

Analyse temps-fréquence

Olivier

Février 2026

Table des matières

1	Principe d'incertitude	2
2	Transformée de Fourier en temps court	6
3	Trames	7
3.1	Théorie générale	7
3.2	Trames de Gabor	12
3.2.1	Préliminaires	12
3.2.2	Bornitude de l'opérateur de Gabor	13
3.2.3	Théorème de représentation de Walnut	14
3.2.4	Théorème de Walnut	14
4	Transformée de Zak	16
5	Trames Gaussiennes	20
5.1	Cas général	20
5.2	Cas $\alpha\beta = 1$	21
5.3	Cas $\alpha\beta \in \mathbb{Q}$	23
6	Étude discète	24
6.1	Notations	24
6.2	Légitimité	25
6.3	Transformée de Fourier	25
6.4	Transformée de Fourier en temps court	26
6.5	Système de Gabor	28
6.6	Représentation de Walnut	30
6.7	Transformée de Zak	40
6.8	Représentation de Janssen	48
7	Appendix	52
8	A faire	54

1 Principe d'incertitude

Théorème 1.1 (Principe d'incertitude)

Soit $f \in L(\mathbb{R})$. Soit $x_0, \xi_0 \in \mathbb{R}$.
Alors il existe $C \geq 0$ vérifiant :

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |x - x_0|^2 |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |\xi - \xi_0|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq C \|f\|_{L^2}^4$$

Pour prouver ce théorème, nous aurons besoin du lemme qui suit.

Lemme 1.1

Soient H un espace de Hilbert. Soit A, B deux opérateurs de H . On suppose A, B symétriques.
Alors

$$\forall a, b \in H \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) \quad \|(A - a)\varphi\|_H \times \|(B - b)\varphi\|_H \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B]\varphi, \varphi \rangle|$$

Preuve du lemme. Soit $a, b \in H$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$.

On calcule :

$$\begin{aligned} \langle [A, B]\varphi, \varphi \rangle &= \langle (AB - BA)\varphi, \varphi \rangle \\ &= \langle ((A - a)(B - b) - (B - b)(A - a))\varphi, \varphi \rangle \\ &= \langle ((A - a)(B - b))\varphi, \varphi \rangle - \langle ((B - b)(A - a))\varphi, \varphi \rangle \\ &= \langle ((B - b))\varphi, (A - a)\varphi \rangle - \langle ((A - a))\varphi, (B - b)\varphi \rangle \\ &\quad \text{car } (A - a), (B - b) \text{ sont symétriques aussi} \\ \langle [A, B]\varphi, \varphi \rangle &= 2i \operatorname{Im} \langle ((B - b))\varphi, (A - a)\varphi \rangle \end{aligned}$$

Et alors

$$\begin{aligned} |\langle [A, B]\varphi, \varphi \rangle| &\leq 2 |\langle ((B - b))\varphi, (A - a)\varphi \rangle| \\ &\leq 2 \|(A - a)\varphi\|_H \times \|(B - b)\varphi\|_H \quad \text{par Cauchy-Schwarz} \end{aligned}$$

D'où l'inégalité voulue. □

Preuve du théorème. On considère :

$$X : \begin{cases} \mathcal{S}(R) \rightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ f \mapsto (x \mapsto xf(x)) \end{cases}$$

et

$$P : \begin{cases} \mathcal{S}(R) \rightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ f \mapsto -\frac{1}{2\pi} i f' \end{cases}$$

Vérifions X et P sont symétriques

Soit $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

On calcule

$$\begin{aligned}\langle Xf, g \rangle_{L^2} &= \int_{\mathbb{R}} \overline{xf(x)} g(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} xg(x) dx \\ \langle Xf, g \rangle_{L^2} &= \langle f, Xg \rangle_{L^2}\end{aligned}$$

Donc X est symétrique.

Et pour P :

$$\begin{aligned}\langle Pf, g \rangle_{L^2} &= \int_{\mathbb{R}} \overline{-\frac{1}{2\pi}if'(x)} g(x) dx \\ &= i\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \overline{f'(x)} g(x) dx \\ &= -i\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} g'(x) dx \quad \text{par intégration par partie (et par choix de } f, g) \\ \langle Pf, g \rangle_{L^2} &= \langle f, Pg \rangle_{L^2}\end{aligned}$$

Notre but est alors d'appliquer le lemme à X, P . On calcule alors pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}[X, P]f(t) &= (XP - PX)f(t) \\ &= -\frac{1}{2\pi}itf'(t) - P(y \mapsto yf(y))(t) \\ &= -\frac{1}{2\pi}itf'(t) + i(f(t) + tf'(t)) \\ [X, P]f(t) &= \frac{1}{2\pi}if(t)\end{aligned}$$

Donc $[X, P] = \frac{1}{2\pi}i \text{id}$

Donc

$$\langle [X, P]f, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \|f\|_{L^2}^2$$

Ensuite, soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On a

$$\|(X - x_0)f\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} (x - x_0)^2 |f(x)|^2 dx$$

Soit $\xi_0 \in \mathbb{R}$, on calcule :

$$\begin{aligned}
\|(P - \xi_0)f\|_{L^2}^2 &= \|\mathcal{F}((P - \xi_0)f)\|_{L^2}^2 && \text{par théorème de Plancherel} \\
&= \left\| \mathcal{F}\left(-\frac{1}{2\pi}if'\right) - \xi_0\mathcal{F}(f)\right\|_{L^2}^2 \\
&= \left\| -\frac{1}{2\pi}i \times 2\pi i\mathcal{F}(f') - \xi_0\hat{f}\right\|_{L^2}^2 \\
&= \|X\hat{f} - \xi_0\hat{f}\|_{L^2}^2 \\
\|(P - \xi_0)f\|_{L^2}^2 &= \|(X - \xi_0)\hat{f}\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Soit $x_0, \xi_0 \in \mathbb{R}$ On applique enfin le lemme à X, P symétriques (en passant au carré) :

$$\|(X - x_0)f\|_H^2 \times \|(P - \xi_0)f\|_H^2 \geq \frac{1}{4} |\langle [X, P]f, f \rangle|^2$$

que l'on réécrit (par les calculs ci-dessus) :

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |x - x_0|^2 |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |\xi - \xi_0|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq \frac{1}{(4\pi)^2} \|f\|_{L^2}^4$$

□

Théorème 1.2 (Principe d'incertitude, cas d'égalité)

Soit $f \in L(\mathbb{R})$. Soit $x_0, \xi_0 \in \mathbb{R}$.

Alors sont équivalentes :

- (i) $\left(\int_{\mathbb{R}} |x - x_0|^2 |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |\xi - \xi_0|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right) = \frac{1}{(4\pi)^2} \|f\|_{L^2}^4$
- (ii) $\exists K \in \mathbb{R} \quad \exists c > 0 \quad f = M_{\xi_0} T_{x_0} \varphi_c$
où $\forall c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \varphi_c : t \mapsto \exp(-\frac{\pi}{c} x^2)$

Démonstration. Observons les cas d'égalité dans chacune des inégalités utilisées.

Dans la preuve du lemme :

- (i) $|\langle [A, B]\varphi, \varphi \rangle| = |2i \operatorname{Im} \langle (B - b)\varphi, (A - a)\varphi \rangle| \iff \langle (B - b)\varphi, (A - a)\varphi \rangle \in i\mathbb{R}$
- (ii) $2|\langle (B - b)\varphi, (A - a)\varphi \rangle| = 2\|(A - a)\varphi\|_H \times \|(B - b)\varphi\|_H \iff \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{C} & (B - b)\varphi = \lambda(A - a)\varphi \\ \text{ou} \\ (A - a)\varphi = 0 \end{cases}$

Donc on a le cas d'égalité du lemme :

$$\|(A - a)\varphi\|_H \times \|(B - b)\varphi\|_H = \frac{1}{2} |\langle [A, B]\varphi, \varphi \rangle| \iff \begin{cases} \exists c \in \mathbb{R} & (B - b)\varphi = ic(A - a)\varphi \\ \text{ou} \\ (A - a)\varphi = 0 \end{cases}$$

Et on déduit :

$$\begin{aligned}
[\text{égalité dans le principe d'incertitude}] &\iff \exists c \in \mathbb{R} \quad (P - \xi_0)f = ic(X - x_0)f \underline{\text{ou}} (X - x_0)f = 0 \\
&\iff \exists c \in \mathbb{R} \quad -\frac{1}{2\pi(-i)}f' - \xi_0 f = ic(\text{id} - x_0)f \underline{\text{ou}} \text{Supp } f \subseteq \{x_0\} \\
&\iff \exists c \in \mathbb{R} \quad f' = 2\pi i(\xi_0 f + ic(\text{id} - x_0)f) \underline{\text{ou}} f = 0 \in L^2(\mathbb{R}) \\
[\text{égalité dans le principe d'incertitude}] &\iff \exists c \in \mathbb{R} \quad f' = 2\pi f(i\xi_0 - c(\text{id} - x_0))
\end{aligned}$$

Et pour $c \in \mathbb{R}$. Les solutions de l'équation différentielle linéaire non autonome

$$y' = y2\pi(i\xi_0 - c(\text{id} - x_0))$$

sont exactement

$$\begin{aligned}
&\left\{ \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto K \exp(-2\pi \frac{c}{2}(x - x_0)^2) \exp(i2\pi \xi_0) \end{array} \right\} \mid K \in \mathbb{C} \right\} \\
&\left\{ \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto \begin{cases} KM_{\xi_0} T_{x_0} \varphi_{1/c}(x) & \text{si } c \neq 0 \\ KM_{\xi_0} \text{id}(x) & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right\} \mid K \in \mathbb{C} \right\}
\end{aligned}$$

De plus, comme $f \in L^2(\mathbb{R})$, les seules f "candidates" sont pour $c > 0$.

Et donc :

$$\begin{aligned}
[\text{égalité dans le principe d'incertitude}] &\iff \exists K \in \mathbb{C} \quad \exists c \in]0, +\infty[\quad f = KM_{\xi_0} T_{x_0} \varphi_{1/c} \\
[\text{égalité dans le principe d'incertitude}] &\iff \exists K \in \mathbb{C} \quad \exists c \in]0, +\infty[\quad f = KM_{\xi_0} T_{x_0} \varphi_c
\end{aligned}$$

□

Remarque 1.1 (Une interprétation du principe d'incertitude). *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. On considère $X, \hat{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ deux variables aléatoires réelles de densité $|f|^2, |\hat{f}|^2$ respectivement.*

Alors le principe d'incertitude se traduit par :

$$\forall x_0, \xi_0 \in \mathbb{R} \quad V(X)V(\hat{X}) \geq \frac{1}{(4\pi)^2} \|f\|_{L^2}^4$$

2 Transformée de Fourier en temps court

Définition 2.1

Soit $g \in L^2(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}$.

