

中国科学院数学与系统科学研究院 分析与代数测试试题*

编辑: 胡不归

2019 年 4 月 17 日

-
1. (20 分) 证明或反证: 若存在一个 n 阶实矩阵 A 满足 $A^2 + 2A + 5I = 0$ 的充要条件是 n 为偶数。

2. (20 分) f 为定义在 $[0, 1]$ 上的实值连续函数, 求证:

$$\int_0^1 \int_0^1 |f(x) + f(y)| dx dy \geq \int_0^1 |f(x)| dx.$$

3. (10 分) 设 A 和 B 为 2×2 矩阵, 其元为整数、且 $A, A+B, A+2B, A+3B, A+4B$ 为可逆矩阵, 其逆矩阵的元也均为整数。证明 $A+5B$ 为可逆矩阵, 其逆矩阵的元也均为整数。

4. (20 分) 设 $f(x, y, z) = e^{-\pi(x^2+y^2+z^2)}$, 求 f 的 Fourier 变换, 其定义为:

$$\hat{f}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) e^{-2\pi i(x\xi_1 + y\xi_2 + z\xi_3)} dx dy dz$$

5. (20 分) 对任何方阵 A 可定义 $\sin A$ 如下:

$$\sin A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}$$

证明或反证: 存在一个 2 阶方阵 A 使得 $\sin A = \begin{pmatrix} 1 & 2019 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. (10 分) 设 $x_0 = 1$, 当 $n \geq 0, x_{n+1} = 3x_n + [\sqrt{5}x_n]$, 其中 $[a]$ 表示不大于 a 的最大整数。求 x_n 的通项表达式。

*编者注: 即 (山东地区) 直博生招生考试试题