

文章编号:1006-7736(2001)03-0071-04

## 基于 DFT 相位的正弦信号幅度高精度估计

齐国清<sup>1</sup>, 贾欣乐<sup>2</sup>

(1. 大连海事大学 信息工程学院, 辽宁 大连 116026;

2. 大连海事大学 轮机工程学院, 辽宁 大连 116026)

**摘要:** 针对利用 DFT 幅度估计正弦信号幅度因频谱泄漏引起较大误差的问题, 首先根据 DFT 最大谱线的幅度对信号幅度进行粗略估计, 然后将采样信号分两段再做 DFT, 由两个 DFT 在最大谱线处的相位得到信号的初始相位  $\phi_0$  的估计值, 根据  $\phi_0$  估计信号频率与 DFT 最大谱线对应的频率的偏差  $\delta$ , 利用  $\delta$  对幅度的粗略估计进行修正, 得到信号幅度的高精度估计. Monte Carlo 模拟结果表明幅度估计精度大大提高, 估计方差接近 Cramer Rao 下限.

**关键词:** 数字信号处理; 幅度估计; DFT; 频谱泄漏

**中图分类号:** TN911.72 **文献标识码:** A

在一些应用中需要估计正弦信号的幅度, 当信噪比较低时, 直接在时域估计不能得到满意的结果. DFT 对正弦信号具有显著的信噪比增益, 因此利用 DFT 可以检测信噪比很低的正弦信号并估计其幅度. 利用 DFT 估计正弦信号幅度的缺点是当信号频率不是 DFT 频率分辨率的整数倍时, 由于频谱泄漏使得信号幅度的估计值产生较大的偏差, 而且该偏差不随 DFT 长度的增加而减小. 采用内差技术(在采样数据后补零再进行 DFT)可以提高幅度估计精度, 但要增加 DFT 的长度使运算量大幅度增加. 文献[1]提出利用正弦信号 DFT 主瓣内两条谱线的幅度比值提高幅度估计精度的方法. 本文提出利用 DFT 的相位提高正弦信号幅度估计精度的方法.

### 1 基于 DFT 相位的幅度高精度估计原理

在  $0 \leq t < T$  区间内对复高斯白噪声背景下的复正弦信号进行采样, 采样序列表示为

$$s(n) = a \cdot e^{j(2\pi f_0 n/N - \phi_0)} + z(n), 0 \leq n < N \quad (1)$$

其中,  $a$ ,  $f_0$  和  $\phi_0$  分别为复正弦信号的幅度、频率和初相.  $z(n)$  为零均值、方差为  $\sigma_z^2$  的复高斯白噪声, 信噪比为  $SNR = a^2/\sigma_z^2$ . 当信噪比较大时,  $s(n)$  的  $N$  点 DFT 可表示为<sup>[1]</sup>

$$S(k) = \left| \frac{a \cdot \sin[\pi(k - f_0 T)]}{\sin[\pi(k - f_0 T)/N]} \right| + b_z \left| e^{j[\phi_0 - \frac{N-1}{N}\pi(f_0 T - k) + \phi_z]} \right|, k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (2)$$

· 收稿日期: 2001-04-03.

作者简介: 齐国清(1960-), 男, 辽宁凌海人, 教授, 主要从事雷达、信号处理的研究.

式中,  $b_z$  和  $\varphi_z$  分别为等效幅度和相位噪声, 均为零均值高斯噪声. 在信噪比较大或  $N$  较大的情况下,  $b_z$  和  $\varphi_z$  的方差分别为<sup>[2]</sup>

$$\text{var}(b_z) = N\sigma_z^2/2, \text{var}(\varphi_z) = \frac{(\pi\delta)^2}{2N \cdot \text{SNR} \cdot \sin^2(\pi\delta)}$$

在信噪比较大情况下,  $S(k)$  的最大谱线位置为  $m = \text{round}(f_0 T)$ , 即最接近  $f_0 T$  的整数. 在最大谱线处,  $S(k)$  的幅度为

$$|S(m)| = \left| \frac{a \cdot \sin[\pi(m - f_0 T)]}{\sin[\pi(m - f_0 T)/N]} + b_z \right| = \left| \frac{a \cdot \sin(\delta\pi)}{\sin(\delta\pi/N)} + b_z \right| \quad (3)$$

式中,  $\delta = m - f_0 T$ , 表示信号实际频率  $f_0$  与 DFT 最大谱线对应的频率  $m\Delta f$  的偏差,  $\Delta f = 1/T$  为 DFT 的频率分辨率,  $\delta$  的取值范围为  $-0.5 \sim 0.5$ . 在 DFT 幅度最大值处的信噪比为  $\text{SNR}_0 = E\{|S(m)|^2\}/\text{var}(|b_z|) = G_{\text{FFT}} \text{SNR}$ , 其中  $G_{\text{FFT}} = \sin(\delta\pi)/\sin(\delta\pi/N)$  为 DFT 的信噪比增益, 当  $N$  较大时,  $G_{\text{FFT}} \approx N\sin(\delta\pi)$ .