On définit l'opérateur de transformée de Fourier en temps court par :

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^d) \quad V_g f : \begin{cases} \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C} \\ (x, \xi) \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \overline{g(t-x)} e^{-i2\pi t \cdot \xi} dt \end{cases}$$

Remarque 2.1. Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

$V_g f$ est bien définie, en effet :

$$\forall x, \xi \in \mathbb{R}^d \quad V_g f(x, \xi) = \mathcal{F}(f \times T_x \bar{g})(\xi)$$

et comme pour $x \in \mathbb{R}^d$, $f, T_x \bar{g} \in L^2(\mathbb{R}^d)$, par inégalité de Hölder, $f \times T_x \bar{g} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Donc $V_g f$ est bien définie sur tout $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

Propriété 2.1 (Formule d'inversion)

Soit $f, g, \gamma \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Supposons $\langle g, \gamma \rangle \neq 0$ Alors :

$$f = \frac{1}{\langle g, \gamma \rangle} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} V_g f(x, \omega) M_\omega T_x \gamma dx d\omega = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \langle M_\omega T_x g, f \rangle M_\omega T_x \gamma dx d\omega$$

Démonstration. Soit $y \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\langle g, \gamma \rangle} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} V_g f(x, \omega) M_\omega T_x \gamma(y) dx d\omega &= \frac{1}{\langle g, \gamma \rangle} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \mathcal{F}(f \times T_x \bar{g})(\omega) \gamma(y-x) e^{i2\pi y \cdot \omega} d\omega dx \\ &= \frac{1}{\langle g, \gamma \rangle} \int_{\mathbb{R}^d} \gamma(y-x) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(f \times T_x \bar{g})(\omega) e^{i2\pi y \cdot \omega} d\omega \right) dx \\ &= \frac{1}{\langle g, \gamma \rangle} \int_{\mathbb{R}^d} \gamma(y-x) (f \times T_x \bar{g})(y) dx \\ &= \frac{1}{\langle g, \gamma \rangle} \int_{\mathbb{R}^d} \gamma(y-x) f(y) \overline{g(y-x)} dx \\ &= f(y) \frac{1}{\langle g, \gamma \rangle} \int_{\mathbb{R}^d} \gamma(x) \overline{g(x)} dx \end{aligned}$$

(changement de variable de jacobien 1)

$$\frac{1}{\langle g, \gamma \rangle} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} V_g f(x, \omega) M_\omega T_x \gamma(y) dx d\omega = f(y)$$

□

Remarque 2.2. A $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ fixé, le choix de γ n'a pas d'importance (tant tant qu'il n'est pas orthogonal à g) car l'intégrale génère une redondance "infinie". On verra dans le point de vue des trames qu'il ne suffit en réalité qu'un nombre dénombrable de termes pour avoir une "assez bonne estimation".

3 Trames

Dans toute cette section, on fixe $d \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f, g, \gamma \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Supposons $\langle g, \gamma \rangle \neq 0$ On sait :

$$f = \frac{1}{\langle g, \gamma \rangle} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} V_g f(x, \omega) M_\omega T_x \gamma dx d\omega$$

Mais il est coûteux de calculer une double intégrale sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. L'idéal serait de pouvoir calculer une somme dénombrable pour retrouver f . Une idée est de s'intéresser à, pour $\alpha, \beta > 0$:

$$\{V_g f(\alpha k, \beta n) \mid k, n \in \mathbb{Z}^d\}$$

Or pour $k, n \in \mathbb{Z}^d$:

$$\begin{aligned} V_g f(\alpha k, \beta n) &= \langle f, M_{\beta n} T_{\alpha k} g \rangle \\ &= \exp(-i\alpha\beta k \cdot n) \langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n} g \rangle \end{aligned}$$

Donc un but serait d'avoir, pour des certains $\alpha, \beta > 0$:

$$\overline{\text{Vect}(T_{\alpha k} M_{\beta n} g \mid k, n \in \mathbb{Z}^d)} = \ell^2(\mathbb{J})$$

Ceci motive la notion de trames.

3.1 Théorie générale

Dans toute cette partie, on fixe H un espace de Hilbert séparable.

Définition 3.1 (Trame)

Soit J un ensemble et $(e_j)_j \in H^J$. On dit que $(e_j)_j$ est une **trame** s'il existe $A, B > 0$ vérifiant :

$$\forall f \in H \quad A \|f\|_H^2 \leq \sum_{j \in J} |\langle e_j, f \rangle|^2 \leq B \|f\|_H^2$$

Dans ce cas, on dit que A, B sont les bornes (de trame) de $(e_j)_j$.

Si de plus $A = B$, on dit que $(e_j)_j$ est **serrée**.

Motivations pour cette définition :

But : Soit J un ensemble, $(e_j)_j \in H^J$. On souhaite trouver des conditions sur (e_j) pour pouvoir définir $\sum_{j \in J} \langle e_j, f \rangle e_j$.

Il s'agirait alors de généraliser la notion de base hilbertienne dénombrable.

On définit

$$\tilde{C} : \begin{cases} H \rightarrow \mathbb{C}^J \\ f \mapsto (\langle e_j, f \rangle)_{j \in J} \end{cases}$$

Pour $f \in H$. On a

$$\left\| \tilde{C}f \right\|_{\ell^2}^2 = \|(\langle e_j, f \rangle)_j\|_{\ell^2}^2 = \sum_{j \in J} |\langle e_j, f \rangle|^2$$

On suppose \tilde{C} borné vers $\ell^2(J)$, i.e. l'existence de $B \geq 0$ (que l'on fixe) vérifiant :

$$\forall f \in H \quad \sum_{j \in J} |\langle e_j, f \rangle|^2 \leq B \|f\|_H^2$$

Et alors on notera plutôt :

$$C : \begin{cases} H \rightarrow \ell^2(J) \\ f \mapsto (\langle e_j, f \rangle)_{j \in J} \end{cases}$$

(En pratique on supposera $B > 0$. En effet, le cas $(e_j) = (0)$ (ou $H = \{0\}$) est pathologique.)

De plus, soit $c = (c_j)_j \in \mathbb{C}^{(J)}$ et $f \in H$. On calcule :

$$\begin{aligned} \langle Cf, c \rangle_{\ell^2} &= \sum_{j \in J} \overline{\langle e_j, f \rangle}_H c_j \\ &= \sum_{j \in J} \langle f, e_j \rangle_H c_j \\ &= \sum_{j \in J} \langle f, e_j c_j \rangle_H \\ \langle Cf, c \rangle_{\ell^2} &= \langle f, \sum_{j \in J} c_j e_j \rangle_H \end{aligned}$$

car la somme est finie

On pose alors :

$$\tilde{D} : \begin{cases} \mathbb{C}^{(J)} \rightarrow H \\ (c_j)_j \mapsto \sum_{j \in J} c_j e_j \end{cases}$$

de sorte à avoir :

$$\langle Cf, c \rangle_{\ell^2} = \langle f, Dc \rangle_H$$

D'où $C|_{\mathbb{C}^{(J)}}^* = D$ Donc $\tilde{D} : \mathbb{C}^{(J)} \rightarrow H$ est borné.

Comme $\mathbb{C}^{(J)}$ est dense dans $\ell^2(J)$, on peut étendre \tilde{D} sur $\ell^2(J)$ par densité. On note alors :

$$D : \begin{cases} \mathbb{C}^{(J)} \rightarrow H \\ (c_j)_j \mapsto \sum_{j \in J} c_j e_j \end{cases}$$

On définit :

$$S = C^*C : \begin{cases} H \rightarrow H \\ f \mapsto \sum_{j \in J} \langle e_j, f \rangle e_j \end{cases}$$

Comme C est borné, S est aussi borné.

On souhaite également demander que S soit inversible. On peut le faire en demandant :

$$\exists A > 0 \quad \forall f \in H \quad \langle f, Sf \rangle \geq A \|f\|_H^2$$

D'où la définition d'une trame.

Définition 3.2

Soit J un ensemble et $(e_j)_j \in H^J$ On pose :

$$C : \begin{cases} H \rightarrow \mathbb{C}^J \\ f \mapsto (\langle e_j, f \rangle)_{j \in J} \end{cases}$$

l'opérateur dit de coefficients. Et :

$$D : \begin{cases} \mathbb{C}^{(J)} \rightarrow H \\ (c_j)_j \mapsto \sum_{j \in J} c_j e_j \end{cases}$$

l'opérateur dit de reconstruction.

Remarque 3.1. Soit J un ensemble et $(e_j)_j \in H^J$ une trame. Alors

$$DC = C^*C = DD^*$$

Propriété 3.1

Soit J un ensemble et $(e_j)_j \in H^J$ une trame.

Alors S est borné, auto-adjoint, strictement positive et injective.

Propriété 3.2

Soit J un ensemble et $(e_j)_j \in H^J$ une trame.

Alors

$$\overline{\text{Ran } D}^{\|\cdot\|_H} = H$$

Démonstration. On a

$$H = \ker C \oplus \overline{\text{Ran } D}^{\|\cdot\|_H}$$

Or

$$\ker C = \{0\}$$

Donc

$$\overline{\text{Ran } D}^{\|\cdot\|_H} = H$$

□

Propriété 3.3

Soit J un ensemble et $(e_j)_j \in H^J$ une trame.
Alors $\text{Ran } C$ est fermée.

Propriété 3.4

Soit $(e_j)_j \in H^J$ une trame.

- (i) Soit $f \in H$. Comme $\text{Ran } D$ est dense dans H , on prend $(c_j)_j \in \ell^2(J)$ vérifiant $f = \sum_{j \in J} c_j e_j$.

Alors

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists F_0 \subseteq J \text{ fini} \quad \forall F \supseteq F_0 \quad \|f - \sum_{j \in F} c_j e_j\|_H < \varepsilon$$

Dans ce cas, on dira que $\sum_{j \in J} c_j e_j$ **converge inconditionnellement** vers f

- (ii) Réciproquement, soient $f \in H$ et $c = (c_j)_j \in \ell^2(J)$. Supposons $\sum_{j \in J} c_j e_j$ converge inconditionnellement vers f .

Alors $f = Dc$

Démonstration. Pour $F \subseteq J$, on note $c_F := (c_j)_{j \in F}$.

- (i) Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\sum_{j \in J} |c_j|^2$ converge, on prend $F_0 \subseteq J$ vérifiant

$$\forall F \supseteq F_0 \text{ fini} \quad \underbrace{\sum_{\substack{j \in J \\ j \notin F}} |c_j|^2}_{= \|c - c_F\|_{\ell^2}^2} < \varepsilon$$

Alors pour $F \supseteq F_0$ fini, on a :

$$\begin{aligned} \|f - Dc_F\|_H &= \|Dc - Dc_F\|_H \\ &= \|D(c - c_F)\|_H \\ &\leq \|D\| \|c - c_F\|_{\ell^2} \\ &\leq \sqrt{B} \varepsilon \end{aligned}$$

- (ii) Montrons $Dc = f$. Pour cela, montrons $\forall \varphi \in H \quad \langle c, C\varphi \rangle_{\ell^2} = \langle f, \varphi \rangle_H$.

Soit $\varphi \in H$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrons :

$$|\langle c, C\varphi \rangle_{\ell^2} - \langle f, \varphi \rangle_H| < \varepsilon$$

Par hypothèse, on prend $F_0 \subseteq J$ fini associée à ε . Soit $F \supseteq F_0$ fini.

On calcule :

$$\begin{aligned}
|\langle c, C\varphi \rangle_{\ell^2} - \langle f, \varphi \rangle_H| &= |\langle c, C\varphi \rangle_{\ell^2} - (\langle Dc_F, \varphi \rangle_H + \langle f - Dc_F, \varphi \rangle_H)| \\
&\leq |\langle c, C\varphi \rangle_{\ell^2} - \langle Dc_F, \varphi \rangle_H| + |\langle f - Dc_F, \varphi \rangle_{\ell^2}| \\
&\leq |\langle c, C\varphi \rangle_{\ell^2} - \langle c_F, C\varphi \rangle_{\ell^2}| + \|f - Dc_F\|_H \|\varphi\|_H \\
&\quad \text{car } D^* = C \text{ et Cauchy-Schwarz} \\
&\leq |\langle c - c_F, C\varphi \rangle_{\ell^2}| + \varepsilon \|\varphi\|_H \quad \text{par choix de } \varepsilon \\
&\leq \|c - c_F\|_{\ell^2} \|C\| \times \|\varphi\|_H + \varepsilon \|\varphi\|_H \\
&\leq \varepsilon \|\varphi\|_H (\sqrt{B} + 1) \quad \text{quitte à considérer } F_0 \text{ plus grand}
\end{aligned}$$

□

Propriété 3.5

Soit $(e_j)_j \in H^J$ une trame de bornes $A, B > 0$ Soit $f = \sum_{j \in J} c_j e_j \in H$

Alors $(S^{-1}e_j)_{j \in J}$ est une trame de bornes B^{-1}, A^{-1} , et

$$f = \sum_{j \in J} \langle S^{-1}e_j, f \rangle e_j$$

et

$$f = \sum_{j \in J} \langle e_j, f \rangle S^{-1}e_j$$

On appelle $(S^{-1}e_j)_{j \in J}$ la **trame duale** de (e_j) .

