

# Une construction d'ondelettes de Daubechies

François Maillot

5 mars 2006

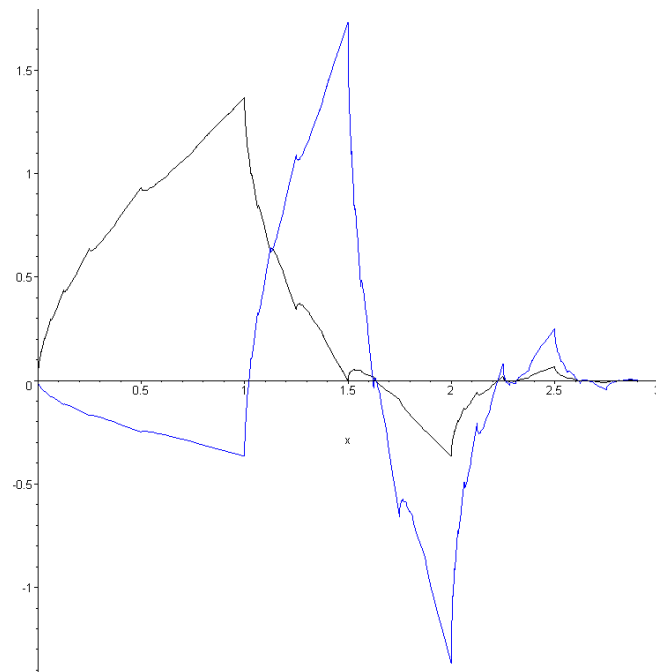
## Table des matières

<b>1</b>	<b>La transformée en ondelettes</b>	<b>4</b>
1.1	Un outil indispensable : la transformée de Fourier . . . . .	4
1.2	La transformée en ondelettes discrète . . . . .	4
1.3	Les analyses multirésolution . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Construction des ondelettes de Daubechies</b>	<b>7</b>
2.1	Les ondelettes de Daubechies . . . . .	7
2.2	Équation d'échelle et fonction d'échelle . . . . .	8
2.3	Un procédé itératif de représentation des ondelettes de Daubechies . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Application à la décomposition d'un signal</b>	<b>14</b>
3.1	Décomposition et reconstruction partielle de trois signaux particuliers . . . . .	14
3.2	Traitement d'un signal réel : un son au format .wav . . . . .	18
3.3	Des pistes pour une amélioration des algorithmes présentés . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Annexes</b>	<b>21</b>
<b>5</b>	<b>Notes - Remerciements</b>	<b>23</b>

## Introduction

La transformée en ondelettes est un outil mathématique particulièrement performant dans des domaines aussi divers que la sismologie, la compression de signaux ou le traitement des images (compression, débruitage, reconnaissance de contours). À la croisée de différents domaines de la science, apparaissant dans ses formes primitives sous divers aspects, rigoureusement formalisée sur le tard, elle a accompagné et symbolise particulièrement bien la profonde évolution des sciences mathématiques induite par l'introduction de l'outil informatique.

Le cas particulier de la transformée en ondelettes unidimensionnelle sera traité dans ce travail. En premier lieu, les bases théoriques de la transformée en ondelettes seront posées, dans le but d'aboutir à la construction mathématique d'une des familles d'ondelettes les plus célèbres et performantes : les ondelettes de Daubechies, puis de les implémenter à l'aide de l'outil informatique pour étudier sous un angle plus pratique leurs qualités et leurs limites lors du traitement de plusieurs types de signaux.



# 1 La transformée en ondelettes

## 1.1 Un outil indispensable : la transformée de Fourier

La transformée de Fourier associe à une fonction  $f$  absolument intégrable<sup>1</sup> la fonction  $\hat{f}$ . Elle s'interprète ainsi : si  $f$  est fonction du temps, sa transformée de Fourier donne la composition en fréquence de  $f$ . Elle s'écrit<sup>2</sup> :

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\omega t} dt$$

et s'inverse en :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

Les principales propriétés de la transformée de Fourier sont :

En posant  $f_k(x) = f(x - k)$  on a  $\hat{f}_k(\omega) = e^{ik\omega} \hat{f}(\omega)$

En posant  $f^r(x) = f\left(\frac{x}{r}\right)$  on a  $\hat{f}^r(\omega) = r \hat{f}(r\omega)$

Si  $f$  est de classe  $C^p$  alors  $\hat{f}^{(p)}(\omega) = (i\omega)^p \hat{f}(\omega)$

## 1.2 La transformée en ondelettes discrète

La transformée en ondelettes discrète consiste à caractériser une fonction de carré intégrable par ses produits scalaires avec une famille dénombrable de fonctions de carré intégrable : les ondelettes. De plus, les ondelettes sont d'intégrale nulle et se déduisent toutes par dilatation et translation d'une fonction appelée ondelette-mère. Ainsi, on considère la famille<sup>3</sup> :

$$\left\{ \psi^{m,n} : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2^m}} \psi\left(\frac{x - 2^m n}{2^m}\right) \right\}_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$$

Il est intéressant de considérer des familles orthogonales d'ondelettes formant une base hilbertienne de  $L^2(\mathbb{R})$  car alors toute fonction  $f$  de carré intégrable s'écrit :

$$f = \sum f_{m,n} \psi^{m,n}$$

---

<sup>1</sup>On peut prolonger la transformée de Fourier à  $L^2(\mathbb{R})$

<sup>2</sup>Il y a plusieurs conventions, on utilise ici celle adoptée par Daubechies qui présente l'avantage de faire de la transformée de Fourier une isométrie de  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  sur  $L^2(\mathbb{R})$  pour la norme  $\|\cdot\|_2$ , ce qui justifie le prolongement évoqué dans la note précédente.

<sup>3</sup>On peut choisir un pas de translation différent de 1, et un pas de dilatation différent de 2, mais ce choix est le plus souvent fait car c'est celui imposé par les analyses multirésolution

où les  $f_{m,n} = \langle f | \psi^{m,n} \rangle$  sont appelés coefficients d'ondelettes associés à  $f^4$ .

### 1.3 Les analyses multirésolution : un outil de construction de bases d'ondelettes

Afin de construire des bases d'ondelettes orthonormées, Mallat et Meyer ont introduit la notion d'analyse multirésolution. Une analyse multirésolution est une suite  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  de sous-espaces fermés de  $L^2(\mathbb{R})$  vérifiant :

- (i)  $\forall (j, k) \in \mathbb{Z}^2, f \in V_j \Leftrightarrow f(\cdot - 2^j k) \in V_j$
- (ii)  $\forall j \in \mathbb{Z}, V_{j+1} \subset V_j$
- (iii)  $\forall j \in \mathbb{Z}, f \in V_j \Leftrightarrow f\left(\frac{\cdot}{2}\right) \in V_{j+1}$
- (iv)  $\lim_{j \rightarrow \infty} V_j = \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = 0$
- (v)  $\lim_{j \rightarrow -\infty} V_j = \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$
- (vi) Il existe une fonction  $\phi$  telle que  $\{\phi(\cdot - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  forme une base orthonormée de  $V_0$

Interprétons ces propriétés :

Les espaces  $V_j$  forment une suite de sous-espaces emboîtés de  $L^2(\mathbb{R})$ . En notant  $P_j$  la projection orthogonale sur l'espace (fermé)  $V_j$ , on déduit de la propriété (iv) que pour toute fonction  $f$  de carré intégrable,  $P_j(f) \rightarrow_{j \rightarrow -\infty} 0$ , et de même on déduit de (v) que  $P_j(f) \rightarrow_{j \rightarrow +\infty} f$  : la suite  $P_j(f)$  est une suite d'approximations de  $f$  d'autant plus fines que  $j$  est grand<sup>5</sup>. La propriété (i) traduit l'invariance de  $V_0$  par translation d'un pas entier.