由  $\frac{1}{N}|S(m)|$  可以得到信号幅度  $a$  的估值. 估值的均值为

$$E\left[\frac{1}{N}|S(m)|\right] = \frac{a \cdot \sin(\delta\pi)}{N \sin(\delta\pi/N)} \quad (4)$$

从上式可见, 只有当  $\delta = 0$  时,  $\frac{1}{N}|S(m)|$  是  $a$  无偏估计, 当  $\delta$  接近 0.5 时, 幅度估计产生很大的偏差, 如图 1 中的细线所示.

根据式(4), 对应较大的  $N$ , 当  $\delta = 0.5$  时,  $E\left[\frac{1}{N}|S(m)|\right] \approx a \cdot \sin(\pi/2)/(\pi/2) \approx 0.64a$ . 相对估计偏差最大为 0.36, 而且估计偏差不随  $N$  的增加而减小. 因此直接利用 DFT 最大谱线的幅度估计正弦信号的幅度无法得到满意的精度.

若已知  $\delta$ , 可按下式估计信号幅度

$$\hat{a} = \frac{\sin(\delta\pi/N)}{\sin(\delta\pi)} |S(m)| \quad (5)$$

则有  $E(\hat{a}) = a$ , 因此  $\hat{a}$  为  $a$  的无偏估计. 在  $f_0$  未知的情况下, 需首先估计  $\delta$ , 才能按上式估计信号幅度. 根据式(2),  $S(k)$  最大谱线处的相位为

$$\varphi = \phi_0 - \frac{N-1}{N}\delta\pi + \varphi_z \quad (6)$$

由此可得到  $\delta$  的估值

$$\hat{\delta} = \frac{N}{(N-1)\pi}(\phi_0 - \varphi) \quad (7)$$

当  $N$  较大时, 上式可近似为

$$\hat{\delta} = \frac{\phi_0 - \varphi}{\pi} \quad (8)$$

当信号初相  $\phi_0$  未知时, 可按下面方法求其估计值  $\hat{\phi}_0$ . 将  $x(n)$  等分成两个长度为  $N/2$  的序列,  $x_1(n) = s_1(n) + z_1(n)$  和  $x_2(n) = s_2(n) + z_2(n)$ , 并分别对其进行  $N/2$  点 DFT 变换.  $s_1(n)$  和  $s_2(n)$  DFT 分别为

$$S_1(k) = \left| \frac{a \cdot \sin[\delta\pi(k - f_0 T/2)]}{\sin[2\pi(k - f_0 T/2)/N]} + b_{z1} \right| e^{j[\phi_0 + \frac{N-2}{N}\pi(f_0 T - k) + \varphi_{z1}]}, k = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1 \quad (9)$$

$$S_2(k) = \left| \frac{a \cdot \sin[\delta\pi(k - f_0T/2)]}{\sin[2\pi(k - f_0T/2)/N]} \right| + b_{z2} \left| e^{j[f_0 + \frac{N-2}{N}\pi(f_0T-k) + \pi f_0T \cdot \varphi_2]} \right|, k = 0, 1, 2, \dots, N/2 \quad (10)$$

当信噪比较大时,  $S_1(k)$  与  $S_2(k)$  的最大谱线位置相同, 均为  $l = \text{round}(f_0T/2)$ , 两者在最大谱线处的相位分别为

$$\varphi_1 = \phi_0 - \frac{N-2}{N}(l - f_0T/2)\pi + \varphi_{z1} \quad (11)$$

$$\varphi_2 = \phi_0 - \frac{N-2}{N}(l - f_0T/2)\pi + \pi f_0T + \varphi_{z2} \quad (12)$$