Démonstration. On a $f = SS^{-1}f = \sum_{j \in J} \langle e_j, S^{-1}f \rangle e_j$

Or S est auto-adjoint, d'où S^{-1} aussi. Donc

$$f = \sum_{j \in J} \langle S^{-1}e_j, f \rangle e_j$$

□

Les trames duales sont des outils pratiques. En effet, elles sont les trames minimisantes au sens qui suit.

Propriété 3.6

Soit $(e_j)_j \in H^J$ une trame. Soit $f = \sum_{j \in J} c_j e_j \in H$

Alors

$$\sum_{j \in J} |\langle S^{-1}e_j, f \rangle|^2 \leq \sum_{j \in J} |c_j|^2$$

Avec égalité $\iff \forall j \in J \quad c_j = \langle S^{-1}e_j, f \rangle$

Démonstration. à faire

□

3.2 Trames de Gabor

3.2.1 Préliminaires

Définition 3.3

Soit $g \in L^2(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}$. Soient $\alpha, \beta > 0$.

On appelle **système de Gabor** l'ensemble :

$$\mathcal{G}(g, \alpha, \beta) := \{T_{\alpha k} M_{\beta n} g \mid k, n \in \mathbb{Z}^d\}$$

Dans le cas où $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ est une trame, on l'appellera alors **trame de Gabor**, et on définit l'**opérateur de Gabor** :

$$S_{g,g}^{\alpha,\beta} : \begin{cases} L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d) \\ f \mapsto \sum_{k,n \in \mathbb{Z}^d} \langle T_{\alpha k} M_{\beta n} g, f \rangle T_{\alpha k} M_{\beta n} g \end{cases}$$

On pourra noter simplement $S_{g,g}$ ou même S_g s'il n'y a pas d'ambiguïté quant aux paramètres.

Remarque 3.2.

$$\begin{aligned} S_g f &= \sum_{k,n \in \mathbb{Z}^d} \langle T_{\alpha k} M_{\beta n} g, f \rangle T_{\alpha k} M_{\beta n} g \\ &= \sum_{k,n \in \mathbb{Z}^d} \langle M_{\beta n} T_{\alpha k} g, f \rangle M_{\beta n} T_{\alpha k} g && \text{car } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ est anti-linéaire à gauche} \\ &= \sum_{k,n \in \mathbb{Z}^d} V_g f(\alpha k, \beta n) M_{\beta n} T_{\alpha k} g \end{aligned}$$

Pour reconstruire une $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ à partir de ses coefficients dans une trame $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$, on doit trouver S^{-1} .

Mais il est, en général, difficile d'inverser S .

Voyons une approche qui nous permettra de faciliter la recherche de S^{-1} : les trames duales.

Propriété 3.7

Soit $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ une trame de Gabor.

Alors il existe $\gamma \in L^2(\mathbb{R}^d)$ vérifiant que $\mathcal{G}(\gamma, \alpha, \beta)$ est la trame duale de $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$

Dans ce cas, on dit que γ est la **fenêtre duale** de g .

Remarque 3.3. En fait $\gamma = S_g^{-1} g$

Remarque 3.4. Cela nous dit pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$:

$$\begin{aligned} f &= \sum_{k,n \in \mathbb{Z}^d} \langle T_{\alpha k} M_{\beta n} g, f \rangle T_{\alpha k} M_{\beta n} \gamma \\ &= \sum_{k,n \in \mathbb{Z}^d} \langle T_{\alpha k} M_{\beta n} \gamma, f \rangle T_{\alpha k} M_{\beta n} g \end{aligned}$$

Propriété 3.8

Soit $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ une trame de Gabor. Soit $\gamma \in L^2(\mathbb{R}^d)$ sa fenêtre duale.
Alors :

$$S_{g,g}^{-1} = S_{\gamma,\gamma}$$

Alors pour trouver S^{-1} , au lieu de résoudre les équations $Sf = h$ d'inconnue $h \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et f qui parcourt tout $L^2(\mathbb{R}^d)$, il suffit de résoudre pour $\gamma \in L^2(\mathbb{R}^d)$ l'équation linéaire :

$$S\gamma = g$$

3.2.2 Bornitude de l'opérateur de Gabor

On note pour $\alpha > 0$, $Q_\alpha := [0, \alpha]^d$ et $Q = Q_1 := [0, 1]^d$.

Définition 3.4

On définit l' **espace de Wiener** par

$$W(\mathbb{R}^d) := \{g \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \mid \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \underbrace{\text{ess sup}_{x \in Q} |g(x+n)|}_{= \|g \times T_n \chi_Q\|_\infty}\}$$

Propriété 3.9

Soit $g \in W(\mathbb{R}^d)$. Soit $\alpha, \beta > 0$.

Alors $D_{g,\alpha,\beta} : \begin{cases} \ell^2(\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d) \\ (c_{kn})_{k,n} \mapsto \sum_{k,n \in \mathbb{Z}^d} c_{kn} T_{\alpha k} M_{\beta n} g \end{cases}$ est borné.

De plus, on a

$$|||D_{g,\alpha,\beta}||| \leq \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^{d/2} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^{d/2} \|g\|_W$$

Corollaire 3.1

Soit $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Soit $\alpha, \beta > 0$. Supposons $g \in W(\mathbb{R}^d)$ ou $\hat{g} \in W(\mathbb{R}^d)$.
Alors C_g, D_g, S_{gg} sont bornés et vérifient :

$$|||C_g|||, |||D_g||| \leq \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^{d/2} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^{d/2} \underbrace{\|g\|_W}_{\text{ou } \hat{g}}$$

et

$$|||S_{gg}||| \leq \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^d \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^d \underbrace{\|g\|_W^2}_{\text{ou } \hat{g}}$$

3.2.3 Théorème de représentation de Walnut

Définition 3.5

Soit $g, \gamma \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Soit $\alpha, \beta > 0$. On définit la **fonction de corrélation** de (g, γ) :

$$\forall n \in \mathbb{Z}^d \quad G_n := \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \overline{g\left(x - \frac{n}{\beta} - \alpha k\right)} \gamma(x - \alpha k)$$

Remarque 3.5. On observe que pour $n \in \mathbb{Z}^d$, G_n est la périodisée de $T_{\frac{n}{\beta}} \bar{g} \times \gamma$ de période $\alpha \mathbb{Z}^d$

Théorème 3.1 (De représentation de Walnut)

Soit $\alpha, \beta > 0$. Soit $g, \gamma \in W(\mathbb{R}^d)$. Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Alors $S_{g, \gamma} f = \sum_{k, n \in \mathbb{Z}^d} \langle T_{\alpha k} M_{\beta n} g, f \rangle T_{\alpha k} M_{\beta n} \gamma$ se réécrit :

$$S_{g, \gamma} f = \frac{1}{\beta^d} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} G_n \times T_{\frac{n}{\beta}} f$$

De plus pour tout $p \in [1, +\infty]$, $S_{g, \gamma}$ est borné de L^p vers L^p .

3.2.4 Théorème de Walnut

Théorème 3.2 (De Walnut)

Soit $g \in W(\mathbb{R}^d)$.

Soit $\alpha > 0$ vérifiant que

$$\underbrace{\operatorname{ess\,inf}_{x \in \mathbb{R}^d} |G_0(x)|}_{=:a}, \underbrace{\operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^d} |G_0(x)|}_{=:b} \in]0, +\infty[$$

Soit $\beta_0 > 0$ vérifiant

$$\sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^d \\ n \neq 0}} \|G_n^{(\alpha, \beta)}\|_\infty < \operatorname{ess\,inf}_{x \in \mathbb{R}^d} |G_0(x)|$$

Alors pour tout $\beta \in [0, \beta_0[$, $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ est une trame de bornes

$$A := \frac{1}{\beta^d} (a - \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^d \\ n \neq 0}} \|G_n^{(\alpha, \beta)}\|_\infty)$$

et

$$B := \frac{1}{\beta^d} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^d \\ n \neq 0}} \|G_n^{(\alpha, \beta)}\|_\infty$$

Lemme 3.1

Soit $g \in W(\mathbb{R}^d)$. Soit $\alpha > 0$.

Alors

$$\sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^d \\ n \neq 0}} \|G_n^{(\alpha, \beta)}\|_\infty \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} 0$$

Remarque 3.6. $G_0(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |g(x - \alpha k)|^2 \forall x \in L^2(\mathbb{R}^d) \quad a \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |g(x - \alpha k)|^2 \leq b$

Remarque 3.7. *C'est essentiellement un Lemme D'Hadamard*

Remarque 3.8. *Le fait de prendre $g \in W(\mathbb{R}^d)$ nous permet simplement de nous assurer que S_g est borné. On aurait pu prendre $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et supposer S_g borné.*

L'importance de ce théorème est la condition pour l'inversibilité de S_g .

Remarque 3.9. *Ce théorème ne nous donne pas d'expression pour β_0 . Il nous dit qu'en prenant une densité suffisamment forte, on aura une trame.*

4 Transformée de Zak

Définition 4.1

Soit $\alpha > 0$. Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

On définit la transformée de Zak de f par :

$$Z_\alpha f : \begin{cases} \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C} \\ (x, \omega) \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(x - \alpha k) e^{i2\pi \alpha \omega \cdot k} \end{cases}$$

qui est bien définie presque partout.

On observe que comme $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$,

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \quad (f(x - \alpha j))_{j \in \mathbb{Z}^d} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$$

et donc pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, $Z_\alpha f(x, \cdot)$ est la série de Fourier de $(f(x - \alpha j))_{j \in \mathbb{Z}^d}$ donc est dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Donc $Z_\alpha f$ est bien défini presque partout.

Démonstration.

□

Motivations pour cette définition :

Soit $g, \gamma \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Soit $x \in \mathbb{R}^d$

On sait, par théorème de représentation de Walnut,

$$S_{g, \gamma} f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} G_n(x) \times T_{\frac{n}{\beta}} f(x)$$

$$\text{avec } \forall n \in \mathbb{Z}^d \quad G_n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \overline{g\left(x - \frac{n}{\beta} - \alpha k\right)} \gamma(n - \alpha k)$$

On se place dans le cas où $\alpha\beta = 1$.

L'expression devient

$$S_{g, \gamma} f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} G_n(x) \times T_{n\alpha} f(x)$$

On voudrait voir l'expression de $S_{g, \gamma} f(x)$ comme un produit de convolution.

Par exemple :

$$S_{g, \gamma} f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} G_{-(-n)}(x) \times T_{n\alpha} f(x)$$

On pose alors :

$$\kappa_x : \begin{cases} \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C} \\ j \mapsto G_{-j}(x) \end{cases}$$

et

$$\varphi_x : \begin{cases} \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C} \\ j \mapsto T_{j\alpha} f(x) \end{cases}$$

de sorte à avoir

$$S_{g,\gamma} f(x) = (\kappa_x * \varphi_x)(0)$$

On voudrait alors comprendre le produit de convolution $\kappa_x * \varphi_x$

On observe que pour $\delta > 0$, (par produit de Cauchy)

$$\forall \omega \in \mathbb{R}^d \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} (\kappa_x * \varphi_x)(k) e^{i2\pi\delta\omega \cdot k} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \kappa_x(k) e^{i2\pi\delta\omega \cdot k} \right) \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \varphi_x(k) e^{i2\pi\delta\omega \cdot k} \right)$$

$$\text{Et } \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \varphi_x(k) e^{i2\pi\delta\omega \cdot k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(x - \alpha k) e^{i2\pi\delta\omega \cdot k}$$

D'où la définition.

