

行星际飞行轨道递推计算与分析

XXX

2025 年 4 月 20 日

摘要

本实验报告深入探讨了行星际飞行轨道递推计算与分析,旨在通过构建日心坐标系和火心坐标系下的轨道动力学模型,运用 **Kepler 方程解析解法**和 **四阶 Runge-Kutta 数值积分方法**,实现对行星际探测器轨道的精准递推。研究核心聚焦于不同轨道递推方法的精度对比、火星引力辅助变轨的偏转效果以及长期轨道预测的可行性。

在 **Kepler 轨道递推**过程中,引入了选择判断机制,以优化步长设计。实验发现,固定步长虽能提升计算效率,但可能导致运动遗漏,降低精度。为此,提出在大部分时间点采用较大步长提高效率,而在最后一个时间点动态调整步长至剩余时间增量,以确保精度。这种动态调整策略有效平衡了效率与精度,避免了因截止时间残余而导致的运动遗漏。

在 **双曲线 Kepler 轨道递推**方面,针对火星引力辅助变轨,详细分析了探测器在火星引力作用下的轨道特性。双曲线轨道的偏心率 $e > 1$,轨道能量为正值,探测器在引力场中做双曲线运动。通过牛顿迭代法求解双曲线轨道的 Kepler 方程,实现了轨道根数到位置和速度矢量的转换。实验结果表明,探测器在火星引力作用下发生了显著的轨道偏转,速度和角动量均发生了显著变化,轨道能量增加,成功实现了轨道调整。

实验最终绘制了日心坐标系下探测器、火星和地球的飞行轨道图,直观展示了探测器的运动轨迹及其与行星的相对位置关系。该轨道图在任务规划、轨道控制和科学研究中具有重要价值,为深空探测任务的实施提供了有力支持。报告成功验证了不同轨道递推方法的可行性和有效性,为行星际探测任务的轨道设计与优化提供了重要参考。本实验所有源代码均已开源于<https://github.com/LiuZiyue1016/Keplerian-Motion>。

关键词: 行星际飞行; Kepler 轨道递推; 数值积分; 火星引力辅助变轨; 轨道预测

1 问题提出

本实验通过建立日心坐标系和火心坐标系下的轨道动力学模型,分别采用 Kepler 方程解析解法和四阶 Runge-Kutta 数值积分方法实现行星际探测器的轨道递推计算。重

点研究：

- 不同轨道递推方法的精度比较
- 火星引力辅助变轨的偏转效果
- 长期轨道预测的可行性分析

2 实验任务与参数

2.1 给定参数

太阳、火星引力常数：

$$\mu_{\text{sun}} = 1.32712440017987 \times 10^{11} \text{ km}^3/\text{s}^2$$

$$\mu_{\text{mars}} = 4.28283762065 \times 10^4 \text{ km}^3/\text{s}^2$$

地球在 t_0 时刻的日心初始位置和速度矢量：

$$\mathbf{r}_{\text{earth}} = \begin{bmatrix} 0.110937729685236 \\ 1.346867468212425 \\ 0.583831802330196 \end{bmatrix} \times 10^8 \text{ km}$$
$$\mathbf{v}_{\text{earth}} = \begin{bmatrix} -30.200703848645549 \\ 1.956654058695767 \\ 0.847099469360955 \end{bmatrix} \text{ km/s}$$

探测器在 t_0 时刻的日心初始位置和速度矢量：

$$\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} -0.370264 \\ 1.315142 \\ 0.608323 \end{bmatrix} \times 10^8 \text{ km}$$
$$\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} -31.80621 \\ -6.234824 \\ -0.078191 \end{bmatrix} \text{ km/s}$$

火星在探测器到达火星时的日心位置和速度矢量：

$$\mathbf{r}_{\text{Mars}} = \begin{bmatrix} 0.598177 \\ -1.853298 \\ -0.866201 \end{bmatrix} \times 10^8 \text{ km}$$
$$\mathbf{v}_{\text{Mars}} = \begin{bmatrix} 24.16545 \\ 8.313188 \\ 3.161448 \end{bmatrix} \text{ km/s}$$

时间参数：

$t_1 = 279.1318$ 天 （探测器从 t_0 时刻飞行至火星影响球时间）

$t_2 = 3.83448$ 天 （探测器飞进到飞出火星影响球内时间）

$t_3 = 500$ 天 （探测器飞出火星引力影响球后的飞行时间）

2.2 任务流程

1. 日心坐标系 Kepler 轨道递推 (t_1)
2. 日心坐标系数值积分轨道递推 (t_1)
3. Kepler 和数值积分轨道递推对比
4. 火心坐标系数值积分轨道递推 (t_2)
5. 偏转效果定量分析
6. 日心坐标系 keplar 轨道递推 (t_3)
7. 绘制日心和火心探测器轨道飞行图及地球、火星飞行轨道图

3 基础理论与实现

3.1 Kepler 轨道递推

已知某物体绕中心天体作椭圆运动， t_0 时刻的位置和速度矢量为 \mathbf{r}_0 和 \mathbf{v}_0 ，试求 t 时刻的位置和速度矢量 $\mathbf{r}(t)$ 和 $\mathbf{v}(t)$ 。

