1 浙大考题

中国科学院大学

2016 年高校招生考试：数学 (甲卷)

满分 100 分, 考试时间 120 分钟

1. (15 分) 求
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx \quad (b>a).$$

2. (15 分) $\sum_{i=1}^{n} a_n$ 发散, a_n 为正项级数. 求证:

   (1) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 发散;
   (2) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{S_n}$ 发散;

3. (15 分) 求
$$\int\limits_{x^2+y^2+z^2=R^2} \frac{dS}{\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}}.$$

4. (15 分) 设 $A:V\to V$,
$$H_{A,\alpha}(t)=\{\varphi(t)\,|\,\varphi(x)\in Q[t],\varphi(x)\cdot\alpha=0\}$$
中次数最小的一个. 证: $\exists\alpha\in V$, 使 $H_{A,\alpha}(t)$ 为 A 的极小多项式.

1.1 某同学面试问题

1. 求
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^6)}dx.$$

2. 举一个无穷次可导却不解析的函数.

2 湖大考题

中国科学院大学

2016 年高校招生考试：数学 (乙卷)

满分 100 分, 考试时间 120 分钟

1. (15 分)

   (1) 求极限 $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}+x\right)$;
   (2) 设 $f(x)$ 满足 $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{3}{x}$, 求 $f(x)$ 的导数;
   (3) 求 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$.

2. (15 分) 设 $r\geq 0$, 求积分
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left(1-2r\cos x+r^2\right)dx.$$

3. (10 分) 设 $0<\mu<1, a>0$, M_n 是 $e^{-(x+ax^{\mu})x^n}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最大值. 求

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{M_n}{n!}\right)^{n^{-\mu}}.$$

4. (10 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上二次连续可微, 并且 $f(a)=f(b)=0$. 证明不等式:

$$M^2\leq\frac{(b-a)^3}{2}\int_a^b\left|f''(x)\right|^2dx,$$

其中 $M=\sup_{a\leq x\leq b}|f(x)|$.

5. (10 分) 设 $A=\begin{pmatrix}4&0\\0&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}^{-1}$, 求以下矩阵的特征根:

$$A+B, A\otimes\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\otimes B, A\otimes B.$$

注: 对 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}$, 张量积定义为 $A\otimes B=\begin{pmatrix}a_{11}B&a_{12}B\\a_{21}B&a_{22}B\end{pmatrix}$.

6. (10 分) 证明以下矩阵组成的集合是实数域上的线性空间, 求其维数及一组基, 并证明行列式 $\det X$ 是二次型, 写出其对应的双线性型.

$$M=\left\{X=\begin{pmatrix}x_0+x_3&x_1-ix_2\\x_1+ix_2&x_0-x_3\end{pmatrix}:x_0,x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}\right\}.$$

7. (20 分) 设可逆矩阵 $A\in M_n(\mathbb{C})$ 的特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$. 求线性变换

$$M_n(\mathbb{C})\to M_n(\mathbb{C}),\quad X\mapsto AXA'$$

的全部特征值.

注：$M_n(\mathbb{C})$ 表示定义在复数域 $\mathbb{C}$ 上的 n 阶方阵.

3 西安交大考题

中国科学院大学

2016 年高校招生考试：数学 (乙卷)

满分 100 分, 考试时间 120 分钟

1. (15 分)

   (1) 求极限 $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}+x\right)$;

   (2) 设 $f(x)$ 满足 $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{3}{x}$, 求 $f(x)$ 的导数;

   (3) 设 $f:[0,1]\to R$ 连续, 求 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 f\left(\frac{x_1\cdots x_n}{n}\right)dx_1dx_2\cdots dx_n$.

