2011、2012年北大数院直博试题

Penny

1. $f(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的凹函数，经过点 $(0,0),(1,0),\left(\frac{1}{3},2\right)$，并且 $f(x)$ 满足 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1$，试作出 $y=f(x)$ 的图像

2.(1) $f(x)\in C[0,1]$，$f(0)=f(1)$，证明：对 $\forall 0<\alpha<1,\frac{1}{\alpha}\in\mathrm{N},\exists\xi\in[0,1-\alpha]\ s.t. f(\xi+\alpha)=f(\xi)$

(2)证明：对 $\forall 0<\alpha<1,\frac{1}{\alpha}\notin\mathrm{N},\exists g(x)\in C[0,1],g(0)=g(1)\ s.t.\forall x\in[0,1-\alpha]$ 都有 $g(x+\alpha)-g(x)\neq 0$

3. $f(x)$ 在 x_0 的某个领域内连续，以下说法是否成立？

(1) $D_+f(x_0)$ 存在，则 $D_0f(x_0)$ 存在

(2) $D_0f(x_0)$ 存在，则 $D_-f(x_0)$ 存在

其中

$$
\begin{aligned}
D_+f(x_0)&=\lim_{\substack{x_1,x_2\to x_0\\(x_1-x_0)(x_2-x_0)>0}}\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\\
D_0f(x_0)&=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\\
D_-f(x_0)&=\lim_{\substack{x_1,x_2\to x_0\\(x_1-x_0)(x_2-x_0)<0}}\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}
\end{aligned}
$$

4. $a_n\geq 0,\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n^2$发散，证明：存在 $\{b_n\},\{c_n\}$ 满足 $b_n,c_n\geq 0,\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n^2<+\infty,\sum\limits_{n=1}^{+\infty}c_n^2<+\infty$，使得 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nb_n<+\infty,\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nc_n$ 发散

5. $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,g(x)=x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m,A_{m+n}$ 为 $m+n$ 阶方阵，前 m 行是 $f(x)$ 的系数，后 n 行是 $g(x)$ 的系数，即：

$$
\begin{pmatrix}
1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & & & \\
 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \\
 & & & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\
1 & b_1 & \cdots & b_m & & & & \\
 & 1 & b_1 & \cdots & b_m & & & \\
 & & 1 & b_1 & \cdots & b_m & & \\
 & & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\
 & & & & 1 & b_1 & \cdots & b_m
\end{pmatrix}
$$

证明：$f(x)$和$g(x)$的最大公因式的次数等于$m+n-rank(A_{m+n})$
6.设U是$ABX=0$的基础解系，其中A是$m\times n$矩阵，B是$n\times p$矩阵，X是$p\times 1$矩阵，W是R^n的子空间，$W=\{Y=BX|X\in U\}$，证明：W的维数是$rank(B)-rank(AB)$，对任意矩阵A,B,C，有$rank(AB)+rank(BC)\leq rank(B)+rank(ABC)$
7.A,B是n阶方阵，A,B可交换，B为幂零矩阵，证明：$A+B$和A有相同的特征多项式
8.$\Gamma: x^2+y^2-z^2=1$，平面$\Sigma(\theta)$过直线$\begin{cases} x=1 \\ z=0 \end{cases}$，与平面$z=0$夹角为$\theta$
(1)当θ从0到$\pi/2$连续变化时，$\Sigma(\theta)\cap\Gamma$表示的曲线是哪种类型？
(2)证明：若平面$Ax+By+Cz+D=0$与Γ交线为两条直线，则$A^2+B^2=C^2+D^2$
9.$f(x)$在$[a,+\infty)$上有定义，$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛，依次验证下列条件是否能够推出$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$
(1)$f(x)\in C^\infty$
(2)$\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(x)|^3\,\mathrm{d}x$收敛
(3)$\displaystyle\int_0^{+\infty} |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x$收敛
(4)$\displaystyle\int_0^{+\infty} |f''(x)|\,\mathrm{d}x$收敛
10.求下面几何体的体积：$-1\leq x_1,x_2,\cdots,x_n\leq 1,-1\leq x_1+x_2+\cdots+x_n\leq 1$
11.对任意n维列向量$\alpha,\beta,\alpha' A\beta=0$当且仅当$\beta' A\alpha=0$，证明：$A$对称或反对称
12.平面上直线AA',BB',CC'平行，AB和$A'B'$交于点D，BC和$B'C'$交于点E，CA和$C'A'$交于点F，证明：D,E,F共线