计算步骤：

1. 将初始位置和速度矢量 \mathbf{r}_0 和 \mathbf{v}_0 转化为轨道六根数：

$$x_0 = [a, e, i, \Omega, \omega, E_0]$$

2. 根据偏近点角 E_0 和开普勒方程计算平近点角 M_0 ；
3. 由轨道平均运动计算 t 时刻平近点角：

$$M(t) = M_0 + n(t - t_0)$$

4. 迭代求解开普勒方程获得 t 时刻偏近点角 $E(t)$
5. 将新的轨道根数转化为 t 时刻的位置和速度矢量 $\mathbf{r}(t)$ 和 $\mathbf{v}(t)$ 。

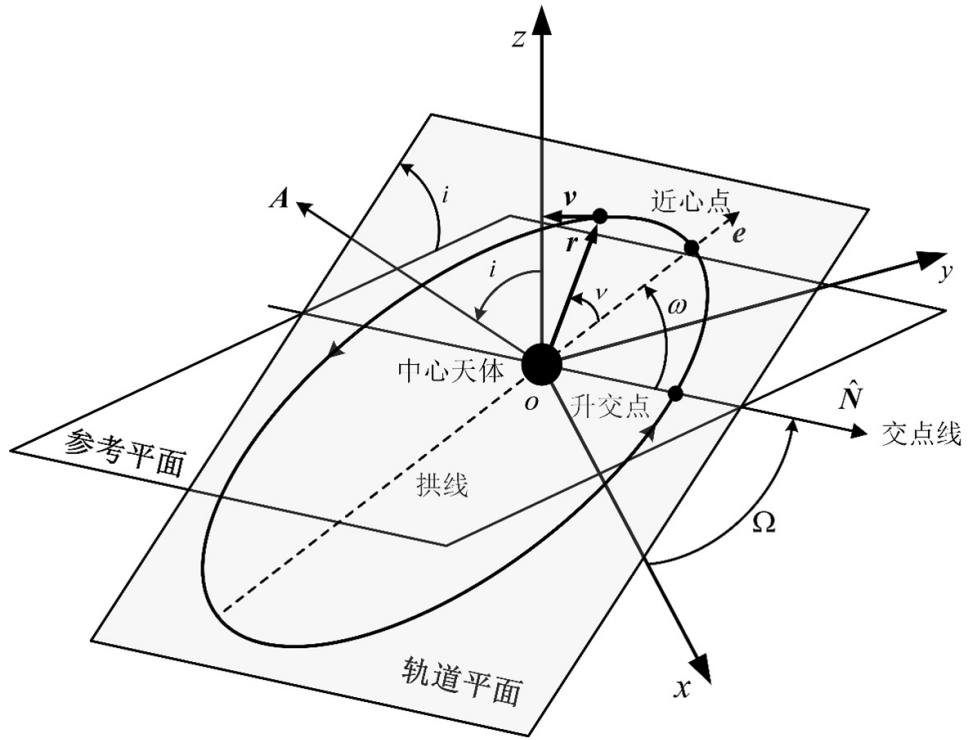


图 1: 轨道六根数

```

function [r, v] = kepler_propagate(r0, v0, t1, mu, dt)
    % 初始化状态向量
    x = [r0(:); v0(:)];

    % 生成时间向量, 确保包含 t1
    t = 0:dt:t1;
    if t(end) < t1
        t = [t, t1]; % 强制包含 t1
    end
    n_time = length(t);

    % 初始化解矩阵
    X = zeros(6, n_time);
    X(:, 1) = x;

    for j = 1:n_time-1
        % 当前状态
        r = X(1:3, j);
        v = X(4:6, j);
    
```

```

% 计算轨道根数
[a, e, i, Omega, omega, theta0] = rv2coe(r, v, mu);

% 检查轨道类型
if e >= 1
    error('仅支持椭圆轨道, e必须小于1');
end

% 计算平均角速度
n = sqrt(mu / a^3);

% 计算平近点角
E0 = 2 * atan(sqrt((1 - e)/(1 + e)) * tan(theta0 / 2));
M0 = E0 - e * sin(E0);

% 计算下一个时间点的平近点角
if j == n_time - 1
    % 最后一个时间点, 使用剩余时间增量
    dt_step = t(j+1) - t(j);
else
    dt_step = dt;
end

M = M0 + n * dt_step;

% 牛顿迭代求解偏近点角 E
E = solve_kepler(M, e, 1e-10);

% 计算真近点角
theta = 2 * atan(sqrt((1 + e)/(1 - e)) * tan(E / 2));

% 轨道根数到位置速度转换
[r_new, v_new] = coe2rv(a, e, i, Omega, omega, theta, mu);

% 更新状态
X(:, j+1) = [r_new; v_new];
end

```

```

% 提取最终位置和速度
r = X(1:3, :);
v = X(4:6, :);
end

```

3.2 轨道六根数和位置速度矢量的相互转化

3.2.1 位置和速度矢量转轨道六根数

已知轨道位置矢量 \mathbf{r} 和速度矢量 \mathbf{v} ，可唯一确定轨道六根数。在参考惯性坐标系中，角动量矢量表示为：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} y\dot{z} - z\dot{y} \\ z\dot{x} - x\dot{z} \\ x\dot{y} - y\dot{x} \end{bmatrix}$$

根据轨道根数的定义，角动量矢量亦可表示为：

$$\mathbf{A} = A \begin{bmatrix} \sin i \sin \Omega \\ -\sin i \cos \Omega \\ \cos i \end{bmatrix}$$