Propriété 4.1 (Quasi-périodicité)

Soit $\alpha > 0$. Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Alors pour tout $x, \omega \in \mathbb{R}^d$

$$\forall n \in \mathbb{Z}^d \quad \begin{cases} Z_\alpha f(x, \omega + \frac{n}{\alpha}) = Z_\alpha f(x, \omega) \\ Z_\alpha f(x + n\alpha, \omega) = e^{i2\pi\alpha n \cdot \omega} Z_\alpha f(x, \omega) \end{cases}$$

Remarque 4.1. On déduit que $Z_\alpha f$ est entièrement caractérisée par $Z_\alpha|_{Q_\alpha \times Q_{1/\alpha}}$

Démonstration. à faire □

Propriété 4.2 (Formule d'inversion)

Soit $\alpha > 0$. Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Alors

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \quad f(x) &= \frac{1}{\alpha^d} \int_{\mathbb{R}^d} Z_\alpha f(x, \omega) d\omega \\ \text{(ii)} \quad \forall \omega \in \mathbb{R}^d \quad \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\alpha^d} \int_{\mathbb{R}^d} Z_\alpha f(x, \omega) e^{-i2\pi x \cdot \omega} dx \end{aligned}$$

Démonstration. à faire

(i) abc

(ii) def □

Propriété 4.3 (Plancherel)

Soit $\alpha > 0$. Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. pourquoi on voudrait $\in W(\mathbb{R}^d)$?

$$\text{Alors } \int_{Q_\alpha} \int_{Q_{1/\alpha}} |Z_\alpha f(x, \omega)|^2 dx d\omega = \frac{1}{\alpha^d} \|f\|_{L^2}^2$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Comme $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, $(f(x - \alpha k))_k \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$.

Et par théorème de Plancherel (Fourier) :

$$\int_{Q_{1/\alpha}} |Z_\alpha f(x, \omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\alpha^d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |f(x - \alpha k)|^2$$

En intégrant sur Q_α :

$$\int_{Q_\alpha} \int_{Q_{1/\alpha}} |Z_\alpha f(x, \omega)|^2 d\omega dx = \frac{1}{\alpha^d} \int_{Q_\alpha} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |f(x - \alpha k)|^2 dx$$

Et par théorème de Fubini :

$$\frac{1}{\alpha^d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \underbrace{\int_{Q_\alpha} |f(x - \alpha k)|^2 dx}_{=\|f\|_{L^2}^2} = \|f\|_{L^2}^2$$

□

Corollaire 4.1

Soit $\alpha > 0$.

Alors $\sqrt{\alpha^d} Z_\alpha : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ est unitaire.

Propriété 4.4

Soit $g \in Wd$. Soit $\alpha > 0$.

On suppose $\hat{g} \in W(\mathbb{R}^d)$.

Alors $Z_\alpha g$ est continue et s'annule sur $Q_\alpha \times Q_{1/\alpha}$.

Propriété 4.5 (lftatnote003 (p14), founda Cor8.3.2)

Soit $g \in W(\mathbb{R}^d)$. Soit $\alpha > 0$

On note

$$A := \alpha^d \operatorname{ess\,inf}_{(x, \omega) \in Q_\alpha \times Q_{1/\alpha}} |Z_\alpha g(x, \omega)|^2$$

et

$$B := \alpha^d \operatorname{ess\,sup}_{(x, \omega) \in Q_\alpha \times Q_{1/\alpha}} |Z_\alpha g(x, \omega)|^2$$

Alors

$$\mathcal{G}(g, \alpha, \frac{1}{\alpha}) \text{ est une trame } \iff 0 < A \leq B < +\infty$$

et dans ce cas, A, B sont les bornes de $\mathcal{G}(g, \alpha, \frac{1}{\alpha})$.

Démonstration. à faire

□

Corollaire 4.2

Soit $g \in Wd$. Soit $\alpha > 0$.

On suppose $\hat{g} \in W(\mathbb{R}^d)$.

Alors $\mathcal{G}(g, \alpha, \frac{1}{\alpha})$ n'est pas une trame.

5 Trames Gaussiennes

5.1 Cas général

On traite ici le cas unidimensionnel.

Soit $c > 0$.

Soit $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto e^{-\frac{\pi}{c}\|x\|^2} \end{cases} \in L^2(\mathbb{R}^d)$

Soit $\alpha, \beta > 0$.

On définit pour $k, n \in \mathbb{Z}^d$,

$$\varphi_{k,n} : t \mapsto T_{\alpha k} M_{\beta n} \varphi(t) = e^{-\frac{\pi}{c}\|x-\alpha k\|^2} e^{i2\pi(x-\alpha k)\cdot\beta n}$$

Soit $x, \omega \in \mathbb{R}^d$. On calcule

$$\begin{aligned} Z_{\alpha} \varphi_{k,n}(x, \omega) &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^d} \varphi_{k,n}(x - \alpha \ell) e^{i2\pi \alpha \omega \cdot \ell} \\ &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^d} e^{-\frac{\pi}{c}\|x - \alpha \ell - \alpha k\|^2} e^{i2\pi(x - \alpha \ell - \alpha k) \cdot \beta n} e^{i2\pi \alpha \omega \cdot \ell} \\ &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^d} e^{-\frac{\pi}{c}\|x - \alpha \tilde{\ell}\|^2} e^{i2\pi(x - \alpha \tilde{\ell}) \cdot \beta n} e^{i2\pi \alpha \omega \cdot (\tilde{\ell} - k)} \quad (\tilde{\ell} = \ell + k) \\ &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^d} e^{-\frac{\pi}{c}\|x - \alpha \ell\|^2} e^{i2\pi \beta n \cdot x} e^{-i2\pi \beta \alpha \ell \cdot n} e^{i2\pi \alpha \omega \cdot \ell} e^{-i2\pi \alpha \omega \cdot k} \\ &= e^{i2\pi \beta n \cdot x} e^{-i2\pi \alpha \omega \cdot k} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^d} e^{-\frac{\pi}{c}\|x - \alpha \ell\|^2} e^{-i2\pi \beta \alpha \ell \cdot n} e^{i2\pi \alpha \omega \cdot \ell} \\ &= e^{i2\pi \beta n \cdot x} e^{-i2\pi \alpha \omega \cdot k} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^d} e^{-\frac{\pi}{c}\|x - \alpha \ell\|^2} e^{i2\pi \alpha \ell \cdot (\omega - \beta n)} \\ Z_{\alpha} \varphi_{k,n}(x, \omega) &= e^{i2\pi \beta n \cdot x} e^{-i2\pi \alpha \omega \cdot k} Z_{\alpha} \varphi(x, \omega - \beta n) \end{aligned}$$

Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on calcule alors

$$\begin{aligned}
\langle f, S_{\varphi_{k,n}} f \rangle &= \sum_{k,n \in \mathbb{Z}^d} |\langle \varphi_{k,n}, f \rangle_{L^2}|^2 \\
&= \alpha^{2d} \sum_{k,n \in \mathbb{Z}^d} |\langle Z_\alpha \varphi_{k,n}, Z_\alpha f \rangle_{L^2}|^2 && \text{car } \sqrt{\alpha^d} Z_\alpha \text{ est unitaire} \\
&= \alpha^{2d} \sum_{k,n \in \mathbb{Z}^d} \left| \int_{Q_\alpha \times Q_\beta} \overline{Z_\alpha \varphi_{k,n}} Z_\alpha f(x, \omega) dx d\omega \right|^2 \\
&= \alpha^{2d} \sum_{k,n \in \mathbb{Z}^d} \left| \int_{Q_\alpha \times Q_\beta} e^{-i2\pi\beta n \cdot x} e^{i2\pi\alpha\omega \cdot k} \overline{Z_\alpha \varphi(x, \omega - \beta n)} Z_\alpha f(x, \omega) dx d\omega \right|^2 \\
&= \alpha^{2d} \sum_{k,n \in \mathbb{Z}^d} \left| \int_{Q_\alpha \times Q_\beta} e^{-i2\pi\beta n \cdot x} e^{i2\pi\alpha k \cdot \omega} Z_\alpha \varphi(x, \omega - \beta n) Z_\alpha f(x, \omega) dx d\omega \right|^2 && \text{car } \varphi \text{ est réelle} \\
\langle f, S_{\varphi_{k,n}} f \rangle &= \alpha^{2d} \sum_{k,n \in \mathbb{Z}^d} \left| \int_{Q_\alpha \times Q_\beta} Z_\alpha \varphi(x, \omega - \beta n) Z_\alpha f(x, \omega) e^{-i2\pi\beta n \cdot x} e^{-i2\pi\alpha k \cdot \omega} dx d\omega \right|^2 && \text{car } \varphi \text{ est réelle}
\end{aligned}$$

5.2 Cas $\alpha\beta = 1$

Alors $\forall x, \omega \in \mathbb{R}^d \quad Z_\alpha \varphi(x, \omega - \beta n) = Z_\alpha \varphi(x, \omega)$

i.e.

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \quad Z_\alpha \varphi(x, \cdot) \text{ } \beta\mathbb{Z}^d\text{-périodique}$$

(on a déjà la $\alpha\mathbb{Z}^d$ -quasi-périodicité par rapport à la première variable) (**ça suffit ?**)

Donc

$$\begin{aligned}
\langle f, S_{\varphi_{k,n}} f \rangle &= \alpha^{2d} \sum_{k,n \in \mathbb{Z}^d} \left| \int_{Q_\alpha \times Q_\beta} Z_\alpha \varphi(x, \omega) Z_\alpha f(x, \omega) e^{-i2\pi\beta n \cdot x} e^{-i2\pi\alpha\omega \cdot k} dx d\omega \right|^2 \\
&= \alpha^{2d} \sum_{k,n \in \mathbb{Z}^d} \left| \int_{Q_\alpha \times Q_\beta} Z_\alpha \varphi(x, \omega) Z_\alpha f(x, \omega) e^{-i2\pi(1/\alpha)n \cdot x} e^{-i2\pi(1/\beta)\omega \cdot k} dx d\omega \right|^2 \\
&= \alpha^{2d} \|Z_\alpha \varphi Z_\alpha f\|_{L^2}^2 && \text{par théorème de Plancherel (Fourier)} \\
\langle f, S_{\varphi_{k,n}} f \rangle &= \alpha^{2d} \int_{Q_\alpha \times Q_\beta} |Z_\alpha f(x, \omega)|^2 |Z_\alpha \varphi(x, \omega)|^2 dx d\omega
\end{aligned}$$

Comme $\varphi \in W_0(\mathbb{R}^d)$, on a $Z_\alpha \varphi \in L^\infty(Q_\alpha \times Q_{1/\alpha})$ (et $Z_\alpha \varphi \in \mathcal{C}^0(Q_\alpha \times Q_{1/\alpha})$) d'où la borne supérieure voulue. Donc $S_{\varphi_{k,n}}$ est bornée.

On cherche alors les infimums (qui sont alors les minimums) de $Z_\alpha \varphi$ (sur $Q_\alpha \times Q_{1/\alpha}$).

On rappelle qu'on a :

$$\forall_{\lambda} x, \omega \in \mathbb{R}^d \quad |Z_{\alpha} \varphi(x, \omega)|^2 = \left\| \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^d} e^{-\frac{\pi}{c} \|x - \alpha \ell\|^2} e^{i2\pi \omega \cdot \ell} \right\|^2$$

On pose

$$\theta : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ \tilde{x}, \tilde{\omega} \mapsto \left| \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi}{c} |\tilde{x} - \alpha \ell|^2} e^{i2\pi \tilde{\omega} \ell} \right|^2 \end{cases}$$

De sorte à avoir pour $x = (x_1, \dots, x_d), \omega = (\omega_1, \dots, \omega_d) \in \mathbb{R}^d$

$$|Z_{\alpha} \varphi(x, \omega)|^2 = \prod_{i=1}^d \theta(x_i, \omega_i)$$

(à faire)

Donc

$$\min_{(x, \omega) \in Q_{\alpha} \times Q_{1/\alpha}} |Z_{\alpha} \varphi(x, \omega)|^2 = \min_{(\tilde{x}, \tilde{\omega}) \in [0, \alpha] \times [0, 1/\alpha]} \prod_{i=1}^d \theta(\tilde{x}, \tilde{\omega}) = \left(\min_{(\tilde{x}, \tilde{\omega}) \in [0, \alpha] \times [0, 1/\alpha]} \theta(\tilde{x}, \tilde{\omega}) \right)^d$$

On cherche alors les points d'annulation de θ sur $[0, \alpha] \times [0, 1/\alpha]$

Soit $(\tilde{x}, \tilde{\omega}) \in [0, \alpha] \times [0, 1/\alpha]$. On écrit :

$$\theta(\tilde{x}, \tilde{\omega}) = \left| \vartheta \left(\alpha \left(-\frac{i}{c} \tilde{x} + \tilde{\omega} \right), \frac{i}{c} \alpha^2 \right) \right|^2$$

Or (admis) :

$$\forall z, \tau \in \mathbb{C} \quad \vartheta(z, \tau) = 0 \iff \exists m, n \in \mathbb{Z} \quad z = \left(m + \frac{1}{2} \right) + \left(n + \frac{1}{2} \right) \tau$$

Soit $m, n \in \mathbb{Z}$. On a

$$\begin{aligned} \alpha \left(-\frac{i}{c} \tilde{x} + \tilde{\omega} \right) &= \left(m + \frac{1}{2} \right) + \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{i}{c} \alpha^2 \iff -\frac{i}{c} \tilde{x} + \tilde{\omega} = \left(m + \frac{1}{2} \right) + \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{i}{c} \alpha \\ &\iff \begin{cases} -\tilde{x} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \alpha \\ \tilde{\omega} = m + \frac{1}{2} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \tilde{x} = \left(-n + -\frac{1}{2} \right) \alpha \\ \tilde{\omega} = m + \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Donc pour que $(\tilde{x}, \tilde{\omega}) \in [0, \alpha] \times [0, 1/\alpha]$ et que $\theta(\tilde{x}, \tilde{\omega}) = 0$, cela force :

$$\begin{cases} n = -1 \\ m = 0 \\ \frac{1}{\alpha} \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc sous ces hypothèses :

$$\theta(\tilde{x}, \tilde{\omega}) = 0 \iff \begin{cases} \tilde{x} = \frac{1}{2}\alpha \\ \tilde{\omega} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

On déduit alors que $\min_{(\tilde{x}, \tilde{\omega}) \in [0, \alpha] \times [0, 1/\alpha]} \theta(\tilde{x}, \tilde{\omega}) = 0$ et est atteint en un unique point.