1.R^n中集合S是紧集等价于S是有界闭集
2.表述和证明多元函数带$Lagrange$余项的二阶$Taylor$展开式
3.$\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y$
4.假定$n\geq m>1$，问是否存在连续导可导的映射$F:\mathrm{R}^n\to\mathrm{R}^n/\{0\},p\to F(p)$，使得$F$的$Jacobi$矩阵的秩处处为$m$，而$\displaystyle\lim_{p\to\infty} F(p)=\infty$
5.设$f_n(x)$是实轴R上一列一致有界的连续函数，满足对任意闭区间$[a,b]\subset\mathrm{R}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=0$，证明：对于实轴中任意闭区间$[c,d]\subset\mathrm{R}$以及$[c,d]$上绝对可积函数$g(x)$恒有$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_c^d g(x)\cdot f_n(x)\,\mathrm{d}x=0$
6.设$F(x,y,z)$和$G(x,y,z)$都是区域$D\in\mathrm{R}^3$上连续可导函数，满足映射$(x,y,z)\to(F(x,y,z),G(x,y,z))$的$Jacobi$矩阵的秩在$D$上处处为1，而函数$F(x,y,z)$的梯度向量$grad(F)$在$D$上处处不为0. 假定$p_0=(x_0,y_0,z_0)\in D,F(x_0,y_0,z_0)=G(x_0,y_0,z_0)=0$.证明：存在$p_0$的领域$U\in D$，使得在$U$上函数方程组$F(x,y,z)=G(x,y,z)=0$与函数方程$F(x,y,z)=0$同解，它们在$D$上是否也同解呢？
7.设$f(x),g(x)$都是区间(a,b)上n阶可导函数，若在点$x_0\in(a,b)$上$f(x),g(x)$的0至k阶导数都相等，则称$f(x),g(x)$在x_0处k阶相切.设$f(x),g(x)$在(a,b)中

互不相同的点 $x_1,\cdots,x_t$ 分别 $k_1-1,\cdots,k_t-1$ 阶相切，而 $n=k_1+\cdots+k_t$，证明：对 $\forall x\in(a,b),\exists y\in(a,b)\ s.t. f(x)=g(x)+\dfrac{f^{(n)}(y)-g^{(n)}(y)}{n!}(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_t)^{k_t}$

8.设 V 是数域 P 上的有限维线性空间，且 V 上线性变换 A 的某个零化多项式 $g(x)$ 可分解为一次因式幂的乘积形式:

$$g(x)=\prod_{i=1}^{m}(x-\lambda_i)^{t_i}(i\neq j\Rightarrow\lambda_i\neq\lambda_j)$$

证明：若 $\exists h(x)\in P(x)\ s.t.(x-\lambda_i)^{t_i}|(h(x)-\lambda_i),\forall i=1,2,\cdots,m$，则

(1) $h(\mathrm{A})$ 可对角化

(2) $h(\mathrm{A})-\mathrm{A}$ 是幂零变换

9.设 A,B 为 n 阶方阵，$D=AB-BA,DA=AD$，证明：$D^n=0$

10.设 V 为数域 P 上的 n 维线性空间，$W_1,\cdots,W_k$ 为 V 的真子空间，证明:

(1) V 中存在元素 α 不属于任意一个 $W_j,j=1,2,\cdots,k$

(2)存在 V 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 满足 $\alpha_i\notin\cup_{j=1}^{k}W_j,\forall i=1,\cdots,n$

(3) U 为 V 的真子空间，令 $C_U\triangleq\{W|W\text{为}V\text{的子空间且}W\oplus U=V\}$，则 C_U 中含有无穷多个元素

11.设 V 为 n 维欧式空间，$\mathrm{A}\in L(v)$ 是正交变换

(1)证明：V 可分解为一些一维或二维两两正交的 $\mathrm{A}-$子空间的直和

(2)设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 与 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 为 V 的两组标准正交基，且 $(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\eta_1,\cdots,\eta_n)A$，证明:

$$A=\begin{pmatrix}\cos(\varepsilon_1,\eta_1)&\cos(\varepsilon_2,\eta_1)&\cdots&\cos(\varepsilon_n,\eta_1)\\\cos(\varepsilon_1,\eta_2)&\cos(\varepsilon_2,\eta_2)&\cdots&\cos(\varepsilon_n,\eta_2)\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\cos(\varepsilon_1,\eta_n)&\cos(\varepsilon_2,\eta_n)&\cdots&\cos(\varepsilon_n,\eta_n)\end{pmatrix}$$