联立上式可得轨道倾角和升交点赤经：

$$i = \arccos \left(\frac{A_z}{A} \right) \quad (1)$$

$$\Omega = \arctan 2 \left(\frac{A_x}{A \sin i}, -\frac{A_y}{A \sin i} \right) \quad (2)$$

轨道半长轴表示为：

$$a = \left(\frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu} \right)^{-1}$$

轨道半通径和偏心率分别为：

$$p = \frac{A^2}{\mu} = a(1 - e^2) \quad (3)$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}} \quad (4)$$

平均角速度为：

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{|a|^3}}$$

椭圆轨道几何关系：

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = \sqrt{\mu a} \frac{ae \sin E}{r} (1 - e \cos E)$$

结合 $r = a(1 - e \cos E)$ 可得：

$$\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = a^2 n e \sin E$$

解得：

$$\sin E = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{a^2 n e}, \quad \cos E = \frac{a - r}{ae} \quad (5)$$

真近点角关系：

$$\begin{cases} \cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} \\ \sin v = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{1 - e \cos E} \end{cases}$$

纬度幅角 $u = \omega + v$ 满足：

$$\begin{cases} r \cos u = x \cos \Omega + y \sin \Omega \\ r \sin u = \frac{z}{\sin i} \end{cases}$$

解得近地点幅角：

$$\omega = u - v$$

```
function [a, e, i, Omega, w, phi] = rv2coe(R, V, miu)
    Z = [0; 0; 1]; % 定义惯性坐标系的Z轴
    X = [1; 0; 0]; % 定义惯性坐标系的X轴
    Y = [0; 1; 0]; % 定义惯性坐标系的Y轴

    r = norm(R);
    H = cross(R, V);
    h = norm(H);
    N = cross(Z, H);
    n = norm(N);

    tmp = 2 / r - dot(V, V) / miu;
    if tmp == 0 % 抛物线轨道
        a = Inf;
    else
        a = 1 / tmp;
    end

    E = ((dot(V, V) - miu / r) * R - dot(R, V) * V) / miu;
    e = norm(E);

    i = acos(dot(Z, H) / h); % 直接计算弧度值
```

```

if e < 1e-7
    w = 0; % 圆轨道无近地点角距
else
    w = acosd(dot(N, E) / (n * e));
    if dot(Z, E) < 0
        w = 360 - w;
    end
    w = deg2rad(w);
end

Omega = acosd(dot(N, X) / n);
if dot(N, Y) < 0
    Omega = 360 - Omega;
end
Omega = deg2rad(Omega);

phi = 0; % 默认值
if e > 1e-7
    phi = acosd(dot(E, R) / (e * r));
    if dot(R, V) < 0
        phi = 360 - phi;
    end
    phi = deg2rad(phi);
end
end

```

3.2.2 轨道六根数转位置和速度矢量

近焦点坐标系中位置矢量为：

$$\mathbf{r}_e = r \begin{bmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{bmatrix}$$

转换矩阵为：

$$M_e = R_z(-\Omega)R_x(-i)R_z(-\omega)$$

其中旋转矩阵:

$$R_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}, \quad R_z(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

惯性坐标系中位置矢量:

$$\mathbf{r} = M_e \mathbf{r}_e = r \cos v \hat{\mathbf{s}}_x + r \sin v \hat{\mathbf{s}}_y$$

单位矢量:

$$\hat{\mathbf{s}}_x = \begin{bmatrix} \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \cos i \sin \Omega \\ \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos i \cos \Omega \\ \sin \omega \sin i \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{s}}_y = \begin{bmatrix} -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \cos i \sin \Omega \\ -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos i \cos \Omega \\ \cos \omega \sin i \end{bmatrix}$$

速度矢量:

$$\mathbf{v} = \frac{\sqrt{\mu a}}{r} \left[-\sin E \hat{\mathbf{s}}_x + \sqrt{1 - e^2} \cos E \hat{\mathbf{s}}_y \right]$$

```
function [r, v] = coe2rv(a, e, i, Omega, omega, theta, mu)
% 将轨道根数转换为位置和速度向量 (支持椭圆和双曲线轨道)
% 检查轨道类型
if a > 0
    if e >= 1
        error('对于椭圆轨道, 偏心率「e」必须小于「1」');
    end
    % 椭圆轨道逻辑
    p = a * (1 - e^2); % 半参数
    r_mag = p / (1 + e * cos(theta)); % 径向距离
    v_mag = sqrt(mu / p); % 速度大小

    % 位置向量 (极坐标到笛卡尔坐标)
    r_perifocal = [r_mag * cos(theta);
                   r_mag * sin(theta);
                   0];

    % 速度向量
    if e == 0
        v_perifocal = [-sin(theta);
                       cos(theta);
                       0];
    else
        E = solve('e*cos(E) = cos(theta) - e', e);
        E = E(1);
        v_perifocal = [-sin(E) * sqrt(mu/a) / (1 - e*cos(E));
                       (cos(E) - e) * sqrt(mu/a) / (1 - e*cos(E));
                       0];
    end
end
```

```

                                0] * v_mag;

else
    v_perifocal = [-v_mag * sin(theta);
                   v_mag * (e + cos(theta));
                   0];

end

elseif a < 0
    if e <= 1
        error('对于双曲线轨道， 偏心率 e 必须大于 1');
    end
    % 双曲线轨道逻辑
    p = a * (1 - e^2); % 半参数

    % 确保分母不为零或负值
    denominator = 1 + e * cos(theta);
    if denominator <= 0
        error('分母 1 + e*cos(theta) 为零或负值， 无法计算径向距离');
    end

    % 径向距离
    r_mag = p / denominator;

    % 位置向量 (极坐标到笛卡尔坐标)
    r_perifocal = [r_mag * cos(theta);
                   r_mag * sin(theta);
                   0];

    % 速度向量
    v_mag = sqrt(mu / p);
    v_perifocal = v_mag * [-sin(theta);
                           e + cos(theta);
                           0];

else
    error('半长轴 a 不能为零');
end

% 构造旋转矩阵， 将轨道平面坐标转换为惯性坐标