La fonction  $\phi$  est appelée fonction d'échelle associée à l'analyse multirésolution. La donnée de  $\phi$  est équivalente à celle de l'analyse multirésolution. En effet, par (vi),  $\phi$  détermine  $V_0$ . Par (iii) et (vi) on en déduit une base orthonormée de  $V_j$  pour tout entier relatif  $j$  :  $\phi$  permet donc de connaître la suite  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  et ainsi l'analyse multirésolution qui lui est associée. On peut alors définir une ondelette associée à cette analyse multirésolution : ce

---

<sup>4</sup>Notons l'analogie avec la théorie des séries de Fourier.

<sup>5</sup>En effet, la projection orthogonale de  $f$  sur  $V_j$  est la fonction de  $V_j$  la plus proche de  $f$  au sens de la norme  $\|\cdot\|_2$ . La croissance de  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  implique la décroissance de  $\|f - P_j(f)\|_2$ , et la complétude (v) de l'analyse multirésolution implique la nullité de la limite pour toute fonction  $f$  de carré intégrable.

sera toute fonction  $\psi$  qui forme avec ses translatées entières une base orthonormée de  $W_0$ , supplémentaire orthogonal de  $V_1$  dans  $V_0$ . En effet il découle de la définition de  $W_j$  que

$$L^2(\mathbb{R}) = \overline{\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j}$$

et donc que

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2^m}} \psi \left( \frac{\cdot - 2^m n}{2^m} \right) \right\}_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \text{ forme une base orthonormée de } L^2(\mathbb{R})$$

Le problème revient alors à expliciter une fonction d'échelle  $\phi$  et une ondelette-mère  $\psi$ . Deux approches sont possibles : on peut partir d'une fonction d'échelle convenable et en déduire l'ondelette-mère, ou bien prendre pour point de départ les propriétés désirées pour la fonction d'échelle. C'est cette deuxième approche qui est adoptée pour construire les ondelettes de Daubechies.

## 2 Construction des ondelettes de Daubechies

### 2.1 Des ondelettes à support compact et n moments nuls : les ondelettes de Daubechies

La mathématicienne Ingrid Daubechies a cherché dans ses travaux à concilier deux contraintes restrictives : l'orthogonalité de la base d'ondelettes et la compacité du support de l'ondelette-mère (ce qui implique que toute ondelette de la base est à support compact). De plus, elle a imposé à ses ondelettes une troisième condition : avoir n moments nuls. Explicitons ces deux dernières propriétés :

- Une fonction est dite à support compact si elle s'annule en-dehors d'un compact<sup>6</sup> de  $\mathbb{R}$ .
- Une fonction  $f$  a n moments nuls si elle est orthogonale à l'espace  $\mathbb{R}_n[X]$  des polynômes de degré n ou moins, i.e. si :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\} \quad \langle f | t^k \rangle = \int_{\mathbb{R}} t^k f(t) dt = 0$$

Une ondelette ayant beaucoup de moments nuls est intéressante car elle permet une reconstruction rapide de fonctions régulières. En effet, supposons que la fonction  $f$  est de classe  $D^{n+1}$  et que l'ondelette  $\psi$  a n moments nuls. Écrivons la formule de Taylor-Lagrange pour  $f$  à l'ordre n au point  $x_0$  :

$$\forall x \in \text{Supp}(\psi^{a,b}) \exists c \in \text{Supp}(\psi^{a,b})$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

En remarquant que si l'ondelette  $\psi$  a n moments nuls il en est de même de toutes ses translatées et dilatées<sup>7</sup> on obtient :

$$\langle f | \psi^{a,b} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \left( \sum_{k=0}^n \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \right) \psi^{a,b}(x) dx$$

Soit, en profitant de la nullité des n premiers moments de  $\psi^{a,b}$  :

$$\langle f | \psi^{a,b} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \psi^{a,b}(x) dx$$

Supposons maintenant que la fonction  $f$  est à support dans  $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ <sup>8</sup>. En utilisant  $\|\psi^{a,b}\|_1 = 1$  :

<sup>6</sup>Donc d'un segment, il suffit de considérer l'enveloppe convexe du compact choisi

<sup>7</sup>Par un simple changement de variable dans l'intégrale qui exprime la nullité du k-ième moment

<sup>8</sup>Cette condition n'est pas très restrictive : les fonctions généralement considérées sont assez concentrées autour d'une valeur  $x_0$ .

$$|\langle f | \psi^{a,b} \rangle| \leq 2 \frac{(\alpha - x_0)^{n+2}}{(n+2)!} \sup_{c \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]} |f^{(n+1)}(c)|$$

Ce qui indique que les coefficients d'ondelette seront très petits donc que la reconstruction à partir d'un nombre restreint de coefficients d'ondelettes sera proche de la fonction originale.

## 2.2 Équation d'échelle et fonction d'échelle pour l'ondelette de Daubechies DB2

Cherchons des ondelettes à support compact et n moments nuls, ou plutôt cherchons à caractériser les analyses multirésolution qui permettraient d'en construire. Ceci, on l'a remarqué, est équivalent à déterminer une fonction d'échelle convenable. On cherche pour l'instant une fonction d'échelle à support compact<sup>9</sup>.

$\phi$  étant une fonction d'échelle, on a :

- $\phi \in V_0$
- $V_1 \subset V_0$
- $\{\phi(\cdot - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  est une base hilbertienne de  $V_0$

De plus, on a  $\frac{1}{\sqrt{2}}\phi(\frac{\cdot}{2}) \in V_1$ <sup>10</sup>, donc en exprimant cette fonction dans la base orthonormée de  $V_0$  rappelée ci-dessus on obtient l'égalité suivante, appelée équation d'échelle :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\phi(\frac{\cdot}{2}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \phi(\cdot - n)$$

$$\text{où } h_n = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\phi\left(\frac{\cdot}{2}\right) | \phi(\cdot - n) \right\rangle$$

Écrivons l'égalité des transformées de Fourier des deux membres de l'équation d'échelle :

$$\hat{\phi}(2\cdot) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{h}(\cdot)\hat{\phi}(\cdot)$$

$$\text{où } \hat{h} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n e^{in\cdot}$$

$h$  est appelé le filtre d'échelle associé à  $\phi$ . Dans le cas particulier d'une fonction d'échelle à support compact, les supports de  $\phi(\frac{\cdot}{2})$  et  $\phi(\cdot - n)$  sont disjoints sauf pour un nombre fini d'entiers  $n$ , donc seul un nombre fini de  $h_n$  est non nul et  $\hat{h}$  est un polynôme trigonométrique.