Donc il en va de même pour $\min_{(x, \omega) \in Q_\alpha \times Q_{1/\alpha}} |Z_\alpha \varphi(x, \omega)|^2$

Et alors on a que :

$$\langle f, S_{\varphi_{k,n}} f \rangle > 0$$

mais **ON N'A PAS** (par continuité de $Z_\alpha \varphi$) :

$$\exists A > 0 \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^d) \quad \langle f, S_{\varphi_{k,n}} f \rangle \geq A \|f\|_{L^2}$$

(à faire)

5.3 Cas $\alpha\beta \in \mathbb{Q}$

(après) On définit alors

$$\Theta : \left\{ (x, \omega) \mapsto \right.$$

6 Étude discète

6.1 Notations

Dans toute cette section, pour $L \in \mathbb{N}^*$ on appellera **signal** de longueur L toute application $f : \llbracket 0, L-1 \rrbracket \rightarrow \mathbb{C}$. On notera l'ensemble des signaux de longueur L (indexés par $\llbracket 0, L-1 \rrbracket$) : \mathbb{C}^L . On notera pour $k \in \llbracket 0, L-1 \rrbracket$, $f[k] := f(k)$ pour rappeler qu'on travaille avec une application définie sur un ensemble discret. Cette notation fait particulièrement sens en vertu des notations pour les listes en Python notamment.

On notera de plus sans distinction f et $(f[k])$, sous entendu $(f[k])_{k \in \llbracket 0, L-1 \rrbracket}$.

On fixera de plus pour toute cette section, $L \in \mathbb{N}^*$ (même rôle que le $d \in \mathbb{N}^*$ dans les autres sections).

On considèrera par abus que tout signal $f \in \mathbb{C}^L$ est périodisée sur \mathbb{Z} de la manière suivante :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \forall q \in \mathbb{Z} \quad f[k + qL] = f[k]$$

Pour $f, g \in \mathbb{C}^L$, on notera

$$\langle f, g \rangle := \sum_{k=0}^{L-1} \overline{f[k]} g[k]$$

leur produit scalaire (canonique dans \mathbb{C}^L).

On utilisera le signal suivant en guise de référence.

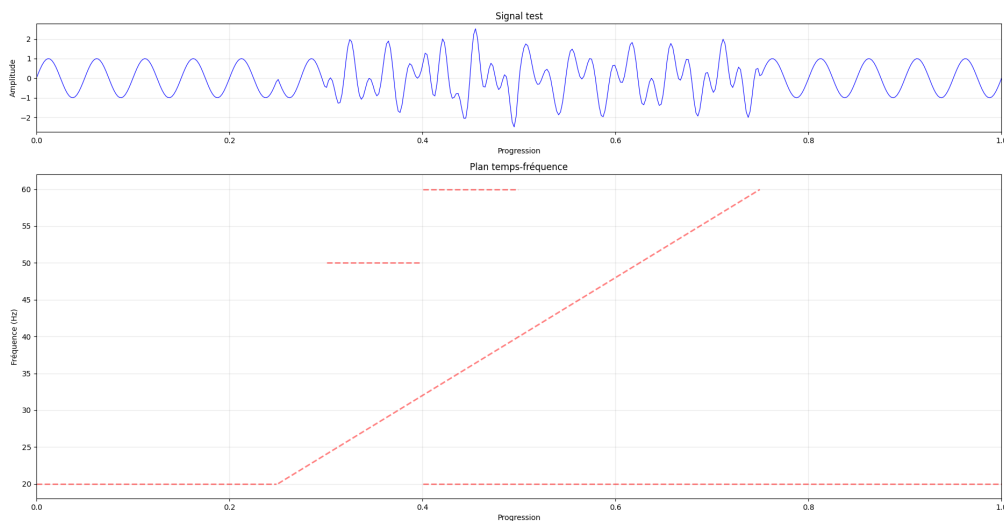


FIGURE 1 – Signal test

Les fenêtres sont définies en pratique sur $\llbracket 0, \frac{L}{2} - 1 \rrbracket \cup \llbracket -\frac{L}{2}, -1 \rrbracket$ avec L pair.

Quand on fera allusion à un paramètre pour une fonction, on pensera au paramètre pour cette même fonction définie sur $[-0.5, 0.5]$ quitte à dilater son domaine de définition. Par exemple, une "gaussienne de variance $\sigma > 0$ " désignera le vecteur $(\exp(-\pi \frac{(k/L)^2}{\sigma^2}))_k \in \mathbb{C}^L$

On pose également pour $f \in \mathbb{C}^L$:

$$\forall j \in \llbracket 0, L-1 \rrbracket \quad T_\nu f = (f[k-j])_k$$

et

$$\forall \nu \in \llbracket 0, L-1 \rrbracket \quad M_\nu f = (f[k] e^{i \frac{2\pi}{L} \nu k})_k$$

6.2 Légitimité

Montrer que l'étude discrète a du sens (passage $L^2(\mathbb{R})$ à \mathbb{C}^L et réciproquement)

6.3 Transformée de Fourier

Définition 6.1 (DFT)

Soit $f \in \mathbb{C}^L$. On pose :

$$\forall k \in \llbracket 0, L-1 \rrbracket, \quad \hat{f}[k] = \sum_{n=0}^{L-1} f[n] e^{-2i\pi \frac{n}{L} k}$$

Cela nous définit l'opérateur de **transformée de Fourier discret**

$$\mathcal{F} \begin{cases} \mathbb{C}^L \rightarrow \mathbb{C}^L \\ (f[k])_k \mapsto (\hat{f}[k])_k \end{cases}$$

de matrice

$$\mathcal{F}_d = (e^{-2i\pi \frac{ij}{N}})_{i,j \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-2i\pi \frac{1}{N}} & e^{-2i\pi \frac{2}{N}} & \dots & e^{-2i\pi \frac{(N-1)}{N}} \\ 1 & e^{-2i\pi \frac{2}{N}} & e^{-2i\pi \frac{4}{N}} & \dots & e^{-2i\pi \frac{2(N-1)}{N}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-2i\pi \frac{(N-1)}{N}} & e^{-2i\pi \frac{2(N-1)}{N}} & \dots & e^{-2i\pi \frac{(N-1)^2}{N}} \end{pmatrix}$$

qui est une matrice symétrique.

On note $f_e \in \mathbb{N}^+$ la fréquence d'échantillonnage. Pour l'analyse du spectre (module de la projection en fonction des fréquences), on se restreint à la plage de fréquences $[0, \frac{f_e}{2}]$. (par parité et aliasing)

```
def ft(signal):
```

```
    L = len(signal) # nombre d'échantillons
```

```
    n = np.arange(L) # indices (somme sur n)
```

```
    result = np.zeros(L, dtype=np.complex64)
```

```
    for k in range(L):
```

```
        result[k] = np.sum(signal * np.exp(-2j * np.pi * k * n / L))
```

```
    return result
```

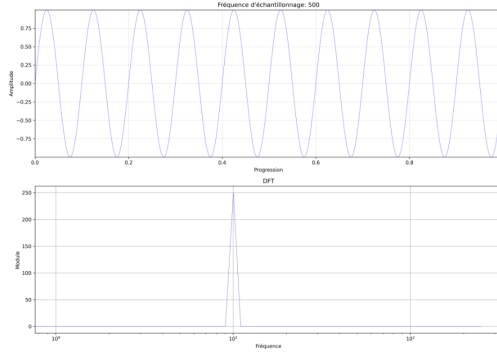


FIGURE 2 – Transformée de Fourier d'une sinusoïde à 10Hz

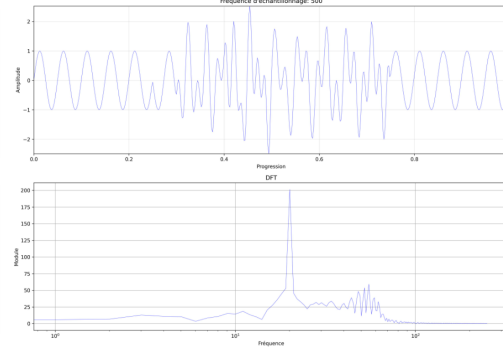


FIGURE 3 – Transformée de Fourier du signal de référence

Propriété 6.1

$(n \mapsto \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i \frac{2\pi}{L} kn})_{k \in \llbracket 0, L-1 \rrbracket}$ est une base orthonormée de \mathbb{C}^L .

De plus pour $f \in \mathbb{C}^L$:

$$\forall n \in \llbracket 0, L-1 \rrbracket \quad f[n] = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} \hat{f}[k] e^{i \frac{2\pi}{L} kn}$$

6.4 Transformée de Fourier en temps court

Définition 6.2 (STDFT)

Soit $f, g \in \mathbb{C}^L$. On pose :

$$\forall k, \ell \in \llbracket 0, L-1 \rrbracket, \quad V_g f[k, \ell] = \sum_{n=0}^{L-1} f[n] \overline{g[n-k]} e^{-2i\pi \frac{n}{N} \ell} = \mathcal{F}(f \times T_k \bar{g})[\ell]$$

Cela nous définit l'opérateur de **transformée de Fourier discret en temps court**

$$V_g : \begin{cases} \mathbb{C}^L \rightarrow \mathbb{C}^L \\ (f[n])_n \mapsto (V_g f[n])_n \end{cases}$$

Remarque 6.1. Les STDFT peuvent être calculées plus en utilisant une FFT :

```
def fstdft(signal, window=lambda t: 1):
    window = discretize_window(window=window)
    L = len(signal)
    result = np.zeros((L, L), dtype=np.complex64)
    for i in range(L):
        translated_window = np.ones(L)
        for k in range(L):
            t = k
            translated_window[k] = window[t - i]
```

```

result[i] = fft(signal * np.conjugate(translated_window))
return result.transpose()