其中,  $\varphi_{z1}$  和  $\varphi_{z2}$  均为零均值高斯白噪声, 由式(11)、(12)可得  $\phi_0$  的无偏估计

$$\hat{\phi}_0 = \frac{3N-2}{2N}\varphi_1 - \frac{N-2}{2N}\varphi_2 \quad (13)$$

当  $N$  较大时, 上式可近似为

$$\hat{\phi}_0 = \frac{3}{2}\varphi_1 - \frac{1}{2}\varphi_2 \quad (14)$$

将式(14)代入式(8), 得

$$\hat{\delta} = \frac{3\varphi_1 - \varphi_2 - 2\varphi}{2\pi} \quad (15)$$

于是,  $a$  的估计值为

$$\hat{a} = \frac{\sin[(2\varphi - 3\varphi_1 + \varphi_2)/(2N)]}{\sin[(2\varphi - 3\varphi_1 + \varphi_2)/2]} |S(m)| \quad (16)$$

## 2 计算机模拟结果

按本文提出的幅度估计方法, 对不同频率的幅度为 1 的实正弦信号在不同的信噪比下进行计算机模拟。图 1 所示为  $a = 1, N = 512$ , 信噪比为 6 dB,  $f_0$  从  $33.5\Delta f$  到  $34.5\Delta f$  变化,  $\phi_0$  随机的情况下直接利用 DFT 的幅度估计正弦信号幅度(图中细线所示)与本文提出的利用 DFT 相位提高幅度估计精度的方法(粗线)的对比结果。表 1 所示为相同条件下经 100 次 Monte Carlo 模拟计算的幅度估计的均值和均方根误差。模拟结果显示  $\delta$  在  $-0.5 \sim 0.5$  范围内任意变化, 本文提出的方法都可得到幅度的无偏估计。

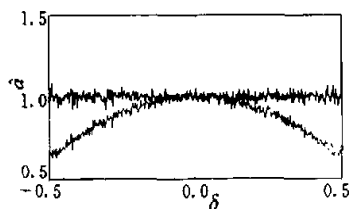


图1 直接利用 DFT 估计正弦信号幅度  
与本文提出的方法对比

( $a = 1, N = 512, SNR = 6 \text{ dB}, \phi_0$  随机)

表1  $f_0$  在 DFT 一个分辨单元内变化时幅度估计的均值和均方根误差

$\delta$	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\text{mean}(\hat{a})$	0.9997	1.0002	0.9995	1.0003	.9990	0.9987	0.9997	0.9992	1.0006	1.0002	0.9997
$\text{rms}(\hat{a})$	0.034	0.0273	0.0246	0.0224	0.0226	0.0215	0.0225	0.0232	0.0235	0.0267	0.0343

注: ( $SNR = 6 \text{ dB}, N = 512, \phi_0$  随机,  $a = 1, f_0 = (34 + \delta)\Delta f, L = 100$ )

图 2 所示为不同信噪比及 DFT 长度情况下,  $f_0 = (N/4 + \delta)\Delta f, \delta$  在  $[-0.5, 0.5]$  内随机变化, 幅度估计误差的模拟结果, 结果显示均方根误差与 CR 下限(中图虚线)接近。图 3 为幅度估计均方根误差与  $\delta$  的关系的模拟结果,  $\delta = 0$  时,  $\text{rms}(\hat{a})$  最小, 接近 CR 下限。随着

$|\delta|$  的增加,  $rms(\hat{a})$  略有增加,  $rms(\hat{a})$  随  $\delta$  变化的规律与  $\pi\delta/\sin(\pi\delta)$  接近. 图4所示为两个幅度都为1、频率不同的正弦信号幅度估计的模拟结果. 图4(a)所示为DFT的幅度, 由于第一个信号的频率位于DFT的两条谱线之间, 因而其幅度估计值比实际值小很多; 图4(b)所示为采用本文提出的DFT相位修正方法的估计结果, 两个信号的幅度估计结果均与实际值非常接近.

### 3 结论

利用DFT可在很低信噪比条件

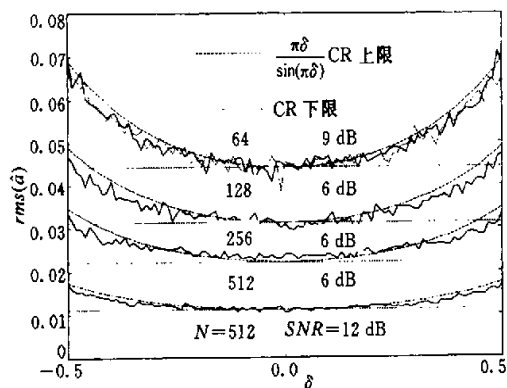


图3 幅度估计误差与 $\delta$ 的关系( $\alpha=1, \phi$  随机)