<sup>9</sup>La forme que l'on trouve pour l'ondelette permet de déduire de la compacité de la fonction d'échelle celle de l'ondelette-mère qu'on en déduit.

<sup>10</sup>Le facteur  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  est mis pour normaliser l'ondelette dilatée



Cherchons maintenant à exprimer un filtre d'échelle convenable. Pour ce faire, démontrons d'abord le théorème suivant :

**Théorème 1 : (condition de quadrature)**

$$\left| \hat{h}(\cdot) \right|^2 + \left| \hat{h}(\cdot + \pi) \right|^2 = 2$$

**Démonstration :**

- Les translatées entières de la fonction d'échelle formant une base orthonormée de  $V_0$ <sup>11</sup> :

$$\begin{aligned} \delta_{0,k} &= \int_{\mathbb{R}} \phi(t) \phi^*(t - k) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{ik\omega} \left| \hat{\phi}(\omega) \right|^2 d\omega \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi l}^{2\pi(l+1)} e^{ik\omega} \left| \hat{\phi}(\omega) \right|^2 d\omega \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} e^{ik\omega} \left| \hat{\phi}(\omega + 2\pi l) \right|^2 d\omega \\ &= \int_0^{2\pi} e^{ik\omega} \left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\phi}(\omega + 2\pi l) \right|^2 \right) d\omega \end{aligned}$$

Donc en observant que ce dernier terme est le -k-ième coefficient de Fourier de la fonction  $2\pi$ -périodique  $\sum_{l \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\phi}(\cdot + 2\pi l) \right|^2$ , on déduit :

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\phi}(\cdot + 2\pi l) \right|^2 = 1$$

- Partons de cette dernière égalité et de la transformée de Fourier de l'équation d'échelle :

$$\hat{\phi}(2\cdot) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}(\cdot) \hat{\phi}(\cdot)$$

Pour obtenir :

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \left| \hat{h}\left(\frac{\cdot}{2} + \pi l\right) \right|^2 \left| \hat{\phi}\left(\frac{\cdot}{2} + \pi l\right) \right|^2 = 2$$

Soit, en séparant les  $l$  pairs et impairs :

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \left| \hat{h}\left(\frac{\cdot}{2} + 2\pi l\right) \right|^2 \left| \hat{\phi}\left(\frac{\cdot}{2} + 2\pi l\right) \right|^2 + \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left| \hat{h}\left(\frac{\cdot}{2} + 2\pi l + \pi\right) \right|^2 \left| \hat{\phi}\left(\frac{\cdot}{2} + 2\pi l + \pi\right) \right|^2 = 2$$

---

<sup>11</sup>L'égalité des deux produits scalaires en première et deuxième ligne provient des propriétés d'isométrie sur  $L^2(\mathbb{R})$  de la transformée de Fourier.

Puis, par  $2\pi$ -périodicité de  $\hat{h}$ , et en réexploitant l'égalité trouvée dans le point précédent, on arrive à la condition de quadrature :

$$\left| \hat{h}(\cdot) \right|^2 + \left| \hat{h}(\cdot + \pi) \right|^2 = 2$$

On peut maintenant montrer un nouveau théorème, mais nous devons d'abord connaître une forme possible pour l'ondelette-mère que l'on associera à l'analyse multirésolution. On admettra<sup>12</sup> la proposition suivante :

**Proposition 1 :**

$$\hat{\psi}(\cdot) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\cdot \hat{h}^*} \left( \frac{\cdot}{2} + \pi \right) \hat{\phi} \left( \frac{\cdot}{2} \right)$$

définit une<sup>13</sup> ondelette-mère associée à la fonction d'échelle  $\phi$ .

Montrons maintenant le théorème suivant :

**Théorème 2 :** Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

L'ondelette-mère  $\psi$  a  $n$  moments nuls

$$\forall k \in \{0, \dots, n\} \quad \hat{h}^{(k)}(\pi) = 0$$

**Démonstration :**

Remarquons d'abord le résultat suivant : une ondelette admet  $n$  moments nuls si et seulement si les  $n$  premières dérivées<sup>14</sup> de sa transformée de Fourier sont nulles en 0. Celui-ci découle directement de l'expression de la dérivée d'une transformée de Fourier et de la définition de la nullité des moments. Alors on sait que  $\psi$  admet  $n$  moments nuls si et seulement si :

$$\begin{aligned} \forall k \in \{0, \dots, n\} \quad \hat{\psi}^{(k)}(0) &= 0 \\ \left( e^{-i\cdot \hat{h}^*} \left( \frac{\cdot}{2} + \pi \right) \hat{\phi} \left( \frac{\cdot}{2} \right) \right)^{(k)}(0) &= 0 \end{aligned}$$

(On a ici utilisé la proposition 1) Pour la suite de la démonstration, raisonnons par récurrence. Montrons d'abord le résultat recherché pour  $k = 0$ . Les remarques précédentes garantissent  $\hat{\psi}(0) = 0$  donc :

---

<sup>12</sup>Le schéma de démonstration est très semblable à celui adopté pour déterminer la forme de la fonction d'échelle

<sup>13</sup>Il n'y a pas unicité, ne serait-ce que parce qu'un changement de phase permet d'obtenir une autre ondelette-mère convenable.

<sup>14</sup>On utilise pour prouver l'existence des dérivées le fait que la transformée de Fourier d'une fonction à support compact est de classe  $C^\infty$

$$\hat{h}^*(\pi)\hat{\phi}(0) = 0$$

Or  $\hat{\phi}(0) = 1^{15}$  donc on a bien le résultat recherché.

Supposons maintenant le résultat démontré pour tout entier  $l \leq k < n$ . Alors il est vrai au rang  $k + 1$  car le développement de la dérivée par la formule de Leibniz donne, une fois les simplifications permises par la nullité de  $\hat{h}^{(l)}(\pi)$  pour  $l \leq k$  effectuées :

$$(\hat{h}^*)^{(k+1)}(\pi)\hat{\phi}(0) = 0$$

Et le même raisonnement permet de conclure au caractère héréditaire de la propriété, ce qui valide la récurrence et prouve le théorème.

On peut maintenant s'attaquer à la construction des ondelettes de Daubechies à deux moments nuls.

### **Construction des ondelettes :**

On ne va pas chercher directement les ondelettes, ni même la fonction d'échelle, mais les construire à partir du filtre d'échelle. On va donc chercher à déterminer un filtre d'échelle  $h$  convenable avec  $\hat{h}$  de degré minimal<sup>16</sup>.

