

分类号：_____

密级：_____

UDC：_____

编号：_____

理学硕士学位论文

正弦信号参数估计算法研究

硕士研究生：张丽娜

指导教师：张晓威 教授

学科、专业：应用数学

论文主审人：邓廷权 教授

哈尔滨工程大学

2015年3月

分类号：_____

密级：_____

UDC：_____

编号：_____

理学硕士学位论文

正弦信号参数估计算法研究

硕士研究生：张丽娜

指导教师：张晓威 教授

学位级别：理学硕士

学科、专业：应用数学

所在单位：理学院

论文提交日期：2014 年 12 月

论文答辩日期：2015 年 3 月

学位授予单位：哈尔滨工程大学

Classified Index:

U.D.C:

A Dissertation for the Degree of M.Science

The Parameter Estimation Algorithms Research for Sinusoidal Signal

Candidate: Zhang Lina

Supervisor: Prof. Zhang Xiaowei

Academic Degree Applied for: Master of Science

Specialty: Applied mathematics

Date of Submission: Dec. 2014

Date of Oral Examination: Mar. 2015

University: Harbin Engineering University

哈尔滨工程大学

学位论文原创性声明

本人郑重声明：本论文的所有工作，是在导师的指导下，由作者本人独立完成的。有关观点、方法、数据和文献的引用已在文中指出，并与参考文献相对应。除文中已注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经公开发表的作品成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

作者（签字）：

日期： 年 月 日

哈尔滨工程大学

学位论文授权使用声明

本人完全了解学校保护知识产权的有关规定，即研究生在校攻读学位期间论文工作的知识产权属于哈尔滨工程大学。哈尔滨工程大学有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件。本人允许哈尔滨工程大学将论文的部分或全部内容编入有关数据库进行检索，可采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文，可以公布论文的全部内容。同时本人保证毕业后结合学位论文研究课题再撰写的论文一律注明作者第一署名为哈尔滨工程大学。涉密学位论文待解密后适用本声明。

本论文（☐在授予学位后即可 ☐在授予学位12个月后 ☐解密后）由哈尔滨工程大学送交有关部门进行保存、汇编等。

作者（签字）：

导师（签字）：

日期： 年 月 日

 年 月 日

摘 要

在通信领域与信号处理中，正弦信号参数估计是一个基础性的，并且被大量研究的问题。目前，噪声背景下正弦信号参数估计已成功应用于雷达探测、声纳地震、语音信号处理、桥梁振动检测、通信系统中的信号恢复、生物医学检测以及电子通信技术等众多领域，引起越来越多的学者的关注和重视。因此，对于正弦信号参数估计问题的研究具有重要的理论意义与实际应用价值。

本文对最小二乘法、MC算法进行了分析，在噪声背景下，这些算法的估计值与真实值之间相差较大。针对此问题，本文对最小二乘法进行改进，得到了基于最小二乘法的非迭代频率估计算法。针对MC算法计算复杂度较高的特点，提出了基于MC算法的线性估计法。本文的主要工作如下：

首先，给出了基于最小二乘法的非迭代频率估计算法。该算法提供了一种新的估计高斯白噪声背景下的正弦信号频率的方法，公式推导比较简单，易于工程实现。

其次，给出了基于MC和正弦信号LP性质的算法。该方法通过最小化误差 E ，将非线性问题转化成线性拟合问题，抗噪能力较好，估计误差较小。仿真实验中，将此方法与经典MC算法进行了比较，并对性能进行了分析。

再次，给出了正弦信号的幅值估计算法。该方法采用自相关函数估计算法，将信号等分为两个观测信号，建立第一个观测信号的LP等式，将第二个观测与LP等式作自相关，从而得出角频率的精确估计值。本章提出的方法有效的解决了频率估计值对幅值估计的影响，并将此算法与MC算法进行了仿真实验分析，由此看出该算法具有较高的估计精度。

最后，给出了正弦信号的相位估计算法。该算法采用最小二乘估计算法，通过最小化正弦信号相位参数估计值与真实值误差平方和的表达式，得到初相位的估计值，并对其进行了性能分析。

关键词：正弦信号；最小二乘法；MC算法；自相关函数；参数估计

Abstract

In the field of communication and signal processing, parameter estimation of sinusoidal signal is a basic problem, which is studied by many researchers. Currently, the noise sinusoidal frequency estimation has been successfully used in radar detection, sonar, seismic, speech signal processing, bridge vibration detection, communication system signal recovery, biomedical detection and electronic communications technology and other fields, causing increasingly the more the attention of scholars and attention. Therefore, the research on sine signal parameter estimation has important theoretical significance and practical value.

The least square method, MC algorithm are analyzed in this paper, under noise background, the gap between the estimate parameter and the real value is relatively large. To solve this problem, we improved the least square method, obtained the iterative frequency estimation algorithm based on least square method. According to higher computational complexity of MC algorithm, linear estimation method based on MC algorithm is proposed. In this paper, the main work is as follows:

Firstly, a frequency estimation algorithm without iteration based on least square method is presented. The algorithm provides a new sine signal frequency method of white gauss noise, the formulas are simple, and it is easy for engineering application.

Secondly, the algorithm based on MC and sine signal LP properties is given. By minimizing the error E , the nonlinear problem is converted into a linear fitting problem, it has better noise immunity and the estimation error is smaller. In simulation experiments, the method is compared with the classical MC algorithm, and its property is analyzed.

Thirdly, the amplitude estimation algorithm of sinusoidal signal is presented. This method uses the autocorrelation function estimation algorithm, the signal is divided into two observation signals, and then we set up LP equation of the first observation signal, using the second observation and LP autocorrelation equation, an then get an accurate estimate of the angular frequency. In this chapter, the proposed method solves the influence of frequency estimation on amplitude estimation effectively. The proposed algorithm and the MC algorithm are analyzed in simulation experiments, and the proposed algorithm has higher

estimation precision.

At last, the phase estimation algorithm of sinusoidal signal is presented. The algorithm uses the least squares estimation algorithm, by minimizing the expression, the sum of squares of the sinusoidal signal phase parameter estimation and the actual value error, and then get the estimation of early phase, the performance analysis is given.

Key words: Sinusoidal signal, The least square method, MC algorithm, Autocorrelation function, Parameter estimation

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 论文研究意义及背景	1
1.2 正弦信号参数估计的研究现状	2
1.2.1 频率估计的研究现状	2
1.2.2 幅值估计的研究现状	2
1.2.3 相位估计的研究现状	3
1.3 经典算法	3
1.3.1 MLE 估计法	3
1.3.2 DFT 估计法	4
1.3.3 MC 算法	6
1.4 本文的主要工作	8
第 2 章 预备知识	10
2.1 频率估计问题的数学模型	10
2.2 CRAMER-RAO LOWER BOUND	11
2.3 高斯白噪声	12
2.4 评价估计性能的参数	13
2.5 最小二乘估计法	13
2.6 本章小结	15
第 3 章 基于最小二乘法的非迭代频率估计算法	16
3.1 非迭代频率估计模型	16
3.2 基于最小二乘法的最优估计算法	17
3.3 算法分析及仿真	20
3.4 本章小结	22
第 4 章 基于 MC 和正弦信号 LP 性质的算法研究	23
4.1 正弦信号的 LP 性质	23
4.2 基于 MC 算法的线性估计法	24

4.3 两种正弦频率估计模型	25
4.3.1 三点正弦频率估计模型	26
4.3.2 四点正弦频率估计模型	27
4.4 仿真实验	27
4.5 本章小结	31
第 5 章 正弦信号的幅值与相位估计算法研究	32
5.1 幅值估计算法	32
5.1.1 自相关函数估计算法	32
5.2 相位估计算法	34
5.2.1 最小二乘参数估计算法	35
5.3 仿真实验	36
5.4 本章小结	39
结 论	40
参考文献	42
攻读硕士学位期间发表的论文和取得的科研成果	47
致 谢	48
附 录	49

第1章 绪论

1.1 论文研究意义及背景

正弦信号参数估计问题在信号处理和通信领域中居于重要地位，在电子、通信、雷达及生物医学方面都有重要的意义。其中，在雷达与主动声纳中，含噪信号参数估计问题中信号参数一般是未知的，在通信中，含噪信号参数估计问题一般已知信号参数；而在被动声纳中，含噪信号参数估计问题中信号参数一般为随机信号^[1]。在这三类问题中，未知信号参数的估计问题应用比较广泛，因此受到了许多人的关注。

目前，含噪信号参数估计不仅深入到我们生活的各个方面，而且它还广泛的存在于军事等领域中，比如，应用设备准确而快速的计算来获得信号参数，测量具有威胁的目标的位置和移动速度等^[2]。

在声纳、电子对抗以及通信等领域，频率、相位估计是一个重要问题和研究热点，在时域处理以及频域处理等方面国内外学者都提出了很多有用的方法。文献[3]提出的线性预测（LP）频率算法在时域进行估计，但是需要在较高的信噪比（SNR）情况下才能保证估计的精度。随着数字信号处理（DSP）技术的快速发展，人们广泛的应用基于DFT的参数估计算法进行研究。在文献[4-5]中提出了基于相位差校正的频率、相位估计方法，将一个采样信号序列分为两段，分别做DFT变换，然后找出两段DFT变换序列的谱线峰值位置的相位差，用它来估计信号的频率与相位，此方法避免了相位解模糊这一过程。但是，由于栅栏效应，当频率的偏差为DFT频率分辨率一半的时候，DFT频谱^[6]主瓣内就会有两条幅度相当的谱线，当噪声存在情况下，该方法就会失效。文献[7]先将采样序列分为多段，然后将采样序列各段的DFT变换序列的谱峰相位进行加权，得到正弦信号的初相估计。

正弦信号常常出现在计算以及测试物理量的过程中。在此过程中，信号会受到噪声不同程度的污染，输出的信号不仅有我们感兴趣的信息，而且还含有大量的噪声，这是我们不希望出现的。目前，对于高信噪比下的正弦信号参数估计问题，许多研究者提出了经典的算法，其计算量小、易于公式推导。但是其估计精度在信噪比较低的情况下效果不太好。而对于一些估计精度要求高的算法，其公式推导过程较为繁琐，而且计算量也比较大，在实时处理方面不适用。另一方面，当信噪比较低的情况下，正弦信号参数估计更难获得较高的精度，此时估计精度问题更加引起人们的关注。

1.2 正弦信号参数估计的研究现状

1.2.1 频率估计的研究现状

频率是正弦信号参数中最为重要的一个，并且是信号最本质的特征，因此正弦信号的频率估计算法研究就成为信号处理领域中非常重要的一个课题。多年来学者们相继研究并提出了许多频率估计算法，其主要焦点问题集中在以下两个方面：估计算法的精度、实现算法所需要的计算量。常用方法有最大似然估计法^[8-10]、时域法^[11-26]、频域法^[27-34]等。

近些年正弦信号频率估计引起人们广泛的关注，过去总是利用离散傅里叶变换对信号频率进行估计，但若要直接应用离散傅里叶变换去估计正弦信号频率，则其估计精度很难满足人们的要求。于是，Rife 等人提出了正弦信号的最大似然估计算法^[35]，估计的均方根误差达到了克拉美-罗限（CRLB），但是由于它的计算量巨大，在实际应用中极为不便。邓振森等人对 Rife 算法进行了改进，通过搬移输入信号的频率，当信噪比适当时，频带内所有估计的均方根误差均接近 CRLB，使得在强噪声背景下，该算法具有一定的实用价值，但实际效果不是非常的理想^[36]。Quinn 提出的插值快速傅立叶变换算法^[37,38]，但估计精度对信号频率有很大的依赖性，在信噪比较低时估计的均方根误差波动较大。基于 FFT 的频率估计方法，具有运算速度较快、算法的参数不敏感等优点，在实际中得到广泛的应用。但是，由于栅栏效应、加窗截断的影响，当信号的频率与 FFT 离散频率相错开时，信号的真实频率处于主瓣内两根 FFT 频谱之间，使得频率估计达不到估计精度的要求。刘进明等人提出 FFT 谱连续细化分析的傅里叶变换法^[39]，由于其计算量巨大，在实际应用中极不方便。E.Jacobsen 等人提出频率的快速估计算法^[40]，在强噪声下或者被估计频率不是频率分辨率的整数倍的时候，估计精度较低。S. A. Tretter 基于正弦信号瞬时相位提出频率估计算法，但该方法在实际应用过程中存在着相位测量模糊的问题^[41]。在前一种算法的基础上，S. Kay 提出利用相位差来估计信号的频率，但是，在强噪声背景下，直接使用该方法估计精度会比较差。因此，在后来的研究过程中，人们大多将其与自相关等方面的理论相结合使用^[42]。李强等人提出了在低信噪比背景下的一种基于优选法的正弦信号频率估计算法^[43]，虽然该算法在信噪比较低的条件下有较高的估计精度，但是它的计算量也比较大。

1.2.2 幅值估计的研究现状

目前，对于正弦信号幅值估计的问题，研究还不够深入，成果比较少。针对正弦

信号幅值估计的问题, V.F. Pisarenko 提出了应用功率谱的 ARMA 模型进行估计的算法, 通过将信号的特征方程确定, 进而对正弦信号的幅值进行估计。但是由于无法精确的估计出正弦信号的自相关函数值, 因此不能直接利用该算法进行幅值估计^[44]。以往对正弦信号的幅值进行估计的算法中, 广泛的应用混沌理论进行微弱正弦信号的检测, 算法对幅值的估计, 主要是利用了初始值对混沌系统有极大影响的特性^[45-47]。但是, 由于系统动力学行为的判别对基于混沌理论的检测方法影响很大, 因而造成了该方法的不适用。G.Y. Wang 等人在描述混沌状态时的系统动力学行为的文章中, 提出了幅值估计算法, 但由于系统动力学行为的判别对该方法影响较大, 因而在一定程度上限制了它的实际应用^[48-51]。在正弦信号幅值估计的其他算法方面, R. Benzi 等人提出了利用随机共振原理来进行幅值估计, 目前该方法仅限于研究阶段, 尚没有得到广泛应用^[52-53]。

1.2.3 相位估计的研究现状

许多学者对正弦信号的相位估计算法进行研究, 目前基于 DFT 相位的估计算法依旧是工程应用中使用最广泛的。为有效的抑制估计过程中频谱泄露的问题, 齐国清等人提出了基于离散傅里叶频谱的相位估计算法^[54], 但其估计精度与采样时间有关, 在噪声背景下需增加采样时间才能确定临界值。李春宇, 张晓林等人提出基于正弦波初相估计算法及其误差分析^[55], 此算法的估计精度与采样信号的长度、信噪比都有关。孙进才等人给出了最小二乘估计算法, 该算法能够减少噪声对信号的影响, 但是在低信噪比情况下得不到令人满意的估计精度^[56]。牛鹏辉等人提出了双谱估计算法, 该算法能在一般噪声的情况下对正弦信号的相位进行准确估计, 但是这种算法不适用于强噪声情况^[57]。