```

```

R3_Omega = [cos(Omega), -sin(Omega), 0;
             sin(Omega), cos(Omega), 0;
             0, 0, 1];

R1_i = [1, 0, 0;
        0, cos(i), -sin(i);
        0, sin(i), cos(i)];

R3_omega = [cos(omega), -sin(omega), 0;
            sin(omega), cos(omega), 0;
            0, 0, 1];

% 总旋转矩阵
R = R3_Omega * R1_i * R3_omega;

% 转换位置和速度到惯性坐标
r = R * r_perifocal;
v = R * v_perifocal;
end

```

3.3 Kepler 方程的求解

椭圆轨道 Kepler 方程：

$$E - e \sin E = M \quad (6)$$

定义辅助函数：

$$f(E) = E - e \sin E - M$$

其导数为：

$$\frac{df}{dE} = 1 - e \cos E > 0$$

牛顿迭代公式：

$$E_{k+1} = E_k - \frac{f(E_k)}{1 - e \cos E_k}$$

迭代至收敛精度 ε 满足。

```

function E = solve_kepler(M, e, tol)
    % 设置E的初始估计值
    if M < pi
        E = M+e/2;
    else

```

```

    E = M-e / 2;
end
delta = 1;
% 牛顿迭代, 直到确定 E 在所要求的范围内
while abs(delta) > tol
    delta = (E - e*sin(E) - M) / (1 - e*cos(E));
    E = E - delta;
end
end

```

3.4 ode45 数值积分轨道递推

ode45 是一种基于自适应步长的 Runge-Kutta 方法, 结合了四阶和五阶公式, 用于求解常微分方程 (ODE)。它的核心思想是通过误差估计自动调整步长, 以在满足精度要求的同时提高计算效率。

ode45 的公式基于以下 Runge-Kutta 方法:

$$\begin{cases} \mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h \sum_{i=1}^6 b_i \mathbf{k}_i \\ \mathbf{k}_1 = f(t_n, \mathbf{y}_n) \\ \mathbf{k}_2 = f\left(t_n + c_2 h, \mathbf{y}_n + h \sum_{j=1}^1 a_{2j} \mathbf{k}_j\right) \\ \mathbf{k}_3 = f\left(t_n + c_3 h, \mathbf{y}_n + h \sum_{j=1}^2 a_{3j} \mathbf{k}_j\right) \\ \mathbf{k}_4 = f\left(t_n + c_4 h, \mathbf{y}_n + h \sum_{j=1}^3 a_{4j} \mathbf{k}_j\right) \\ \mathbf{k}_5 = f\left(t_n + c_5 h, \mathbf{y}_n + h \sum_{j=1}^4 a_{5j} \mathbf{k}_j\right) \\ \mathbf{k}_6 = f\left(t_n + c_6 h, \mathbf{y}_n + h \sum_{j=1}^5 a_{6j} \mathbf{k}_j\right) \end{cases}$$

其中, h 是当前步长, $f(t, \mathbf{y})$ 是状态向量的导数函数, c_i, a_{ij}, b_i 是方法的系数。

ode45 使用五阶公式计算下一步的解, 并用四阶公式估计误差, 根据误差估计, 步长 h 会被动态调整以满足用户设定的容差。

$$\begin{cases} \mathbf{y}_{n+1}^{(5)} = \mathbf{y}_n + h \sum_{i=1}^6 b_i \mathbf{k}_i \\ \mathbf{y}_{n+1}^{(4)} = \mathbf{y}_n + h \sum_{i=1}^5 \tilde{b}_i \mathbf{k}_i \\ \text{误差估计: } \text{err} = \left| \mathbf{y}_{n+1}^{(5)} - \mathbf{y}_{n+1}^{(4)} \right| \end{cases}$$

在轨道动力学中, 状态向量通常包含位置和速度分量。对于三维空间中的天体运动, 状态向量可以表示为:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x & y & z & \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{bmatrix}^T$$

其中, x, y, z 是位置分量, $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ 是速度分量。

状态向量的导数由牛顿运动定律和引力公式给出：

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} & a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}^T$$

其中， a_x, a_y, a_z 是引力加速度分量，由牛顿万有引力公式计算：

$$a_x = -\frac{\mu x}{r^3}, \quad a_y = -\frac{\mu y}{r^3}, \quad a_z = -\frac{\mu z}{r^3}$$

其中， $\mu = GM$ 是引力参数， G 是引力常数， M 是中心天体的质量， $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 是位置向量的模长。

```
function dydt = sun_gravity(t, x)
    mu_sun = 1.32712440017987e11; % 太阳引力常数 (km3/s2)
    % 定义引力作用下的运动方程
    r = x(1:3);
    v = x(4:6);

    R = sqrt(x(1)^2+x(2)^2+x(3)^2);
    dr = v;
    dv = -mu_sun * r / (R^3);

    dydt = [dr;dv];
end
```

