(7) 判断级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}n!\left(\frac{-e}{n}\right)^n$$

的攻散性.

(8) 设 $a_n>0, \lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$, 讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{a_n}\right)^n$$

的攻散性.

2. (16 分) 给出函数 $f(x)=x\left[x^{-1}\right]$ 在 $(0,+\infty)$ 上的不连续点, 其中 $\left[x^{-1}\right]$ 表示 x^{-1} 的整数部分.

3. (16 分) 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^{\alpha}y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

问 α 取何值时能使 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 可微?

4. (16 分) 计算曲线积分

$$\oint_L(y+1)\mathrm{d}x+(z+2)\mathrm{d}y+(x+3)\mathrm{d}z$$

其中 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 被平面 $x+y+z=0$ 所截得的圆周, 从 x 轴正向看去, L 是逆时针方向.

5. (16 分) 讨论函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\ln n}$$

在 $[0,1)$ 上的一致收敛性.

6. (16 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶连续导数, $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$, 求证:

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{(b-a)^3}{24}\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|f''(x)\right|.$$

7. (10 分) 证明不等式

$$yx^y(1-x)<e^{-1}$$

其中 $(x,y)\in D=\{(x,y)\mid 0<x<1, y>0\}$.

8. (12 分) 设 $x>a$ 时 $g(x)>0$, $f(x)$ 和 $g(x)$ 在任意有限区间 $[a,b]$ 上可积, $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$, 证明:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_a^x f(x)\mathrm{d}x}{\int_a^x g(x)\mathrm{d}x}=0$$

中　山　大　学

二〇一三年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码 651　　科目名称 数学分析

(答案必须写在答题纸上, 写在试题上无效)

1. 计算题. (每小题 8 分, 共 24 分)

(1) 设

$$x_n=\sqrt[n]{\left[1+\left(\frac{1}{n}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{2}{n}\right)^2\right]\cdots\left[1+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right]}$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(x^{\frac{1}{n}}-x^{\frac{1}{n+1}}\right)$, 其中 $x>0$.

(3) $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{\left(\sum_{i=d}^{m}i^d\right)-\frac{m^{d+1}}{d+1}}{m^d}$, 其中 $d>0$.

2. (20 分)(1) 叙述数列 $\{a_n\}$ 收敛的柯西收敛准则并证明之.
(2) 用柯西收敛准则证明: 数列 $a_n=\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\cdots+\frac{1}{n\ln n}$ 趋于无穷大.

3. (20 分) 证明:
(1) $f(x)=\sin\sqrt{x}$ 在 $[0,\infty)$ 上一致连续.
(2) $g(x)=\sin x^2$ 在 $[0,\infty)$ 上不一致连续.

4. (16 分) 设 $x_1=-1, x_{n+1}=-1+\frac{x_n^2}{2}(n=1,2,\cdots)$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

5. (10 分) 设 $a_n>0, n=1,2,\cdots$, 证明

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right)\geqslant 1.$$

6. (10 分) 设 $0<x<1$, 求

$$S(x)=\sum_{k=1}^{\infty}x^k(1-x)^{2k}$$

的极值.

7. (10 分) 计算

$$\int_C\frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

其中 C 是一条从 $(-1,0)$ 到 $(1,0)$ 不经过原点的光滑曲线: $y=f(x), -1\leqslant x\leqslant 1$.

8. (12 分) 计算

$$\iint_S yz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+zx\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+xy\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

其中 S 是由 $x^2+y^2=1$, 三个坐标平面及 $z=2-x^2-y^2$ 所围立体图形在第一卦限的外侧.

9. (12 分) 讨论级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}$$

在 $[0,2\pi]$ 上的一致收敛性.

10. (16 分)(1) 分别将函数 $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ 和 $g(x)=\begin{cases}(\pi-1)x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ \pi-x, & 1<x\leqslant\pi\end{cases}$ 在 $[0,\pi]$ 按正弦 Fourier 级数展开.
(2) 证明: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n}{n}\right)^2$.

中　山　大　学

二〇一四年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码 651　　　　科目名称 数学分析

(答案必须写在答题纸上, 写在试题上无效)

1. (30 分) 计算

(1) $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}\,\mathrm{d}x$.

(2) $\int_\Gamma xy\,\mathrm{d}s$, 其中 Γ 为 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x+y+z=0$ 的交线.

(3) $\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^\pi x^{2013}\sin^n x\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}$.

2. (10 分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 并且 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 对任意 $a,b,c\in\mathbb{R}$ 都有 $\int_a^{a+c} f(x)\mathrm{d}x=\int_b^{b+c} f(x)\mathrm{d}x$ 证明: $f(x)\equiv 0$.

3. (15 分) 表格填空:

$\sum_{n=3}^\infty a^n n^b(\ln n)^c$	绝对收敛	条件收敛	发散
参数 a,b,c 的取值范围			

4. (10 分) 求方程组

$$\begin{cases} u+v=x+y \\ \frac{\sin u}{\sin v}=\frac{x}{y} \end{cases}$$

所确定的隐函数 $\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$ 的微分 $\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}v$.