1.3 经典算法

1.3.1 MLE 估计法

1912 年, 目前被大家所熟知的最大似然估计方法是由一位统计学专家罗纳德·费雪爵士提出并最早使用的。最大似然估计方法, 其本质上是一种统计学方法。由于 FFT 估计法的估计性能达不到预期的效果, 后来在 1974 年由 DAVID.C RIFE 提出了信号处理方面的最大似然估计算法 (MLE 算法), 并且证明了 MLE 算法的估计性能可以达到 CRLB, 是频率估计的最优算法。而且 MLE 还有对信噪比门限要求低, 无需先验知识

等优点。

下面介绍一下最大似然估计法 (MLE) [9]

设被污染的复正弦信号为

$$r(t) = s(t) + w(t), \quad k = 0, 1, \dots, N,$$

其中

$$s(t) = A \exp(2\pi f t + \theta)$$

A, θ, f 为信号的幅值, 相位及频率, $w(t)$ 为零均值, 方差为 σ^2 的复高斯白噪声。由最大似然原理可知, 给定 N 个采样点 $r(k)$, $k = 0, 1, \dots, N$, ML 估计就是最大化式

$$p\left(\left\{\hat{r}(k)\right\}_{k=0}^{N-1}\right) = \left(\frac{1}{\pi\sigma^2}\right)^N \exp\left(-\sum_{k=0}^{N-1} \frac{\left|\hat{r}(k) - A \exp(j(\omega k + \theta))\right|^2}{\sigma^2}\right) \quad (1-1)$$

对式(1-1)两边取对数, 分别对 ω 和 θ 求偏导, 并令其为零, 在信噪比较高时, 可以近似取 $\sin x \approx x$, 于是有

$$\begin{aligned} \frac{2A}{\sigma^2} \sum_{k=0}^{N-1} k \left| \hat{r}(k) \right| \left[\angle \hat{r}(k) - (\omega k + \theta) \right] - \alpha(\omega - \Omega) &= 0 \\ \frac{2A}{\sigma^2} \sum_{k=0}^{N-1} k \left| \hat{r}(k) \right| \left[\angle \hat{r}(k) - (\omega k + \theta) \right] - \beta(\omega - \Theta) &= 0 \end{aligned} \quad (1-2)$$

联立上两式, 有频率的估计值

$$\hat{\omega}_{ML}^{(N-1)} = \frac{\left[\sum_{k=0}^{N-1} k \angle \hat{r}(k) \right] \left[\sum_{k=0}^{N-1} |\hat{r}(k)| \right] - \left[\sum_{k=0}^{N-1} |\hat{r}(k)| \angle \hat{r}(k) \right] \left[\sum_{k=0}^{N-1} k |\hat{r}(k)| \right]}{\left[\sum_{k=0}^{N-1} k^2 |\hat{r}(k)| \right] \left[\sum_{k=0}^{N-1} |\hat{r}(k)| \right] - \left[\sum_{k=0}^{N-1} k |\hat{r}(k)| \right]^2} \quad (1-3)$$

由上式得到, 上式成立的条件是 $\sin x \approx x$, 在信噪比较高的下该条件才成立, 在信噪比较低时, 上式不成立。

1.3.2 DFT 估计法

DFT 估计法是正弦信号频率估计的经典方法, 研究比较成熟, 很多学者为提高 DFT 算法的估计性能做出了不懈的努力。DFT 估计法之所以受到青睐, 主要是因为它具有运算速度快 (自从采用 DFT 的快速算法, 即 FFT), 适合实时处理等优点, 因此被广泛的应用于实际当中。

DFT 估计方法将原信号从时域转换到频域, 利用正弦信号的正交性, 在频域中进

行频率搜索，从而得到幅值最大值的索引值与频率分辨率相乘即可得到正弦信号的频率估计值。当待估计正弦信号频率是频率分辨率的整数倍时频率估计值较准确，但是，当待估计正弦信号频率不是频率分辨率整数倍时，由于栅栏效应和频谱泄露的影响导致估计法精度下降。

对于正弦信号复信号模型

$$z(n) = x(n) + jy(n)$$

进行离散傅里叶变换后有

$$F(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N z(n) \exp\left(\frac{-j2\pi kn}{N}\right)$$

其中 $k=1, 2, \dots, M$ 。

得到频谱表达式为

$$F(k) = \begin{cases} A \exp(j\varphi_0), & k = k_0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

由于 DFT 利用正弦信号的正交性，只有当 $k = k_0$ 时，能得到频谱的最大谱线即谱峰，这里的 $k = k_0$ 即最大谱线的索引值，因此能得到频率的估计式为

$$\hat{f}_0 = k_0 \frac{f_s}{M} = k_0 \Delta f$$

其中， f_s 为采样频率， M 为采样时间， Δf 为频率分辨率。但 DFT 的频率分辨率和频率估计精度很大程度上取决于信号的采样时间，信号的采样时间过长不仅会给实时处理带来麻烦，还会再在一些应用中信号的时间是有限的，无法延长，这样就使得 DFT 的频率分辨率和估计性能都受到限制。因此现在的估计方法都只用 DFT 来进行粗估计，在通过其他方法将精度提高。因此在一些精度要求不高的场合进行使用，为了提高频率结果的估计精度，各种插值方法也随之应运而生。针对该算法的缺点，提出了很多改进方法: Rife 及其改进后的 M-Rife, Quinn、最大似然估计法 (MLE) 等，其中 MLE 估计法是最优估计，估计的方差接近克拉美-罗限 (CRLB)。

基于 DFT 的正弦信号相位估计法发展已经较完善，下面给出基于 DFT 的初相位估计算法。

设复正弦信号为

$$s(t) = a \cdot \exp[j(2\pi f_0 t + \phi_0)] \quad (1-4)$$

其中， a ， f_0 ， ϕ_0 分别表示信号的振幅，频率和初相。对其进行采样，采样时间为 T ，采样点数为 N ，将采样序列等分为两个， $s_1(n)$ 对应前 $N/2$ 点，则采样序列可表示为

$$s(n) = a \cdot \exp[j(2\pi f_0 T_n / N + \phi_0)], n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (1-5)$$

$s_2(n)$ 对应后 $N/2$ 点

$$s_1(n) = a \cdot \exp[j(2\pi f_0 T_n / N + \phi_0)], n = 0, 1, 2, \dots, N/2-1 \quad (1-6)$$

$$s_2(n) = s_1(n) \exp(j\pi f_0 T), n = 0, 1, 2, \dots, N/2-1 \quad (1-7)$$

分别对 $s_1(n)$ 和 $s_2(n)$ 进行 $N/2$ 点 DFT, 得到离散频谱

$$S_1(k) = A_k \exp(j\varphi_k), k = 0, 1, 2, \dots, N/2-1 \quad (1-8)$$

$$S_2(k) = S_1(k) \exp(j\pi f_0 T), k = 0, 1, 2, \dots, N/2-1 \quad (1-9)$$

其中 A_k 和 φ_k 分别表示 $S_1(k)$ 的振幅和相位项

$$A_k = \frac{a \cdot \sin[\pi(k - f_0 T / 2)]}{\sin[2\pi(k - f_0 T / 2) / N]} \quad (1-10)$$

$$\varphi_k = \phi_0 + (1 - 2/N)(f_0 T / 2 - k)\pi \quad (1-11)$$

由式 (1-9) 可知, $S_1(k)$ 与 $S_2(k)$ 有一样的振幅项。由式 (1-10) 可知, 振幅最大值处的离散频率为 $k_0 = [f_0 T / 2]$ ($[x]$ 表示取最接近 x 的整数)。利用 DFT 最大谱线的粗测频率为 $\hat{f}_k = k_0 \square f$, 其中 $\square f = 2/T$ 表示 DFT 的频率分辨率。用 φ_1 和 φ_2 分别表示 $S_1(k)$ 和 $S_2(k)$ 的最大频谱位置的相位, 作差得

$$\square \varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pi f_0 T - 2k_0 \pi \quad (1-12)$$

当 $f_0 \in (k_0 - 0.5 \square f, k_0 + 0.5 \square f)$, 由式 (1-12) 可知, $\square \varphi \in (-\pi, \pi)$ 。因此, 可以利用 $\square \varphi$ 对 $f_\delta = k_0 - k_0 \square f$ 进行估计, 其中 $k_0 \square f$ 表示 DFT 最大谱线位置所对应的频率

$$\hat{f}_\delta = \frac{\square \varphi}{2\pi} \square f = \frac{\square \varphi}{\pi T} \quad (1-13)$$

将式 (1-12) 代入式 (1-11) 得

$$\varphi_k = \phi_0 + \frac{N-2}{2N} \square \varphi$$

初相 ϕ_0 的估计为

$$\hat{\phi}_0 = \varphi_1 - \frac{N-2}{2N} \square \varphi = \frac{3N-2}{2N} \varphi_1 - \frac{N-2}{2N} \varphi_2 \quad (1-14)$$

当 $N \rightarrow \infty$ 时, 上述近似为

$$\hat{\phi}_0 \approx \frac{3}{2} \varphi_1 - \frac{1}{2} \varphi_2 \quad (1-15)$$

1.3.3 MC 算法

MC 算法是一种基于正弦信号 LP 性质的经典频率估计算法, 将所要估计的信号频率转化为 LP 等式中的频率, 这样转化的好处是将频率放进了一个非线性项内部, 而

且没有相位，这样问题就变得简单很多，有利于和多种算法进行结合。推导简单方便，计算复杂度小适用于实时处理，因此备受学者们关注，在此基础上的改进算法也很多。

由正弦信号的 LP 等式有

$$2\cos(kw_0)s(n-k) = s(n) + s(n-2k)$$

但是上式在有噪声的情况下等式

$$2\cos(kw_0)x(n-k) = x(n) + x(n-2k)$$

不成立，存在误差项

$$e(n) = x(n) + x(n-2k) - 2\cos(kw_0)x(n-k)$$

我们的目的就是将等式左侧的误差项 $e(n)$ 能够足够趋于零，这样就可以得到频率估计表达式。

在上式两侧分别乘以 $x(n-k)$ 得到

$$e(n)x(n-k) = [x(n) + x(n-2k) - 2\cos(kw_0)x(n-k)]x(n-k)$$

进而得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{N-2k} \sum_{n=1+2k}^N e(n)x(n-k) &= \\ \frac{1}{N-2k} \sum_{n=1+2k}^N [x(n) + x(n-2k) - 2\cos(kw_0)x(n-k)]x(n-k) \end{aligned}$$

考察左侧

$$\frac{1}{N-2k} \sum_{n=1+2k}^N e(n)x(n-k)$$

将其展开，有

$$\frac{1}{N-2k} \sum_{n=1+2k}^N e(n)g(n-k) + \frac{1}{N-2k} \sum_{n=1+2k}^N e(n)s(n-k) \quad (1-16)$$

将式 (1-16) 中的第二项

$$\frac{1}{N-2k} \sum_{n=1+2k}^N e(n)s(n-k)$$

展开为

$$\frac{1}{N-2k} \sum_{n=1+2k}^N [g(n) + g(n-2k) - 2\cos(kw_0)g(n-k)]s(n-k) \quad (1-17)$$

因为噪声与源信号是互不相关的，所以式 (1-17) 等于零，而式 (1-16) 的第一项

$$\frac{1}{N-2k} \sum_{n=1+2k}^N e(n)g(n-k)$$

展开为

$$\frac{1}{N-2k} \sum_{n=1+2k}^N [g(n)+g(n-2k)-2\cos(kw_0)g(n-k)]g(n-k) \quad (1-18)$$

式(1-18)化简为

$$\frac{1}{N-2k} \sum_{n=1+2k}^N 2\cos(kw_0)g(n-k)g(n-k) = \frac{2\cos(kw_0)}{N-2k} \sum_{n=1+2k}^N g^2(n-k) \quad (1-19)$$

利用式(1-19)将式(1-18)化简为

$$\frac{1}{N-2k} \sum_{n=1+2k}^N e(n)x(n-k) = \frac{2\cos(kw_0)}{N-2k} \sum_{n=1+2k}^N g^2(n-k) = 2\cos(kw_0)\sigma^2 \quad (1-20)$$

令 $k=-1$ 得到频率估计(MC)为

$$\hat{w}_0^{MC} = \cos^{-1} \left(\frac{\sum_{n=1}^{N-2} x(n+1)[x(n)+x(n+2)]}{2\sum_{n=1}^{N-2} x^2(n+1)} \right) \quad (1-21)$$

MC 算法在高信噪比情况下, 误差项趋近于零, 因此得到的估计结果精度较高, 但是在低信噪比的情况下, 估计效果不理想。MC 算法虽然具有算法简单, 计算复杂度低等优点, 但是仍然是一种有偏的估计算法。

1.4 本文的主要工作

本文主要分析和研究的是噪声背景下正弦信号的参数估计, 在进行仿真实验时噪声一般都是假设为随机的高斯白噪声, 并且在某范围内符合正态分布, 但是事实上的噪声很复杂, 导致各种频率估计方法得到的估计值与实际值有较大差异。基于此, 本文各部分的结构安排如下:

第一章 绪论: 介绍了噪声背景下正弦信号参数估计的背景与研究方面的意义, 总结了经典正弦信号参数估计算法, 给出本文的主要工作和论文的结构安排。

第二章 预备知识: 给出了频率估计问题的数学模型, 介绍了频率估计的一些基本理论, 包括: 频率估计问题的数学模型、Cramer-Rao Lower Bound、高斯白噪声、最小二乘估计法以及评价估计性能的参数, 包括: 无偏估计与渐近无偏估计、估计的方差、估计的均方误差。

第三章 基于最小二乘法的非迭代频率估计算法：给出了非迭代频率估计模型以及基于最小二乘法的最优估计算法，并对其进行了理论分析，性能分析以及相应的仿真实验。

第四章 基于 MC 和正弦信号 LP 性质的算法研究：本章介绍了正弦信号的 LP 性质，给出了基于 MC 算法的线性估计法。此外，给出了两种正弦估计模型，包括：三点估计模型、四点估计模型。并且对该算法进行了性能分析，仿真实验和结果分析。

第五章 正弦信号的幅值与相位估计算法研究：本章针对在噪声背景下，以往算法对幅值估计问题信噪比要求较高，容易受到噪声影响的特点，提出自相关函数估计算法。该方法有效的解决了频率估计值的误差对幅值估计的影响，抗噪能力较好且具有较高的估计精度。相位估计采用最小二乘参数估计法，该算法估计精度较高，但抗噪能力较差。同时，给出了对比仿真实验和性能的分析。

第 2 章 预备知识

频率是正弦信号参数估计问题中一个非常重要的课题，在噪声背景下快速准确的提取单个正弦信号的频率更是信息处理、通信系统等领域中一个极其重要的问题。目前，噪声背景下的正弦信号频率估计已经成功的应用于通信系统的信号恢复、生物医学检测、语音信号处理、雷达探测、声呐地震以及电子通信技术等领域，许多专家学者也对此进行了研究。综上可知，正弦信号的频率估计研究具有非常重要的理论与实践意义。

信号领域的专家与学者们通过深入的研究已经提出了许多频率估计的算法，根据研究的角度不同出发，大致可分为频域的估计方法、时域的估计方法和时-频结合的方法三类。频域的估计方法可分为粗估计以及围绕粗估计的细化过程。但是 DFT 方法中存在着不足，主要是会出现频谱泄露和栅栏效应，使得这种方法的应用会存在很大的偏差，并且频率分辨率和估计精度很大程度上取决于 N ，这使得 DFT 算法的估计精度也极大程度上依赖于 N 。