(3)确定二维欧式空间上第一类正交矩阵及第二类正交矩阵的一般形式，并给出 n 维欧式空间上正交变换的相似标准型（即某种简化的表示形式）

12.求与三直线

$$l_1:\begin{cases}y-x=0\\z-1=0\end{cases}\quad l_2:\begin{cases}y+x=0\\z+1=0\end{cases}\quad l_3:\begin{cases}y=0\\z=0\end{cases}$$

都相交的直线所产生的曲面方程

13.设给出的仿射变换为

$$\begin{cases}x'=x+y+3z\\y'=x+5y+z\\z'=3x+y+z\end{cases}$$

求3个互相正交的向量，使得在此变换下仍变为3个互相正交的向量.并将所给仿射变换表示为一个正交变换和分别对3个互相正交的方向施行的伸缩变换的乘积

14.证明：分别属于双曲抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2z$ 上两族互相垂直的直母线交点的轨迹是原双曲抛物面与平面 $2z=b^2-a^2$ 的交线，并且是一条双曲线

2012北大数院直博

$\mathscr{V}\mathscr{A}\mathscr{N}\mathscr{I}\mathscr{L}\mathscr{L}\mathscr{A}$

1 分析

1. $\mathbb{R}^n$中集合S是紧集等价于S是有界闭集.

2. 表述和证明多元函数带Lagrange余项的二阶Taylor展式.

3. $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} dy$.

4. 假定$n \geq m > 1$,问是否存在连续可导的映射$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n - \{0\}, p \to F(p)$, 使得$F$的Jacobi矩阵的秩处处为$m$,而$\lim\limits_{p\to\infty} F(p) = \infty$,why?

5. 设$f_n(x)$是实轴$\mathbb{R}$上一列一致有界的连续函数,满足$\forall[a,b] \in \mathbb{R}$,有$\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = 0$.证明:对$\forall[c,d] \in \mathbb{R}$以及$[c,d]$ 上绝对可积的函数$g(x)$,恒有$\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b g(x)f_n(x)dx = 0$.

6. 设$F(x,y,z)$和$G(x,y,z)$都是区域$D \in \mathbb{R}^3$上连续可导函数,满足映射$(x,y,z) \to (F(x,y,z), G(x,y,z))$的Jacobi矩阵的秩在$D$上处处为1,而函数$F(x,y,z)$的梯度向量$grad(F)$在$D$上处处不为0.假定在点$p_0 = (x_0,y_0,z_0) \in D$,$F(x_0,y_0,z_0) = G(x_0,y_0,z_0) = 0$.证明:存在点$p_0$的邻域$U \in D$,使得在$U$上函数方程组$F(x,y,z) = G(x,y,z) = 0$与函数方程$F(x,y,z) = 0$同解.问在$D$上这两组方程是否也同解,why?

7. 设$f(x), g(x)$都是区间(a,b)上n阶可导的函数,若在点$x_0 \in (a,b)$上$f(x), g(x)$的0至k阶导数都相等,则称$f(x), g(x)$在x_0处k阶相切.现设$f(x), g(x)$在(a,b)中互不相同的点$x_1, \ldots, x_t$分别$k_1 - 1, \ldots, k_t - 1$阶相切,而$n = k_1 + \cdots + k_t$.证明:对$\forall x \in (a,b), \exists y \in (a,b)$使得

$$f(x) = g(x) + \frac{f^{(n)} - g^{(n)}}{n!}(x-x_1)^{k_1} \ldots (x-x_t)^{k_t}.$$

2 代数

1. 设V是数域P上的有限维线性空间,且V上线性变换$\mathcal{A}$的某个化零多项式$g(x)$可分解为一次因式幂的乘积的形式:

$$g(x) = \prod_{i=1}^{m} (x - \lambda_i)^{t_i} (i \neq j \text{则} \lambda_i \neq \lambda_j)$$

证明:若存在$h(x) \in P(x)$使得$(x-\lambda_i)^{t_i} | (h(x) - \lambda_i), \forall i = 1, \ldots, m$,则(i)$h(\mathcal{A})$可对角化; (ii)$h(\mathcal{A}) - \mathcal{A}$是幂零变换.

