棕榈树和桉树竞争系统的稳定性分析

姜玉秋,华极鑫,韩　璐
(吉林师范大学 数学学院,吉林 四平 136000)

摘　要:本文建立并研究了生存在同一环境中的两个种群受有限资源限制产生生存竞争种群系统的数学模型,给出了模型的平衡点,并对其平衡点做了稳定性分析,用 MATLAB 进行模拟,理论分析和数值模拟的结果相吻合.

关键词:种群;竞争;稳定性;平衡点
中图分类号:O175.12　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1674-3873-(2013)04-0044-03

0 引言

生存在同一地区的两个种群,由于生存所利用的是同一种资源,生存环境又极其相似,因而必将产生生存资源竞争,这种竞争常常导致其中一个种群的数量下降,甚至濒临灭绝.为了保护稀有种群,达到生态的平衡和稳定,大约在 60 年前 Lotka 和 Volterra 奠定了竞争关系的理论基础[1].用 Liapunov 稳定性定理[2]和全局稳定的理论[2]对竞争方程平衡点的存在性和稳定性进行讨论,用于分析在一个小生境中两个相互竞争的生物种群的变化情况.

为了方便讨论,我们首先给出相关定理:

设 n 维自治系统[3]

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(x),f(0)=0 \tag{1}$$

的解是 $x(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))^{\tau}$.

定理 1.1　若有原点的邻域 U 和一个正定(负定)函数 $V(x)$,使得 $\dot{V}(x)$ 是半负定(半正定)的,则系统(1.1)的零解是稳定的;且使得 $\dot{V}(x)$ 负定(正定)时,(1.1)的零解是渐进稳定的.

定理 1.2　设 $V(t,x)$ 是 $I\times R^n$ 上的正定函数,有无穷小上界和无穷大下界,且 $\dot{V}(x)$ 负定,则(1.1)的零解全局一致渐进稳定.

1 系统分析

生长在澳大利亚东北部沿海热带雨林地区的一个理想小生境中两个发生竞争的种群,棕榈树和桉树,利用同一种生存资源,假设这个小生境里的每株棕榈树和桉树的生长都处于健康状态,那么这两个种群相互竞争时,每个物种在 t 时刻的增长情况,同时满足以下方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=x_1(r_1-a_{11}x_1-a_{12}x_2)\\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=x_2(r_2-a_{21}x_1-a_{22}x_2)\end{cases} \tag{2}$$

其中 x_1 和 x_2 分别表示在这个小生境中棕榈树和桉树的总数量;r_1 和 r_2 分别表示棕榈树和桉树在自然状况下的内禀增长率,a_{11} 和 a_{12} 分别表示棕榈树和桉树本身数量的增长也会抑制本身数量的增长,即每株棕榈树和桉树自身受阳光,水分,环境等因素影响的密度制约项;a_{12} 表示每株桉树对棕榈树的增长所起的抑制影响;a_{21} 表示每株棕榈树对桉树增长所起的抑制影响;$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}$ 和 $\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}$ 分别表示棕榈树和桉树在这个小生境的

收稿日期:2013-09-16　　**基金项目**:国家外专局项目(LZ0122200048)
第一作者简介:姜玉秋(1966-),女,吉林省四平市人,现为吉林师范大学数学学院教授,硕士,研究方向:生物数学.

相对平均增长率. 为了研究棕榈树和桉树的实际生长状态和考虑到生物学的的涵义,我们在 $R^2_+=\{(x_1,x_2)\mid x_1\geq 0,x_2\geq 0\}$[4] 中考虑这两个种群. 令

$$\begin{cases}x_1(r_1-a_{11}x_1-a_{12}x_2)=0\\x_2(r_2-a_{21}x_1-a_{22}x_2)=0\end{cases}$$

可以得到四个平衡点,即 $A(0,0)$,$B(0,\frac{r_2}{a_{22}})$,$C(\frac{r_1}{a_{11}},0)$,$D(x_1^*,x_2^*)$,其中

$$x_1^*=\frac{a_{22}r_1-a_{12}r_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},x_2^*=\frac{a_{11}r_2-a_{21}r_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