时域的估计算法主要是对实正弦信号频率估计的研究，如基于正弦信号 LP (linear prediction) 性质的估计算法以及结合自相关函数的 MC (modified covariance) 算法的研究。但是有一个共性，就是这些方法在信噪比较低的情况下估计性能随之下降。因此，研究出精度高并且在低信噪比环境下使用效果良好的频率估计算法是众多学者所希望的。

根据概率论的知识可知，频率估计性能的标准，即频率估计问题的均方误差下界 (Cramer-Rao Lower Bound, 简称为 CRLB)。

本章主要给大家介绍一下正弦信号频率估计的一些基本理论知识，作为后文研究内容的预备知识。

2.1 频率估计问题的数学模型

对于噪声背景下的观测正弦信号，本文主要研究实正弦信号，因此以下将对实信号模型做出说明。

将实正弦信号表示如下

$$s(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (2-1)$$

对信号在观察时间 t 内进行采样，采样出 N 个样本，定义离散采样序列为

$$s(n) = A \cos(\omega n + \varphi) \quad (0 \leq n \leq N-1) \quad (2-2)$$

其中 A 、 ω 、 φ 分别表示信号的振幅、频率和相位， $t \in [0, (N-1)\Delta t]$ 。实际上，我们在做正弦信号参数估计时，观测数据都是以一定的频率对原始信号进行等间距采样得到的，且其中混有噪声，故其所满足的数学模型为：

$$x(n) = s(n) + g(n) \quad (2-3)$$

其中 $g(n)$ 为正弦信号 $s(n)$ 中常见的高斯白噪声， $n = n_0, n_0 + 1, \dots, n_0 + N - 1$, n_0 为采样序列的第一个序号。

2.2 Cramer-Rao Lower Bound

CRLB 界是频率估计均方误差的理论下界。频率估计问题属于正弦信号的参数估计问题，不同的估计方法可得到不同的估计量，对估计量性能的评价可以通过无偏性、有效性、一致性来衡量。但在实际中，估计量可能比较复杂，很难综合的评判出估计的性能，而 Cramer-Rao Lower Bound 是一个从概率角度出发得到的评价准则，与参数估计方法的选择无关。当得到一个估计量后，我们要想知道它的效果是否达到最佳，就需要 CRLB 界来进行对比衡量。

Cramer-Rao Lower Bound 性能界就是规定了一个参数估计的无偏估计量估计的标准最小值，简称 CRLB 界。估计方差最小的估计即有效估计量，因此 CRLB 是有效估计量。频率估计算法的性能存在一定的极限，用 CRLB 来描述这一极限。因此在研究各个算法的优缺点时，CRLB 界可以起到对比性能的作用。

建立观测信号的 Fisher 信息矩阵，得到观测信号参数估计的 CRLB 下线为

$$J(\beta) = \frac{1}{\sigma^2} \begin{bmatrix} A^2 T^2 (n_0^2 N + 2n_0 P + Q) & 0 & A^2 T^2 (n_0 N + p) \\ 0 & N & 0 \\ A^2 T^2 (n_0 N + p) & 0 & A^2 N \end{bmatrix}$$

其中信息矩阵中的 β 、 P 、 Q 分别为

$$\begin{aligned} \beta &= [w_0 \quad A \quad \varphi_0]^T \\ P &= \frac{N(N-1)}{2} \\ Q &= \frac{N(N-1)(2N-1)}{6} \end{aligned}$$

当未知三个参数的情况下，对信息矩阵 J 进行反向求解，求得参数估计值得均方误差下线为

$$\begin{aligned}\text{var}\left(\hat{A}\right) &\geq \frac{\sigma^2}{N} \\ \text{var}\left(\hat{w}_0\right) &\geq \frac{12\sigma^2}{A^2 T^2 N(N^2-1)} \\ \text{var}\left(\hat{\varphi}_0\right) &\geq \frac{12\sigma^2(n_0^2 N + 2n_0 P + Q)}{A^2 N(N^2-1)}\end{aligned}$$

2.3 高斯白噪声

通常信号中无用的成分被定义为噪声，由于在现实中很难得到没有噪声的正弦信号，这就增加了频率估计的难度，最常用的噪声模型是高斯白噪声（White Gaussian noise, WGN）。本文中的噪声 $g(n)$ 为高斯白噪声， $g(n)$ 的每个样本都满足 $N(0, \sigma^2)$ 的概率密度函数（Probability density function, PDF），具有均值为 0，方差为 σ^2 的高斯分布，并且所有的采样样本都是互不相关的。高斯白噪声中的高斯是指它的概率分布是正态函数，白噪声是指各个频率的声音，就像白光包含各个频率成分的光。尽管高斯白噪声的幅度在任意时刻是随机的，但大体上认为仍然满足高斯分布函数。

假设测得的信号定义为

$$x(n) = s(n) + g(n)$$

未知参数

$$\theta = [a, \omega_0, \varphi]^T$$

令

$$x = [x_0, x_1, \dots, x_{N-1}]^T$$

则信号模型的 PDF 为

$$f(x, \theta) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) - a \cos(\omega_0 n + \varphi)]^2\right\} \quad (2-4)$$

不含噪声的信号功率为

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s^2(n) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} a^2 \cos^2(\omega_0 n + \varphi) \approx \frac{a^2}{2},$$

又已知噪声的方差为 σ^2 ，则含噪声的信号的信噪比定义为

$$SNR = \frac{a^2}{2\sigma^2}$$

在下面的仿真实验中，调节噪声的方差 σ^2 就可以获得不同的信噪比。

2.4 评价估计性能的参数

为检验各个算法的估计性能，分析算法的优缺点及稳定性，本文给出了如下三个估计性能的参数。

1. 无偏估计与渐近无偏估计

假设用估计量 a 表示真值，用 \hat{a} 表示经过运算后的估计值。由于 \hat{a} 是一个随机变量，用 $E[\hat{a}]$ 和 $Var[\hat{a}]$ 分别表示估计值的均值和方差。

真值 a 与期望值 $E[\hat{a}]$ 之差叫做偏差，用 δ 表示。若偏差为零，即 $\delta = a - E[\hat{a}] = 0$ ，则这种估计被定义为无偏估计。对应的，当 $\delta \neq 0$ ，如果估计偏差随观测数据个数的增加而减小，当观测数据个数趋于无穷时，相应的估计偏差趋近于零，称这种估计为渐近无偏估计。

2. 估计的方差

估计的方差是用来描述估计值对均值的偏离程度的物理量，用 $Var[\hat{a}]$ 表示

$$Var[\hat{a}] = E[(\hat{a} - E[\hat{a}])^2] \quad (2-5)$$

方差值较小就等于是说这次的估计值很大程度上接近于经过多次估计得到的均值。假如估计是无偏估计或者渐近无偏估计所得到的估计值，那么这个时候如果方差值较小，就等于是说这次的估计值十分接近被估计参数的真实值。因此，我们知道小方差和无偏估计是我们所期望的。

3. 估计的均方误差

如果只是单独将方差和偏差进行比较，很难确切的说这两种估计结果的好坏，比如说：偏差较小的估计量也可能会有个很大的方差，反之亦然，方差较小的估计量也可能有一个较大的偏差。正是因为这个原因，我们引入均方误差。

在数理统计中，参数估计值与参数真值之差平方的期望值被称为均方误差，记作 MSE ，定义为

$$MSE(\hat{a}) = E(a - \hat{a})^2 = Var[\hat{a}] + B^2 \quad (2-6)$$

MSE 可以用于评价数据的变化程度， MSE 的大小越趋近于零，说明预测模型实验数据的精确度越好。因此 $MSE(\hat{a})$ 较小的估计为有效估计。

2.5 最小二乘估计法

最小二乘法通过最小化误差的平方来寻求数据的最佳函数，是一种数学优化算法。

线性模型是最小二乘法最常应用的形式，下文给予介绍。

一般可以将线性模型表示为

$$Y = X\alpha + \varepsilon, Y \in R^n, X \in R^{n \times r}, \alpha \in R^r \quad (2-7)$$

其中 $E(\varepsilon) = 0, Cov(\varepsilon) = \sigma^2 V$ ， Y 表示随机观测矩阵， X 表示设计矩阵， ε 表示随机观测噪声， V 表示误差协方差矩阵， α 和 σ 表示待估计参数。

假定是线性的观测模型，用 θ 表示待估计量，则观测向量为

$$x_i = h_{i1}\theta_1 + h_{i2}\theta_2 + \cdots + h_{iN}\theta_N, i = 1, 2, \dots, M, \quad (2-8)$$

用向量和表示为

$$x = H\theta + v \quad (2-9)$$

其中

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_M], \theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N],$$

$$v = [v_1, v_2, \dots, v_M], H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1N} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{M1} & h_{M2} & \cdots & h_{MN} \end{bmatrix}.$$

则观测与估计偏差平方和可以表示如下

$$J(\hat{\theta}) = [x - H\hat{\theta}]^T [x - H\hat{\theta}] \quad (2-10)$$

最小二乘估计就是使 $J(\hat{\theta})$ 达到最小，记为 $\hat{\theta}_{ls}$ 。求 $J(\hat{\theta})$ 对 $\hat{\theta}$ 的导数，并令其为零，得

$$\frac{\partial J(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}} = -2H^T [x - H\hat{\theta}] = 0 \quad (2-11)$$

由此得最小二乘估计为

$$\hat{\theta}_{ls} = (H^T H)^{-1} H^T x \quad (2-12)$$

采用上述算法，参数的估计值在取得整批数据之后一次就求得。对于采样次数多，计算量大的情况，使用如下的最小二乘递推算法。

递推算法的表达形式如下

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{k+1} &= \hat{\theta}_k + K_{k+1} [y(k+1) - h_{k+1}^T \hat{\theta}_k] \\ &= \hat{\theta}_k + K_{k+1} [y(k+1) - \hat{y}(k+1)] \\ &= \hat{\theta}_k + K_{k+1} \varepsilon(k+1) \end{aligned} \quad (2-13)$$

其中， k 表示采样次数， $\hat{\theta}_k$ 是第 k 次采样后求出的参数估计值， $\hat{\theta}_{k+1}$ 是 $k+1$ 时得到第 $k+1$

次采样数据后求出的参数值， h_{k+1} 是 H 矩阵的 $k+1$ 行， $h_{k+1}^T \hat{\theta}_k$ 是预报 y_{k+1} 值， K_{k+1} 是 $(2n+1)$ 维的修正列向量矩阵。

在最小二乘递推算法中， K_{k+1} 的形式为

$$K_{k+1} = (H^T H)^{-1} h_{k+1} \left[1 + h_{k+1}^T (H^T H)^{-1} h_{k+1} \right]^{-1} \quad (2-14)$$

递推算法的关键问题在于确定 K_{k+1} ，如果 K_{k+1} 的修正过于强烈，估计值将会波动较大，甚至于不能收敛；但如果修正过于微弱，为接近可靠的估计值，需要经过很多次采样才能实现。

最小二乘法是参数估计中最常用也是最基本的算法，但该算法仍存在不足。随着采样次数的不断增多，数据量也随之增加，使得在最小二乘估计中可能会出现“数据饱和”现象，导致递推算法与参数的真值相差较大。

2.6 本章小结

本章介绍了频率估计问题的相关内容，并且对后文中将用到的最小二乘估计法进行了描述。此外，给出了 CRLB 界的物理意义，高斯白噪声的概念以及评价估计性能的几个参数，本章将作为后文的预备知识。

第3章 基于最小二乘法的非迭代频率估计算法

非迭代频率估计算法提供了一种新的估计高斯白噪声背景下的正弦信号频率的方法。信号频率的封闭表达式是通过使用任意固定时间间隔的四个数据获得，然后通过最小二乘法（LS）进行优化频率估计。仿真实验给出了算法的估计性能。

3.1 非迭代频率估计模型

定义 $y(n)$ 为第 n 个输入信号采样

$$y(n) = A \sin(\omega_0 nT + \theta) + e(n), \quad n=0,1,2,\dots,N-1 \quad (3-1)$$

其中 ω_0 表示信号的角频率, $T(=1/f_s)$ 表示采样时间, A 表示信号幅度, θ 表示信号相位, 假设 $e(n)$ 为加性噪声。当我们考虑没有噪声, 即 $e(n)=0$ 的情况时, 使用三角函数等式

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

得到如下推论

$$y(n) - y(n-k) = 2A \cos\left\{\left(n - \frac{k}{2}\right)\omega_0 T + \theta\right\} \sin\left(\frac{k}{2}\omega_0 T\right) \quad (3-2)$$

使用同样的方法, 可以得出如下表达式

$$\{y(n+k) - y(n)\} + \{y(n-k) - y(n-2k)\} = 4A \cos\left\{\left(n - \frac{k}{2}\right)\omega_0 T + \theta\right\} \sin\left(\frac{k}{2}\omega_0 T\right) \cos(k\omega_0 T) \quad (3-3)$$

用式 (3-3) 除以式 (3-2) 得到

$$\cos(k\omega_0 T) = \frac{1}{2} \frac{\{y(n+k) - y(n)\} + \{y(n-k) - y(n-2k)\}}{y(n) - y(n-k)} \quad (3-4)$$

k 为从 1 到 $\frac{N}{3}$ 的任意整数, 因此, 对于任意的 n 和 k 值, 只要 (3-4) 中信号的指数在 0 到 $N-1$ 范围内, 并且输入量没有加性噪声的情况下, 就可以得到准确的信号频率。

当式 (3-1) 的输入量包含噪声项 $e(n)$ 时, 式 (3-4) 便失去了效用。当包含了噪声项时, 式 (3-2) 可以展开为

$$\begin{aligned} y(n) - y(n-k) &= 2A \cos\left\{\left(n - \frac{k}{2}\right)\omega_0 T + \theta\right\} \sin\left(\frac{k}{2}\omega_0 T\right) \\ &\quad + \{e(n) - e(n-k)\} \end{aligned} \quad (3-5)$$

此外,式(3-3)可以展开为

$$\begin{aligned} & \{y(n+k) - y(n)\} + \{y(n-k) - y(n-2k)\} \\ &= 4A \cos\left\{\left(n - \frac{k}{2}\right)\omega_0 T + \theta\right\} \sin\left(\frac{k}{2}\omega_0 T\right) \cos(k\omega_0 T) \\ & \quad + \{e(n+k) - e(n) + e(n-k) - e(n-2k)\} \end{aligned} \quad (3-6)$$

当输入信号 $y(n)$ 中包含噪声 $e(n)$ 时,通过式(3-4)得到估计信号的角频率 $\hat{\omega}$ 的表达式(3-7)

$$\cos(k\hat{\omega}T) = \frac{A \cos\left\{\left(n - \frac{k}{2}\right)\omega_0 T + \theta\right\} \sin\left(\frac{k}{2}\omega_0 T\right) \cos(k\omega_0 T) + \frac{1}{4}\{e(n+k) - e(n) + e(n-k) - e(n-2k)\}}{A \cos\left\{\left(n - \frac{k}{2}\right)\omega_0 T + \theta\right\} \sin\left(\frac{k}{2}\omega_0 T\right) + \frac{1}{2}\{e(n) - e(n-k)\}} \quad (3-7)$$