4 实现结果与分析

4.1 轨道递推探测器状态

在具体实验中，我们设计 Kepler 递推的步长为 100，牛顿迭代的容忍度为 10^{-10} 。实验表明，Kepler 递推的步长对其精度影响较小，但步长设计是收集轨道数据的必然操作。然而，由于截止时间包含残余时间，在收集轨道状态数据时会遗漏这些时间的运动，导致 Kepler 递推的精度下降。

为解决这一问题，我们引入选择判断机制：首先将数据扩展一个长度，当递推至倒数第一个数据时，将步长从原有值动态调整为剩余的所有时间。这种方法既考虑了剩余时间的运动，又通过增大步长提高了效率。

以下是 Kepler 递推步长的动态调整算法：

```
for j = 1 to ntime - 1 do
    if j == ntime - 1 then
        计算剩余时间增量：
```

$$dt_{\text{step}} = t(j+1) - t(j)$$

else

使用固定步长:

$$dt_{\text{step}} = dt$$

end if

使用 dt_{step} 计算下一个时间点的平近点角

end for

设总时间为 T , 时间步长为 dt , 时间点序列为 $t_0, t_1, \dots, t_{n_{\text{time}}}$, 其中 $t_0 = 0, t_{n_{\text{time}}} = T$ 。在 Kepler 递推中, 平近点角 M 的计算公式为:

$$M_{j+1} = M_j + dt_{\text{step}} n$$

其中 n 为平均角速度。

当步长固定为 dt 时, 时间点序列为:

$$t_j = t_0 + j \cdot dt$$

但由于截止时间 T 可能包含残余时间 $\Delta t = T - t_{n_{\text{time}}}$, 最后一个时间点的步长需要调整为:

$$dt_{\text{step}} = \Delta t$$

通过动态调整步长, 我们可以在效率和精度之间取得平衡:

- 当步长较大时 (如 $dt = 100$), 计算复杂度为 $O(n_{\text{time}})$, 效率较高, 但可能遗漏部分运动。
- 当步长较小时 (如 $dt = 1$), 计算复杂度为 $O(n_{\text{time}} \cdot dt)$, 精度较高, 但效率较低。
- 通过动态调整步长, 我们可以在大部分时间点使用较大步长以提高效率, 而在最后一个时间点使用剩余时间增量以保证精度。

4.1.1 到达火星影响球时的日心轨道状态

- Kepler 方法计算结果:

– 位置:

$$\begin{bmatrix} 60361624.824665 \\ -185410365.859250 \\ -86444351.414516 \end{bmatrix} \text{ km}$$

– 速度:

$$\begin{bmatrix} 20.952597 \\ 8.763759 \\ 2.095795 \end{bmatrix} \text{ km/s}$$

- 数值积分方法计算结果:

- 位置:

$$\begin{bmatrix} 60361624.826628 \\ -185410365.858303 \\ -86444351.414275 \end{bmatrix} \text{ km}$$

- 速度:

$$\begin{bmatrix} 20.952597 \\ 8.763759 \\ 2.095795 \end{bmatrix} \text{ km/s}$$

- 两种方法的偏差:

- 位置偏差:

$$\begin{bmatrix} -0.001963 \\ -0.000947 \\ -0.000241 \end{bmatrix} \text{ km}$$

- 速度偏差:

$$\begin{bmatrix} 0.000000 \\ -0.000000 \\ -0.000000 \end{bmatrix} \text{ km/s}$$

4.1.2 Kepler 方法预测的后续轨道状态

- 飞出火星引力影响球 500 天后的日心轨道状态:

- 位置:

$$\begin{bmatrix} -171953401.842335 \\ -167965202.830318 \\ -76448722.227815 \end{bmatrix} \text{ km}$$

- 速度:

$$\begin{bmatrix} 16.413362 \\ -11.536247 \\ -5.498273 \end{bmatrix} \text{ km/s}$$

4.2 火星借力偏转轨道

与椭圆轨道不同，双曲线轨道的偏心率 $e > 1$ ，轨道能量为正值，探测器在引力场中做双曲线运动。双曲线轨道的推导需要使用双曲函数代替椭圆轨道中的三角函数，同时轨道根数的计算和轨道方程的形式也有所不同。

4.2.1 双曲线 kepler 轨道递推

双曲线轨道的径向距离公式为：

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \quad (7)$$

其中：- $p = a(1 - e^2)$ 是半参数；- $a < 0$ 是半长轴；- $e > 1$ 是偏心率；- θ 是真近点角。

由于 $e > 1$ ，分母 $1 + e \cos(\theta)$ 可能为零或负值，因此需要确保 θ 的范围使得分母为正值。

双曲线轨道的平均角速度 n 定义为：

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{(-a)^3}} \quad (8)$$

其中 μ 是引力参数， $-a$ 是半长轴的绝对值。

双曲线轨道的平近点角 M 和偏近点角 F 的关系为：

$$M = e \sinh(F) - F \quad (9)$$

其中 $\sinh(F)$ 是双曲正弦函数。

偏近点角 F 和真近点角 θ 的关系为：

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \tanh\left(\frac{F}{2}\right) \quad (10)$$

