中国科学技术大学 2019 年夏令营试题

望梦阁的小梦友

2019 年 7 月 20 日

注记 (1) 此试题为入营同学的回忆版，难免有所遗漏或错误，请见谅，也欢迎纠错.

(2) 数学分析，线性代数是第一天考试题；实变函数，复变函数，微分几何，抽象代数是第二天考试题，三小时答卷.

1 数学分析

题 1. 请构造一个定义在 $[0,1]\times[0,1]$ 上的函数 $f(x,y)$ 使得 $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^1 f(x.y)dy$ 和 $\int_0^1 f(x,y)dy$ 均存在有限但

$$\lim_{x\to 0}\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y \neq \int_0^1 \lim_{x\to 0} f(x,y)\mathrm{d}y$$

进一步，如果还要求 $f(x,y)$ 为二元连续函数，则满足上述条件的函数还存在吗？为什么？

题 2. 设函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n(n>1)$ 有一阶连续偏导数，且存在常数 $C>0$ 使得对 $\forall x,y\in\mathbb{R}^n$ 均满足

$$|f(x)-f(y)|\geqslant C|x-y|$$

求证：$\forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$,$f$ 在 $\boldsymbol{x}$ 点在 Jacobi 矩阵 $Df(\boldsymbol{x})$ 均可逆.

题 3. 设函数 $f(x,y):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 具有二阶连续偏导数且满足

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|,\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|,\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|\leqslant 1,\quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

而且

$$f(1,1)=f(1,-1)=f(-2,0).$$

求证：

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|,\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|\leqslant 2019,\quad \forall x^2+y^2\leqslant 1.$$

题 4. 是否存在函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 满足 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$ 在 $[0,1]$ 上收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛？并说明理由.

2 线性代数

题 5. 将二次型 $x^2+y^2-z^2-xy-yz-xz+2z+1=0$(也有可能是 $x^2+y^2-z^2-xy-yz-xz-2z+1=0$) 化为标准形并判断其所属曲面类型.

题 6. 设 $A=\begin{pmatrix}7&1\\2&7\end{pmatrix}$, 定义线性变换

$$f: M_2(\mathbb{C})\to M_2(\mathbb{C}), f(X)=AX-XA.$$

求 f 的特征根与对应的特征向量.

题 7. 已知五个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_5$(具体数值忘记了), 求 α_2 所在的极大线性无关组.

题 8. 设 $A,B\in M_n(\mathbb{C})$,$AB=BA$, 证明存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 和 $P^{-1}BP$ 均为上三角矩阵.

3 实变函数

题 9. 设 f_n 是 $[0,1]$ 上的可测函数列，几乎处处收敛于 f, 若 $1\le q<p<\infty$, 并且 $||f_n||_{L^p}$ 是有界的. 证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1|f_n(x)-f(x)|^q dx=0$$

题 10. 设 $E\subset\mathbb{R}$ 满足 $m^*(E)>0$, 其中 m^* 是外测度. 证明对任何 $\alpha\in(0,1)$, 存在一个开区间 I 使得

$$m^*(I\cap E)\ge\alpha m^*(I).$$

4 复变函数

题 11. 方程 $z^4-8z-10=0$ 在圆环 $1<|z|<3$ 内有几个根？为什么？

题 12. 设 $f(x)$ 在 $\{z||z|<1\}$ 内解析，在 $\{z||z|\le1\}$ 上连续, 并且当 $|z|=1$ 时，有 $|f(z)|=1$. 试证明:$f(z)$(可解析延拓为) 有理函数.

5 微分几何

题 13. 设 $f(x_1,x_2)$ 是某个平面区域 D 上的光滑函数. 考虑三维欧氏空间 $\boldsymbol{E}^3$ 中的曲面 S:

$$(x_1,x_2,f(x_1,x_2)),\quad (x_1,x_2)\in D$$

记 $f_i:=\dfrac{\partial f}{x_i}$,,$|\nabla f|^2:=\sum_{i=1}^{2}f_i^2$.

(1) 求曲面 S 的第一基本形式和第二基本形式.

(2) 称平均曲率为零的曲面为极小曲面. 证明：若 f 满足方程

$$\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f_i}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right)=0.$$

则曲面 S 为极小曲面.

题 14.

(1) 平面与单位球之间能否建立等距同构映射？说明理由.

(2) 测地线是否是最短线？说明理由.

6 抽象代数

题 15. S_4 中 $(12)(34)$ 所在的共轭类记为 C，求 C 中所有元素在共轭作用下的稳定子群.

题 16. 设 $\mathbb{F}_2=\{\overline{0},\overline{1}\}$, 判断 $\mathbb{F}_2/(t^2),\mathbb{F}_2/(t^2+t+\overline{1}),\mathbb{F}_2/(t^2+\overline{1})$ 之间是否有环同构. 并说明理由.