AMSS2020年武汉地区四月高招试题(WHU)

1.(10分) 设$p_0=0,0\le p_j\le 1,j=1,2,\cdots$.求

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(p_j\prod_{i=0}^{j-1}(1-p_i)\right)+\prod_{j=1}^{\infty}(1-p_j)$$

2.(15分) 记$I_n=\int_0^{\pi}\sin^n xdx,n=0,1,2,\cdots$

(1) 求I_n;

(2) 求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$;

(3) 估计$n!$.

3.(15分) 设P为从区间$[0,\frac{\pi}{2}]$到$[0,1]$的单调递增连续可微函数$p(\theta)$且$p(0)=0,p(\frac{\pi}{2})=1$全体构成的集合.定义

$$I(p(\theta))=\left(\frac{d}{d\theta}\sqrt{p(\theta)}\right)^2+\left(\frac{d}{d\theta}\sqrt{1-p(\theta)}\right)^2$$

(1) 求解极值问题 $\underset{p(\theta)\in P}{inf}\int_0^{\frac{\pi}{2}}I(p(\theta))d\theta$;

(2) 若$I(p(\theta))$与θ无关,求$p(\theta)$.

4.(15分) 设$0<a<b<\infty$为实数$K_{a,b}$为区间$[a,b]$上满足$\int_a^b f(t)dt=1$,且$af(a)=bf(b)$的非负,单调递减函数全体.求

$$\underset{f,g\in K_{a,b}}{sup}\int_a^b max[f(t),g(t)]dt.$$

5.(15分) 设$A,B\in M_{n\times n}(\mathbb{C})$为$n$阶复矩阵,$AB=0$,$k$为正整数.请问以下关系$tr((A+B)^k)=tr(A^k)+tr(B^k)$是否一定成立？说明理由.

6.(15分)

(1) 若S为幂零矩阵,$a_0\neq 0$,求$(a_0E+S)^{-1}$;

(2) 设A,B,C为n阶方阵,求

$$\begin{pmatrix} 1 & A & B \\ & 1 & C \\ & & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

7.(15分) 设$A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$为任意$n\times n$ 复矩阵,满足$AA^* = A^*A$,是否一定存在多项式f使得$A^* = f(A)$?说明理由.