双曲线轨道的 Kepler 方程为：

$$M = e \sinh(F) - F \quad (11)$$

由于无法直接求解 F ，需要使用数值方法（如牛顿迭代法）来求解。

牛顿迭代法的步骤如下：1. 初始猜测 $F_0 = M$ ；2. 迭代公式：

$$F_{k+1} = F_k - \frac{e \sinh(F_k) - F_k - M}{e \cosh(F_k) - 1} \quad (12)$$

3. 当 $|F_{k+1} - F_k| < \text{tol}$ 时停止迭代。

将轨道根数转换为位置和速度向量时，双曲线轨道的公式与椭圆轨道不同：- 径向距离：

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \quad (13)$$

- 速度向量：

$$\mathbf{v} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} [-\sin(\theta), e + \cos(\theta), 0]^T \quad (14)$$

与椭圆轨道相比，双曲线轨道具有以下特性：- 轨道能量为正值；- 探测器在引力场中做双曲线运动，最终逃离引力场；- 轨道六根数转换位置速度中使用双曲函数代替三角函数。


```

function [r, v, orbit_plane, distance, energy, angular_momentum] ...
= hyperbolic_kepler_propagate(r0, v0, t1, mu_mars, mu_sun, ...
dt, mars_pos, mars_vel)
    % 初始化状态向量 [位置; 速度]
    x = [r0(:); v0(:)]; % 确保为列向量

    % 创建时间向量
    t = 0:dt:t1;
    if t(end) < t1
        t = [t, t1]; % 强制包含 t1
    end
    n_time = length(t); % 时间点数量

    % 初始化解矩阵
    X = zeros(6, n_time); % 6个状态变量 (3位置 + 3速度)
    X(:, 1) = x;

    % 初始化轨道平面坐标矩阵
    orbit_plane = zeros(2, n_time);

    % 初始化额外的存储矩阵
    distance = zeros(1, n_time); % 距离火星的距离
    energy = zeros(1, n_time); % 能量
    angular_momentum = zeros(1, n_time); % 角动量

    % 计算初始位置与火星的距离
    distance(1) = norm(r0);

    % 计算初始角动量
    angular_momentum(1) = norm(cross(r0 + mars_pos, v0 + mars_vel));

    for j = 1:n_time-1
        % 当前状态
        r = X(1:3, j);
        v = X(4:6, j);

        % 计算轨道根数

```

```

[a, e, i, Omega, omega, theta0] = rv2coe(r, v, mu_mars);

% 检查是否为双曲线轨道
if a > 0
    error('该轨道不是双曲线轨道');
end

% 计算平均角速度 (双曲线轨道使用双曲函数)
n = sqrt(mu_mars / (-a)^3); % 平均角速度

% 计算偏近点角 F0
F0 = 2 * atanh(sqrt((e - 1) / (e + 1)) * tan(theta0 / 2));

% 计算平近点角 M
M0 = e * sinh(F0) - F0; % 双曲线轨道的平近点角

% 计算下一个时间点的平近点角
if j == n_time - 1
    % 最后一个时间点, 使用剩余时间增量
    dt_step = t(j+1) - t(j);
else
    dt_step = dt;
end

M = M0 + n * dt_step; % 下一个时间点的平近点角

% 牛顿迭代方程
F = solve_kepler_hyperbola(M, e, 1e-10);

% 计算真近点角
theta = 2 * atan(sqrt((e + 1) / (e - 1)) * tanh(F / 2));

% 轨道根数到位置速度转换
[r_new, v_new] = coe2rv(a, e, i, Omega, omega, theta, mu_mars);
% 更新状态
X(:, j+1) = [r_new; v_new];
end

```

```

    % 提取最终位置和速度
    r = X(1:3, :);
    v = X(4:6, :);
end

function F = solve_kepler_hyperbola(M, e, tol)
    % 使用牛顿迭代法求解双曲线轨道的偏近点角 F
    % 初始猜测
    F0 = M;
    F = F0;
    err = 1;

    while err > tol
        % 计算函数值和导数
        f = e * sinh(F) - F - M;
        f_prime = e * cosh(F) - 1;

        % 更新 F
        F1 = F - f / f_prime;
        err = abs(F1 - F);
        F = F1;
    end
end

```

4.2.2 探测器飞入火星影响球时的轨道状态 (通过双曲线 Kepler 轨道递推)

- 位置:

$$\begin{bmatrix} 543895.109373 \\ -80552.648235 \\ 175744.755863 \end{bmatrix} \text{ km}$$

- 半径: 577232.048964 km

- 速度矢量:

$$\begin{bmatrix} -3.212852 \\ 0.450571 \\ -1.065653 \end{bmatrix} \text{ km/s}$$

- 速度: 3.414828 km/s

4.2.3 探测器飞出火星影响球时的轨道状态（通过双曲线 Kepler 轨道递推）

- 位置:

$$\begin{bmatrix} -334568.929582 \\ 390148.928996 \\ 262762.510256 \end{bmatrix} \text{ km}$$

- 半径: 577231.922395 km

- 速度矢量:

$$\begin{bmatrix} -1.951262 \\ 2.316482 \\ 1.577193 \end{bmatrix} \text{ km/s}$$

- 速度: 3.414828 km/s

4.2.4 效果分析

探测器飞越火星时的双曲线轨道参数满足：

$$v_p = \sqrt{v_\infty^2 + \frac{2\mu}{r_p}} \quad (15)$$

其中 $\mu = \mu_{\text{mars}}$, r_p 为近火点距离, v_∞ 为无限远处相对速度。

速度矢量叠加关系（质心系）：

$$\mathbf{V}^- = \mathbf{v}_{\text{mars}} + \mathbf{v}_\infty^- \quad (16)$$

$$\mathbf{V}^+ = \mathbf{v}_{\text{mars}} + \mathbf{v}_\infty^+ \quad (17)$$

速度改变量模长：

$$\Delta v = 2v_\infty \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \quad (18)$$

