复变函数面试问题

1. 请举例说明复数在几何上的应用：

复数主要应用在几何上，复数法解几何题是通过建立坐标系，把几何图形的点看作对应于复平面上的复数，借助于复数的运算及其几何意义，从而获得几何命题的一种证明方法.

例如：利用复数证明三角形内角和等于 π

2. 聚点，孤立点的定义，它们之间有什么关系：

聚点：对于点集 E, 若平面上一点 Z_0（不必属于 E）的任意领域都有 E 的无穷多点，则称 Z_0 为 E 的聚点

孤立点：若 Z_0 属于 E，但不是 E 的聚点，则称 Z_0 为 E 的孤立点

关系：聚点一定不是孤立点，孤立点也一定不是聚点，但孤立点一定属于 E, 聚点则不一定属于 E

3. 海涅 -波莱尔覆盖定理：

设有界闭集 E 的每一点 z 都是圆 K_z 的圆心，则这些圆K_z 中必有有限个圆把 E 盖住，换句话说，E 的每一点至少属于这有限个圆中的一个

4. 什么是解析函数，它有哪些性质：

解析函数：如果 f(z) 在区域 D 内的每一点都可导，则称 f(z) 在区域 D 内解析，此时也称 f(z) 为区域 D 内的解析函数

性质：（1）解析函数满足四则运算法则

（2）解析函数的虚部和实部满足 C-R 方程

（3）解析函数的各阶导数也解析

5. 请你说一下柯西 -黎曼方程：

$f(z) = u(x,y) + v(x,y)i$, 则

（1）$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$

（2）$\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$

称为柯西 -黎曼方程

6. 复变函数积分有哪些基本的性质：

（1）线性性质

（2）可加性

（3）绝对值不等式性：积分的模不大于被积函数模的积分

7. 谈谈你对柯西积分定理的理解：

柯西积分定理是指如果函数 f(z) 在单连通区域 D 内及其边界线 L 上解析，那么函数 f(z) 沿边界 L 或区域 D 内任意闭曲线的积分为零

柯西积分定理说明，复积分的值与路径无关

8. 简单说一下刘维尔定理的证明思路：

刘维尔定理可简单描述为：一个有界的整函数必是常函数

整函数：在复平面上处处解析的函数

刘维尔定理的证明思路：利用柯西不等式证明 $f'(z)=0$

刘维尔定理的推论（其逆否命题）：非常数的整函数必无界

9. 函数解析的充要条件：

f(z) 在 D 内解析的充要条件是在区域 D 内 $v(x,y)$ 和 $u(x,y)$ 可微并满足 C-R 方程

10. 解析函数和调和函数有什么关系：

调和函数的定义：如果二元实变函数 $\psi(x,y)$ 在区域 D 内具有二阶连续偏导数，且满足 Lapalace 方程，$\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0$, 则称 $\psi(x,y)$ 为区域 D 内的调和函数

关系：任何在区域 D 内的解析函数，其实部和虚部都是调和函数

11. 整函数和亚纯函数的概念：

整函数：在整个复平面上处处解析的函数

亚纯函数：在区域 D 上有定义，且除去极点之外处处解析的函数

12. 洛朗级数和泰勒级数的关系：

泰勒级数是特殊的洛朗级数

洛朗级数有负幂次项，而泰勒级数只有正幂次项

13. 孤立奇点有哪三种类型：

孤立奇点分为：可去奇点，极点和本质奇点

奇点又分为孤立奇点，非孤立奇点和支点

14. 留数的定义，有哪些应用：

留数：设 Z_0 是 f(z) 的孤立奇点，我们把 f(z) 在 Z_0 的去心领域内洛朗展示两端延 C 逐项积分留下的积分值除以 2πi 后得到的数，称为 f(z) 在 Z_0 点的留数，记作 $Res[f(z),z_0]$,$Res[f(z),z_0]=c_{-1}=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_c f(z)dz$

留数定理：如果函数 f(z) 在某区域 D 内除有限个孤立奇点外处处解析，则利用符合闭路定理可以得到留数的一个基本定理. 设 f(z) 在区域 D 内除有限个孤立奇点 $z_1,z_2,...,z_n$ 外处处解析，C 是 D 内包含所有奇点在其内部的分段光滑正向曲线，则 $\oint_c f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}Res[f(z),z_k]$