Le théorème 2, appliqué au cas présent  $n = 2$ , garantit que l'on peut factoriser  $\hat{h}$  sous la forme :

$$\hat{h} = \sqrt{2} \left( \frac{1 + e^{-i\cdot}}{2} \right) R(e^{-i\cdot})$$

où  $R$  est un polynôme. Comme on cherche une fonction d'échelle à valeurs réelles, il en est de même de  $h$  donc de  $h_k$ . Alors  $|\hat{h}|^2 = \hat{h}\hat{h}^* = \hat{h}(\cdot)\hat{h}(-\cdot)$  est un polynôme trigonométrique pair donc peut s'écrire comme un polynôme en  $\cos(\cdot)$ , ou de manière équivalente en  $\sin^2(\frac{\cdot}{2})$  ce qui justifie l'écriture suivante :

$$|\hat{h}|^2 = 2 \cos\left(\frac{\cdot}{2}\right)^4 P\left(\sin^2\left(\frac{\cdot}{2}\right)\right)$$

avec  $P$  un polynôme. En posant  $y = \sin^2(\frac{\cdot}{2})$ , la condition de quadrature (théorème 1) se traduit par :

$$(1 - y)^2 P(y) + y^2 P(1 - y) = 1$$

Le théorème de Bézout garantit l'existence et l'unicité d'un polynôme unitaire du premier degré satisfaisant à cette condition. On trouve facilement  $P(y) = 1 + 2y$ .

---

<sup>15</sup>On ne le prouve pas ici, mais on pourra le vérifier une fois la fonction d'échelle construite.

<sup>16</sup>On rappelle que  $\hat{h}$  est un polynôme trigonométrique

$R$  étant à coefficients réels on a :

$$|R(e^{i\cdot})|^2 = R(e^{i\cdot})R(e^{i\cdot})^* = R(e^{i\cdot})R(e^{-i\cdot}) = P\left(\sin^2\left(\frac{\cdot}{2}\right)\right) = 2 - \frac{e^{i\cdot} + e^{-i\cdot}}{2}$$

En étendant au plan complexe, on cherche  $R$  tel que  $R(z)R(z^{-1}) = 2 - \frac{z+z^{-1}}{2}$ . Les racines du membre de droite sont racines de  $X^2 - 4X + 1$ . L'équation étant invariante par  $z \mapsto z^{-1}$ , les deux racines sont inverses l'une de l'autre, et on choisit celle de plus petite valeur absolue. On obtient :

$$R(z) = \frac{z + \sqrt{3} - 2}{\sqrt{3} - 1} \text{ et } \hat{h}(\cdot) = \sum_{k=0}^3 h_k e^{-ik\cdot}$$

avec

$$h_0 = \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \quad h_1 = \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \quad h_2 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \quad h_3 = \frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$$

On déduit une expression de la fonction d'échelle<sup>17</sup> :

$$\hat{\phi}(\cdot) = \hat{\phi}(0) \prod_{p=1}^{\infty} \frac{\hat{h}(2^{-p}\cdot)}{\sqrt{2}}$$

À l'aide de la proposition 1, on en déduit une expression de la transformée de Fourier de l'ondelette-mère :

$$\hat{\psi}(\cdot) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}^*\left(\frac{\cdot}{2} + \pi\right) \hat{\phi}\left(\frac{\cdot}{2}\right)$$

ce qui est équivalent à :

$$\psi(\cdot) = \sqrt{2} \sum_{k=-2}^1 h_{1-k} \phi(2\cdot - k)$$

### 2.3 Un procédé itératif de représentation des ondelettes de Daubechies

Le procédé utilisé pour tracer les ondelettes de Daubechies découle du fait que si l'on connaît les valeurs prises par la fonction d'échelle sur  $2^{-p}\mathbb{Z}$  pour un entier naturel  $p$  donné, alors l'équation d'échelle permet d'en déduire ses valeurs sur  $2^{-(p+1)}\mathbb{Z}$ . En effet, en y injectant la valeur  $2^{-p}k$  on obtient l'égalité :

$$\phi(2^{-(p+1)}k) = \sqrt{2} \sum_{l=0}^3 h_l \phi(2^{-p}k - l)$$

---

<sup>17</sup>On itère la transformée de Fourier de l'équation d'échelle pour obtenir ce résultat, la convergence du produit infini étant justifiée par la condition de quadrature, qui impose que chacun des facteurs du produit est plus petit que 1. On utilise également la continuité de la fonction d'échelle en 0.

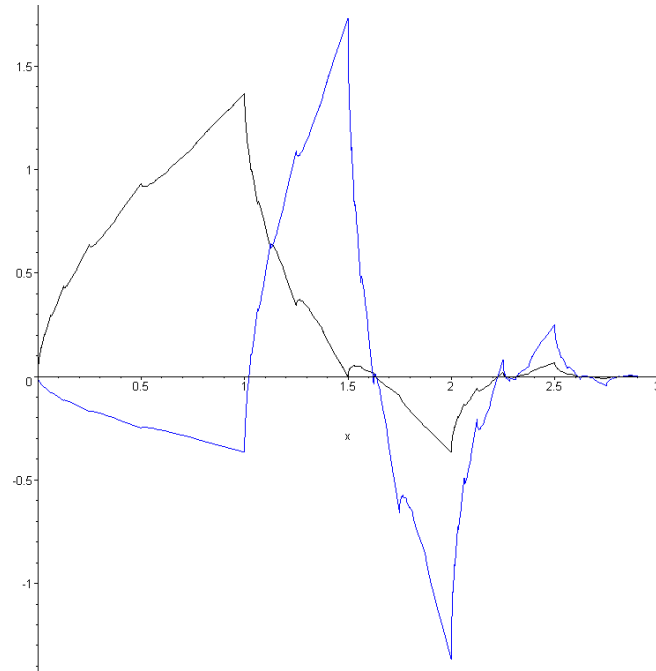
On a alors, par itérations successives, un algorithme qui permet d'obtenir la valeur de  $\phi$  en tout point de coordonnées dyadiques données, et un échantillonnage de précision arbitraire. Une fois la fonction d'échelle connue sur  $2^{-(p+1)}\mathbb{Z}$ , on connaît l'ondelette-mère sur  $2^{-p}\mathbb{Z}$  (voir l'expression reliant la fonction d'échelle à l'ondelette-mère, en fin de partie précédente). Reste à connaître les valeurs de  $\phi$  sur  $\mathbb{Z}$  afin de pouvoir initialiser l'algorithme. On admettra que  $\phi$  est à support dans  $[0, 3]$ . Alors par continuité :

$$\phi(0) = \phi(3) = 0$$

et en exploitant l'équation d'échelle on trouve :

$$\phi(2) = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \phi(1)$$

On peut alors lancer l'algorithme avec une valeur arbitraire non nulle pour  $\phi(1)$ , et normer ensuite l'échantillonnage obtenu. Voici le résultat, avec la fonction d'échelle (en brun) et l'ondelette-mère (en bleu), cette dernière translatée sur  $[0, 3]$ .



### 3 Application à la décomposition d'un signal

**Principe des algorithmes :** On détermine un échantillonnage de la fonction d'échelle à l'aide de l'algorithme présenté en fin de partie précédente. On utilise cet échantillonnage pour calculer une approximation des coefficients d'ondelettes des signaux à décomposer : ceux-ci étant continus par morceaux et à support compact  $[0, 3]$ , la somme :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^N f\left(\frac{3i}{N}\right) \psi^{a,b}\left(\frac{3i}{N}\right)$$

converge vers  $\langle f | \psi^{a,b} \rangle$  quand  $N \rightarrow \infty$  (c'est une somme de Riemann).