其中偏转角 δ 由下式确定：

$$\tan\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{\mu}{r_p v_\infty^2} \quad (19)$$

在质心惯性坐标系中，探测器的角动量可以表示为：

$$H = \|\mathbf{R} \times \mathbf{v}\| = X_1 \dot{Y}_1 - Y_1 \dot{X}_1 \quad (20)$$

质心惯性坐标系中探测器借力飞行前后的轨道能量变化量为：

$$\Delta E = -2v_2 v_\infty \sin \frac{\delta}{2} \sin \psi \quad (21)$$

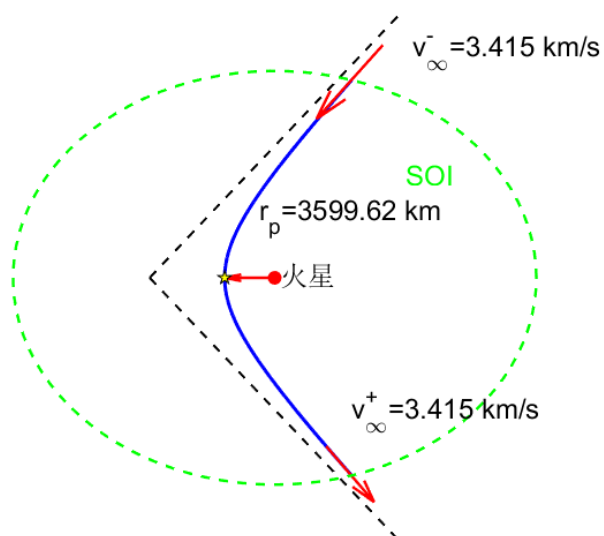


图 2: 火星借力飞行轨道示意图

表 1: 火星引力偏转效果参数表

指标	数值
近地点半径 r_p	3604.196629 km
借力飞行高度	214.996629 km
角动量变化 ΔH	$5.3185 \times 10^8 \text{ km}^2/\text{s}$
速度增量 Δv	3.4724 km/s
偏转角 δ	61.1194°
轨道能量变化 ΔE	$-65.2349 \text{ km}^2/\text{s}^2$

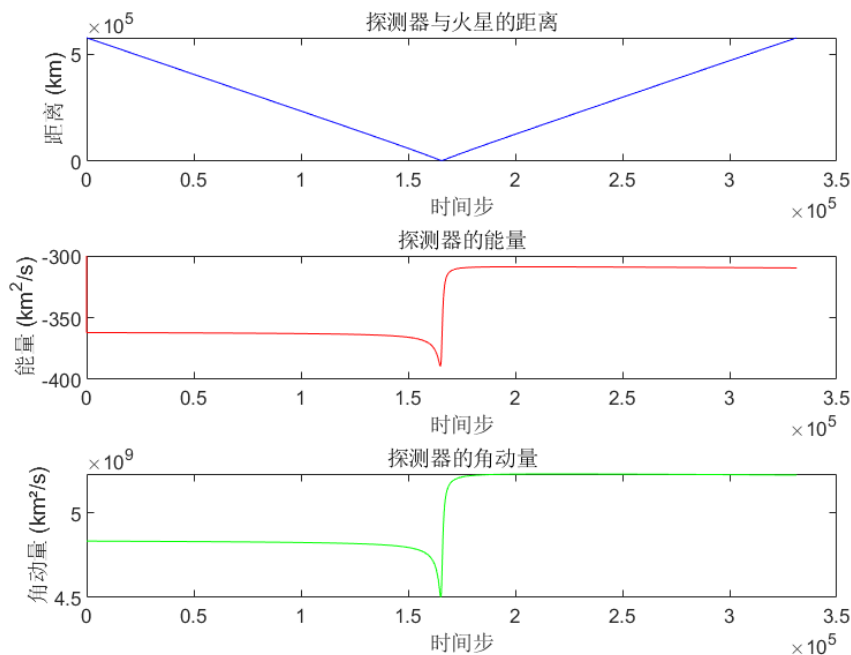


图 3: 探测器借力飞行期间参数变化图

探测器从远离火星的地方开始接近这颗红色星球，沿着双曲线轨迹逐渐靠近。在某个时刻，它抵达了近地点，随后又在火星引力的作用下逐渐远离。这一过程中，探测器经历了典型的双曲线轨道运动，进入火星的引力影响范围，在飞掠后被引力弹射出去，最终离开火星的影响球。

在接近火星时，探测器的总机械能出现短暂下降，随后在飞越火星后迅速回升并趋于稳定。这种能量变化反映了探测器与火星引力场的相互作用：当探测器靠近火星时，势能向动能转化，导致能量略微下降；而在飞越火星后，探测器的动能显著增加，总能量回升，表明它从火星引力场中“借”到了额外的能量，从而提升了轨道速度。

与此同时，探测器的角动量也经历了显著变化。在接近火星时，角动量略有下降，这是轨道方向逐渐调整的结果；而在飞越火星后，角动量迅速上升并趋于稳定。这种变化表明探测器在火星引力的作用下发生了轨道偏转，其运动方向发生了显著改变。