式(3-5)中第一项的均方根(RMS)值等于 $\sqrt{2}A \left| \sin\left(\frac{k}{2}\right)\omega_0 T \right|$, 式(3-5)的第二项,

加性噪声项的均方根值等于 $\sqrt{2}\sigma$, 其中 σ 为输入噪声 $e(n)$ 的方差的平方根。

当 k 很小时,信噪比也很小,并且与 k 成正比,结果导致估计频率与实际的信号频率有很大的偏差。

3.2 基于最小二乘法的最优估计算法

由于式(3-4)的信号频率是通过分析信号的差值获得,因此当 k 很小的时候对加性噪声非常敏感。换句话说,频率估计的信号实际上是输入量的差值,而非输入量本身。

信号频率的最优估计可以由最小二乘法得到。定义 $E(\omega)$ 为

$$E(\omega) = \sum_{n=2k}^{N-k-1} \{\cos(k\omega T)a(n) - b(n)\}^2 \quad (3-8)$$

其中

$$a(n) = y(n) - y(n-k), \quad b(n) = \frac{1}{2} \left[\{y(n+k) - y(n)\} + \{y(n-k) - y(n-2k)\} \right].$$

式(3-8)的项数总和是 $(N-3k)$, 频率的最优估计就是通过找到使 $E(\omega)$ 最小化的 $\hat{\omega}$ 值得到。

$$\left. \frac{\partial E}{\partial \omega} \right|_{\hat{\omega}} = -2kT \sin(k\hat{\omega}T) \sum_{n=2k}^{N-k-1} \left\{ \cos(k\hat{\omega}T)a^2(n) - a(n)b(n) \right\} = 0 \quad (3-9)$$

$$\cos(k\omega T) = \frac{\sum_{n=2k}^{N-k-1} a(n)b(n)}{\sum_{n=2k}^{N-k-1} a^2(n)} \quad (3-10)$$

现在，我们分析噪声是如何影响信号估计的准确性的。当 $y(n)$ 中含有噪声项 $e(n)$ 时，式 (3-10) 的分母可展开为

$$\begin{aligned} \sum_{n=2k}^{N-k-1} a^2(n) &= \sum_{n=2k}^{N-k-1} \left\{ 2A \cos \left\{ \left(n - \frac{k}{2} \right) \omega_0 T + \theta \right\} \sin \left(\frac{k}{2} \omega_0 T \right) + e(n) - e(n-1) \right\}^2 \\ &= 4A^2 \sum_{n=2k}^{N-k-1} \cos^2 \left\{ \left(n - \frac{k}{2} \right) \omega_0 T + \theta \right\} \sin^2 \left(\frac{k}{2} \omega_0 T \right) \\ &\quad + \sum_{n=2k}^{N-k-1} e^2(n) + \sum_{n=2k}^{N-k-1} e^2(n-1) \\ &\quad + 4A \sum_{n=2k}^{N-k-1} \cos \left\{ \left(n - \frac{k}{2} \right) \omega_0 T + \theta \right\} \sin \left(\frac{k}{2} \omega_0 T \right) \{ e(n) - e(n-1) \} \\ &\quad - 2 \sum_{n=2k}^{N-k-1} e(n)e(n-1) \end{aligned} \quad (3-11)$$

当 N 很大的时候，由于余弦的平方的均值为 0.5，式 (3-11) 的第一项可以近似为

$$2A^2 (N-3k) \sin^2 \left(\frac{k}{2} \omega_0 T \right)$$

第二和第三项都等于 $(N-3k)\sigma^2$ ，其中 σ^2 是输出噪声 $e(n)$ 的方差。同时，当 N 很大时，式 (3-11) 的第四和第五项与 $\sqrt{N-3k}$ 成正比，并且比其他三项要小得多。因此，当 N 很大的时候，式 (3-11) 可以近似为

$$\sum_{n=2k}^{N-k-1} a^2(n) \approx 2(N-3k) \left\{ A^2 \sin^2 \left(\frac{1}{2} k \omega_0 T \right) + \sigma^2 \right\} \quad (3-12)$$

式 (3-10) 的分子是

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=2k}^{N-k-1} a(n)b(n) \\
 = & \sum_{n=2k}^{N-k-1} \left[2A \cos \left\{ \left(n - \frac{k}{2} \right) \omega_0 T + \theta \right\} \sin \left(\frac{k}{2} \omega_0 T \right) + e(n) - e(n-k) \right] \\
 & \square \frac{1}{2} \left[4A \cos \left\{ \left(n - \frac{k}{2} \right) \omega_0 T + \theta \right\} \sin \left(\frac{k}{2} \omega_0 T \right) \cos(\omega_0 T) \right. \\
 & \quad \left. + e(n+k) - e(n) + e(n-k) - e(n-2k) \right] \\
 = & 4A^2 \sin^2 \left(\frac{k}{2} \omega_0 T \right) \cos(\omega_0 T) \sum_{n=2k}^{N-k-1} \cos^2 \left\{ \left(n - \frac{k}{2} \right) \omega_0 T + \theta \right\} \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{n=2k}^{N-k-1} e^2(n) - \frac{1}{2} \sum_{n=2k}^{N-k-1} e^2(n-k) + \sum_{n=2k}^{N-k-1} 2A \cos \left\{ \left(n - \frac{k}{2} \right) \omega_0 T + \theta \right\} \sin \left(\frac{k}{2} \omega_0 T \right) \\
 & \square \{ e(n+k) - e(n) + e(n-k) - e(n-2k) \} \\
 & + \sum_{n=2k}^{N-k-1} 2A \cos \left\{ \left(n - \frac{k}{2} \right) \omega_0 T + \theta \right\} \sin \left(\frac{k}{2} \omega_0 T \right) \cos(\omega_0 T) \{ e(n) - e(n-k) \} \\
 & + \sum_{n=2k}^{N-k-1} \{ e(n) - e(n-k) \} \times \{ e(n+k) - e(n) + e(n-k) - e(n-2k) \} \quad (3-13)
 \end{aligned}$$

当 N 很大的时候，第一项近似等于

$$2A^2 \sin^2 \left(\frac{k}{2} \omega_0 T \right) \cos(k \omega_0 T) (N-3k)$$

第二项和第三项都等于

$$-\left(\frac{\sigma^2}{2} \right) (N-3k)$$

其他项都和 $\sqrt{N-3k}$ 成正比，并且比前三项小很多。因此

$$\sum_{n=2k}^{N-k-1} a(n)b(n) \approx (N-3k) \times \left\{ 2A^2 \sin^2 \left(\frac{1}{2} k \omega_0 T \right) \cos(k \omega_0 T) - \sigma^2 \right\} \quad (3-14)$$

从式 (3-12) 和式 (3-14)，我们得到

$$\begin{aligned}
 \hat{\cos(k \omega T)} & \approx \frac{\cos(k \omega_0 T) - \frac{\sigma^2}{2A^2 \sin^2(\frac{1}{2} k \omega_0 T)}}{1 + \frac{\sigma^2}{A^2 \sin^2(\frac{1}{2} k \omega_0 T)}} \quad (3-15)
 \end{aligned}$$

应用关系式

$$\sin^2\left(\frac{1}{2}k\omega_0 T\right) = \frac{1 - \cos(k\omega_0 T)}{2}$$

式 (3-15) 可以简写为

$$\cos(k\hat{\omega}T) = \frac{\cos^2(k\omega_0 T) - \cos(k\omega_0 T) + \frac{\sigma^2}{A^2}}{\cos(k\omega_0 T) - \left(1 + 2\frac{\sigma^2}{A^2}\right)} \quad (3-16)$$

方程 (3-16) 说明, 对于一个有限方差的输入噪声, 当 N 无限时, 估计频率与实际信号频率不相等, 换言之, 估计信号频率是有偏的。方程 (3-16) 表明, $k\omega_0 T$ 等于 $2/3\pi$ 并且 N 是无限大时, 估计频率 $\hat{\omega}$ 等于实际信号频率 ω_0 , 对于任意 σ 值。

然而, 在该方法的实际应用中, 估计信号频率与真实信号频率的偏差是由于不适当的 k 值和有限的 N 值导致的。

3.3 算法分析及仿真

为了证实本章的理论, 做了如下的仿真实验。实验模型为

$$y = \sin(2t + 1.5)$$

其中, 样本长度为 $N = 200$, $A = 1.0$, $\omega_0 = 2$, $\theta = 1.5$ 。其中均方误差定义为:

$$MSE = 10 \cdot \log_{10} \sqrt{E \left\{ \left(x - \hat{x} \right)^2 \right\}}, \quad E \text{ 表示期望。}$$

图 3.1 说明随 SNR 的增加, ω 的相对误差减小, 当 SNR 在 9.3 的位置误差最小, 变化曲线如图所示。在本实验中, 我们均采取满足 $N \sim (0, \sigma^2)$ 的高斯白噪声, 其中 $\sigma \in (0.25, 0.5)$, $SNR \in (3.5, 9.3)$ 。

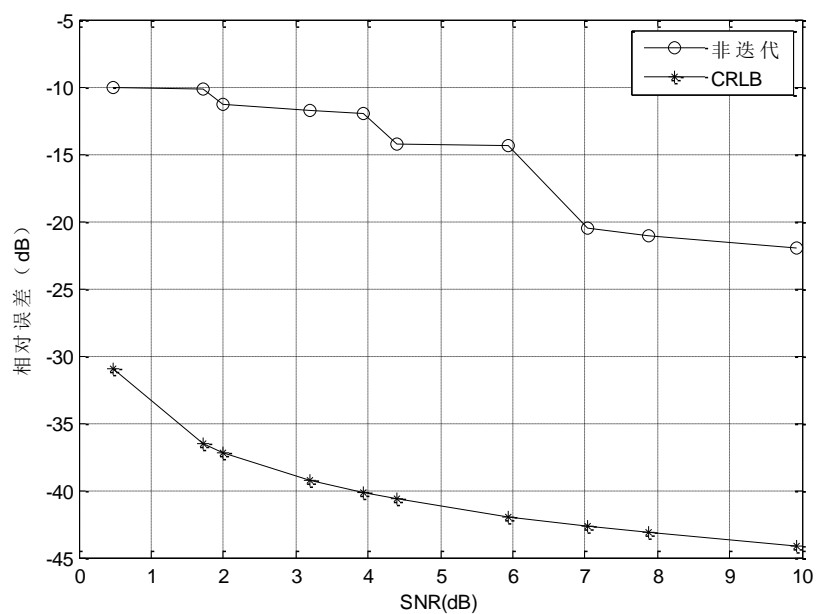
图 3.1 ω 的相对误差随 SNR 的变化曲线

图 3.2 说明 ω 的相对误差随频率分辨率的变化曲线，随着频率分辨率的改变， ω 的相对误差也发生变化。但是，随着频率分辨率的增加， ω 的相对误差呈下降趋势。

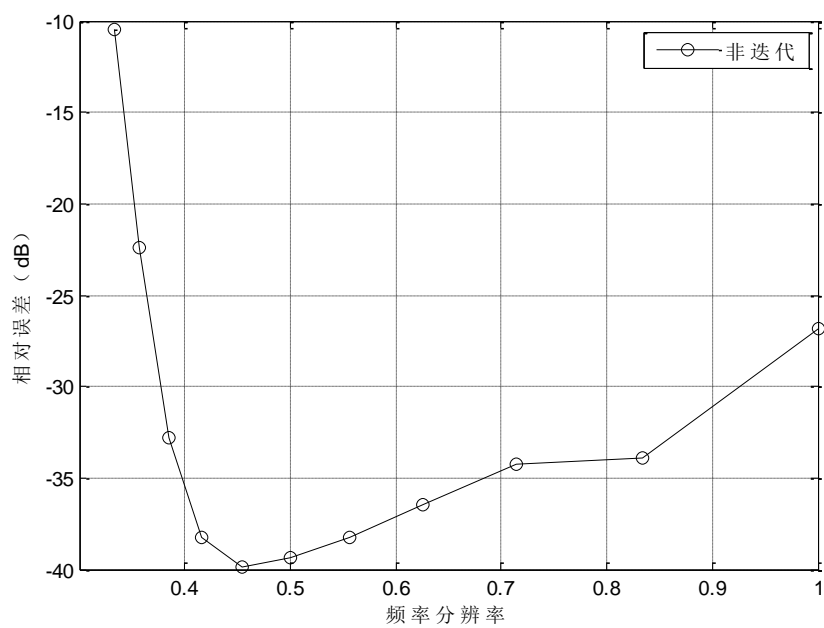
图 3.2 ω 的相对误差随频率分辨率的变化曲线

图 3.3 表示的是 ω 的相对误差随 k 的变化曲线，信号频率估计采用式 (3-10)。在实验过程中，假设 $A=1.0$, $\theta=1.5$, $\omega_0=2$ 。输入信号为 $y(n)=1.0 \times \sin((1/50)n+1.5)+e(n)$ ，其中 $N=200$, $\sigma=0.01$ 。如图所示，估计频率的实验结果与式 (3-16) 一致。然而，当使用式 (3-4) 所示的分式输入信号，并且 k 值极小时，估计频率的准确性很差。估计的信噪比与 $\sin((k/2)\omega_0 T)$ 成比例，此外，最优参数估计是通过最小二乘法实现的， k 值等于 3，相应的 $k\omega_0 T \approx 0.06$ 。

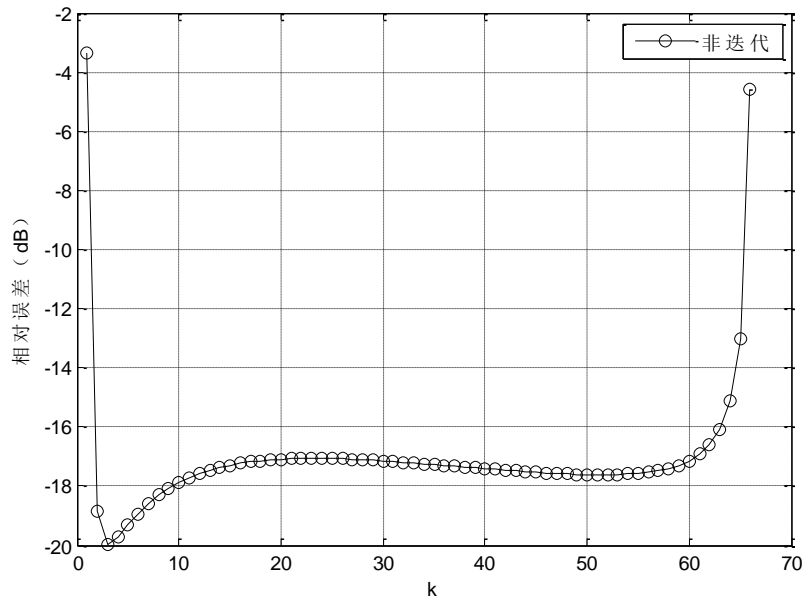


图 3.3 ω 的相对误差随 k 的变化曲线

3.4 本章小结

本章重点介绍了一种估计采样正弦信号频率的非迭代算法，信号频率的闭式表达式可由输入信号的差值准确获得。通过选取相位差的频率估计，与传统的四参数搜索的信号频率估计保持相同的信噪比。从噪声分析可见，当用来估计频率的间隔是 3 时，频率估计是无偏的。仿真实验给出了算法的效果展示。