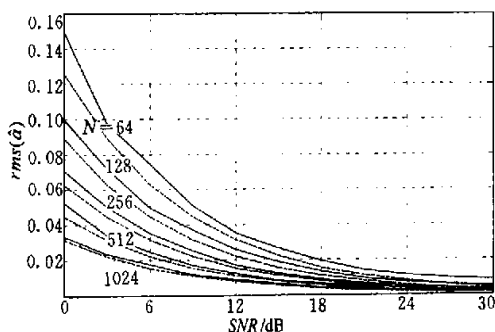


图2 幅度估计误差与SNR及N的关系( $\alpha=1, \phi$  随机,  $\delta$  随机 $[-0.5, 0.5]$ , 虚线为CR下限)

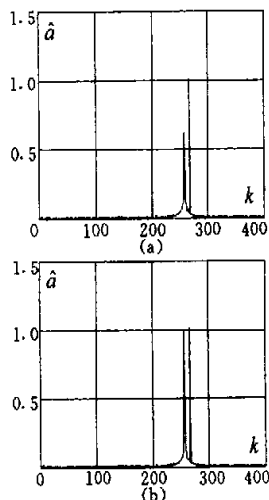


图4 两个正弦信号的幅度估计模拟结果  
( $SNR=6\text{ dB}, N=1024, a_1=a_2=1$ ,  
 $f_1=256.5\Delta f, f_2=266\Delta f$ )

下检测正弦信号并估计其幅度, 但由于频谱泄漏引起的栅栏效应使得当信号频率不是DFT频率分辨率的整数倍时幅度估计产生很大的偏差, 估计精度大大降低. 本文提出了利用DFT的相位估计信号实际频率与DFT离散频率的偏差, 修正正弦信号的幅度估计, 使其成为无偏估计, 提高估计精度. 计算机模拟结果显示幅度估计均方误差接近Cramer-Rao下限.

### 参考文献:

- [1] Jain V K, Collins W L Jr and Davis D C. High-accuracy analog measurements via interpolated FFT [J]. IEEE Trans on IM, 1979, 28(2): 113-122.
- [2] 齐国清. FMCW 液位测量雷达系统设计与高精度测距原理研究[D]. 大连: 大连海事大学, 2001.

(下转第78页)

tures[J]. IEEE Communication Magazines, 1995, 33(5): 62-67.

- [5] Robert Arnott, Seshaiha Ponnekanti, Carl Taylor, *et al.* Advanced base station technology [J]. IEEE Communication Magazines, 1998, 36(2): 96-102.

## Development trend of GMDSS software radio

LIAN Ping, WANG Jing, LU Ding-chen

(*Information Eng. College, Dalian Maritime Univ., Dalian 116026, China*)

**Abstract:** This article proposes a new concept: Applying software radio into GMDSS (Global Maritime Distress and Safety System). The software radio architecture takes the hardware circuits as a basis, with as much radio functionality as possible defined in software. This article discusses the feasibility of realizing software radio in GMDSS and presents the GMDSS software radio architecture including hardware and software. According to the characteristic of GMDSS and the trend of software radio techniques, a multi-phase design is considered. At last the article points out several problems which should be paid attention in the research and development process.

**Key words:** software radio; GMDSS; safety system; ship communication system

(上接第 74 页)

## High accuracy amplitude estimation of sinusoid based on the phase of DFT

QI Guo-qing<sup>1</sup>, JIA Xin-le<sup>2</sup>

(1. *Information Eng. College, Dalian Maritime Univ., Dalian 116026, China;*

2. *Marine Eng. College, Dalian Maritime Univ., Dalian 116026, China*)

**Abstract:** Due to the spectral leakage, amplitude estimation of sinusoid based on DFT bears significant errors. A high accuracy amplitude estimation method of sinusoid based on the phase of DFT is presented in this paper. The coarse estimation of the amplitude is made with the amplitude of the maximum spectral line of DFT first, then the sampled data are divided into two segments and DFT is applied on each segment separately. The initial phase of the sinusoid,  $\phi_0$ , is estimated from the phases of the two DFTs. Then the deviation of the frequency of the sinusoid from the frequency corresponding to the maximum spectral line of the DFT, denoted as  $\delta$ , is estimated according to  $\phi_0$ . Finally, the coarse amplitude estimation is compensated according to the estimation of  $\delta$ . Monte Carlo simulation results show that the amplitude estimation of the sinusoid is greatly improved and the variance of amplitude estimation is close to the Cramer Rao bound.

**Key words:** digital signal processing; amplitude estimation; DFT; spectral leakage