```

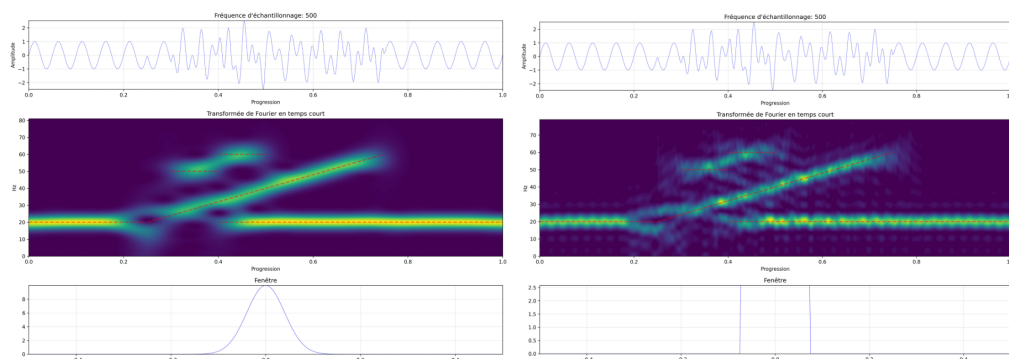


FIGURE 4 – Gaussienne de variance 0.1, module au carré

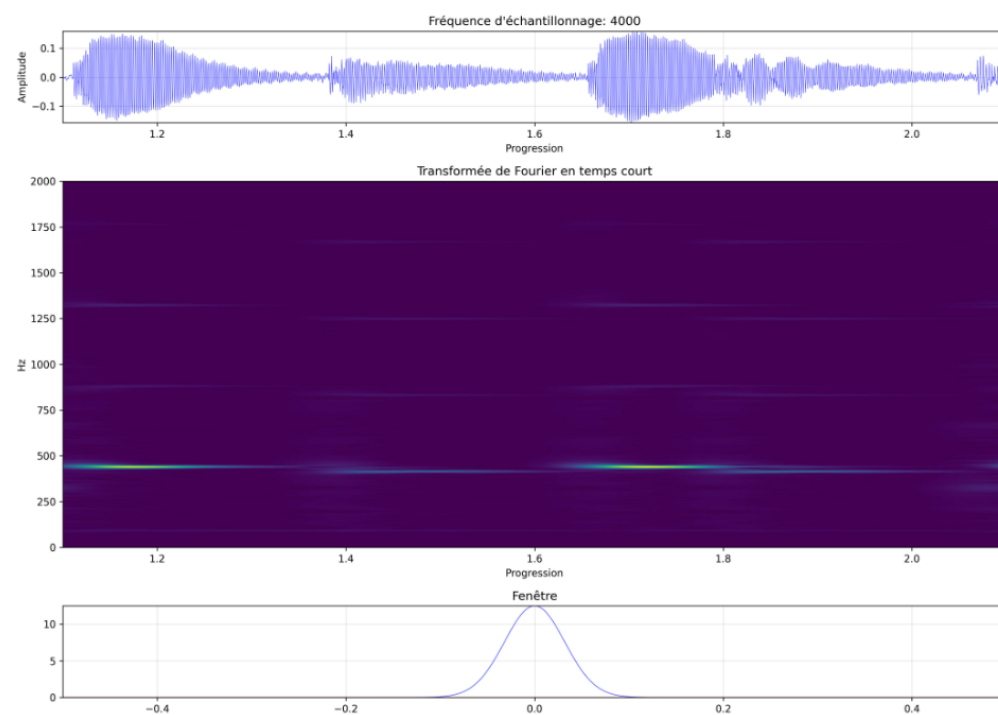


FIGURE 6 – Extrait d'un morceau joué au piano, gaussienne de variable 0.08, module

Propriété 6.2 (Formule d'inversion de la STDFT)

Soit $g \in \mathbb{C}^L \setminus \{0\}$. Soit $\gamma \in \mathbb{C}^L$ vérifiant $\langle \gamma, g \rangle \neq 0$.
 Soit $f \in \mathbb{C}^L$.
 Alors

$$\forall n \in \llbracket 0, L-1 \rrbracket, \quad f[n] = \frac{1}{L \langle \gamma, g \rangle} \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{\ell=0}^{L-1} \langle T_k M_\ell g, f \rangle T_k M_\ell \gamma(n)$$

Démonstration. à faire □

Propriété 6.3 (Caractère isométrique de V_g)

Soit $g \in \mathbb{C}^L \setminus \{0\}$.
 Soit $f \in \mathbb{C}^L$.
 On suppose $\|g\|_2^2 = \frac{1}{L}$.
 Alors

$$\sum_{n=0}^{L-1} |f[n]|^2 = \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{\ell=0}^{L-1} |V_g f[k, \ell]|^2$$

6.5 Système de Gabor

Définition 6.3

Soit $g \in \mathbb{C}^L \setminus \{0\}$. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $\alpha \mid L$ et $\beta \mid L$. On définit $\tilde{\alpha} := \frac{L}{\alpha}, \tilde{\beta} := \frac{L}{\beta} \in \mathbb{N}^*$.
 On définit le **système de Gabor** associé par :

$$\mathcal{G}(g, \alpha, \beta) := \{T_{k\alpha} M_{\ell\beta} g \mid (k, \ell) \in \llbracket 0, \tilde{\alpha} \rrbracket \times \llbracket 0, \tilde{\beta} \rrbracket\}$$

Si de plus, $\text{Vect } \mathcal{G}(g, \alpha, \beta) = \mathbb{C}^L$, on dit que $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ est une **trame de Gabor**.

Remarque 6.2. La formule d'inversion de la STDFT appliquée à $\gamma = g$ donne

$$\mathcal{G}(g, 1, 1) \text{ est une trame serrée de bornes } L \|g\|_2^2$$

donc on veut alléger, peut être qu'on peut ne pas tout avoir

Notation 6.1. Dans toute cette section, on se fixe $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $\alpha \mid L$ et $\beta \mid L$.

Et on définit $\tilde{\alpha} := \frac{L}{\alpha}, \tilde{\beta} := \frac{L}{\beta} \in \mathbb{N}^*$.

Et on note $q := e^{i\frac{2\pi}{L}}$

Comme on travaille en dimension finie, on voudrait voir la condition $\text{Vect } \mathcal{G}(g, \alpha, \beta) = \mathbb{C}^L$ d'un point de vue matriciel. On veut alors voir $\text{Vect } \mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ comme l'image d'une matrice.

Définition 6.4

Soit $g \in \mathbb{C}^L$. On note $\tilde{L} := \tilde{\alpha}\tilde{\beta}$
 On définit la matrice définie par ses colonnes

$$(g \quad T_\alpha g \quad \cdots \quad T_{(\tilde{\alpha}-1)\alpha} g \quad M_\beta g \quad M_\beta T_\alpha g \quad \cdots \quad M_\beta T_{(\tilde{\alpha}-1)\alpha} g \quad \cdots \quad M_{(\tilde{\beta}-1)\beta} T_{(\tilde{\alpha}-1)\alpha} g)$$

qui n'est rien d'autre que la matrice de l'opérateur de reconstruction $D_g : \mathbb{C}^{\tilde{L}} \rightarrow \mathbb{C}^L$.
On définit alors pour $g, \gamma \in \mathbb{C}^L$, l'opérateur de trame associé :

$$S_{g,\gamma} = D_\gamma D_g^* \in \mathcal{M}_{L,L}(\mathbb{C})$$

que l'on considère (car g est périodisée d'une période L) indicée sur $\mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$

Remarque 6.3. Supposons que $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ soit une trame. Alors $D_{g,\gamma}$ est surjective et donc $\tilde{L} \geq L$.

Or $\tilde{L} = \frac{L^2}{\alpha\beta} = \frac{L}{\alpha\beta}L$. Donc cela force $\frac{L}{\alpha\beta} \geq 1$. D'où la proposition suivante :

Propriété 6.4

Soit $g \in \mathbb{C}^L$.

Supposons que $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ soit une trame.

Alors $\frac{\alpha\beta}{L} \leq 1$. On dit alors qu'on est dans le cas d'un **sur-échantillonnage** si l'inégalité est stricte, dans le cas **critique** s'il y a égalité.

Remarque 6.4. On dit qu'on est dans le cas d'un **sous-échantillonnage** si $\alpha\beta > L$

On a la caractérisation suivante, qui motive l'étude de $S_{g,g}$

Propriété 6.5

Soit $g \in \mathbb{C}^L$

Alors

$$\mathcal{G}(g, \alpha, \beta) \text{ est une trame} \iff S_{g,g} \in \text{GL}_L(\mathbb{C})$$

Démonstration. On observe que par construction, $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ est une trame $\iff D_g$ est surjective.

Montrons alors D_g est surjective $\iff S_{g,g}$ est inversible

On notera pour cette preuve $S := S_{g,g}$ et $D := D_g$

(\implies) Montrons que S est injective. Soit $x \in \mathbb{C}^L$ vérifiant $Sx = 0$ i.e. $DD^*x = 0$.

i.e. $D^*x \in \ker D$. Voyons que $x = 0$

On a alors pour $y \in \mathbb{C}^{\tilde{L}}$:

$$\langle x, Dy \rangle = \langle D^*x, y \rangle = 0$$

Or D est surjective, donc

$$\forall y \in \mathbb{C}^L \quad \langle x, y \rangle = 0$$

Donc $x = 0$ car $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est non dégénéré. Donc S est bien injective donc inversible.

(\impliedby) Montrons le par contraposée. Supposons D non surjective. On prend $y \in \text{Ran } D^\perp \setminus \{0\}$.
Alors

$$\forall x \in \mathbb{C}^{\tilde{L}} \quad \langle Dx, y \rangle = 0$$

d'où

$$\forall x \in \mathbb{C}^{\tilde{L}} \quad \langle x, D^*y \rangle = 0$$

Donc $D^*y = 0$. Et alors D^* n'est pas injective.

Donc S n'est pas injective non plus. Donc S n'est pas inversible. \square

Propriété 6.6

Soit $g, \gamma \in \mathbb{C}^L$. Alors sont équivalentes

- (i) $S_{g,\gamma} = D_\gamma D_g^* = \text{id}_{\mathbb{C}^L}$
- (ii) $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ et $\mathcal{G}(\gamma, \alpha, \beta)$ sont des trames.

Démonstration. On a $S_{g,\gamma} = D_\gamma D_g^* = \text{id}_{\mathbb{C}^L} \iff \begin{cases} D_\gamma \text{ est surjective} \\ D_g^* \text{ est injective} \end{cases}$
 $\iff \begin{cases} D_\gamma \text{ est surjective} \\ D_g \text{ est surjective} \end{cases}$

D'où le résultat. \square

Remarque 6.5. Cette propriété s'applique en particulier pour toutes fenêtre duales (qui sont obtenues de cette manière)

6.6 Représentation de Walnut

Propriété 6.7

Soit $g, \gamma \in \mathbb{C}^L$

Alors pour $j, \ell \in \llbracket 0, L-1 \rrbracket$, on a

$$[S_{g,\gamma}]_{j,\ell} := \begin{cases} \tilde{\beta} \sum_{n=0}^{\tilde{\alpha}-1} \overline{g[\ell - \alpha n]} \gamma[j - \alpha n] & \text{si } \tilde{\beta} \mid |j - \ell| \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration. Soit $j, \ell \in \llbracket 0, L-1 \rrbracket$. On calcule

$$\begin{aligned}
[S_{g,\gamma}]_{j,\ell} &= [D_\gamma D_g^*]_{j,\ell} \\
&= \sum_{k=0}^{\tilde{\alpha}-1} \sum_{n=0}^{\tilde{\beta}-1} M_{\beta n} T_{\alpha k} \gamma[j] \overline{M_{\beta n} T_{\alpha k} g[\ell]} \\
&= \sum_{k=0}^{\tilde{\alpha}-1} \sum_{n=0}^{\tilde{\beta}-1} q^{\beta n j} \gamma[j - \alpha k] q^{-\beta n \ell} \overline{g[\ell - \alpha k]} \\
&= \sum_{k=0}^{\tilde{\alpha}-1} \sum_{n=0}^{\tilde{\beta}-1} q^{\beta n(j-\ell)} \gamma[j - \alpha k] \overline{g[\ell - \alpha k]} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\tilde{\beta}-1} q^{\beta n(j-\ell)} \right) \left(\sum_{k=0}^{\tilde{\alpha}-1} \gamma[j - \alpha k] \overline{g[\ell - \alpha k]} \right)
\end{aligned}$$

Calculons maintenant la somme géométrique $\sum_{n=0}^{\tilde{\beta}-1} q^{\beta n(j-\ell)}$. On a deux cas :

$$\begin{aligned}
\triangleleft \text{ Cas } q^{\beta(j-\ell)} = 1 : \text{ Alors } \sum_{n=0}^{\tilde{\beta}-1} q^{\beta n(j-\ell)} &= \tilde{\beta} \\
\triangleleft \text{ Cas } q^{\beta(j-\ell)} \neq 1 : \text{ Alors } \sum_{n=0}^{\tilde{\beta}-1} q^{\beta n(j-\ell)} &= \frac{1 - q^{\beta \tilde{\beta}(j-\ell)}}{1 - q^{\beta(j-\ell)}} \text{ Or} \\
1 - q^{\beta \tilde{\beta}(j-\ell)} &= 1 - e^{i \frac{2\pi}{L} \beta \tilde{\beta}(j-\ell)} \\
&= 1 - e^{i 2\pi(j-\ell)}
\end{aligned}$$

Et $(j - \ell) \in \mathbb{Z}$. Donc $1 - q^{\beta \tilde{\beta}(j-\ell)} = 0$ et alors $\sum_{n=0}^{\tilde{\beta}-1} q^{\beta n(j-\ell)} = 0$.