5. (10 分) 讨论函数

$$\int_0^\infty \sin x^2\,\mathrm{d}x;\ \int_0^\infty\int_0^\infty \sin\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

的敛散性. 其中 $\int_0^\infty\int_0^\infty \sin\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\lim_{\substack{r\to\infty \\ x^2+y^2\leqslant r^2;x,y\geqslant 0}}\sin\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

6. (10 分) 讨论广义积分

$$f(x,y)=\begin{cases} x^{\frac{3}{2}}\sin\frac{y}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

的可微性.

7. (15 分) 讨论积分

$$f(x)=\int_0^\infty e^{-x\left(t+\frac{1}{t}\right)}\mathrm{d}t$$

的收敛域和 $f(x)$ 的连续性.

8. (10 分) 半径为 r 的球的中心在单位球 $x^2+y^2+z^2=1$ 的表面上, 问 r 取何值时该球位于单位球内部分的表 面积最大?

9. (15 分) 设 $a>0$, 求 $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$ 与 $x=2a$ 所围成的面积.

10. (15 分) 讨论

$$f(x)=x\sin x$$

在 $[1,\infty)$ 上是否一致连续, 并说明理由.

11. (15 分) 设 $f(x)=\int_x^{x^2}\left(1+\frac{1}{2t}\right)^t\left(e^{\frac{1}{\sqrt{t}}}-1\right)\mathrm{d}t,(x>0)$. 求

$$\lim_{n\to\infty} f(n)\sin\frac{1}{n}$$

中 山 大 学

二〇一五年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码 651 科目名称 数学分析

(答案必须写在答题纸上, 写在试题上无效)

1. 计算题. (每小题 15 分, 共 60 分)

(1) 求极限

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}.$$

(2) 已知 $y=e^x\cdot x^{\sin x}$, 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(3) 设 $f(x,y,z)=xy^2z^3$, 且 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2+z^2-3xyz=0$ 所确定的隐函数, 求 $f_x(1,1,1)$.

(4) 求 $u=x-2y+2z$ 在条件 $x^2+y^2+z^2=1$ 下的条件极值 (含极大值和极小值) .

2. (15 分) 将 $\frac{1}{x^2+4x+3}$ 展开为 $x-1$ 的幂级数.

3. (15 分) 求抛物面

$$z=x^2+y^2$$

与抛物柱面

$$y=x^2$$

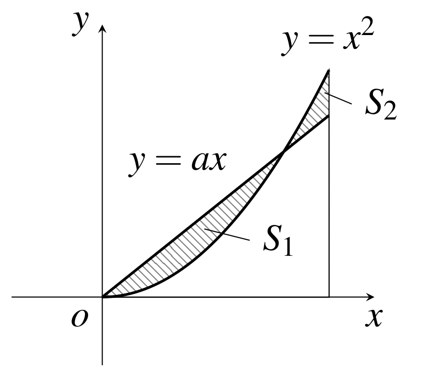
的交线上的点 $P(1,1,2)$ 处的切线方程和平面方程.

4. (15 分) 计算三重积分

$$\iiint_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

其中 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面围成的区域.

5. (20 分) 如下图所示, 设当 $0\leqslant x\leqslant a$ 时, 直线 $y=ax(0<a<1)$ 与抛物线 $y=x^2$ 所围成的图形面积为 S_1 . 当 $a\leqslant x\leqslant 1$ 时, 直线 $y=ax(0<a<1)$, 拖物线 $y=x^2$ 与直线 $x=1$ 所围成的图形的面积为 S_2



(1) 确定 a 的值, 使 $S=S_1+S_2$ 达到最小, 并求出最小值.

(2) 求当 $S=S_1+S_2$ 达到最小值时, 该图形绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体的体积.

6. (25 分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有一阶连续导数, L 是上半平面 $y>0$ 内的有向分段光滑曲线, 其起点为 $(1,4)$, 终点为 $(2,2)$, 记

$$I=\int_L\frac{1}{y}\left[1+y^2f(xy)\right]\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}\left[y^2f(xy)-1\right]\mathrm{d}y$$

(1) 证明曲线积分 I 与路径无关;

(2) 求曲线积分 I 的值.

中 山 大 学

二〇一六年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码 **651** 科目名称 数学分析

(答案必须写在答题纸上, 写在试题上无效)

1. 计算题. (每小题 8 分, 共 56 分)

(1) 求极限

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)\frac{1}{\sin x}$$

(2) 求极限

$$\lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}$$

(3) 设 $y=x^2\cos 3x$, 求 $y^{(50)}(x)$.

(4) 求曲线

$$y=\ln\left(1-x^2\right),\ 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$$

的弧长.