On calcule avec cette méthode les coefficients d'ondelettes associés à  $f$  pour les ondelettes de  $W_0, W_1, \dots$  dont le support rencontre  $[0, 3]$  ainsi qu'avec la fonction d'échelle et ses translatées qui rencontrent  $[0, 3]$ . Ainsi on obtient des sommes partielles ( $0 \leq a \leq n$ ) de la série :

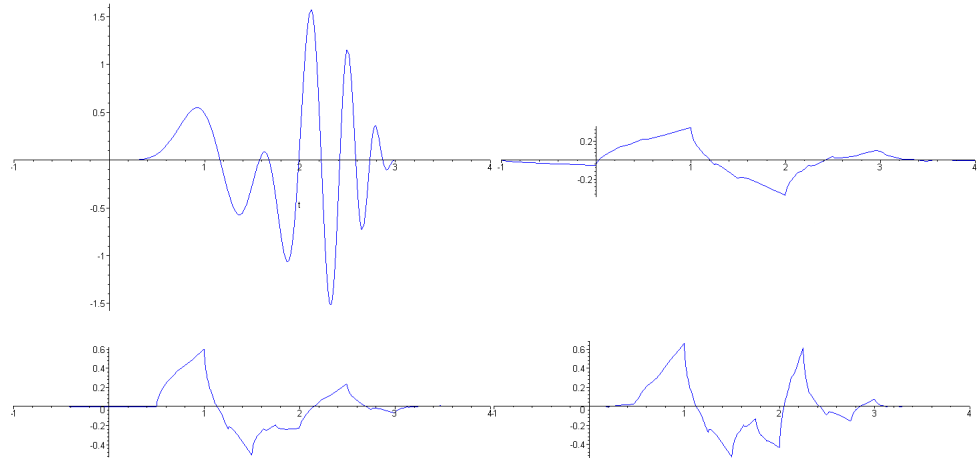
$$\sum_{b=-\infty}^{\infty} \langle f | \phi^{0,b} \rangle \phi^{0,b} + \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=-\infty}^{\infty} \langle f | \psi^{a,b} \rangle \psi^{a,b}$$

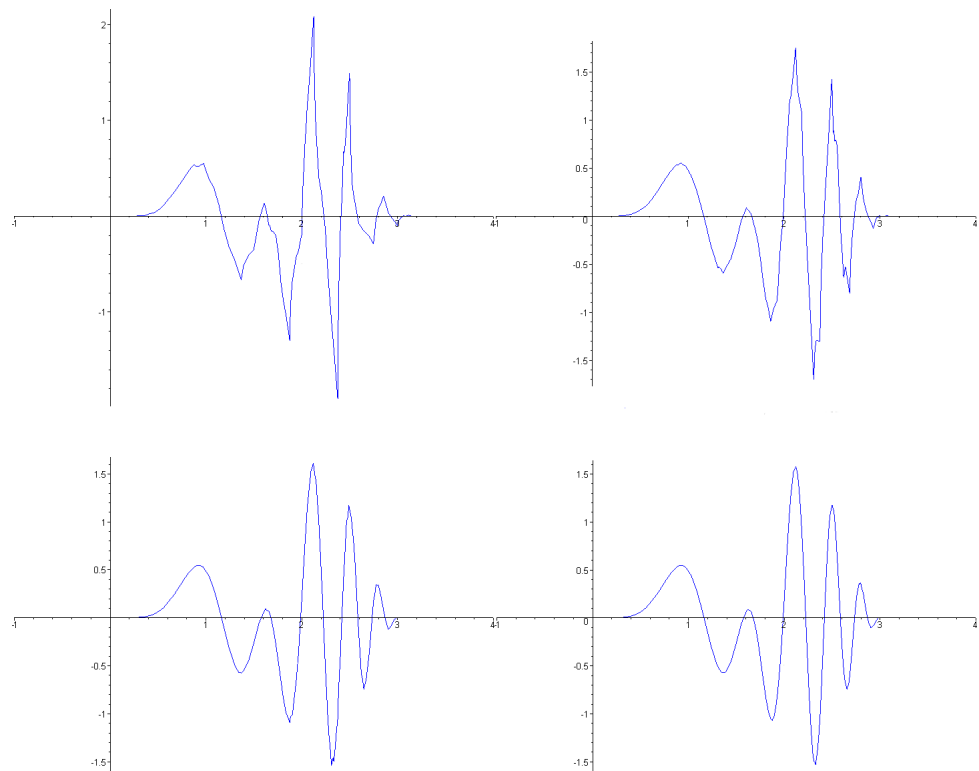
qui converge vers  $f$  pour la norme  $\| \cdot \|_2$  (c'est la suite des projections orthogonales de  $f$  sur les  $V_{a+1}$  pour cette norme).

#### 3.1 Décomposition et reconstruction partielle de trois signaux particuliers

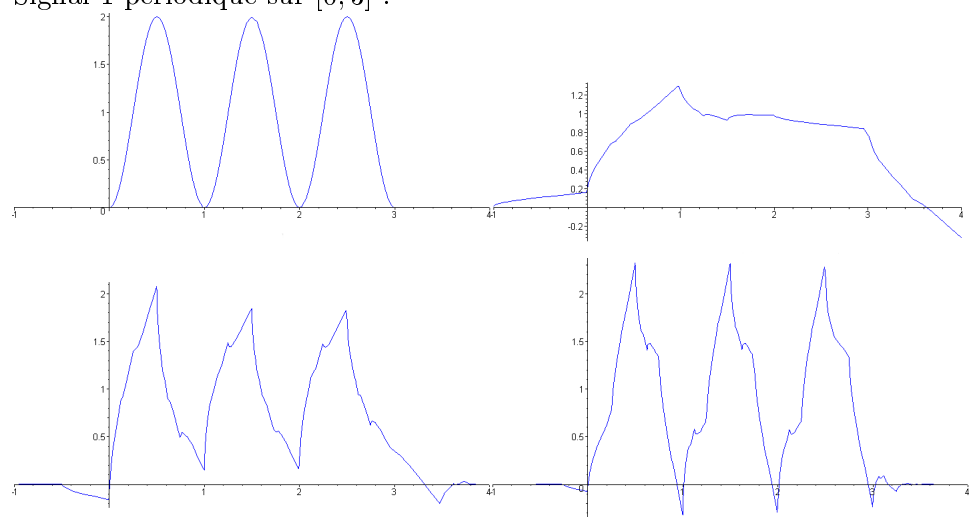
Les pages suivantes présentent pour trois signaux particuliers les graphes du signal, puis de ses projections successives sur  $V_0, V_{-1}$ , jusqu'à celle sur  $V_{-6}$ ...