第4章 基于MC和正弦信号LP性质的算法研究

针对基于最小二乘法的估计算法计算复杂度较高，并且估计容易产生偏差等特点，本章提出了基于MC和正弦信号LP性质的算法。该方法的优点在于采用了简单的线性直接估计方法，同时抗噪能力较好，估计误差较小。

4.1 正弦信号的LP性质

由单正弦信号的线性预测(LP)研究频率估计的性质，是通过求解逆多项式相应的零角度值得到的， $x(n)$ 的预测可写成线性组合的形式如下

$$\hat{x}(n) = -\sum_{k=1}^p a_k x(n-k) \quad (4-1)$$

均方误差(MSE)表示如下

$$E_0 = E \left[\left| \hat{x}(n) - x(n) \right|^2 \right] \quad (4-2)$$

将式(4-2)最小化。对于固定的 $x(n)$ ，可以得出

$$\sum_{k=1}^p a_k R(m-k) = -R(m), \quad m=1, 2, \dots; \quad (4-3)$$

其中

$$R(m) = E(x(n)x^*(n-m))$$

最小化MSE得到

$$E_0 = R(0) + \sum_{k=1}^p a_k R(k) \quad (4-4)$$

输入频谱的相应估计可以从如下逆过程获得

$$H(z) = 1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k} \quad (4-5)$$

形式为

$$\hat{s}(\omega) = \frac{K}{|H(e^{j\omega})|^2} \quad (4-6)$$

其中 K 是一个常数。

为了估计 $\hat{s}(\omega)$ 中与谱峰相关的频率，可以由式(4-6)直接搜索谱峰，或者求解 $H(z)$ 的根，找出与谱峰相关的零角度，且后者计算量较小。对于实信号，我们可以选择直接

处理实值，或者形成处理信号的复值（通过频率转换、希尔伯特变换等）。

上述方法有如下优势：

（1）频率估计结果的偏差可以大幅减少或消除；

（2）对于实信号，在低信噪比（SNR）下， $H(z)$ 取零的结果可变为实值，在这种情况下 $\omega=0$ 或 $\omega=\pi$ 可获得频率估计。

4.2 基于 MC 算法的线性估计法

给定一系列的样本 g_1, g_2, \dots, g_M ，波形可以近似为一个正弦曲线

$$y_n = A \cos(n\omega T + \psi), \quad n=1, 2, \dots, M \quad (4-7)$$

其中 M 是采样数量，写成复指数形式如下

$$y_n = bz_1^n + b^* z_1^{*n} \quad (4-8)$$

其中

$$z_1 = e^{j\omega T}, \quad b = \frac{A}{2} e^{j\psi},$$

*表示复共轭。

估计的问题是找到 b 和 z_1 值，将误差最小化。

$$\delta_n = g_n - y_n \quad (4-9)$$

通过最小化误差 E 将非线性问题转化成线性拟合问题

$$E = \sum_{n=p}^{M-1} (\varepsilon_n)^2 \quad (4-10)$$

其中 p 是指数的数量， ε_n 定义为

$$\varepsilon_n = \sum_{k=0}^p a_k \delta_{k+n-1} \quad (4-11)$$

a_k 是最初未知的参数，并且与正弦曲线频率相关。估计方法的关键是确认式（4-8），为了找到差分方程的表达式，定义多项式 $F(z)$ ， $p=2$ 为

$$F(z) = a_0(z - z_1)(z - z_1^*) = 0 \quad (4-12)$$

指数 z_1 和 z_1^* 是多项式的根。现在应用式（4-8），得到

$$\sum_{k=0}^2 a_k y_{k+n-1} = a_0 y_{n-1} + a_1 y_n + a_2 y_{n+1} = 0 \quad (4-13)$$

由式（4-9）和式（4-11）得到

$$\begin{aligned}\varepsilon_n &= \sum_{k=0}^2 a_k (g_{k+n-1} - y_{k+n-1}) \\ &= a_0 y_{n-1} + a_1 y_n + a_2 y_{n+1}\end{aligned}\quad (4-14)$$

多项式 $F(z)$ 所需的根 z_1 有单位模。如果 z_1 是一个根，则 z_1^{-1} 也是根。因此，系数 a_k 关于 a_1 对称，也就是 $a_0 = a_2$ 。为方便起见选择 a_0 ，则 $a_1 = 1$ 。对于 $a_0 = a_2$ ， $a_1 = 1$

$$\varepsilon_n = g_n + a_0 (g_{n-1} + g_{n+1}) \quad (4-15)$$

由式 (4-10) 和式 (4-15)，对于未知量 a_0 将 E 最小化由如下获得

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial a_0} &= \sum_{n=2}^{M-1} 2 [g_n + a_0 (g_{n-1} + g_{n+1})] (g_{n-1} + g_{n+1}) \\ &= 0\end{aligned}\quad (4-16)$$

由式 (4-16) 可得

$$a_0 = - \frac{\sum_{n=2}^{M-1} g_n (g_{n-1} + g_{n+1})}{\sum_{n=2}^{M-1} (g_{n-1} + g_{n+1})^2} \quad (4-17)$$

多项式 $F(z)$ 可以表示为

$$z^2 + \frac{1}{a_0} z + 1 = 0 \quad (4-18)$$

多项式的根为

$$z_{1,2} = -\frac{1}{2a_0} \pm j \sqrt{1 - \frac{1}{4a_0^2}} \quad (4-19)$$

由根定义为式 (4-8)

$$\begin{aligned}z_{1,2} &= e^{\pm j\omega T} \\ &= \cos(\omega T) \pm j \sin(\omega T)\end{aligned}\quad (4-20)$$

对比式 (4-19) 和式 (4-20)，得到角频率 ω 为

$$\omega = \frac{1}{T} \cos^{-1} \left\{ \frac{\sum_{n=2}^{M-1} (g_{n-1} + g_{n+1})^2}{2 \sum_{n=2}^{M-1} g_n (g_{n-1} + g_{n+1})} \right\} \quad (4-21)$$

4.3 两种正弦频率估计模型

4.3.1 三点正弦频率估计模型

我们假设测量信号的单相模型如下，每个连续采样时期的角频率为 $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ 。

$$v_i = A \sin(\omega_0 iT + \varphi) + \xi_i \quad (4-22)$$

其中 v_i 表示采样信号值， A 表示信号幅度， φ 表示信号的相位， ω_0 表示角系统频， ξ_i 表示信号中的噪声， iT 表示离散瞬时。

由 LP 性质，预滤波信号的三个等间距采样的联系方程如下，其中间距为 k

$$\frac{v_i + v_{i+2k}}{2} = v_{i+k} \cos(k\omega_0 T) \quad (4-23)$$

或者

$$y_i = z_i x \quad (4-24)$$

其中

$$y_i = \frac{v_i + v_{i+2k}}{2}, \quad z_i = v_{i+k}, \quad x = \cos(k\omega_0 T)。$$

将 $i = n - N + 1, n - N + 2, \dots, n (N > 2)$ 代入到式 (4-24)，得到如下的线性方程

$$y_n = z_n x_n \quad (4-25)$$

其中

$$y_n = \begin{bmatrix} y_{n-N+1} \\ y_{n-N+2} \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad z_n = \begin{bmatrix} z_{n-N+1} \\ z_{n-N+2} \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}。$$

并且 N 是数据窗口的采样个数。

由式 (4-25)，在瞬时 n 有

$$x_{n,1} = (z_n^T z_n)^{-1} z_n^T y_n \quad (4-26)$$

或者

$$x_{n,1} = \frac{\sum_{i=n-N+1}^n y_i z_i}{\sum_{i=n-N+1}^n z_i^2} \quad (4-27)$$

除了式 (4-26) 给出的形式，我们考虑如下形式

$$x_{n,2} = (y_n^T z_n)^{-1} y_n^T y_n \quad (4-28)$$

当 $k=1$ 时，可以得出

$$x_{n,2} = \frac{\sum_{i=n-N+1}^n y_i^2}{\sum_{i=n-N+1}^n y_i z_i} \quad (4-29)$$

此外，求前两个式子（4-27）和（4-29）的几何平均，得到

$$x_{n,3}^2 = x_n x_n = \frac{\sum_{i=n-N+1}^n y_i^2}{\sum_{i=n-N+1}^n z_i^2} \quad (4-30)$$

4.3.2 四点正弦频率估计模型

如果存在恒定偏移量，采用梳状滤波将其滤除。在采用 m 阶梳状滤波的情况下，它的 z 域转换函数为

$$H_{COMB}(Z) = 1 - \bar{z}^m \quad (4-31)$$

相应的差分方程为

$$v_{COMB} = v - v \quad (4-32)$$

将式（4-31）代入式（4-24），得到

$$\cos(k\omega_0 T) = \frac{v_i - v_{i-m} + v_{i-2k} - v_{i-2k-m}}{2(v_{i-k} - v_{i-k-m})}, \quad k \neq m \quad (4-33)$$

一般情况下， $k \neq m$ 。当 $m = k$ 时，灵活性会略微降低。

$$\cos(k\omega_0 T) = \frac{v_i - v_{i-k} + v_{i-2k} - v_{i-3k}}{2(v_{i-k} - v_{i-2k})} \quad (4-34)$$

另一种特殊情况是 $m = 2k$

$$\cos(k\omega_0 T) = \frac{v_i - v_{i-4k}}{2(v_{i-k} - v_{i-3k})} \quad (4-35)$$

4.4 仿真实验

为证实本章的理论，做了如下的仿真实验。仿真采样样本长度 $N = 200$ ，角频率 $\omega = 2$ ，幅值 $A = 1.0$ ，初相位 $\theta = 1.5$ 。其中均方误差定义为： $MSE = 10 \cdot \log_{10} \sqrt{E \left\{ \left(x - \hat{x} \right)^2 \right\}}$ ，

E 表示期望。

图 4.1 表示的是 ω 的相对误差随频率分辨率的变化曲线，可以看出，随着频率分辨

率的变化, ω 的相对误差随之发生波动, 但是, 随着频率分辨率的增大, ω 的相对误差呈减小的趋势, 可以看出性能较好。

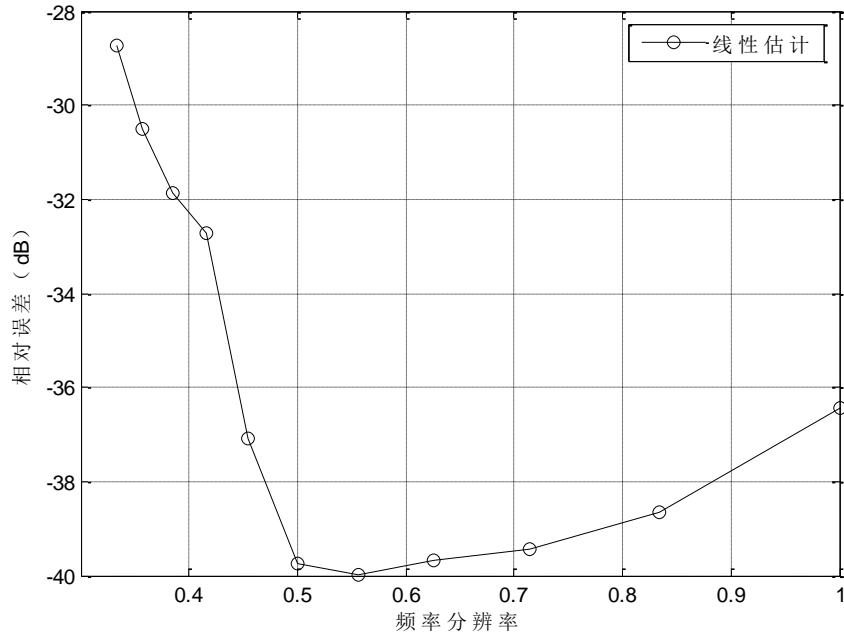


图 4.1 ω 的相对误差随频率分辨率的变化曲线

图 4.2 表示的是 ω 的相对误差随 SNR 的变化曲线, 可以看出, 随着 SNR 的增大, ω 的相对误差呈减小的趋势, 但不会超过 CRLB。

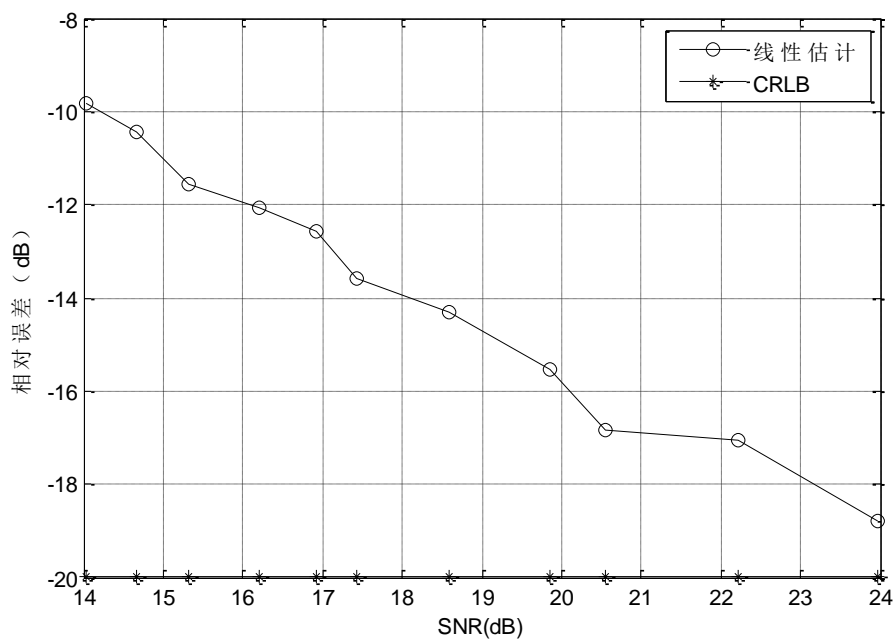
图 4.2 ω 的相对误差随 SNR 的变化曲线

图 4.3 显示了对一些特定的 m 值, ω 的相对误差的变化曲线。在实验过程中, 仍然假设 $A=1.0$, $\theta=1.5$, $\omega=2$ 。为减少噪声的影响, 设 $n=m \cdot N_s$, 由图可以得出, 当 $m=0.5$, $n=f_s/(2f_0)=N_s/2$ 时效果最好, 其中 $f_s=N_s f_0$ 表示采样频率, f_0 表示基频。