Et

$$\begin{aligned}
q^{\beta(j-\ell)} = 1 &\iff e^{i \frac{2\pi}{L} \beta(j-\ell)} = 1 \\
&\iff e^{i \frac{2\pi}{\tilde{\beta}} (j-\ell)} = 1 \\
&\iff \frac{(j-\ell)}{\tilde{\beta}} \in \mathbb{Z} \\
&\iff \tilde{\beta} \mid (j-\ell) \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \sum_{n=0}^{\tilde{\beta}-1} q^{\beta n(j-\ell)} = \begin{cases} \tilde{\beta} & \text{si } \tilde{\beta} \mid (j-\ell) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

D'où le résultat voulu. □

Remarque 6.6 (Légitimité du nom de la représentation). Soit $f \in \mathbb{C}^L$ Soit $m \in \llbracket 0, L-1 \rrbracket$.

On a

$$[S_{g,\gamma}f]_m = \tilde{\beta} \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{n=0}^{\tilde{\alpha}-1} \overline{g[k - \alpha n]} \gamma[m - \alpha n] \mathbb{K}_{\{\tilde{\beta} \mid m-k\}} f[k]$$

et on peut écrire

$$[S_{g,\gamma}f]_m = \tilde{\beta} \sum_{\ell=0}^{\beta-1} \sum_{n=0}^{\tilde{\alpha}-1} \overline{g[m - \tilde{\beta}\ell - \alpha n]} \gamma[m - \alpha n] f[m - \tilde{\beta}\ell]$$

Et on retrouve la représentation de Walnut vue précédemment.

Corollaire 6.1

Soit $g, \gamma \in \mathbb{C}^L$

On définit la **fonction de corrélation**

$$\forall \ell \in \llbracket 0, \beta-1 \rrbracket \quad \forall m \in \llbracket 0, L-1 \rrbracket \quad G_\ell(m) := \sum_{n=0}^{\tilde{\alpha}-1} \overline{g[m - \tilde{\beta}\ell - \alpha n]} \gamma[m - \alpha n]$$

De sorte à avoir

$$\forall m \in \llbracket 0, L-1 \rrbracket \quad S_{g,\gamma}f = \tilde{\beta} \sum_{\ell=0}^{\beta-1} G_\ell \times T_{\tilde{\beta}\ell} f$$

Lemme 6.1

Soit $g, \gamma \in \mathbb{C}^L$

Alors pour $j, \ell \in \llbracket 0, L-1 \rrbracket$, on a

$$[S_{g,\gamma}]_{j+\alpha, \ell+\alpha} = [S_{g,\gamma}]_{j, \ell}$$

Démonstration. Soit $\ell \in \llbracket 0, L-1 \rrbracket$. On a

$$\begin{aligned} \ell + (1-n)\alpha + L &= \ell + (1-n + \frac{L}{\alpha})\alpha \\ &= \ell + (1-n + \tilde{\alpha})\alpha \\ &= \ell - (n - \tilde{\alpha} - 1)\alpha \\ \ell + (1-n)\alpha + L &= \ell - (n - (\tilde{\alpha} + 1))\alpha \end{aligned}$$

Et alors pour $j, \ell \in \llbracket 0, L-1 \rrbracket$. On obtient (le cas $\tilde{\beta} \nmid |j - \ell|$ donne juste $0 = 0$ comme voulu)

$$\begin{aligned}
[S_{g,\gamma}]_{j+\alpha,\ell+\alpha} &= \tilde{\beta} \sum_{n=0}^{\tilde{\alpha}-1} \overline{g[\ell + \alpha - \alpha n]} \gamma[j + \alpha - \alpha n] \\
&= \tilde{\beta} \sum_{n=0}^{\tilde{\alpha}-1} \overline{g[\ell + \alpha - \alpha n + L]} \gamma[j + \alpha - \alpha n + L] \\
&= \tilde{\beta} \sum_{n=0}^{\tilde{\alpha}-1} \overline{g[\ell - (n - (\tilde{\alpha} - 1))\alpha]} \gamma[j - (n - (\tilde{\alpha} - 1))\alpha] \\
&= \tilde{\beta} \sum_{n=0}^{\tilde{\alpha}-1} \overline{g[\ell - n\alpha]} \gamma[j - n\alpha] \\
[S_{g,\gamma}]_{j+\alpha,\ell+\alpha} &= [S_{g,\gamma}]_{j,\ell}
\end{aligned}$$

Comme voulu. □

Corollaire 6.2

Soit $g, \gamma \in \mathbb{C}^L$

Alors $S_{g,\gamma}$ est de la forme :

$$S_{g,\gamma} = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_{\tilde{\alpha}-1} \\ A_{\tilde{\alpha}-1} & A_0 & \cdots & A_{\tilde{\alpha}-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1 & A_2 & \cdots & A_0 \end{pmatrix}$$

où les $A_i \in \mathcal{M}_{\alpha,\alpha}(\mathbb{C})$ vérifiant :

$$\forall s \in \llbracket 0, \tilde{\alpha} - 1 \rrbracket \quad \forall j, \ell \in \llbracket 0, \alpha - 1 \rrbracket \quad [A_s]_{j,\ell} = [S_{g,\gamma}]_{j+s\alpha,\ell+s\alpha}$$

On note alors $S_{g,\gamma} = C(A_0, \dots, A_{\tilde{\alpha}-1})$

Remarquons que comme $S_{g,\gamma}$ est auto-adjointe, $\forall j \in \llbracket 0, \lfloor \tilde{\alpha}/2 \rfloor - 1 \rrbracket \quad A_j = \overline{A_{\tilde{\alpha}-j}}$

Remarque 6.7. On appelle ce type de matrice, une matrice circulante par blocs.

Propriété 6.8

Soit $g, \gamma \in \mathbb{C}^L$.

Supposons $\exists k \in \llbracket 0, L-1 \rrbracket \quad [S_{g,\gamma}]_{k,k} = 0$.

Alors $S_{g,\gamma}$ n'est pas inversible.

Démonstration. On fixe un tel $k \in \llbracket 0, L-1 \rrbracket$.

Alors $\forall n \in \llbracket 0, \tilde{\alpha} - 1 \rrbracket \quad g(k - n\alpha) = 0$.

Et donc

$$\forall j \in \llbracket 0, L-1 \rrbracket \quad [S_{g,\gamma}]_{j,k} = 0$$

Donc S a une ligne nulle. Donc S n'est pas inversible □

Propriété 6.9

Soit $g, \gamma \in \mathbb{C}^L$. On écrit $S_{g,\gamma} = C(A_0, \dots, A_{\tilde{\alpha}-1})$.
 Pour $r \in \llbracket 0, \tilde{\alpha} - 1 \rrbracket$, on définit

$$\hat{A}_r := \sum_{s=0}^{\tilde{\alpha}-1} A_s \exp\left(-i \frac{2\pi}{\tilde{\alpha}} r s\right)$$

Alors on a

$$S_{g,\gamma} \in \text{GL}_L(\mathbb{C}) \iff \forall r \in \llbracket 0, \tilde{\alpha} - 1 \rrbracket \quad \hat{A}_r \in \text{GL}_{\tilde{\alpha}}(\mathbb{C})$$

et dans ce cas, $A^{-1} = C(B_0, \dots, B_{\tilde{\alpha}-1})$ où

$$\forall r \in \llbracket 0, \tilde{\alpha} - 1 \rrbracket \quad B_r := \frac{1}{\tilde{\alpha}} \sum_{s=0}^{\tilde{\alpha}-1} A_s^{-1} \exp\left(i \frac{2\pi}{\tilde{\alpha}} r s\right)$$

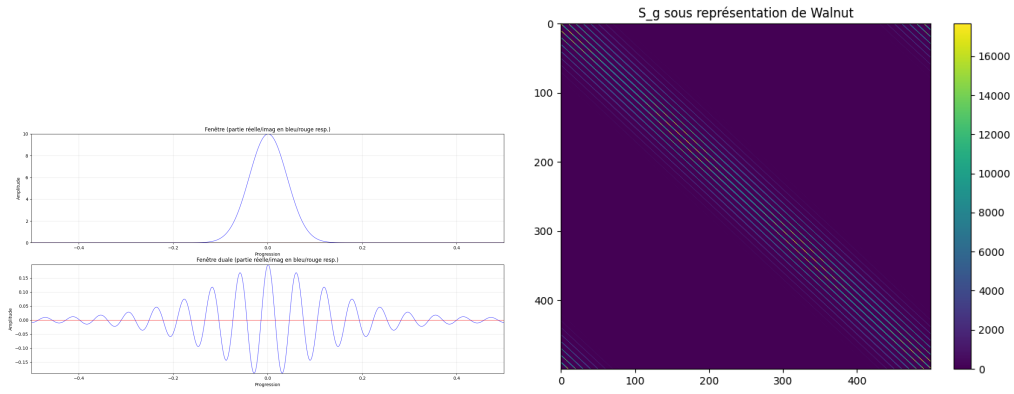


FIGURE 7 – $\alpha = 2, \beta = 50$, sur-échantillonnage, fenêtre gaussienne de variance 0.1.

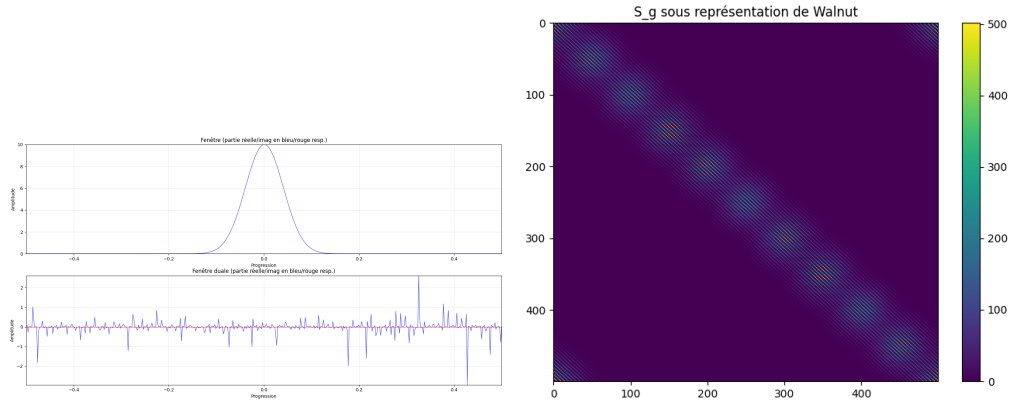


FIGURE 8 – $\alpha = 50, \beta = 100$, sous-échantillonnage, fenêtre gaussienne de variance 0.1.

Corollaire 6.3

Soit $g, \gamma \in \mathbb{C}^L$. On écrit $S_{g,\gamma} = C(A_0, \dots, A_{\tilde{\alpha}-1})$.

Supposons $\frac{\alpha\tilde{\beta}}{L} = 1/q \in \mathbb{Q}$, i.e. qu'on est dans le cas d'un sur-échantillonnage entier.