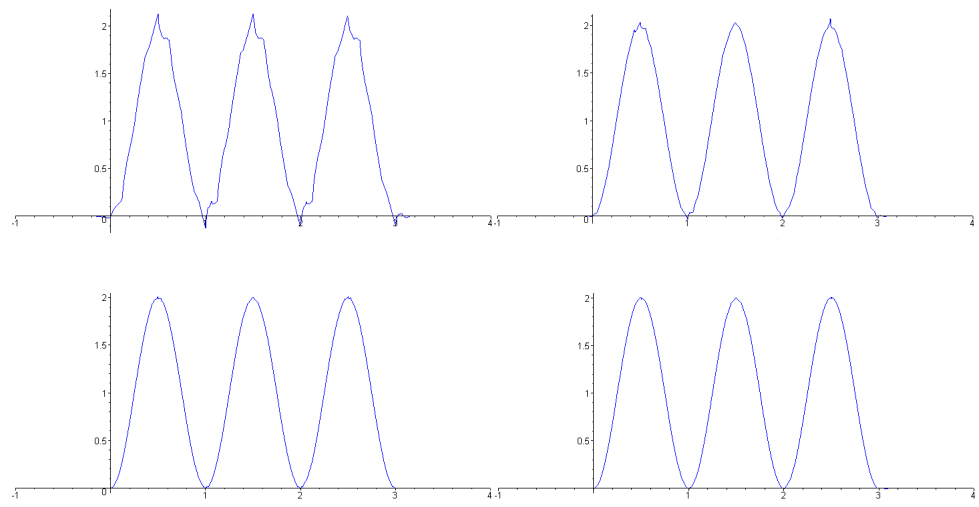
– Signal de fréquence variable :



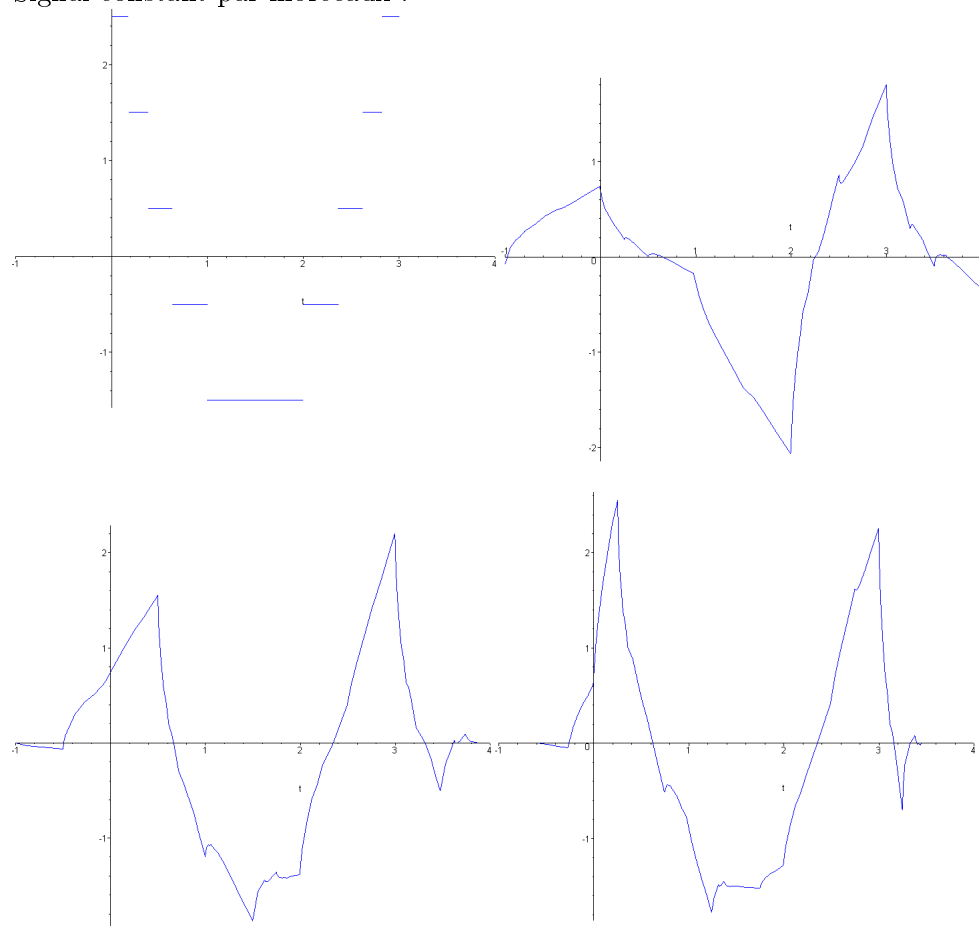


– Signal 1-périodique sur  $[0, 3]$  :

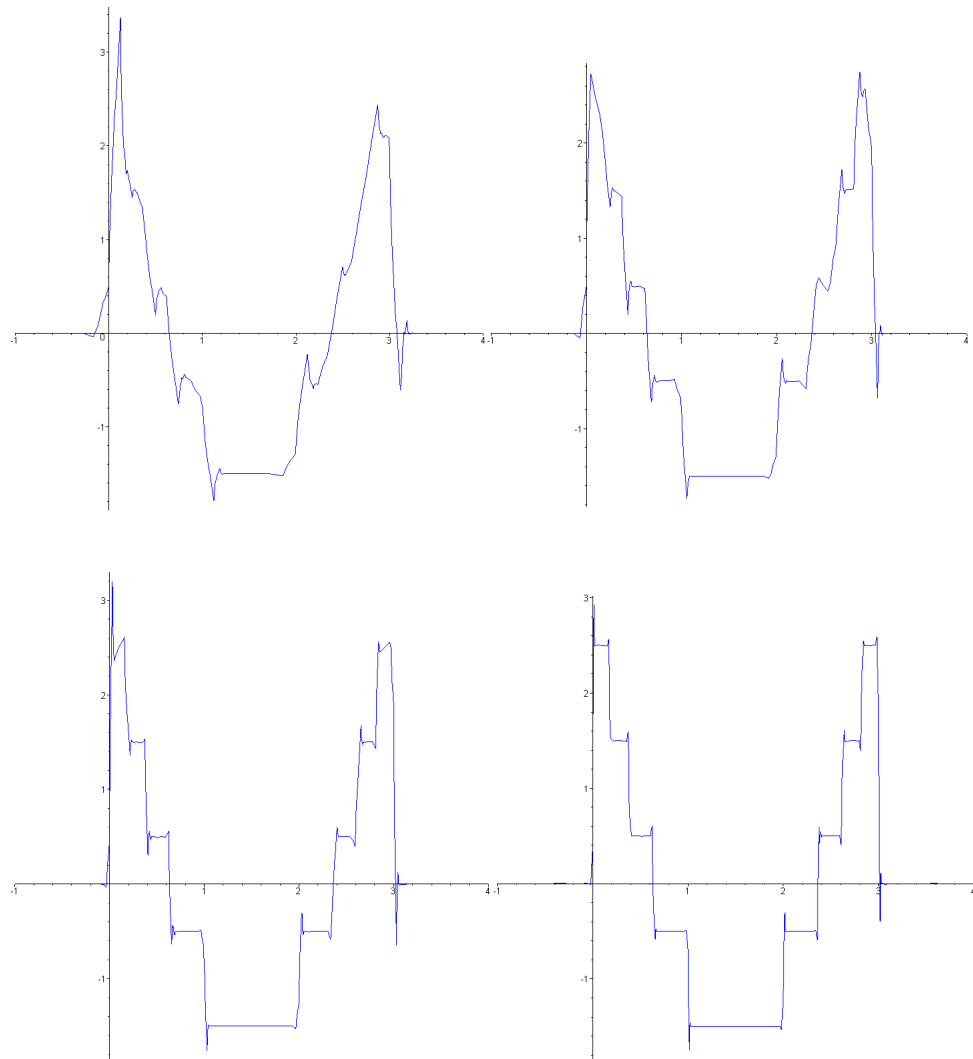




– Signal constant par morceaux :