2. (15 分) 设 $r\geq 0$, 求积分

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left(1-2r\cos x+r^2\right)dx.$$

3. (20 分) 设 $0<\mu<1, a>0$, M_n 是 $e^{-(x+ax^{\mu})}x^n$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最大值. 求

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{M_n}{n!}\right)^{n^{-\mu}}.$$

4. (10 分) 设 m 为正整数, 方程 $a\equiv b \mod m$ 定义为 m 能整除 $a-b$. 当 m 取何值时, 以下线性方程组有整数解?

$$\begin{cases} x+2y-z\equiv 1\,(\operatorname{mod} m), \\ 2x-3y+z\equiv 4\,(\operatorname{mod} m), \\ 4x+y-z\equiv 9\,(\operatorname{mod} m). \end{cases}$$

5. (10 分) 设 $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1}$, 求以下矩阵的特征根:

$$A+B, A\otimes\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\otimes B, A\otimes B.$$

注: 对 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, 张量积定义为 $A\otimes B=\begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{pmatrix}$.

6. (10 分) 证明以下矩阵组成的集合是实数域上的线性空间, 求其维数及一组基, 并证明行列式 $\det X$ 是二次型, 写出其对应的双线性型.

$$M=\left\{X=\begin{pmatrix} x_0+x_3 & x_1-ix_2 \\ x_1+ix_2 & x_0-x_3 \end{pmatrix}: x_0,x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}\right\}.$$

7. (20 分) 设 Ω 为含有 n 个元素的有限集合, 2^{Ω} 为 Ω 的幂集 (即 Ω 的所有子集构成的集合). 对任意 $A,B\in 2^{\Omega}$, 定义数乘 $0A=\emptyset$(空集), $1A=A$, 加法 $A+B=(A\cup B)\backslash(A\cap B)$(对称差).

   (1) 证明 2^{Ω} 关于以上数乘及加法为域 $Z_2=\{0,1\}$ (注意在此域上 $1+1=0$) 上的线性空间, 求其维数.
   (2) 求 2^{Ω} 的一维子空间个数.
   (3) 取定非空 $X\in 2^{\Omega}$, 定义线性算子 $T_X: 2^{\Omega}\mapsto 2^{\Omega}$ 为 $T_XA=A\cap X, A\in 2^{\Omega}$. 求 T_X 的极小多项式, 特征多项式, 特征值和相应的特征子空间.

4 吉大考题

中国科学院大学

2016 年高校招生考试：数学 (丙卷)

满分 100 分, 考试时间 120 分钟

1. (15 分) 计算

   (1) 求极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{1^{\alpha-1}+\cdots+n^{\alpha-1}}{n^{\alpha}}$ $\quad \alpha>0$.
   (2) 已知 $f'(a)$ 存在,$f(a)\neq 0$, 求 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right)^n$.
   (3) 设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 连续, 求

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 f\left((x_1\cdots x_n)^{1/n}\right)dx_1dx_2\cdots dx_n.$$

2. (15 分) 设 $\phi(x)>0, f(x)>0$ 都是 $[a,b]$ 上连续函数, 求

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b \phi(x)\,(f(x))^n dx}.$$

3. (20 分) 证明 $\binom{n}{1}-\frac{1}{2}\binom{n}{2}+\frac{1}{3}\binom{n}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\binom{n}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$.

4. (10 分) 设 x,y 都是复数域上 n 阶方阵, 定义 $x^{(0)}=x, x^{(1)}=[x,y]\equiv xy-yx, x^{(j)}=[x^{(j-1)},y]$. 证明

$$\sum_{i=0}^{k} y^i x y^{k-i}=\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j+1}y^{k-j}x^{(j)}.$$

5. (10 分) 给出平面中以下三条不同直线相交于一点的条件

$$ax+by+c=0,\quad bx+cy+a=0,\quad cx+ay+b=0.$$

求以下矩阵能对角化的条件:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ a & b & c \end{pmatrix}.$$

6. (10 分) 给出 $M_2(\mathbb{C})$ 中幂零矩阵所张成的线性空间的一组基. 描述 $M_n(\mathbb{C})$ 中幂零矩阵所张成的线性空间.

