中国科学院大学2023年高校招生考试试题

科目名称：分析代数

考生须知：

1．本试卷满分为150分，全部考试时间总计180分钟。
2．所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一．（20分）（1）设

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & if\ \ x=y=0\\ xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & if\ \ x^2+y^2\neq 0\end{cases}$$

等式$\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}$是否成立？

（2）设$f(x,y)$在$0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 1$上定义为：

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & if\ \ x^2+y^2=0\\ \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} & if\ \ x^2+y^2\neq 0\end{cases}$$

分别求$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$和$\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx$，并说明从该计算结果得出什么结论？

二．（20分）计算下列$n+1$阶行列式：

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} & 1\\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n & x\\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+1} & x^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ s_n & s_{n+1} & s_{n+2} & \cdots & s_{2n-1} & x^n\end{vmatrix}$$

其中$s_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k$.

三．（20分）设函数$f(x)$在$[a,b]$上二阶可导，且$f''(x)>0$. 证明：

（1）$f(\frac{a+b}{2})\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$；

（2）若$f(x)\le 0,\ \ x\in[a,b]$，则有$f(x)\ge\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx,\ \ x\in[a,b]$.

四.（20 分）设$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$为欧氏空间$V$的一组标准正交基，$\sigma$是$V$上的一个线性变换，并且

$$\begin{cases} \sigma(\alpha_1)=\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3 \\ \sigma(\alpha_2)=-\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3 \\ \sigma(\alpha_3)=-\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3 \end{cases}$$

（1）证明：σ是一个对称变换；

（2）求V的另一组标准正交基，使得σ在这一组基下的矩阵为对角形矩阵.

五.（20 分）设连续函数列 $\{f_n(x)\}$在 $[a,b]$上一致收敛于$f(x)$，而$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续．证明：函数列 $\{g(f_n(x))\}$在$[a,b]$上一致收敛于$g(f(x))$.

六.（20 分）（1）设实函数$f(x)$在闭区间$[0,1]$上可微，并且满足条件：

$$f(0)=0, \quad |f'(x)|\le K|f(x)|,$$

其中K为常数．证明：$f(x)\equiv 0$；

（2）设整系数多项式

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$

已知$f(0)$和$f(1)$均为奇数，证明：$f(x)$没有整数根.

七.（15 分）计算下列四重积分

$$\int_{Q(x)\le 1} e^{Q(x)}dx_1dx_2dx_3dx_4,$$

其中$Q(x)=\sum_{i,j=1}^{4}a_{ij}x_ix_j$是实的正定二次型.

八.（15 分）设σ是域K上有限维线性空间V上的一个线性变换（又称线性算子)，证明：如果σ的极小多项式（又称最小多项式）$\mu_\sigma(t)$是不可约的（又称既约的）．证明：多项式环$K[\sigma]$是一个域.