注：留数定理将求沿封闭曲线 C 积分的整体问题转化为求被积函数 f(z) 在 C 内各孤立奇点处留数的局部问题

15. 幅角原理及其应用：

幅角原理是关于解析函数在简单闭曲线内部的零点个数与级点个数之间的关系的定理

应用：（1）推导鲁歇定理

（2）奈氏判据的数学基础

（3）用于控制系统的稳定性的判定还需选择辅助函数和闭合曲线

16. 举例说明某些初等函数所构成的共性映射：

$w=z^n$ 将角形区域 $0<argz<\dfrac{2\pi}{n}$ 共形映射成 w 平面上除去原点及正实轴的区域

17. 解析延拓的概念：

假设函数 $f_1(z),f_2(z)$ 分别在区域 D_1,D_2 中解析，D_1,D_2 有一公共部分，在其上 $f_1(z)=f_2(z)$ 成立，于是将 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 在 D_1 及 D_2 内的全体点上的数值集合看成一个解析函数 $f(z)$，则 f(z) 在 $D=D_1+D_2$ 中解析，在 D_1 中 f(z)=$f_1(z)$，而在 D_2 中 $f(z)=f_2(z)$

函数 $f_2(z)$ 可以看成由拓展 $f_1(z)$ 的定义区域所得，故称它为 $f_1(z)$ 的解析延拓，根据同样理由，$f_1(z)$ 是 $f_2(z)$ 的解析延拓，这种拓展给函数定义的方法称为解析延拓

18. 谈谈你对复变函数这门课的看法：

复变函数是指以复数作为自变量和因变量的函数，而与之相关的理论就是复变函数论. 解析函数是复变函数中一类具有解析性质的函数，复变函数论主要就是研究复数域上的解析函数

19. 孤立奇点的定义：

如果函数 f(z) 在 z_0 不可导，但在 z_0 的某一去心领域 $0<|z-z_0|<\delta$ 内处处解析，则称 z_0 为函数 $f(z)$ 的一个孤立奇点

20. 可去奇点的定义及其判断方法：

设 f(z) 在 $0<|z-z_0|<\delta$ 内解析，则 z_0 是 f(z) 的可去奇点：$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=c_0$, 其中 c_0 是有限复常数

判断方法：

定义判断：$f(z)=c_0+c_1(z-z_0)+...+c_n(z-z_0)^n+...$

极限判断：$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=c_0$

21. 极点的定义：

如果函数 f(z) 在 z_0 处的洛朗级数中含有有限个 $z-z_0$ 的负幂项，即只有有限个（至少一个）整数 m>0, 使得 $c_{-m}\neq 0$, 则称孤立奇点 z_0 为 $f(z)$ 的极点

22. 判断极点的方法：

设 f(z) 在 $0<|z-z_0|<\delta$ 内解析，则 z_0 是 f(z) 的极点：$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\infty$

定义判别：f(z) 的洛朗展开式中含有 $z-z_0$ 的有限项负幂项

等价形式判别：在点 z_0 的某去心领域内有 $f(z)=(z-z_0)^{-m}g(z)(m\geq 1)$, 其中 $g(z)$ 在 z_0 的领域内解析，且 $g(z_0)\geq 0$

极限判别：$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\infty$

23. 叙述一下本性奇点的定义：

定义：如果函数 f(z) 在 z_0 处的洛朗级数中含有无穷多个系数非零的 $z-z_0$ 负幂项，即存在无限个整数 n<0, 使得 $c_n\neq 0$, 则称孤立奇点 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点

判断方法：设 f(z) 在 $0<|z-z_0|<\delta$ 内解析，则 z_0 是 f(z) 的本性奇点：$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$ 不存在有限或无穷的极限

24. 叙述一下 m 级零点的定义：

不恒为零的解析函数 f(z)，如果可以表示为 $f(z)=(z-z_0)^m g(z)$, 其中 g(z) 在 z_0 解析，并且 $g(z_0)\neq 0$，m 为正整数，则称 z_0 为 f(z) 的 m 级零点

25. 叙述一下零点判定定理：

若 f(z) 在 z_0 解析，则 z_0 为 f(z) 的 m 级零点：$f^{(n)}(z_0)=0, f^{(m)}(z_0)\neq 0, n=0,1,2,...,m-1$

26. 叙述一下零点孤立性定理：

一个不恒等于零的解析函数的零点是孤立的

27. 叙述一下零点与极点的关系：

z_0 是解析函数 f(z) 的 m 级极点等价于 z_0 是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 级零点

28. 叙述一下柯西积分公式：

设 f(z) 在区域 D 内处处解析，C 为 D 内任意一条正向简单闭曲线，它的内部完全含于 D，z_0 为 C 内任意一点，则 $f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_c \dfrac{f(z)}{z-z_0}dz.$

29. 叙述一下 e^z 的周期：

2πi