(5) 计算

$$\int_0^2 \mathrm{d}x\int_x^2 e^{-y^2}\,\mathrm{d}y$$

(6) 求幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2-1}{2^n}x^n$$

的收敛区间与和函数.

(7) 设 $f(r)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的单调递减连续函数, 定义

$$F(t)=\frac{3}{4\pi t^3}\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, t\in(0,1]$$

求 $F(t)$ 在 $(0,1]$ 中的最小值.

2. (10 分) 证明: (1) 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^2}{(1+x^2)^n}$$

在 $[-1,1]$ 上一致收敛.

(2) 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

在 $[-1,1]$ 上不一致收敛.

3. (10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导且 $f''(x)\leqslant 0$. 证明:

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\leqslant f\left(\frac{1}{2}\right)$$

4. (10 分) 函数

$$f(x)=x^{\frac{1}{8}}\sin x$$

在 $[0,+\infty)$ 上是否一致连续? 试说明理由.

5. (10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导且导函数连续, 证明:

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x=f(1)$$

6. (10 分) 设 D 是两条直线 $y=x$, $y=4x$ 和两条双曲线 $xy=1$, $xy=4$ 所围成的区域, $F(u)$ 是具有连续导数 的一元函数, 记 $f(u)=F'(u)$, 证明:

$$\oint_{\partial D}\frac{F(xy)}{y}\,\mathrm{d}y=\int_1^4 f(u)\mathrm{d}u\cdot\ln 2.$$

其中 ∂D 表示 D 的边界, ∂D 的方向为逆时针方向.

7. (10 分) 函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(1-\cos\frac{x^2}{y}\right)\sqrt{x^2+y^2}, & y\neq 0\\ 0, & y=0\end{cases}$$

$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微吗? 证明你的结论.

8. (10 分) 设 $x_0=1, x_{n+1}=\frac{3+2x_n}{3+x_n}, n\geqslant 0$. 证明: 序列 $\{x_n\}$ 收敛并求其极限

9. (10 分) 求第一类曲面积分

$$\iint_{\Sigma} z\,\mathrm{d}S.$$

其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 被平面 $z=1$ 截出的顶部.

10. (8 分) 一点 A 位于半径为 a 的圆内, 它到圆心的距离为 b, 试计算从 A 向圆的所有切线作垂线, 其垂足的轨 迹所包围的面积.

11. (6 分) 如果存在数列 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $\lim x_{n_k}=a$, 则称 a 为数列 $\{x_n\}$ 的极限点. 设数列 $\{x_n\}$ 有 界且 $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$, 证明: 当 $\{x_n\}$ 不收玫时其极限点集为有界闭区间.

中　山　大　学

二〇一七年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码 651 　　科目名称 数学分析

(答案必须写在答题纸上, 写在试题上无效)

1. 计算题. (每小题 6 分, 共 48 分)

   (1) $\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}$.

   (2) $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sin\frac{k\pi}{n}$.

   (3) $\iint_{x^2+y^2\leqslant 1} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

   (4) $\int_0^2 \mathrm{d}y\int_{\frac{y}{2}}^{1} x^3\cos\left(x^5\right)\mathrm{d}x$.

   (5) $\oint_C y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z$, 其中 C 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 和平面 $x+y+z=0$ 的交线, 从 ox 轴正向看沿逆 时针方向.

   (6) 求级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^2}{n!}x^{2n-1}.$$

   的和函数.

2. (10 分) 判断下列函数是否在 $(0,+\infty)$ 上一致连续, 并说明理由.

   (1) $f(x)=\sqrt{x}\ln x$;

   (2) $f(x)=x\ln x$.

3. (10 分) 如果 $u_n>0, n=1,2,\cdots$, 为单调递增数列. 证明: 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$$

   当 u_n 有界时收敛, 而当 u_n 无界时发散

4. (10 分) 求证: 方程

$$e^x = ax^2+bx+c$$

   的根不超过三个.

5. (10 分) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上右导数存在, 且 $f(a)=f(b)$. 求证: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'_+(\xi)\leqslant 0$.

6. (10 分) 判别广义积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}\,\mathrm{d}x$$

   的收敛性, 并说明理由.

7. (10 分) 讨论函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

   在 $(-\infty,+\infty)$ 上的一致收敛性.

8. (10 分) 把函数 $f(x)=(x-\pi)^2$ 在 $(0,\pi)$ 上展开成余弦级数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和.

9. (10 分) 计算

$$\iint_S \left(z^2+x\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

   其中 S 为曲面 $z=\frac{x^2+y^2}{2}, 0\leqslant z\leqslant 2$ 下侧

10. (10 分) 设 $f(x)>0, x\in[0,1]$, 证明:

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]}\frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\geqslant 1$$

11. (6 分) 设 $\{p_n(x)\}$ 为多项式序列。若级数

$$p_1(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(p_{n+1}(x)-p_n(x)\right)$$

   在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于 $f(x)$. 证明: $f(x)$ 必为一多项式.