2. 设A,B为n阶方阵,$D=AB-BA$且$DA=AD$,证明$D^n=0$.

3. 设V为数域P上的n维线性空间,$W_1,\dots,W_k$为V的真子空间,证明:

   (a) 存在V中元素α不属于任何一个$W_j, j=1,\dots,k$.

   (b) 存在V的一组基$\alpha_1,\dots,\alpha_n$满足$\alpha_i\notin\bigcup_{j=1}^k W_j, \forall i=1,\dots,n$.

   (c) U为V的真子空间,令$C_U\triangleq\{W|W$为V的子空间且$W\oplus U=V\}$,则C_U中含有无穷多个元素.

4. 设V为n维欧氏空间,$\mathcal{A}\in L(V)$是正交变换.

   (a) 证明:V可分解为一些一维或二维的两两正交的$\mathcal{A}-$子空间的直和.

   (b) 设$\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n;\eta_1,\dots,\eta_n$为$V$的两组标准正交基,且$(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)=(\eta_1,\dots,\eta_n)A$.证明:

$$A=\begin{pmatrix}\cos\langle\varepsilon_1,\eta_1\rangle & \cos\langle\varepsilon_2,\eta_1\rangle & \dots & \cos\langle\varepsilon_n,\eta_1\rangle\\ \cos\langle\varepsilon_1,\eta_2\rangle & \cos\langle\varepsilon_2,\eta_2\rangle & \dots & \cos\langle\varepsilon_n,\eta_2\rangle\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \cos\langle\varepsilon_1,\eta_n\rangle & \cos\langle\varepsilon_2,\eta_n\rangle & \dots & \cos\langle\varepsilon_n,\eta_n\rangle\end{pmatrix}$$

   (c) 确定二维欧氏空间上第一类正交矩阵及第二类正交矩阵的一般形式,并给出n维欧氏空间上正交变换的相似标准型(即某种简化的表示形式).

3 几何

1. 求与三直线

$$l_1:\begin{cases}y-x=0\\ z-1=0\end{cases},l_2:\begin{cases}y+x=0\\ z+1=0\end{cases},l_3:\begin{cases}y=0\\ z=0\end{cases}$$

   都相交的直线所产生的曲面的方程.

2. 设给出的仿射变换为

$$\begin{cases}x'=x+y+3z\\ y'=x+5y+z\\ z'=3x+y+z\end{cases}$$

   求3个互相正交的向量,使得在此变换下仍变为3个互相正交的向量;并将所给的仿射变换表示为一个正交变换和分别对3个互相正交的方向施行的伸缩变换的乘积.

3. 证明:分别属于双曲抛物面

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z \tag{1}$$

   上的两族互相垂直的直母线交点的轨迹是曲面(1)与平面$2z=b^2-a^2$的交线为一条双曲线.

北京大学 2012 年直博生入学考试试题

考试科目：数学分析（满分 150 分）

1.（25 分）R^n 中的集合 S 称为紧集，如果对于 S 的开覆盖 $\{U_\alpha\}$，都存在 $\{U_\alpha\}$ 中的有限个元素也覆盖 S .证明：$S \subset R^n$ 为紧集的充分必要条件是 S 是 R^n 中的有界闭集.

2.（25 分）表述和证明多元函数带 $Lagrange$（拉格朗日）余项的二阶 $Taylor$（泰勒）展开公式（余项为二阶）.

3.（20 分）计算积分 $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} dy$.

4.（20 分）假定 $n \geq m > 1$，问是否存在连续可导的映射 $F: R^n \to R^m - \{0\}$，$p \to F(\mathrm{p})$，使得 F 的 $Jacobi$（雅可比）矩阵的秩处处为 m，而 $\lim\limits_{p\to\infty} F(\mathrm{p}) = \infty$，为什么？这里 0 表示 R^m 的原点.