通过这次引力助推，探测器成功改变了自身的轨道能量和角动量。能量的增加使它获得了更高的轨道速度，而角动量的变化则导致轨道方向发生偏转。这种轨道调整不仅改变了探测器的飞行路径，还为其后续的深空探测任务提供了新的动力。例如，它可能利用这次引力助推前往更远的行星或小行星带，继续执行科学探测任务。

整个过程体现了引力助推的物理原理：探测器借助火星的引力场调整轨道，既节省了燃料，又实现了轨道能量和方向的优化。这种技术是深空探测任务中常见的策略，能够帮助探测器以更低成本完成复杂的任务目标。

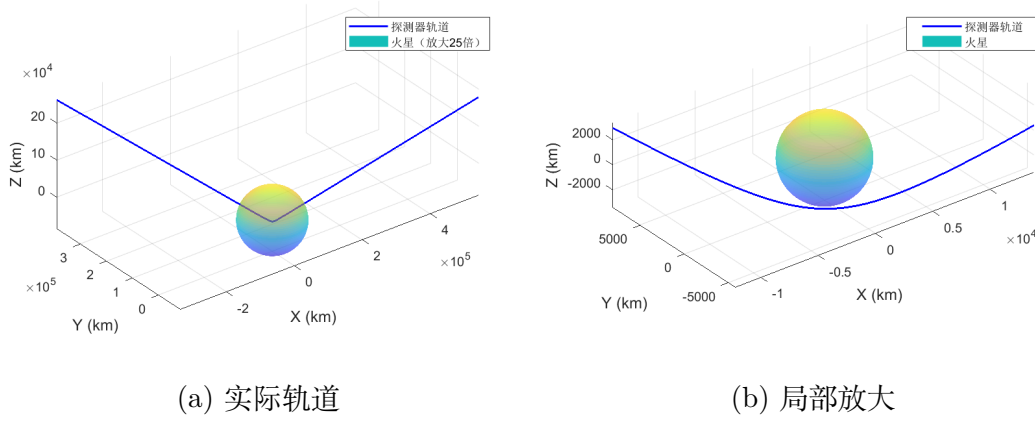


图 4: 火心坐标系下探测器轨道图

```

function measure_deflection(r_rel, v_rel, mars_pos, mars_vel)
    % 偏转效果评估指标
    x = mars_pos/norm(mars_pos);
    v_in = v_rel(:,1);
    v_out = v_rel(:,end);
    v_in_sun = v_in + mars_vel;
    v_out_sun = v_out + mars_vel;

    v_in_norm = norm(v_in);
    v_out_norm = norm(v_out);

    v_inf = v_in_norm; % 直接使用进入速度模

    % 近心点计算
    [~, idx] = min(vecnorm(r_rel,2,1));
    mars_radius = 3389.2;
    r_p = r_rel(:,idx);

    delta_v = norm(v_out_sun - v_in_sun);
    deflection_angle = 2*asind(delta_v/(2*v_inf));
    psi = acosd(dot(r_p, x)/(norm(r_p)));

    % 角动量与能量变化
    h_in = cross(r_rel(:,1) + mars_pos, v_in_sun);
    h_out = cross(r_rel(:,end) + mars_pos, v_out_sun);

```

```

delta_h = norm(h_out - h_in);
delta_E = -2 * v_inf * norm(mars_vel) ...
* sind(deflection_angle/2) * sind(psi);
end

```

4.3 日心坐标探测器、火星、地球飞行轨道

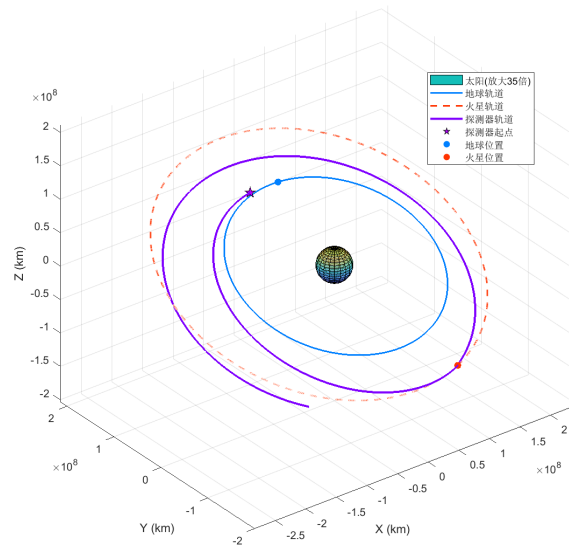


图 5: 日心坐标系下探测器、火星、地球全程飞行轨道图

日心坐标系下探测器、火星和地球的飞行轨道图直观展示了天体运动轨迹。首先，地球轨道近乎圆形，体现了地球稳定的公转特性，轨道倾角接近 0 度，几乎在黄道面上运动，而火星轨道则位于地球轨道之外且更椭圆，其倾斜的轨道面相对于黄道面有一个小角度，这些特性共同决定了探测器的飞行路径与行星的相对位置关系。

探测器的轨道从地球出发，逐渐接近火星，在引力作用下发生偏转，轨道方向和形状发生显著变化，偏转角度和速度变化可通过轨道方向和密集程度判断，而能量变化则由轨道形状和大小反映。

轨道图在任务规划、轨道控制和科学研究中具有重要价值，它能帮助确定最佳发射窗口和飞行路径，评估轨道控制效果，并研究行星际引力环境和轨道动力学特性。