平衡点 $A(0,0)$,表示棕榈树和桉树数量都为零;平衡点 $B(0,\frac{r_2}{a_{22}})$ 表示棕榈树数量为零,即只有桉树一种种群存在;平衡点 $C(\frac{r_1}{a_{11}},0)$ 表示桉树数量为零时,即只有棕榈树一种种群存在. 对以上三种情况至多存在一种种群,对这三个平衡点的研究都不能达到棕榈树和桉树两个种群相互竞争时共同生存的生存状态. 对于平衡点 $D(x_1^*,x_2^*)$,在 $R^2_+=\{(x_1,x_2)\mid x_1\geq 0,x_2\geq 0\}$ 内部,所以有

$$\frac{a_{22}r_1-a_{12}r_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}>0,\frac{a_{11}r_2-a_{21}r_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}>0 \tag{2}$$

利用 x_1^*,x_2^* 满足的方程

$$\begin{cases}r_1=a_{11}x_1^*+a_{12}x_2^*\\r_2=a_{21}x_1^*+a_{22}x_2^*\end{cases}$$

将模型化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=-x_1(a_{11}(x_1-x_1^*)+a_{12}(x_2-x_2^*))\\\dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=-x_2(a_{21}(x_1-x_1^*)+a_{22}(x_2-x_2^*))\end{cases} \tag{3}$$

选取函数 $V(x_1,x_2)=\sum_{k=1}^{2}c_k(x_k-x_k^*-x_k^*\ln\frac{x_k}{x_k^*})$,$(k=1,2)$,其中 c_1 和 c_2 是待定的正常数,经计算得

$$V(x_1^*,x_2^*)=0,\frac{\partial V(x_1,x_2)}{\partial x_k}=c_k(1-\frac{x_k^*}{x_k}),\frac{\partial^2 V(x_1,x_2)}{\partial x_k^2}=\frac{c_kx_k^*}{x_k^2}>0,\frac{\partial^2 V(x_1,x_2)}{\partial x_1\partial x_2}=0.$$

所以 $V(x_1,x_2)$ 是 R^2_+ 内部的正定函数,且容易验证当 (x_1,x_2) 趋于 R^2_+ 的边界时,$V(x_1,x_2)\to+\infty$,故 $V(x_1,x_2)$ 是 R^2_+ 内有无穷大下界的函数.

计算 $V(x_1,x_2)$ 沿着(3)解轨线的全导数,得

$$\begin{aligned}\dot V(x_1,x_2)\mid&=-c_1(x_1-x_1^*)a_{11}(x_1-x_1^*)+a_{12}(x_2-x_2^*))-c_2(x_2-x_2^*)(a_{21}(x_1-x_1^*)+a_{22}(x_2-x_2^*))\\&=-[c_1a_{11}(x_1-x_1^*)^2+c_2a_{22}(x_2-x_2^*)^2+(c_1a_{12}+c_2a_{21})(x_1-x_1^*)(x_2-x_1^*)]\end{aligned} \tag{4}$$

$\dot V(x_1,x_2)$ 是 $(x_1-x_1^*)$ 和 $(x_2-x_2^*)$ 的二次齐次数. 当

$$\Delta=(c_1a_{12}+c_2a_{21})^2-4c_1c_2a_{11}a_{22}<0 \tag{5}$$

时,$\dot V(x_1,x_2)$ 是负定的. 为此,将(2.5)整理、化简为

$$\Delta=(c_1a_{12}-c_2a_{21})^2-4c_1c_2(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})<0 \tag{6}$$

由于 $a_{ij}>0$,故取 $c_2=\frac{c_1a_{12}}{a_{21}}$,此时(2.6)化为

$$\Delta=-\frac{4c_1^2a_{12}}{a_{21}}(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})<0$$

利用定理 1.2 就可以得到如下结论:若 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}>0$,$a_{22}r_1-a_{12}r_2>0$,$a_{11}r_2-a_{21}r_1>0$,则模型(1)有唯一的正平衡解 $D(x_1^*,x_2^*)$,它是全局一致渐进稳定的,也就是说棕榈树数量达到 x_1^* 和桉树数量达到 x_2^* 时,棕榈树和桉树能够处于稳定状态.

