

北京大学数学科学学院 2019 年直博生摸底考试试题

(2019 年 4 月 6 日 9:00-11:00)

1. 设 $a > 0, a_1 = a, a_2 = a^a, a_3 = a^{a^a}, \dots, a_{n+1} = a^{a_n}, \dots$, 集合 $S = \{a | \text{序列 } \{a_n\} \text{ 极限存在}\}$.

(1) 证明 S 有上界.

(2) 求 S 的上确界.

2. (1) 设 $y = \arctan \frac{3x(x^2-1)}{x^4-4x^2+1}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

(2) 求定积分: $\int_0^1 \frac{1+x^4}{1+x^6} dx$.

3. 仿照定积分的第二中值定理, 严格叙述第一型曲线积分的第二中值定理, 并证明.

4. $f(x), g(x)$ 在 \mathbf{R} 上连续, $g(x)$ 以 $T > 0$ 为周期. 证明: $f(f(x)) = -x^3 + g(x)$ 无连续解.

5. 在单位圆盘 D 内, $u = \nabla u, u|_{\partial D} = 0$. 证明: $u \equiv 0$.

6. 设 a_0, a_1, a_2 为有理数, 且 $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_0 + a_1 & a_1 + a_2 \\ a_1 & a_0 + a_2 & a_0 + a_1 \end{vmatrix} = 0$. 证明: $a_0 = a_1 = a_2 = 0$.

7. 设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 3x_2^2 + 2x_2x_3$.

(1) 将其写成 $f(x) = x^T A x$ (A 为对称矩阵) 的形式, 并求出其特征值, 特征向量;

(2) 求正交矩阵 P 和对角矩阵 D , 使得 $A = P D P^T$;

(3) 若三维向量 x 满足 $\|x\| = 1$, 求 $f(x)$ 的最大值.

8. 设矩阵 A 的列数 = B 的行数 = n , 证明 $r(A) + r(B) = r(AB) + n$ 当且仅当 A 的解空间 $\subseteq B$ 的列空间.

9. A 为 $M_n(\mathbf{C})$ 中的幂零矩阵, $M_n(\mathbf{C})$ 上的线性变换 $T_c: B \mapsto AB - BA$. 证明: 若 $(T_c)^2 B = 0$, 则 AB 是幂零矩阵.

10. 在 $y=0$ 平面上的圆 $(x-2)^2 + z^2 = 1$ 绕 z 轴旋转成一环面.

(1) 求这个环面的一个参数方程;

(2) 它的正等测投影 (即在平面 $x+y+z=0$ 上的垂直投影) 外周是否为椭圆?