

# 清华大学数学系2019直博生摸底试题

2478483796@qq.com

2019 年 4 月 13 日

---

1. (10分) 证明不存在一个实可微函数  $f(x)$  使得  $f(f(x)) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$ .

2. (15分) 证明Legendre多项式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

的根都是实数并且包含于区间  $(-1, 1)$  中。

3. (10分) 计算积分

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left( \int_0^{x^2+y^2} \frac{e^x}{1-x^2} dx \right) dxdy$$

4. (10分) 设  $A$  和  $B$  是两个  $n \times n$  矩阵。证明  $AB$  和  $BA$  有相同的特征值。

5. (15分) 假设  $I_n$  是  $n \times n$  的单位矩阵,  $A$  是一个  $n \times n$  的矩阵。令  $f(x) = \det(I_n + xA)$ , 计算  $f'(0)$ 。

6. (15分) 设  $v_1, \dots, v_{n+1}$  是  $\mathbb{R}^n$  中  $n+1$  个向量, 并且两两之间的内积满足  $(v_i, v_j) < 0, \forall i \neq j$ 。证明  $v_1, \dots, v_{n+1}$  中一定存在  $n$  个向量, 它们组成  $\mathbb{R}^n$  的一组基。

7. (10分) 计算积分

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{e^z \sin z}{1 - \cos z} dz$$

8. (15分) 设  $f(z)$  是一个处处非零的全纯函数。证明存在一个全纯函数  $g(z)$  使得  $f(z) = e^{g(z)}$ 。