5.（20 分）设 $\{f_n(x)\}$ 是实轴 R 上一列一致有界的连续函数，满足对于任意闭区间 $[a,b] \subset R$，成立 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(\mathrm{x})\mathrm{dx} = 0$，证明：对于实轴中的任意闭区间 $[c,d]$，以及 $[c,d]$ 上绝对可积的函数 $g(\mathrm{x})$，恒有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b g(\mathrm{x}) f_n(\mathrm{x})\mathrm{dx} = 0$.

6.（20 分）设 F（x,y,z）和 G（x,y,z）都是区域 $D \subset R^3$ 上连续可导的函数，满足映射（x,y,z）$\to (\mathrm{F(x, y, z), G(x, y, z)})$ 的 $Jacobi$（雅可比）矩阵的秩在 D 上处处为 1，而函数 F（x,y,z）的梯度向量 $grad(\mathrm{F})$ 在 D 上处处不为零，假定在点 $p_0 = (\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0, \mathrm{z}_0) \in \mathrm{D}$，$F$（$x,y,z$）$= G$（$x,y,z$）$= 0$.证明：存在点 p_0 的领域 $U \subset D$，使得在 U 上，函数方程组 $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(\mathrm{x, y, z}) = 0 \end{cases}$ 与函数方程 F（x,y,z）$= 0$ 是同解方程.问在 D 上这两组方程是否也是同解方程，为什么?

7.（20 分）设 $f(\mathrm{x})$ 和 $\mathrm{g(x)}$ 都是区间 (a,b) 上 n 阶可导的函数，如果在点 $x_0 \in (a,b)$，成立

$f(x_0)=g(x_0)$，$f'(x_0)=g'(x_0)$，$\cdots$，$f^k(x_0)=g^k(x_0)$，则称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 处 k 阶相切.现设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在（a,b）中互不相同的点 $x_1,\cdots,x_t$ 处分别 $k_1-1,\cdots,k_t-1$ 阶相切，而 $n=k_1+\cdots+k_t$.证明：对于任意 $x\in(a,b)$，存在 $y\in(a,b)$，使得

$$f(x)=g(x)+\frac{f^{(n)}(x)-g^{(n)}(x)}{n!}(x-x_1)^{k_1}\cdots(x-x_t)^{k_t}$$

考试科目：高等代数（满分 100 分）

1.（25 分）设 V 是数域 P 上的有限维线性空间，且 V 上线性变换 A 的某个化零多项式 $g(x)$ 可分解为一次因式幂的乘积的形式：

$$g(x)=\prod_{i=1}^{m}(x-\lambda_i)^{t_i}，（当 i\neq j，有 \lambda_i\neq\lambda_j），$$

证明：若存在 $h(x)\in P[x]$，使得 $(x-\lambda_i)^{t_i}\mid(h(x)-\lambda_i),\forall i=1,2,\cdots,m,$ 则（i）$h(A)$ 可对角化；（ⅱ）$h(A)-A$ 是幂等变换.

2.（25 分）设 A,B 为 n 阶方阵，$D=AB-BA$ 且 D 与 A 可交换，证明 $D^n=0$.

3.（25 分）设 V 为数域 P 上 n 维线性空间，$W_1,\cdots,W_k$ 为 V 的真子空间（即非零、非 V）.证明：

（1）存在 V 中的元素 α 不属于任何一个 $W_j, j=1,\cdots k$.

（2）存在 V 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 满足 $\alpha_i\notin\cup_{j=1}^{k}W_j$，对所有 $i=1,2,\cdots.n$.

（3）U 中 V 的真子空间，令 $C_U\overset{\Delta}{=}\{W\mid W为V的子空间且W\oplus U=V\}$，则 C_U 中含有无穷多个元素.

4.（25 分）设 V 为 n 维欧氏空间，$A\in L$（V）是正交变换.

(1)证明：V 可以分解为一些 1 维或 2 维得 两两正交的 A-子空间的直和（即 $V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$，其中 V_i 为 A 的维数为 1 或 2 的不变子空间，且若 $i\neq j$ 则必有 V_i,V_j 彼此正交）.