用 Matlab 模拟出(1)过不同初值点在稳定平衡点 $D(x_1^*,x_2^*)$ 附近的轨线,如图 1 所示.

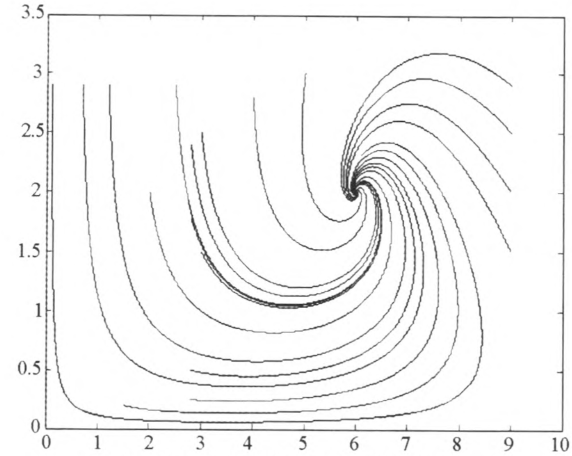

图1　棕榈树和桉树两种群数量变化图

2　主要结果的生物学意义

在系统(1)中,棕榈树和桉树由于生长,死亡和相互作用,两种群的个体数量随着时间变化,系统表示了棕榈树和桉树之间相互竞争的变化趋势[5],但无论系统的起始状态如何,最终棕榈树和桉树都会达到各自的平衡点 x_1^* 和 x_2^*.

在某个特殊自然环境中或受到意想不到的自然灾害,当两种群为了争夺有限的生存资源和生存空间而进行生存竞争时,往往会出现竞争力较弱的种群灭绝的现象[6].为了维护生态平衡,保持种群多样性,在自然状态下,当某种稀珍种群由于自然灾害数量严重减少时,我们就可以利用这个模型找到平衡点 $D(x_1^*,x_2^*)$,以此进行人为的干预,致使种群不会灭绝.当两个种群在相互竞争过程中,只存在一个稳定的平衡点时,两种群可以在它们各自环境容纳量以下,特定密度下达到种群共同生存的生存状态,从而实现稳定共存[7].

参　考　文　献

[1]尚玉昌.普通生态学[M].北京:北京大学出版社,2002.

[2]马知恩,周义仓.常微分方程定性与稳定性方法[M].北京:科学出版社,2001.

[3]姜玉秋,孙文喜.纯星、自治系统初值解的存在唯一性[J].吉林师范大学学报(自然科学版),2006,27(2):36~37.

[4]董雨滋,孙凤亭.一类两种群竞争系统生态模型的的研究[J].山西大学学报(自然科学版),1992,15(1):1~7.

[5]姜玉秋.栖息地的破坏与生态种群灭绝的数学动力学研究[J].吉林师范大学学报(自然科学版),2008,29(1):16~18.

[6]姜启源,谢金星,叶俊.数学模型[M].北京:高等教育出版社,2003.

[7]毛　凯,李日华.种群竞争的稳定性分析[J].生物数学学报,1999,14(3):288~292.

Stability Analysis of Palm Trees and Eucalyptus Competition System

JIANG Yu-qiu ,HUA ji-xin,HAN Lu

(College of Mathematics,Jilin Normal University,Siping 136000,China)

Abstract:In this paper, competition system was established and researched which two species in one limited circumstance . We analyzed the equilibrrium point of the system and the stability of the equilibrrium point. Analyzed by matlab ,the theoretical analysis and numerical simulation are coincide.

Key words:species;competition;stability;equilibrrium point

(责任编辑:梁怀学)