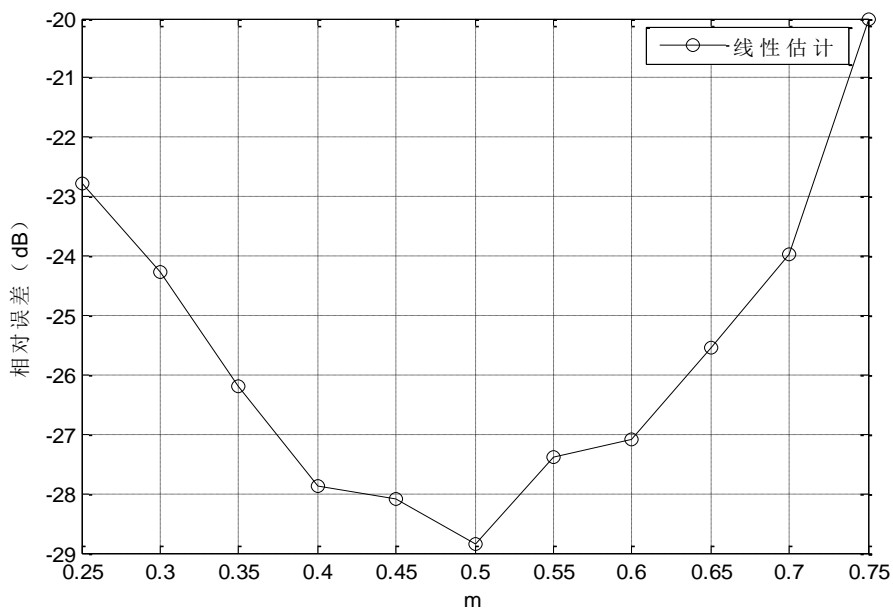
图 4.3 ω 的相对误差随 m 值的变化曲线

图 4.4 表示的是本章提出的基于 MC 算法的线性估计法与 MC 算法的比较, 显示了基于 MC 的线性估计法和 MC 算法角频率的相对误差以频率分辨率为自变量的函数。从图中可看出线性估计法效果能很好的趋近 MC 算法, 并且优于 MC 算法。

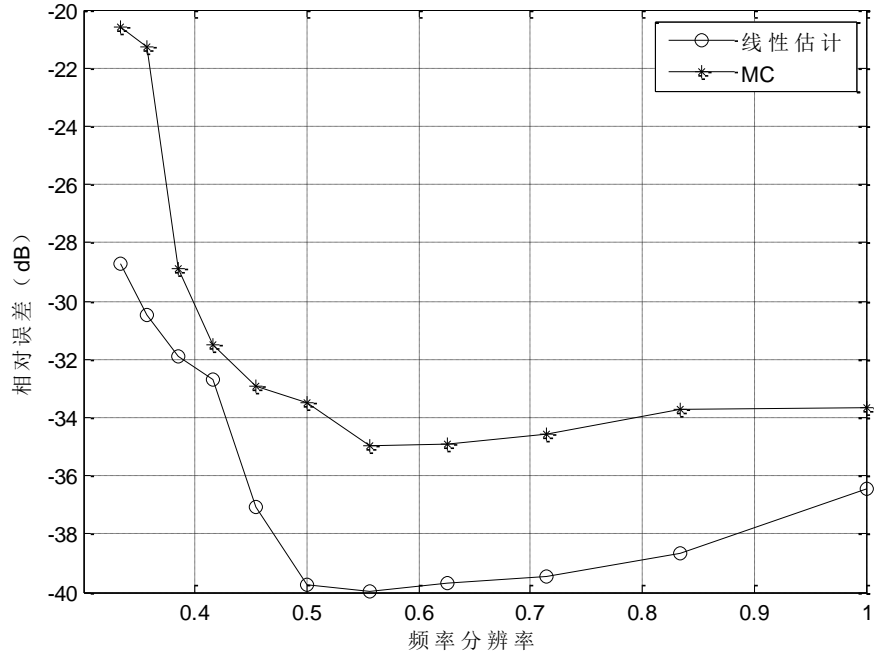


图 4.4 线性估计算法 ω 的相对误差随频率分辨率变化曲线与 MC 算法的比较

在图 4.5 中, 显示了基于 MC 算法的线性估计法与 MC 算法角频率的相对误差以 SNR 为自变量的函数。可以看出两种算法都能趋近于并且不穿过 CRLB, 但线性估计法更接近 CRLB, 具有较好的估计效果。

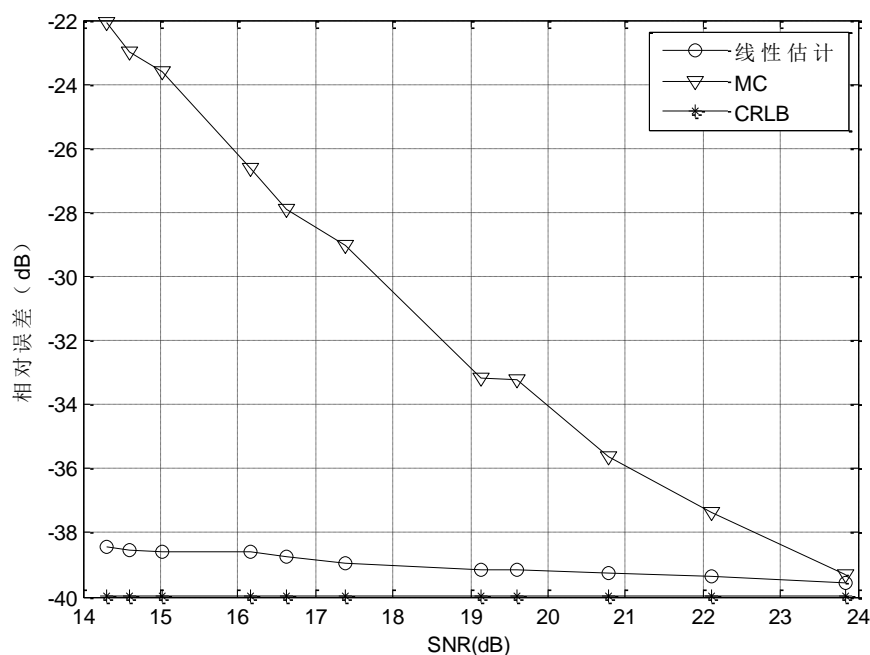


图 4.5 线性估计算法 ω 的相对误差随 SNR 变化曲线与 MC 算法的比较

4.5 本章小结

本章介绍了基于 MC 和正弦信号 LP 性质的算法，基于正弦信号的 LP 性质，提出一种线性估计法，通过最小化误差 E 将非线性问题转化成线性拟合问题。定义关于指数的多项式，通过求多项式的根确定指数，根据误差 E 对系数求导的最小化得到系数，再由根的定义得到角频率。两种正弦估计模型，前者通过三个等间距的联系方程求解得出角频率的关系式，后者通过差分方程求出 m 为特定值时，相应的角频率关系式，得到最优估计。

仿真实验表明，提出算法的抗噪能力较好，估计精度较高。此外，与经典的 MC 算法进行了对比实验，可以看出本章算法的优点。

第 5 章 正弦信号的幅值与相位估计算法研究

在噪声背景下，以往算法对幅值的估计，要求信噪比较高，容易受到噪声的影响，本章提出的自相关函数估计算法，在噪声较大的情况下仍然适用。同时，对相位估计算法也进行了改进，使其也具有较高的估计精度。

设观测信号的表达式为

$$x(t) = s(t) + n(t)$$

其中 $t = 1, 2, \dots, N, n_0$ 为第一个序号，

$$s(t) = A \cos(2\pi\delta_f t + \varphi)$$

为实正弦信号，

$$\hat{s}(t) = A \sin(2\pi\delta_f t + \varphi)$$

$\delta_f = \frac{f_0}{f_s}, A, f_0, \varphi \in (-\pi, \pi]$ 是未知而确定的常数，表示正弦信号的幅值，频率和初相位，采样时间 T ， f_s 为采样频率，角频率为 $\omega = 2\pi\delta_f$ ， $\omega \in (0, \pi]$ 。假设 $n(t)$ 为零均值，方差 σ^2 未知的高斯白噪声。

5.1 幅值估计算法

5.1.1 自相关函数估计算法

将观察信号等分为两个观测信号 $x_1(l)$ 、 $x_2(l)$ ，其中 $l = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$ ， $x_1(l)$ 、 $x_2(l)$ 分别为

$$x_1(l) = A \cos(2\pi\delta_f l + \varphi) + n_1(l) \quad (5-1)$$

$$x_2(l) = x_1\left(l + \frac{N}{2}\right) = A \cos\left(2\pi\delta_f \left(l + \frac{N}{2}\right) + \varphi\right) + n_1\left(l + \frac{N}{2}\right) \quad (5-2)$$

其中

$$s_1(l) = A \cos(2\pi\delta_f l + \varphi) \quad (5-3)$$

$$s_2(l) = A \cos\left(2\pi\delta_f \left(l + \frac{N}{2}\right) + \varphi\right) \quad (5-4)$$

令

$$n_2(l) = n_1\left(l + \frac{N}{2}\right)$$

将式(5-3)、式(5-4)代入到式(5-1)，式(5-2)得到

$$\begin{aligned} x_1(l) &= s_1(l) + n_1(l) \\ x_2(l) &= s_2(l) + n_1\left(l + \frac{N}{2}\right) = s_1\left(l + \frac{N}{2}\right) + n_2(l) \end{aligned}$$

对 $x_2(l)$ 进行化简，其中 $x_2(l)$ 表达式为

$$x_2(l) = A \cos(2\pi\delta_f l + \pi\delta_f N + \varphi) + n_2(l) \quad (5-5)$$

因为采样频率 f_s 与采样时间 T ，及采样点数 N 之间有如下关系，

$$T = \frac{N}{f_s} \quad (5-6)$$

将式(5-6)代入上式得

$$x_2(l) = A \cos(2\pi\delta_f l + \pi f_0 T + \varphi) + n_2(l) \quad (5-7)$$

令 $\varphi_1 = \pi f_0 T$ 代入式(5-7)中得到式(5-8)为

$$x_2(l) = A \cos(2\pi\delta_f l + \varphi_1 + \varphi) + n_2(l) \quad (5-8)$$

由式(5-3)，式(5-8)可知观测信号 $x_1(m)$ 与 $x_2(l)$ 是频率相同，相差 $\varphi_1 \text{ rad}$ 。(5-8)式等价于

$$x_2(l) = \cos(\varphi_1) A \cos(2\pi\delta_f l + \varphi) - \sin(\varphi_1) A \sin(2\pi\delta_f l + \varphi) + n_2(l)$$

进而得到

$$x_2(l) = \cos(\varphi_1) s_1(l) - \sin(\varphi_1) \hat{s}_1(l) + n_2(l) \quad (5-9)$$

建立幅值估计模型如下。

定义离散信号的互相关函数为

$$R_{xy}(l) = \frac{1}{N-l} \sum_{t=1}^{N-l} x(t)y(t+l)$$

考察观测信号 $x_1(l)$ 与 $x_2(l)$ 的互相关函数

$$R_{x_1 x_2}(0) = \frac{2}{N} \sum_{l=1}^{N/2} x_1(l)x_2(l) \quad (5-10)$$

式(5-10)等价于

$$R_{x_1 x_2}(0) = R_{s_1 s_2}(0) + R_{s_1 g_2}(0) + R_{g_1 s_2}(0) + R_{g_1 g_2}(0) \quad (5-11)$$

其中式(5-11)中 $R_{s_1 s_2}(0)$ 、 $R_{s_1 g_2}(0)$ 、 $R_{g_1 s_2}(0)$ 、 $R_{g_1 g_2}(0)$ 为

$$R_{s_1 s_2}(0) = \frac{2}{N} \sum_{l=1}^{N/2} s_1(l)s_2(l) \quad (5-12)$$

$$R_{s_1 g_2}(0) = R_{s_1 g_1}\left(\frac{N}{2}\right) = \frac{2}{N} \sum_{l=1}^{N/2} s_1(l)n_1\left(l + \frac{N}{2}\right)$$

$$R_{g_1 s_2}(0) = \frac{2}{N} \sum_{l=1}^{N/2} n_1(l)s_2(l)$$

$$R_{g_1 g_2}(0) = R_{g_1} \left(\frac{N}{2} \right) = \frac{2}{N} \sum_{l=1}^{N/2} n_1(l) n_1 \left(l + \frac{N}{2} \right)$$

由式(5-9)可知

$$s_2(l) = \cos(\varphi_1) s_1(l) - \sin(\varphi_1) \hat{s}_1(l) \quad (5-13)$$

将式(5-13)代入式(5-12)得到

$$R_{s_1 s_2}(0) = \frac{2}{N} \sum_{l=1}^{N/2} s_1(l) \left[\cos(\varphi_1) s_1(l) - \sin(\varphi_1) \hat{s}_1(l) \right] \quad (5-14)$$

计算式(5-14)得到

$$R_{s_1 s_2}(0) = \frac{A^2}{2} \cos(\varphi_1)$$

又因为噪声与信号相互独立的特性, 所以 $R_{s_1 g_2}(0)$ 、 $R_{g_1 s_2}(0)$ 均为零, 以及(5-15)式

$$R_g(k) = \sigma^2 \delta_k \quad (5-15)$$

其中

$$\delta_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

则 $R_{g_1 g_2}(0) = R_{g_1} \left(\frac{N}{2} \right) = 0$, 从而得到

$$R_{x_1 x_2}(0) = \frac{A^2}{2} \cos(\varphi_1) \quad (5-16)$$

考察式(5-16), 因为 $\varphi_1 = \pi f_0 T$, $T = \frac{N}{f_s}$, 所以

$$\varphi_1 = \pi f_0 \frac{N}{f_s} \quad (5-17)$$

又因为频率分辨率为

$$\Delta f = \frac{f_s}{N} \quad (5-18)$$

将式(5-18)代入上式得

$$\varphi_1 = \pi \frac{f_0}{\Delta f} \quad (5-19)$$

由式(5-19)可知, 当待测频率 f_0 是频率分辨率整数倍时, $|\cos(\varphi_1)| = 1$ 。

根据式(5-16)得到幅值的估计值为

$$\hat{A} = \sqrt{2 |R_{x_1 x_2}(0)|} \quad (5-20)$$

5.2 相位估计算法

5.2.1 最小二乘参数估计算法

观测信号为

$$x(t) = s(t) + n(t), \quad t = 1, 2, \dots, N$$

其中

$$s(t) = A \cos(2\pi\delta_f t + \varphi)$$

为实正弦信号， A ， f_0 ， φ 是未知、确定的常数，表示正弦信号的幅值，频率和初相位。采样时间为 T ，采样频率用 f_s 表示，角频率表示为 $\omega = 2\pi\delta_f$ 。假设 $n(t)$ 为方差是 σ^2 的高斯白噪声。

设正弦信号相位参数的估计值为 $\hat{\varphi}$ ，则频率已知的情况下，并且不考虑噪声时，估计值 $\hat{\varphi}$ 与真实值的误差平方和可表示为

$$E\left(A, \hat{\varphi}\right) = \sum_{t=1}^N \left\{ x(t) - A \cos\left(2\pi\delta_f t + \hat{\varphi}\right) \right\}^2 \quad (5-21)$$

其中幅值分量分别表示为

$$\begin{aligned} a_1 &= A \cos\left(\hat{\varphi}\right) \\ a_2 &= A \sin\left(\hat{\varphi}\right) \end{aligned}$$

将幅值分量代入到式（5-21），得到式（5-22）

$$E\left(A, \hat{\varphi}\right) = \sum_{t=1}^N \left\{ x(t) - \left[a_1 \cos(2\pi\delta_f t) - a_2 \sin(2\pi\delta_f t) \right] \right\}^2 \quad (5-22)$$