(2)设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n;\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_n$ 为 V 的两组标准正交基，且

（$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$）=（$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$）A.证明

$$A=\begin{bmatrix}\cos\langle\varepsilon_1,\eta_1\rangle & \cos\langle\varepsilon_2,\eta_1\rangle & \cdots & \cos\langle\varepsilon_n,\eta_1\rangle\\ \cos\langle\varepsilon_1,\eta_2\rangle & \cos\langle\varepsilon_2,\eta_2\rangle & \cdots & \cos\langle\varepsilon_n,\eta_2\rangle\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \cos\langle\varepsilon_1,\eta_n\rangle & \cos\langle\varepsilon_2,\eta_n\rangle & \cdots & \cos\langle\varepsilon_n,\eta_n\rangle\end{bmatrix},$$

这里$\langle\alpha，\beta\rangle$表示向量$\alpha$，$\beta$在欧氏空间中的夹角.

(3)确定二维欧氏空间上的第一类正交矩阵及第二类正交矩阵的一般形式，并由此给出 n 维欧氏空间上正交变换的相似标准型（即某种简化的表示形式）

考试科目：几何学（满分 50 分）

1.（15 分）求与三直线

$$l_1:\begin{cases}\mathrm{y}-\mathrm{x}=0\\ \mathrm{z}-1=0\end{cases},l_2:\begin{cases}y+x=0\\ z+1=0\end{cases},l_3:\begin{cases}y=0\\ \mathrm{z}=0\end{cases}$$

都相交的直线所产生的曲面的方程.

2.（20 分）设给出的仿射变换为

$$\begin{cases}x'=x+y+3z\\ y'=x+5y+z\\ z'=3x+y+z\end{cases}$$

求 3 个互相正交的向量，使得在此变换下，它们仍变为 3 个互相正交的向量；并将所给的仿射变换表示成一个正交变换和分别对 3 个互相正交的方向施行的伸缩变换的乘积.

3.（15 分）证明：分别属于双曲抛物面

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z \qquad (1)$$

上的两族互相垂直的直母线交点的轨迹是曲面（1）与平面

$$2z=b^2-a^2$$

的交线，为一条双曲线.

2013 北大数院直博

（回忆版，仅供参考）

1. (20 分) f 是$[0,2]$上的上凸可导函数，过（0, 0），(1, 1), (2, 0)点，问 f 与 x 轴围成面积的下确界是多少？该下确界能达到吗？

2.（20 分）由方程$y+\sin y=x.$

（1）证明 f 在 x=0 附近可以唯一确定$y=f(x)$

（2）将y表示为$y=a_0+a_1x+a_2x^2+o(x^2)$

3.（20 分）构造函数定义在$[-1,1]$上的函数 f，满足 f 只在其中一点可导，在其他各点都不连续。

4.(20分）讨论级数$\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^{\sqrt{n}}}$的收敛性。

5.(35分）函数$f_n(x)$定义$[0,2]$上，满足

$$f=\begin{cases}\sqrt{\frac{1}{n^2}-(x-\frac{1}{n})^2}, x\in[0,\frac{2}{n}) \\ \sqrt{\frac{1}{n^2}-(x-\frac{3}{n})^2}, x\in[\frac{2}{n},\frac{4}{n}) \\ \cdots \\ \sqrt{\frac{1}{n^2}-(x-\frac{2k-1}{n})^2}, x\in[\frac{2k-2}{n},\frac{2k}{n}) \\ \cdots \\ \sqrt{\frac{1}{n^2}-(x-\frac{2n-1}{n})^2}, x\in[\frac{2n-2}{n},2]\end{cases}$$

(1)求$f_n(x)$的弧长l_n。

(2）求证f_n一致收敛于f.

(3)求f的弧长l.

(4)l_n收敛于l吗？解释原因。

6.（35 分）定义函数 f:[0,1]$\to$[0,1]如下：

$$f(x)=0.0a_10a_20a_3...., \text{其中} x=0.a_1a_2a_3....$$

其中x表示成无限小数（如$x=0.1$,则写成$0.0\dot{9}$）

请自由探索 f 的性质。

7.(25分） (1) x^6+x^3+1在有理数域上是否可约，给出详细理由。

（2）如果α是$x^6+x^3+1=0$的根，求多项式$f(x)$,满足$\deg(f)<6$,且

$\alpha^8+\alpha^5=f(\alpha)$

(3).(2)中所求$f(x)$唯一吗？为什么？

（4）求多项式$g(x)$,满足$g(\alpha)=(\alpha^8+\alpha^5)^{-1}$.