7. (20 分) 证明 $\cos x$ 是超越函数.

注：函数 $f(x)$ 称为超越函数, 如果不存在有限多个不全为零的 $a_{pq}, p,q=0,1,2,\cdots$, 使得

$$\sum_{p,q} a_{pq}x^p(f(x))^q=0,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

5 大连理工考题

中国科学院大学

2016 年高校招生考试：数学 (丁卷)

满分 100 分, 考试时间 120 分钟

(1) (15 分) 计算

(a) 求 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$;

(b) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$;

(c) 求不定积分 $\int\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$.

(2) (15 分) 设 $\phi(x)>0, f(x)>0$ 都是 $[a,b]$ 上连续函数, 求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_a^b\phi(x)\,(f(x))^{n+1}dx}{\int_a^b\phi(x)\,(f(x))^n dx}.$$

(3) (20 分) 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上可微函数, $f(a)=f(b)=0$, 但 $f(x)$ 不恒等于零, 则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$|f'(\xi)|>\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\,dx.$$

(4) (10 分) 设 m 为正整数, 方程 $a \equiv b \mod m$ 定义为 m 能整除 $a-b$. 当 m 取何值时, 以下线性方程组有整数解?

$$\begin{cases} x \equiv 1\,(\bmod 2)\,, \\ x \equiv 2\,(\bmod 3)\,, \\ x \equiv 4\,(\bmod 5)\,. \end{cases}$$

(5) (10 分) 证明代数数集合为可数集.
注：一个数称为代数数, 如果它是某个系数为有理数的多项式的根.

(6) (10 分) 设 $n \geq 2$, 矩阵 $A=(a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{Z})$ 的每个元素要么是 -3, 要么是 4, 即 $a_{ij} \in \{-3,4\}$. (1) 设 S 是所有这些矩阵的和, 求 S 及其秩 $\operatorname{rank} S$; (2) 证明行列式 $|A^2|$ 是 7^{2n-2} 的倍数, 即 $7^{2n-2} \mid |A^2|$.

(7) (20 分) 设 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$, 多项式 $p(x) \in \mathbb{C}[x]$.

(1) 证明: $p(A)=\begin{pmatrix} p(a) & p'(a) & p''(a)/2 \\ 0 & p(a) & p'(a) \\ 0 & 0 & p(a) \end{pmatrix}$. (2) 求 e^A.

6 中科大考题

证明 AB 和 BA 有相同的特征多项式.

7 山大考题

中国科学院大学

2016 年高校招生考试：数学 (X 卷)
满分 100 分, 考试时间 120 分钟

1. (15 分) 计算

   (1) 求 $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$;
   (2) 求 $f(x)=x^{x^x}$ 的导数;
   (3) 求
   $$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{x_1^2+x_1^2+\cdots+x_n^2}{x_1+x_2+\cdots+x_n} dx_1 dx_2 dx_n.$$

2. (15 分) 已知 $f(x)=\prod_{i=1}^k (x-a_i)$, 且
   $$-\frac{f'(x)}{f(x)}=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n+\cdots,$$
   求 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c_n}{c_{n-1}}$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n}$.

3. (20 分) a,b 为实数, $x^3+abx+b$ 在复数域上有重根, 则 a,b 应满足什么条件?

4. (10 分) 求
   $$\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 2i\sin\alpha \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}^n.$$

8 厦大考题

1. A,B 特征值不同, f_A,f_B 为其特征多项式.

   (1) 存在 $g(\lambda),h(\lambda)$ 使得
   $$g(B)f_A(B)=0,h(A)g_B(A)=0.$$
   (2) $AX-XB=0$ 只有零解;
   (3) $AX-XB=C$ 有唯一解.

2. 设 $f(x)=\frac{1}{1-x-x^2}$, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{f^{(n)}(0)}$ 收敛, 其中 $f^{(n)}(0)$ 表示 $f(x)$ 在 0 点的 n 阶导数.