

AMSS天津地区2020届四月高招试题(NKU)

分析与代数

阁友供稿

2019年4月

1.(15分)

(1) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^{\alpha-1}}{n^\alpha} (\alpha > 0)$;

(2) 求 $\int \frac{x \ln x}{1+x^2} dx$;

(3) 缺失。

2.缺失。

3.(15分) 证明 $\sum_{i=1}^n \frac{C_n^i}{i} (-1)^{i-1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ 。

4.(20分) 设 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 。

(1) $\Delta r = \frac{2}{r}$; $-(\nabla r) \cdot (\nabla \frac{1}{r}) = \frac{1}{r^2}$;

(2) 设 u 为无穷远处为0的一阶连续可微函数, 求证

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{u^2}{r^2} dx dy dz \leq 4 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx dy dz.$$

5.(15分) 求 $\begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 2i \sin \theta \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}^n$ 。

6.(20分)

(1) 设 $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ 为正规变换, $f(\lambda)$ 为一多项式, 证明 $f(\mathcal{A})$ 的不变子空间的正交补空间仍为 $f(\mathcal{A})$ 的不变子空间。

(2) 设 $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ 为一 n 阶复方阵, 证明 $\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}$ 。