其中 g（x）是有理多项式。

8（25 分）

8.(1) A, B是半正定矩阵，证明：

$|A+B|\geq|A|, |A+B|\geq|B|$

(2) A是正定矩阵，D是A的由第$i_1,i_2,\ldots i_s$行和第$i_1,i_2,\ldots i_s$列子主子式，M是D的代数余子式，证明：

$|A|\leq DM$

9.(25分)设$e^A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}$,证明$e^{|A|}=e^{trA}$

10（25 分）n 维空间至多有多少个两两成钝角的向量？

11（30 分）已知双叶双曲面 $x^2+y^2-z^2=-1$ 的一支 z >0，M 是与该双曲线相交于封闭曲线的任意平面，M_0 是与 M 平行的一族平面，证明 M_0 与 $x^2+y^2-z^2=-1$（z >0）相交的都是椭圆，且椭圆的中心在 xy 平面上的投影都在 x 轴上。（这题题目记不清楚了，可能不对）

12（20 分）

已知AA', BB', CC'是三条平行的线段，AB与$A'B'$相交于D，AC与$A'C'$相交于E，BC与B′C′相交于F，证明D, E, F三点共线。

北京大学数学科学学院 2015 年直博生摸底考试试题

2609480070@qq.com

2015 年 4 月 11 日

1. (90 分) 设 $y = f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 C^∞ 函数, 对任意整数 $k \geq 0$, 记 $M_k = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|$. 设 m 和 n 为两整数, $0 \leq m < n$, 试分别就下列情况, 给出你的结论和证明.

   (1) 如果 M_m 和 M_n 均有界, 那么对哪些整数 k, M_k 有界? 对哪些整数 k, M_k 可以无界?

   (2) 如果 $\lim_{x\to+\infty} |f^{(m)}(x)|$ 存在有限极限, 而 M_n 有界, 则对哪些自然数 k, 极限 $\lim_{x\to+\infty} |f^{(k)}(x)|$ 也存在极限?

   (3) 如果 $\lim_{x\to+\infty} |f^{(m)}(x)|$ 和 $\lim_{x\to+\infty} |f^{(n)}(x)|$ 都存在有限极限, 则对哪些自然数 k, 极限 $\lim_{x\to+\infty} |f^{(k)}(x)|$ 也存在极限?

2. (30 分) 判断级数 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^{[\sqrt{n}]}}$ 的敛散性, 其中 $[x]$ 表示 x 的取整.

3. (30 分) 证明
$$\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{(xy)^{xy}}dxdy = \int_0^1 \frac{1}{x^x}dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}.$$

4. (25 分) 设 A 是一个 n 阶方阵, 且 $n \geq 3.A^*$ 是 A 的伴随矩阵 (即 A 的代数余子式所组成的矩阵). 试证明, 若 $(A^*)^* \neq O$ (零矩阵), 则 A 可逆, 且此时 $(A^*)^*$ 是 A 的一个纯量倍.

5. (25 分) 设 A 是一个 3 阶实方阵, 考虑 A 所定义的线性变换 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \alpha \to A\alpha$ (α 是列向量). 试证明: 若 $AA' = A'A$ (其中 A' 是指 A 的转置矩阵), 则上述线性变换必有一个 2 维不变子空间.

6. (25 分) 设 A 和 B 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的两个 n 阶方阵, 并且 A 有 n 个特征值 $1, 2, \cdots, n$, B 也有 n 个特征值 $\sqrt{p_1}, \cdots, \sqrt{p_n}$, 其中 $p_1, \cdots, p_n$ 是前 n 个素数 (比如 $p_1 = 2, p_2 = 3$ 等). 试证明: $M_n(\mathbb{C})$ 上的线性变换 $X \to AXB$ 是可以对角化的.

7. (25 分) 设
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
试找出两个没有常数项的多项式 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$, 使得下列三个条件同时成立:
1). $f(A)$ 可对角化. 2). $\varphi(A)$ 是幂零矩阵. 3). $A = f(A) + \varphi(A)$.

8. 几何部分共 5 道小题, 每小题 10 分。

   (1) 三维欧氏空间中取定直角坐标系。有一直线 l 过点 $(1,0,0)$ 且方向向量为 $(0,1,1)$。l 绕 z 轴旋转生成一个二次曲面 S。试写出此二次曲面的代数方程 (形如 $f(x,y,z) = 0$).