当估计值 $\hat{\varphi}$ 与真实值误差的平方和 $E\left(A, \hat{\varphi}\right)$ 最小时，将式（5-22）展开得

$$\begin{bmatrix} x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos(2\pi\delta_f), & -\sin(2\pi\delta_f) \\ \cos(2\pi\delta_f 2), & -\sin(2\pi\delta_f 2) \\ \vdots & \vdots \\ \cos(2\pi\delta_f N), & -\sin(2\pi\delta_f N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (5-23)$$

下面解（5-23）

令

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \cos(2\pi\delta_f), & -\sin(2\pi\delta_f) \\ \cos(2\pi\delta_f 2), & -\sin(2\pi\delta_f 2) \\ \vdots & \vdots \\ \cos(2\pi\delta_f N), & -\sin(2\pi\delta_f N) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

则式 (5-23) 可写为

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{B} \quad (5-24)$$

由式 (5-24) 及最小二乘得

$$\mathbf{B} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} (\mathbf{H}^T \mathbf{Y})$$

从而得到幅值分量 a_1 与 a_2 的估计值。由

$$\cos(\varphi) = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

得到初相位估计值

$$\hat{\varphi} = \cos^{-1} \left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \right)$$

最小二乘法只有在较高信噪比背景下,才具有估计精度较高的特点。当存在噪声时,最小误差为

$$E \left(A, \hat{\varphi} \right) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N w^2(t) = \sigma^2$$

5.3 仿真实验

观测信号为

$$x(t) = s(t) + n(t)$$

其中

$$s(t) = A \cos(2\pi\sigma_f t + \varphi)$$

$n(t)$ 为噪声, A , φ , σ_f 表示正弦波的幅值、相位、频率。这里, 取 $A=1$, $\varphi=-\pi/3$,

$\sigma_f=120$, 采样信号长度为 $N=4096$, $f_s=512$, 定义信噪比为

$$SNR = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{A^2}{2\sigma^2} \right) \quad (\text{单位: } dB)$$

\hat{A} 表示幅值的估计值, Δ 表示绝对误差。在表 5.1 给出了在高斯噪声的背景下, 不

同的 SNR 的采样信号获得的幅值估计。

表 5.1 不同 SNR 下信号的幅值估计

SNR	自相关函数的幅值估计算法 $\hat{A} / \Delta \hat{A}$
-21	1.0834/0.0834
-23	1.0913/0.0913
-25	1.1211/0.1211
-27	1.1562/0.1562
-29	1.1990/0.1990
-31	1.2313/0.2313
-33	1.2541/0.2541
-35	1.2954/0.2954
-37	1.3311/0.3311
-39	1.3812/0.3812

图 5.1 说明本文的估计算法对幅值进行估计时，幅值的绝对误差随信噪比的变化曲线。由图 5.1 可知随着信噪比的降低，幅值的绝对误差迅速增长。

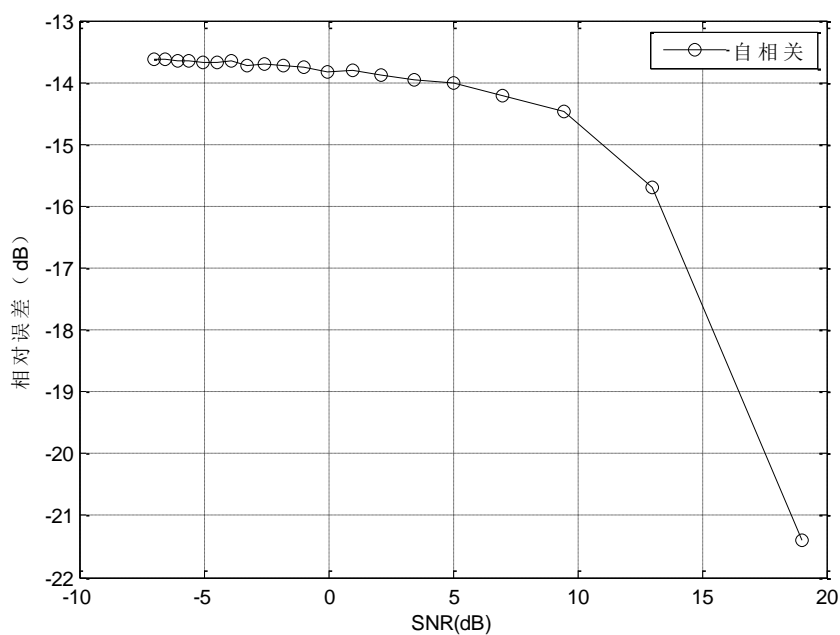


图 5.1 幅值 A 的绝对误差随 SNR 的变化曲线

图 5.2 表示的是采用最小二乘法进行相位估计时，初相位的相对误差随 SNR 的变化曲线。由图 5.2 可知，随着 SNR 的增加，初相位的相对误差随之降低。

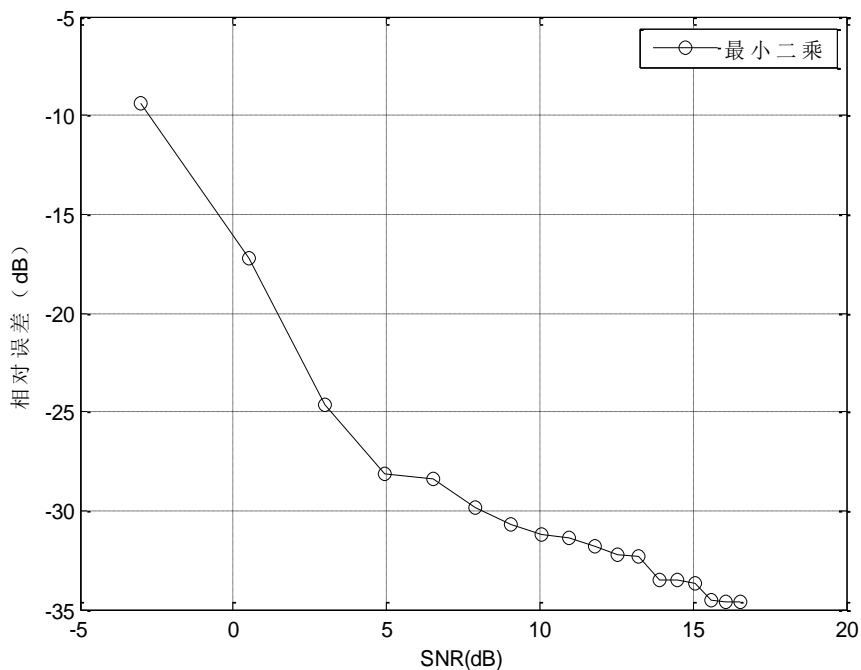


图 5.2 初相位的相对误差随 SNR 的变化曲线

图 5.3 表示的是采用最小二乘法进行相位估计与 DFT 算法的比较，由图 5.3 可知，随着 SNR 的增加，初相位的相对误差随之降低，采用最小二乘法进行相位估计的精度较高。

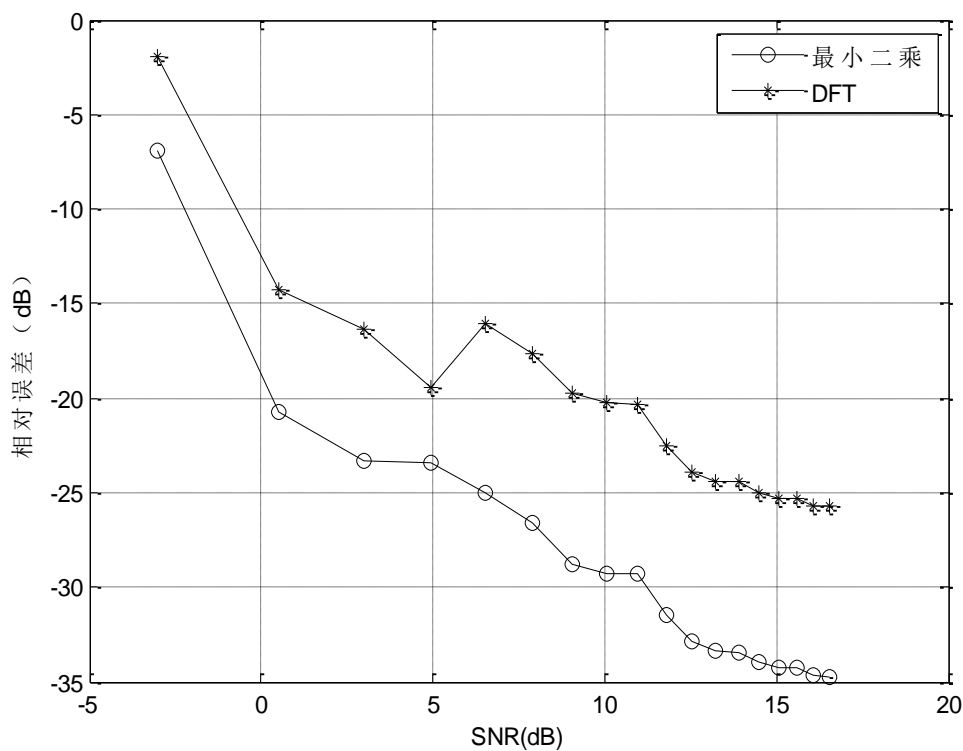


图 5.3 SNR 随相对误差的变化曲线

5.4 本章小结

本章给出了基于自相关函数的幅值估计算法，对于一条待估计的信号，将其等分为两个观测信号，进而得到相应的表达式；建立幅值估计模型，从而得到幅值的估计值。该算法解决了直接 MC 算法只适用于高信噪比的情况；此外，本章还对相位估计进行了改进。

仿真实验分析表明，本章给出的算法在低 SNR 下，可以较好的估计出正弦信号的幅值和相位，并且具有较高的估计精度。

结 论

本文研究了正弦信号参数估计，提出了基于最小二乘法的非迭代频率估计算法、基于 MC 算法的线性估计法以及幅值和相位的估计算法，并通过仿真实验证实了算法的可行性。

本文的工作与结构如下：

首先，本文介绍了一些基本知识。包括，频率估计问题的数学模型、克拉美罗下界、高斯白噪声及最小二乘法的基本理论。在最小二乘估计法的介绍中主要说明了其应用的广泛性，接着详细介绍了最小二乘法最常用的形式，各个参量以及最小二乘递推算法。还给出了评价估计性能的几个参数及克拉美罗下界的定义。

其次，给出了基于最小二乘法的非迭代频率估计算法。在高斯白噪声背景下定义采样信号，构造非迭代频率估计模型，在没有加性噪声情况下，得到准确的信号频率。在加入噪声项时，由递推方法得出估计信号角频率的表达式，当采样间隔 k 很小时，信噪比也很小，导致估计频率与实际的信号频率有很大偏差。随后，给出信号频率的最优估计，其方法是找到使最优估计式最小化的 $\hat{\omega}$ 值。仿真实验表明，该算法可以在 SNR 不是很高的情况下进行正弦信号的频率估计，且估计精度较高。

再次，给出了基于 MC 和正弦信号 LP 性质的算法。先介绍了正弦信号的线性预测 (LP) 定义及表达形式，并说明了该方法在获得频率估计上的优势。然后，给出基于 MC 算法的线性估计法，该方法采用了线性直接估计的方法，通过差分方程表达式求得指数，得到误差表达式的系数，最终求解出角频率。两种正弦估计模型，前者通过三个等间距的采样得到线性方程求得角频率；后者通过差分方程，求得阶数为 $m=k$ 和 $m=2k$ 两种情况下的角频率关系式。仿真实验表明，随着 SNR 的增大， ω 的相对误差减小，在 m 取 0.5 时， ω 的相对误差最小。

最后，给出了正弦信号的幅值与相位估计算法。基于自相关函数的幅值估计算法，将观测信号等分为两个观测信号，通过建立幅值估计模型得出幅值的估计值。此方法计算简便，并且有效的解决了频率估计值的误差对幅值的影响。通过仿真实验，可以看出在低 SNR 下，此方法可以较好的估计出幅值，有较好的估计精度。

对于正弦信号参数估计的研究，除了经典算法以及改进算法，还有很多算法需要完善和研究。本文提出的参数估计算法计算复杂性较低，且具有较高估计精度，适用于应用方面。不足之处是，当 SNR 很小的情况下，估计精度还不是很高。而对于基于最小二乘法的最优估计法，计算量较大，推导过程容易出错，不利于实际应用，并且 k 值与

N 值的选取对估计信号频率与真实频率的偏差影响较大，因此还有待完善。

参考文献

- [1] T. Kailath, H. V. Poor. Detection of Stochastic Processes[J]. IEEE Transaction on Inform-ation Theory, 1998, 44(6): 2230-2259P
- [2] S. M. Kay. 统计信号处理基础——估计与检测理论[M]. 电子工业出版社, 北京. 2003
- [3] S. A. Tretter. Estimating the Frequency of a Noisy Sinusoid by Linear Regression[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1985, 31(6): 832-835P
- [4] 谢明, 张晓飞, 丁康. 频谱分析中用于相位和频率校正的相位差校正法[J]. 振动工程学报, 1999, 12(4): 454-459 页
- [5] 齐国清, 贾欣乐. 基于 DFT 相位的正弦波频率和初相的高精度估计方法[J]. 电子学报, 2001, 29(9): 1164-1167 页
- [6] 齐国清, 贾欣乐. 插值 FFT 估计正弦信号频率的精度分析[J]. 电子学报, 2004, 32(4): 625-629 页
- [7] 李炯, 王岩飞. DFT 相位估计算法及噪声敏感频率问题分析[J]. 电子与信息学报, 2009, 3(9): 2099-2103 页
- [8] D. Tufts, R. Kumaresan. Estimation of frequencies of multiple sinusoids: Making linear prediction perform like maximum likelihood[J]. Proceedings of the IEEE, 1982, 70(9): 975-989P
- [9] R. Kenefic, A. Nuttall. Maximum likelihood estimation of the parameters of a tone using real discrete data[J]. IEEE Journal of Oceanic Engineering, 1987, 12(1): 279-280P
- [10] D. III. Brown, Y. Liao, N. Fox. Low-Complexity Real-Time Single-Tone Phase and Freq-uecy Estimation[J]. IEEE Military Communication, 2010
- [11] V. F. Pisarenko. The retrieval of harmonics from a covariance function[J]. Geophysics Journal of The Royal Astronomical Society, 1973, 33(5): 347-366P
- [12] V. F. Pisarenko. The retrieval of harmonics by linear prediction[J]. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 1973, 33(3): 347-366P
- [13] K. W. Chan, H. C .So .An exact analysis of Pisarenko's single-tone frequency estimation algorithm[J]. Signal Processing, 2003, 83(3): 683-690P

