

复旦大学数学学院与上海数学中心
2019 年直博生招生考试试题 (回忆版)

2478483796@qq.com

2019 年 4 月 27 日

-
1. f 是 \mathbb{R} 上的有界函数且 $\{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ 为 \mathbb{R}^2 中的闭集, 问 f 是否连续, 并说明理由。
 2. \mathbb{Z} 为整环, 且 $A = (3, x^3 - x^2 + 2x - 1)$ 为 $\mathbb{Z}[x]$ 中的理想。
 - (a) A 是否为主理想? 并说明理由。
 - (b) $\mathbb{Z}[x]/A$ 是否为整环? 并说明理由。
 3. 求极限, 并给出证明过程:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=2020}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log^x(n)}$$

4. A, B, C 分别为 $n \times n, m \times m, n \times m$ 阶复矩阵, $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$. 求证: 若 A, B 没有公共的特征值, 则 M 相似于 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$. 并举一个去掉条件 A, B 没有公共的特征值后不成立的例子。
5. $f \in C^{(2)}[0, 1]$, $f(0) = 10$, $f(0.5) = 1$, $f(1) = 7$. 问 f'' 是否一定能取到某个值, 并说明理由。
6. G 为有限群, $|G|$ 无平方因子. $\phi: G \rightarrow G; g \mapsto g^3$ 是 G 的单同态. 证明 G 是循环群。
7. $f \in C[0, 1]$, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 x^n f(x) dx = f(1)$$

8. $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 是 \mathbb{R}^n 的一组基. 证明:

$$\det(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq \prod_{i=1}^n \|\alpha_i\|$$

且等号成立当且仅当 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 是一组正交基。