   (2) 设有一固定平面 Σ, 具有以下性质: 上述直线 l 在绕 z 轴旋转过程中总是与 Σ 相交。考虑与 Σ 平行的平面族 $\Sigma_t, t \in \mathbb{R}, \Sigma_0 = \Sigma$。试证明 $\Sigma_t \cap S$ 总是椭圆.

   (3) 试证明 t 值变化过程中, 上述各椭圆的中心总落在一条过原点的空间定直线 L 上.

   (4) 固定 L 上任一点 p, 试证明: 由 p 向曲面 S 作的各条切线的切点都落在一条椭圆 Γ_p 上, 且椭圆 Γ_p 所在平面是 Σ_t 之一.

(5) S 把它在空间的补集分成内外两个连通分支, 其中外部区域不包含原点。取上一小题所述椭圆 Γ 所在平面落在 S 外部的一点 $\hat{p}$。试证明: 从 $\hat{p}$ 向 S 所作的各条切线之切点落在一条双曲线 $\hat{\Gamma}$ 上, 且 $\hat{\Gamma}$ 所在平面过 p 点.

注：这份试卷是考完后的第一天根据好友同学提供的资料进行整理的，感谢他们的辛劳，同时也祝贺他们在昨天下午清华的初试中获得成功。

北京大学数学科学学院

2016 年直博生摸底考试试题

1. 证明题 (30 分, 每小题 15 分)

   (1) 若 $f(x)$ 在实轴上可导且 $f'(x) > f(x), \forall x \in (-\infty, \infty)$, 则 $f(x)$ 至多有一个零点.
   (2) 若 $f(x)$ 处处二阶可导且 $f''(x) > f(x), \forall x \in (-\infty, \infty)$, 则 $f(x)$ 至多有两个零点.

2. (30 分) 假设 $\phi(x,y,z)$ 是原点 O 某个邻域上 C^∞ 函数, 且 $\phi, \phi_x, \phi_y, \phi_{xz}, \phi_{yz}$ 在 O 点为 0, ϕ_{xx}, ϕ_{yy} 在 O 点为 1, $\phi_{xy}(O) = \frac{1}{2}, \phi_z(O) = -\frac{1}{2}$. $\phi(x,y,z) = 0$ 的隐函数记为 $z = z(x,y)$(已知 $z(0,0) = 0$). 请讨论 $z = z(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点附近的极值问题.

3. (40 分) 设 $z = z(x,y)$ 是题 2 中的隐函数, Ω_δ 是 $(0,0)$ 点的 δ 邻域, 当 δ 充分小时, 证明如下极限存在并求之
$$\lim_{t \to +\infty} t \iint_{\Omega_\delta} e^{-tz(x,y)}\, dxdy.$$

4. (20 分) 设 A 是一个 2 阶复方阵. 考虑 2 阶复方阵的线性空间 $M_2(\mathbb{C})$ 上的线性变换
$$\phi_A : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C}); X \mapsto AX - XA.$$
试确定 $\dim(\ker(\phi_A))$ 的所有可能的取值.

5. (30 分) 对于有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的两个 n 阶方阵
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 和 \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
试证明两者是相似的, 并求出一个矩阵 T, 使得 $A = T^{-1}BT$.

6. (20 分) $\mathbb{R}[x]$ 中有多项式 $f(x) = x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$. 试用系数 a_1, a_2, a_3, a_4 的关系式, 给出 $f(x)$ 能表达成某个不可约二次多项式 $g(x)$ 之平方的充分必要条件.

7. (30 分) 欧氏平面上保定向的等距变换群的一个子群 G, 其中每一个非恒同的变换 g 都没有不动点, 而且每一个平面上的点 p 在群 G 作用下得到的轨道 (即点集 $\{g(p) | g \in G\}$) 若平面上都没有聚点. 试证明 G 可以由一个或两个平移变换生成, 即 $G = \{n\alpha | n \in \mathbb{Z}\}$ 或 $G = \{n\alpha + m\beta | n, m \in \mathbb{Z}\}$, 其中 $\mathbb{Z}$ 为整数集, n, m 为任意整数, α, β 为线性无关的平移向量 (也表示其对应的平移变换). $n\alpha + m\beta$ 即对应线性组合所表示的平移.