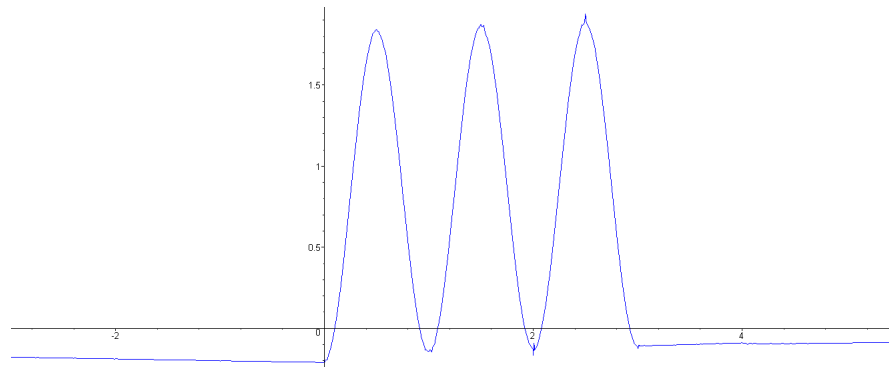






### **Observations :**

Dans le cas du premier signal, les projections successives permettent de constater que les ondelettes sont aveugles aux signaux qui oscillent trop vite pour elles : ainsi, les parties du signal qui oscillent faiblement seront plus vite reconstituées de manière correcte. Notons que la somme ici utilisée converge au sens  $L^2$ . On aurait aussi bien pu, a priori, utiliser pour la décomposition et la reconstruction du signal une somme faisant uniquement intervenir des ondelettes (c'est bien là le principe initial, les ondelettes formant une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$ ). Voyons ce qui se passe avec une telle décomposition,



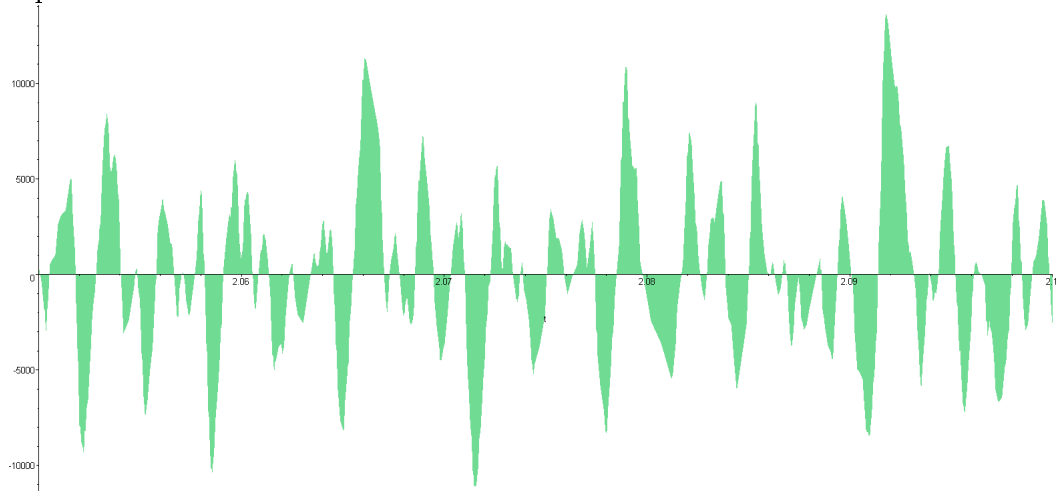
dans le cas du deuxième signal :

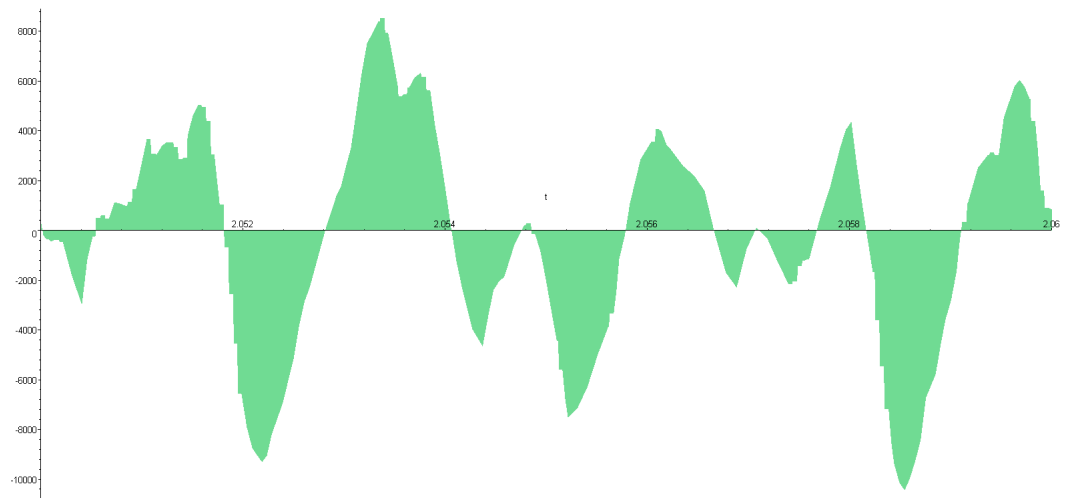
Ici, la fonction reconstituée ressemble bien à la fonction initiale, mais est décalée vers le bas et légèrement déformée. L'origine de ce paradoxe est que la convergence de la somme se fait au sens  $L^2$ , mais que le signal ici reconstitué est somme d'ondelettes, donc d'intégrale nulle. Il est alors étalé autour de l'axe des abscisses. Dans le cas d'une fonction d'intégrale faible, comme la première fonction par exemple, la différence de qualité de reconstruction est imperceptible. La fonction d'échelle a pour effet d'absorber la valeur moyenne du signal.

On note sur le dernier signal une sorte d'analogue au phénomène de Gibbs : des sauts autour des discontinuités.

### 3.2 Traitement d'un signal réel : un son au format .wav

Les algorithmes de décomposition et reconstruction ont été appliqués à un signal réel, en l'occurrence un son au format .wav. Le plus gros du travail a été de convertir en données utilisables par les algorithmes déjà écrits le fichier .wav traité. Les algorithmes utilisés étant loin d'être optimaux, la reconstruction n'a pu être poussée très loin mais donnait déjà un son audible bien que déformé.