- [14] K. Lui, H. C. So. Improved Variant of Pisarenko Harmonic Decomposition for Single Sinusoidal Frequency Estimation[J]. IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, 2007, 90(11): 2604-2607P
- [15] J. Marhoul. Linear prediction: a tutorial review[J]. Proceedings of the IEEE, 1975, 63(4): 561-580P
- [16] D. Tufts, P. Fiore. Simple, effective estimation of frequency based on Prony's method[J]. IEEE Trans Acoustics Speech and Signal Processing, 1996, 5: 2801-2804P
- [17] H. C. So, K. W. Chan. Reformulation of Pisarenko harmonic decomposition method for single-tone frequency estimation[J]. IEEE Trans. Signal Process, 2004, 52(4): 1128-1135P
- [18] H. Sakai. Statistical analysis of pisarenko's method for sinusoidal frequency estimation[J]. IEEE Trans Acoustics Speech and Signal Processing, 1984, 32(1): 95-101P
- [19] E. Anarim, Y. Istefanopulos. Statistical analysis of pisarenko type tone frequency estimator[J]. Signal Processing, 1991, 24(3): 291-298P
- [20] K. Lui, H. C. So. Modified Pisarenko Harmonic Decomposition for Single-Tone Frequency Estimation[J]. IEEE Trans. on Signal Processing, 2008, 56(7): 3351-3356P
- [21] K. Lui, H. C. So. An unbiased pisarenko harmonic decomposition estimator for single-tone frequency[J]. Signal Processing, 2007: 956-959P
- [22] K. Lui, H. C. So. Two-stage autocorrelation approach for accurate single sinusoidal frequency estimation[J]. Signal Processing, 2008, 88(7): 1852-1857P
- [23] D. Rife, R. Boorstyn. Single tone parameter estimation from discrete-time Observation-s[J]. IEEE Trans. on Information Theory, 1974, 20(5): 591-598P
- [24] D. Tufts, P. Fiore. Simple, effective estimation of frequency based on Prony's method[J]. IEEE Trans Acoustics Speech and Signal Processing, 1996, 5: 2801-2804P
- [25] Rim. Elasm-Ksibi, H. Besbes, R.L. Frequency estimation of real-valued single-tone in colored noise using multiple autocorrelation lags[J]. Signal Processing, 2010, 90(7): 2303-2307P
- [26] K. Lui, H. C. So. Two-stage autocorrelation approach for accurate single sinusoidal frequency estimation[J]. Signal Processing, 2008, 88(7): 1852-1857P

- [27] B. G. Quinn. Estimating frequency by interpolation using Fourier coefficient[J]. IEEE Trans. on Signal Processing, 1994, 42(5): 1264-1268P
- [28] B. G. Quinn, E. J. Hannan. The estimation and tracking of frequency[M]. New York: Cambridge Univ. Press. 2001
- [29] E. Aboutanios, B. Mulgrew. Iterative frequency estimation by interpolation on Fourier coefficients[J]. IEEE Trans. on Signal Processing, 2005, 53(4): 1237-1242P
- [30] 齐国清, 贾欣乐. 基于 DFT 相位的正弦波频率和初相的高精度估计方法[J]. 电子学报, 2001, 29(9): 1164-1167 页
- [31] 齐国清, 贾欣乐. 插值 FFT 估计正弦信号频率的精度分析[J]. 电子学报, 2004, 32(4): 625-629 页
- [32] 齐国清. 几种基于 FFT 的频率估计方法精度分析[J]. 振动工程学报, 2006, 19(1): 86-92 页
- [33] 邓振森, 刘渝. 正弦波频率估计的牛顿迭代方法初始值研究[J]. 电子学报, 2007, 35(1): 104-107 页
- [34] Y. Cui, W. Gang, C. Fang-jiong. An estimation-range extended autocorrelation-based frequency estimator[J]. EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, 2009: 67-73P
- [35] D. C. Rife, R. R. Boorstyn. Single-Tone Parameter Estimation from Discrete-Time Observation[J]. IEEE Trans Inform Theory, 1974, 20(5): 591-598P
- [36] 邓振森, 刘渝, 王志忠. 正弦波频率估计的修正Rife算法[J]. 数据采集与处理, 2006, 21(4): 473-477页
- [37] B. Quinn. Estimating frequency by interpolation using Fourier coefficients. IEEE Trans. on Signal Processing, 1994, 42(5): 1264-1268P
- [38] 刘进明, 应怀樵. FFT谱连续细化分析的傅里叶变换法[J]. 振动工程学报, 1995, 8(2): 162-166页
- [39] T. J. Abatzoglou. A Fast Maximum Likelihood Algorithm for The Frequency Estimation of A Sinusoid Based on Newton Methods[J]. IEEE Trans ASSP, 1985, 33(1): 77-89P
- [40] E. Jacobsen and p. Kootsookos. Fast, accurate frequency estimators[J]. IEEE Signal Processing, 2007, 24(1): 123-125P
- [41] S. A. Tretter. Estimating The Frequency of A Noisy Sinusoid by Linear Regression[J].

- IEEE Trans on IT, 1985, 31(6): 832-835P
- [42] S. Kay. A Fast and Accurate Single Frequency Estimator[J]. IEEE Trans on ASSP, 1989, 37(2): 1987-1990P
- [43] 李强, 郭福成, 周一宇. 低信噪比下一种基于优选法的正弦信号频率估计算法[J]. 信号处理, 2008, 24(6): 1018-1022页
- [44] V. F. Pisarenko. The Retrieval of Harmonics from A Covariance Function[J]. Geophysics, Journal of The Royal Astronomical Society, 1973, 33(5): 347-366P
- [45] L. B. Donald, J. P. Stephen. Chaotic Oscillators and Complex Mapping Feed Forward Networks for Signal Detection in Noisy Environments. IEEE International Joint Conference on Neural Networks, 1992, 2:881-888P
- [46] F. P. Wang, J. B. Guo, Z. J. Wang. Parameter Estimation in Chaotic Interference. IEEE Signal Processing Proceedings, 2000, 15(5): 258-264P
- [47] Haykin S, Li X B. Detection of Signals in Chaos[J]. Proceedings of the IEEE, 1995, 83(1): 95-122P
- [48] 李月, 李宝俊, 石要武. 色噪声背景下微弱正弦信号的混沌检测[J]. 物理学报, 2003, 52(3): 526-530页
- [49] G. Y. Wang, D. J. Chen, J. Y. Lin. The application of Chaotic Oscillators to Weak Signal Detection[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 1999, 46(2): 440-444P
- [50] G. Y. Wang, W. Zhang, S. L. He. Estimation of Amplitude and Phase of A Weak Signal by Using The Property of Sensitive Dependence of Initial Conditions of A Nonlinear Oscillator[J]. Signal Processing, 2002, 82(1): 103-105P
- [51] H. Kawakami. Bifurcation of Periodic Responses in Forced Dynamic Nonlinear Circuits: Computation of Bifurcation Values of The System Parameters[J]. IEEE Trans Circuit System, 1984, 35(3): 248-260P
- [52] R. Benzi, G. Parisi, A. Sutera. A Theory of Stochastic Resonance in Climatic Change[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1983, 43(3): 565-578P
- [53] R. Benzi, A. Sutera, A. Vulpiani. The Mechanism of Stochastic Resonance[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1981, 14(4): 453-457P
- [54] 齐国清, 贾欣乐. 基于DFT相位的正弦信号频率估计和初相的高精度估计方法[J]. 电子学报, 2001, 29(9): 1164-1167页
- [55] 李春宇, 张晓林, 张展, 常江. 基于DFT的正弦波初相估计算法及误差分析[J]. 北

京航空航天大学学报, 2007, 33(5): 580-584页

- [56] 孙进才, 朱维杰. 正弦信号参数估计的最小二乘算法[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2005, 26(1): 19-23页
- [57] 牛鹏辉, 涂亚庆. 一种基于双谱的正弦波初相位估计方法[J]. 电测与仪表, 2006, 43(10): 1-3页

攻读硕士学位期间发表的论文和取得的科研成果

- [1] 张晓威, 张丽娜, 张超宇. 频率未知情况下的幅值与相位估计算法研究, 计算机应用研究 (已录用).

致 谢

时间过得很快，转眼间，两年半的学习生活接近尾声，即将毕业的学子，在此要特别感谢一直以来给予我包容、关心和鼓励的人们。

在论文的写作过程中，导师张晓威教授给予了我许多指导和帮助，通过细致、谨慎的审阅，指出了原稿中多处不合理及不规范的地方。但由于本人水平有限，研究问题不够深入，希望各位专家学者多提宝贵意见，帮助我不断改进和完善。

在这近三年的研究生生活中，要特别感谢导师张晓威教授，张老师学识渊博、治学严谨、关爱学生、全身心致力于学术研究的精神，时时激励着我。在平日的研讨班以及论文的写作过程中，老师耐心的指导，以他的学识与实际经验启发我们，商讨解决问题的办法。更多的是，从张老师身上体会到了如何待人接物，怎样做学问，这些都让我终身受用。

感谢朝夕相处的同学们，我们共同学习，相互关心，度过了难以忘记的求学时光，特别是实验室的兄弟姐妹们，给了我很多帮助与鼓励。在理学院学习生活的记忆，我将永远铭记在心，无论今后的生活面临多大的困难和挑战，我都会以此勉励自己，勇敢前行。

还要感谢哈尔滨工程大学，在这里我度过了人生中具有转折意义的阶段，成长并成熟，校园里的每一隅，都将成为我生命中无法复刻的地方，在此，祝哈尔滨工程大学的未来更加辉煌。

最后，感谢评阅本文并提出批评指正的所有专家。

附录

❖ 英国《科学文摘》(INSPEC)来源期刊
❖ 美国《剑桥科学文摘(工程技术)》(CSA Technology)来源期刊
❖ 美国《乌利希期刊指南》(UPD)来源期刊
❖ 第二届国家期刊奖百种重点科技期刊
❖ 中国科技核心期刊❖全国中文核心期刊
❖ 中国科技论文统计源期刊
❖ 中国学术期刊综合评价数据库来源期刊
❖ 中国计算机学会会刊 ❖ RCCSE 核心期刊
❖ 《中国工程技术电子信息网》来源期刊

❖ 日本《科学技术振兴机构数据库》(JST)来源期刊
❖ 美国《剑桥科学文摘(自然科学)》(CSA(NS))来源期刊
❖ 俄罗斯《文摘杂志》(AJ)❖波兰《哥白尼索引》(IC)来源期刊
❖ 中国期刊方阵双效期刊
❖ 中国科学引文数据库来源期刊
❖ 《中文科技期刊数据库》来源期刊
❖ 《中国期刊网》《中国学术期刊(光盘版)》来源期刊
❖ 台湾《中文电子期刊服务资料库》全文收录期刊
❖ 《电子科技文献数据库》来源期刊

稿件录用通知书

张晓明 张丽娜 张超宇 同志：

您的论文《频率未知情况下二幅值与相位估计算法研究》

(编号No. 14020621), 经本刊编委会专家组审查通过, 现拟定安排在 2015年
7 月至 月出版的《计算机应用研究》增刊上刊出。

特此通知

《计算机应用研究》编辑部

2014年 4 月 28 日

稿件修改注意事项

1. 您的稿件 (No. 14020621) 已被本刊录用, 其文印费为¥1600.00 元, 由作者单位支付。
2. 作者须遵守《著作权法》和国家保密法规, 确保稿件内容无著作权、知识产权争议, 无涉及国家机密问题, 请作者及作者单位再一次严审确认, 以免承担相应的法律责任。
3. 论文撰写格式及参考文献标注不规范, 请登录本刊网站, 依照网上投稿要求栏目“论文模板”中的撰写格式认真修改补充。
4. 请务必在网传的修改稿中完善作者简介、增补作者详细通信地址、邮编、电话(办公室、家或手机)、电子邮件地址、传真号码等信息, 以便联系。若正式出版前第一作者的通信地址已变更, 请作者一定将详细通信地址及时通知本刊编辑部。

计算机应用研究
Application Research of Computers

频率未知情况下的幅值与相位估计算法研究

张晓威, 张丽娜, 张超宇

(哈尔滨工程大学 理学院, 哈尔滨 150001)

摘要: 本文提出了在频率未知情况下的幅值与相位估计算法, 该算法有效的解决了频率估计值的误差对幅值与相位估计的影响。幅值估计算法是将观测信号二等分, 得到与原观测信号频率相同, 但相位不同且噪声互不相关的观测信号, 再次利用自相关函数估计算法, 得到幅值估计。相位估计算法是利用自相关函数得到一组信噪比较高的自相关序列, 根据自相关序列中的相位为零的特点, 通过互相关运算, 得到相位的估计式。仿真实验结果表明, 在混有加性高斯白噪声的背景下, 该算法具有较高的估计精度。

关键词: 正弦信号; 频率估计; 自相关; 互相关

中图分类号: TN911.6

文献标识码: A

Research on Amplitude and Phase Estimation Algorithm of Unknown Frequency

ZHANG Xiaowei, ZHANG Lina, ZHANG Chaoyu

(College of Science, Harbin Engineering University, Harbin, 150001, China)

Abstract: This paper presents an amplitude and phase estimation algorithm of unknown frequency, which effectively solve the impact of frequency error estimate on amplitude and phase estimation. Amplitude estimation algorithm is the bisector of the observed signals, and be different from the original observation signal phase, the same frequency and noise unrelated observed signals, again the autocorrelation function estimation algorithm to obtain the estimated amplitude. Phase estimation algorithm is the use of autocorrelation function to get a autocorrelation sequence of higher signal to noise ratio, according to the autocorrelation sequence of the phase characteristic zero, obtain the phase estimation by cross-correlation operation. The simulation results show that the background mixed with additive white Gaussian noise, the algorithm has high estimation accuracy.

Keywords: Sinusoidal signal; frequency estimation; auto-correlation; cross-correlation

0 引言

正弦信号是在物理量的计算与测试过程中经常遇到的一种信号, 由于信号均不同程度的受到噪声的干扰, 因此由传感器输出的信号, 除包含有人感兴趣的物理量信息外, 还包含有大量的噪声。强噪声环境下的正弦信号的幅值与相位估计在诸多领域均有广泛应用。主要方法是基于 DFT 的相位估计算法^[1], 文献[1]提出了基于 DFT 相位的正弦波初相位的估计算法, 虽然有效的抑制了频谱泄露的问题, 但由于精度取决于采样点数, 在低信噪比情况下不得不进行大量的采样, 较为繁琐。文献[2]提出了利用 Chirp-Z 变换进行频谱估计初相位的算法, 虽然改进了 DFT 频谱相位的估计算法, 但在低信噪比情况下, 仍然难以实现有效估计。最大似然估计算法^[3-5], 虽然在强噪声背景下可以精确的估计正弦信号的初相位, 但是计算过于复杂, 不利于实时处理。最小二乘估计算法^[6], 虽然可以消除部分

噪声对被估计信号的影响, 但该算法抗噪能力较差, 在低信噪比情况下无法满足估计精度的要求。基于 FFT 的参数估计算法存在栅栏效应问题。对于正弦信号的幅值估计问题, 主要是利用混沌理论进行弱信号检测的方法^[7-9], 文献[10]提出了对极低信噪比下正弦信号的幅值估计, 但要求精确判别系统相变, 影响了方法的有效性。混沌理论更多的是对微弱信号的参数估计。针对于加性高斯白噪声背景下的观测信号, 在频率已知情况下的幅值与相位估计算法, 由于噪声的存在, 使得频率估计存在一定的误差。对于基于误差频率的幅值与相位估计算法会造成一定的影响, 使得幅值与相位的估计值误差较大。在频率未知的情况下, 提出了基于自相关函数的幅值与相位估计算法, 由于幅值估计式是在参数未知情况下得到的, 其估计精度不受频率的误差影响, 因此估计精度高于频率已经情况下的幅值估计算法的估计精度。