Les deux images ci-dessus représentent le même son, visualisé à des échelles de temps différentes (la durée du signal représenté est de respectivement 0.05 et 0.01 secondes).

### 3.3 Des pistes pour une amélioration des algorithmes présentés

Les algorithmes présentés sont une implémentation naïve de la construction par Ingrid Daubechies des ondelettes à support compact et  $n$  moments nuls. Il existe des algorithmes rapides (d'un coût en  $N \log N$ ) qui permettent d'effectuer la transformée en ondelettes. Cependant, leur implémentation est moins visuelle que celle réalisée précédemment. Leur principe est de faire des regroupements astucieux des termes impliqués dans le calcul des coefficients d'ondelette, à l'instar de l'algorithme de transformée de Fourier rapide.

## Conclusion

L'étude mathématique de la transformée en ondelettes discrète a permis d'expliciter sous une forme plutôt inhabituelle (ni la fonction d'échelle ni l'ondelette utilisées n'ont d'expression analytique finie) une base orthonormée de l'espace  $L^2(\mathbb{R})$ . L'implémentation informatique des résultats de cette étude mathématique permet de comprendre de manière visuelle le fonctionnement de la transformée en ondelettes et d'appréhender les possibilités immenses offertes par cet outil mathématique. Par exemple, en éliminant les faibles coefficients d'ondelette, on altère peu le signal reconstitué : c'est une piste intéressante pour des applications de compression destructrice de données, exploitée entre autres dans le format JPEG2000. Les ondelettes peuvent également être utilisées pour éliminer les composantes gênantes d'un signal, que ce soit un craquement sur un disque vinyle ou les perturbations induites par les turbulences atmosphériques dans le cas d'observations astronomiques (cas du logiciel IRIS).

Cette introduction aux ondelettes de Daubechies s'est voulue une ouverture à une science mathématique moderne, pluridisciplinaire, s'appuyant sur la puissance de calcul offerte par l'informatique.

## 4 Annexes

### Code-source Maple :

```
> restart:
```

#### *Déclaration des variables globales*

```
> Digits:=20:
> ordre:=10:
> prec:=2^ordre:
```

*Calcul des coefficients  $c_n (= \sqrt{2}h_n)$  - Calcul de la fonction d'échelle et de l'ondelette - affichage des deux fonctions.*

```
> Ech:=array(0..3*2^ordre):
> Ech[0]:=0.: Ech[2^ordre]:=1:
Ech[2*2^ordre]:=(1-c[1])/c[0]: Ech[3*2^ordre]:=0.:
> for i from 1 to ordre do
l:=ordre-i:
for j from 2^l by 2^(l+1) to 3*2^ordre-2^l do
Ech[j]:=0.:
for k from ceil(max(0,2*j/2^ordre-3)) to
floor(min(3,2*j/2^ordre)) do
Ech[j]:=Ech[j]+c[k]*Ech[2*j-2^ordre*k] end do:
end do:
end do:
```

```
> Integ:=sum(Ech[z],z=0..3*2^ordre)/(2^ordre):
> for i from 0 to 3*2^ordre do
Ech[i]:=Ech[i]/Integ end do:
```

```
> Ond:=array(-2^ordre..2*2^ordre):
> for i from -2^ordre to 2*2^ordre do
Ond[i]:=0. end do:
> for n from -2 to 1 do
for i from max(2^ordre*n/2,-2^ordre) to
min(2^ordre*(n+3)/2,2*2^ordre) do
Ond[i]:=Ond[i]+(-1)^n*c[1-n]*Ech[2*i-n*2^ordre]
end do:
end do:
```

```
> OndDec:=array(0..3*2^ordre):
> for i from 0 to 3*2^ordre do
OndDec[i]:=Ond[i-2^ordre] end do:
```

```

> ech := x -> piecewise(x>=0 and x<=3,Ech[round(x*2^ordre)],0):
> ond := x -> piecewise(x>=-1 and x<=2,0nd[round(x*2^ordre)],0):
> onddec:= x -> piecewise(x>=0 and x<=3,0ndDec[round(x*2^ordre)],0):

> CalcCoeffs:=proc(fun,Tab,0ndelette,Echelle,ord)
local a,b,i,j,k,mult,Fonc:
Fonc:=array(0..3*prec):
for i from 0 to 3*prec do
Fonc[i]:=evalf(fun(i/prec)) end do:
for b from -3 to 3 do
Tab[-1,b]:=(sum(Fonc[j]*Echelle[j-b*prec],j=max(0,b*prec)..
(min(3*prec,(3+b)*prec))))/prec
end do:
for a from 0 to ord do
mult:=evalf(sqrt(2**a)):
for b from -3 to 3*2**a do
Tab[a,b]:=mult*(sum(Fonc[k]*0ndelette[2**a*k-b*prec],
k=max(0,b*prec/2^a)..(min(3*prec,(3+b)*prec/2^a))))/prec
end do;
end do;
end proc:

> recons:=proc(Tab,t,ondelette,echelle,ord)
local a,b,r:
r:=0.:
for b from -3 to 3 do
r:=r+Tab[-1,b]*echelle(t-b) end do:
for a from 0 to ord do
for b from -3 to 3*2**a do
r:=r+Tab[a,b]*ondelette(2**a*t-b)*evalf(sqrt(2**a))
end do:
end do:
r;
end proc:

```

### **Bibliographie :**

- Une exploration des signaux en ondelettes, Stéphane Mallat (Éditions de l'École Polytechnique, 2000)
- Ondes et ondelettes, Barbara Burke Hubbard (Éditions Belin/Pour la Science, 1995)
- Ten lectures on wavelets, Ingrid Daubechies (Éditions SIAM, 1992)

## 5 Notes - Remerciements

Ce texte est une version remaniée du dossier de TIPE que j'ai réalisé pour les concours des Écoles Normales Supérieures en 2005. Je me suis affranchi de certaines contraintes de l'épreuve de TIPE dans ce document, notamment celle de longueur du texte (10 pages, images non comprises). En particulier, par rapport au document original, j'ai ajouté dans le corps du document certaines démonstrations (en fait toutes sauf celle de la forme de la fonction d'échelle), les autres étant rejetées en annexe, avec juste les principales idées, dans le dossier d'origine.

Ce document est appelé à évoluer légèrement. Je pense rajouter en annexe des commentaires sur le code-source Maple (qui sous cette forme doit être assez sibyllin...).

Enfin, je tiens à remercier Sébastien Bubeck, actuellement élève à l'École Normale Supérieure de Cachan, qui était mon camarade de classe en MPSI et MP\* et qui a également réalisé un dossier de TIPE sur les ondelettes (avec une approche différente, vu qu'il s'intéressait aux ondelettes de Shannon, qui ont une expression analytique simple) pour les conversations fructueuses et enrichissantes sur ce sujet, ainsi que mes professeurs de mathématiques de MPSI et MP\*, respectivement M. Schwartz et M. Doué, pour leur enseignement passionnant et passionné des mathématiques, et leurs conseils toujours pertinents concernant mon TIPE.