Alors

$$S_{g,\gamma} \in \text{GL}_L(\mathbb{C}) \iff \forall r \in \llbracket 0, \tilde{\alpha} - 1 \rrbracket \quad \forall j \in \llbracket 0, \alpha - 1 \rrbracket \quad [\hat{A}_r]_{j,j} \neq 0$$

Démonstration. On a alors $\tilde{\beta} = \alpha q$. Et donc les A_s ($s \in \llbracket 0, \tilde{\alpha} - 1 \rrbracket$) sont des matrices diagonales.

Alors pour tout $r \in \llbracket 0, \tilde{\alpha} - 1 \rrbracket$, on a que $\hat{A}_r = \sum_{s=0}^{\tilde{\alpha}-1} A_s \exp\left(-i \frac{2\pi}{\tilde{\alpha}} rs\right)$ est diagonale, et donc est inversible si et seulement si les coefficients de sa diagonale sont non nuls. \square

Remarque 6.8. Supposons $\frac{\alpha\tilde{\beta}}{L} = 1/q \in \mathbb{Q}$, i.e. qu'on est dans le cas d'un sur-échantillonnage entier.

Soit $\sigma_1, \sigma_2 > 0$. On pose $g := (\exp(-\frac{k^2}{\sigma_1^2})) \in \mathbb{C}^L$ et $\gamma := (\exp(-\frac{k^2}{\sigma_2^2})) \in \mathbb{C}^L$.

On écrit $S_{g,\gamma} = C(A_0, \dots, A_{\tilde{\alpha}-1})$.

Alors pour $r \in \llbracket 0, \tilde{\alpha} - 1 \rrbracket$ et $j \in \llbracket 0, \alpha \rrbracket$

$$[\hat{A}_r]_{j,j} = \tilde{\beta} \sum_{k=0}^{\beta-1} \exp\left(-i \frac{2\pi}{\beta} rk\right) \sum_{\ell=0}^{\tilde{\alpha}-1} \exp\left(-\frac{(j - \alpha k + s\tilde{\beta})^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} rk\right)$$

qui est non nul.

expression générale de l'inverse pour gaussienne $t \mapsto e^{-t^2/c}$ dans \mathbb{R} , on a alors une expression pour la duale

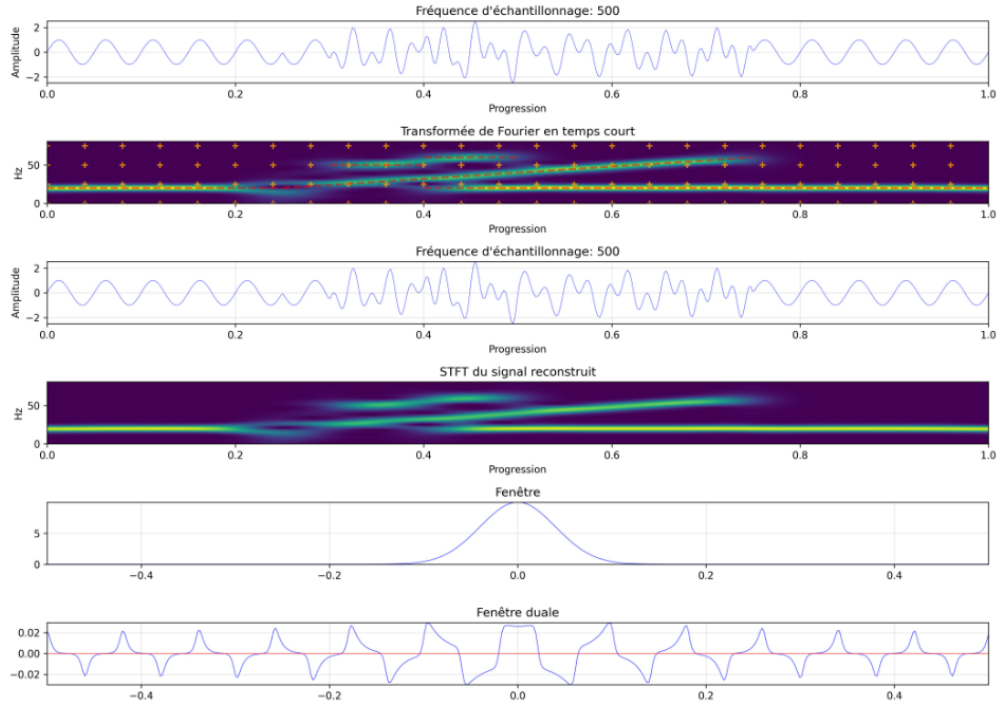


FIGURE 9 – $\alpha = 20, \beta = 25$, cas critique, fenêtre gaussienne de variance 0.1, module au carré.

Instabilité par rapport à la variance de la gaussienne choisie, on sait que les gaussiennes ne donnent PAS de trames dans le cas critique :

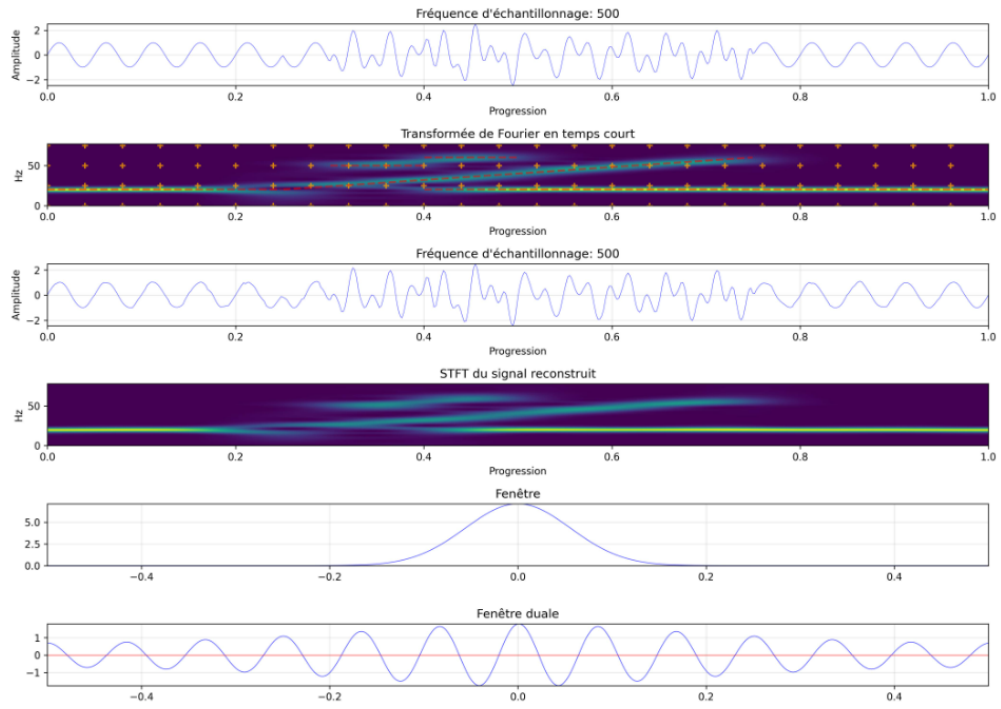


FIGURE 10 – $\alpha = 20, \beta = 25$, cas critique, fenêtre gaussienne de variance 0.1399, module au carré.

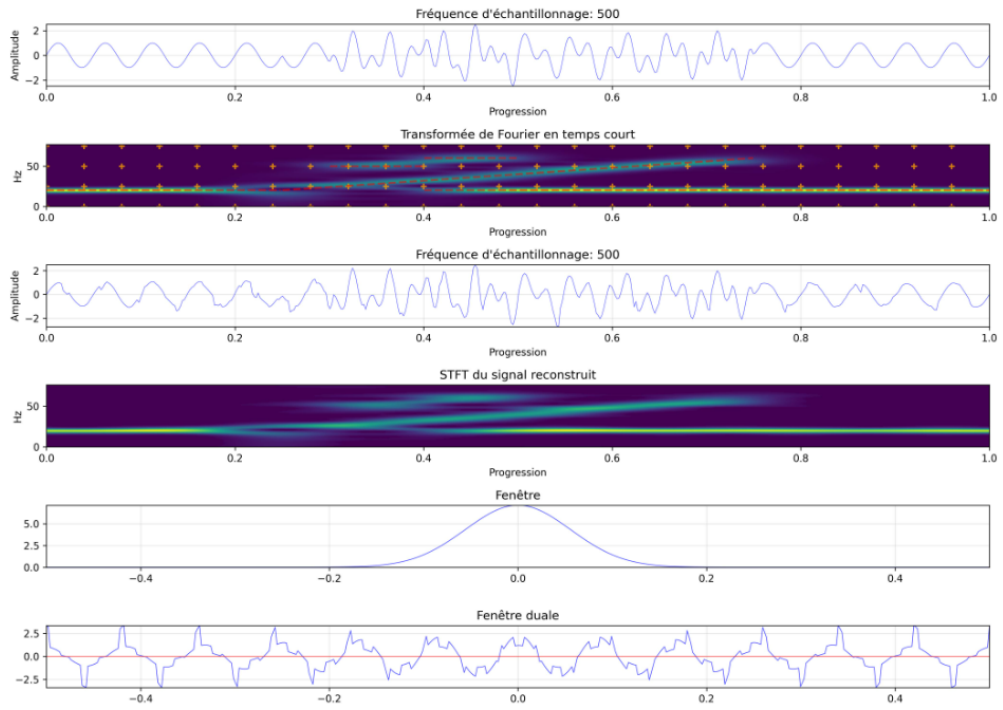


FIGURE 11 – $\alpha = 20, \beta = 25$, cas critique, fenêtre gaussienne de variance 0.13999, module au carré.

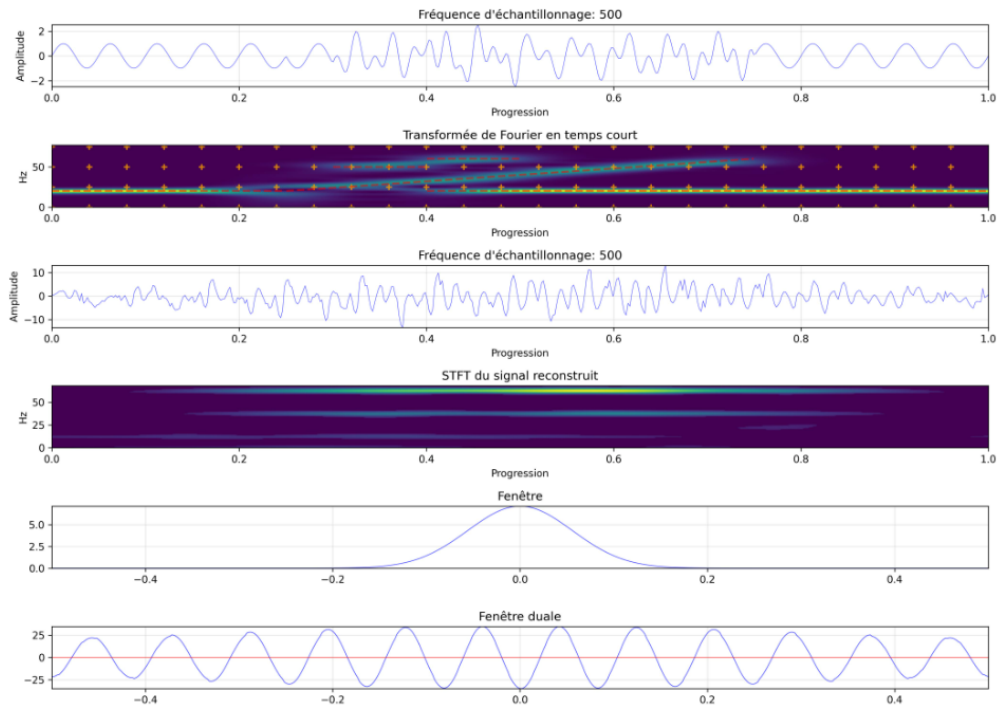


FIGURE 12 – $\alpha = 20, \beta = 25$, cas critique, fenêtre gaussienne de variance 0.14, module au carré.

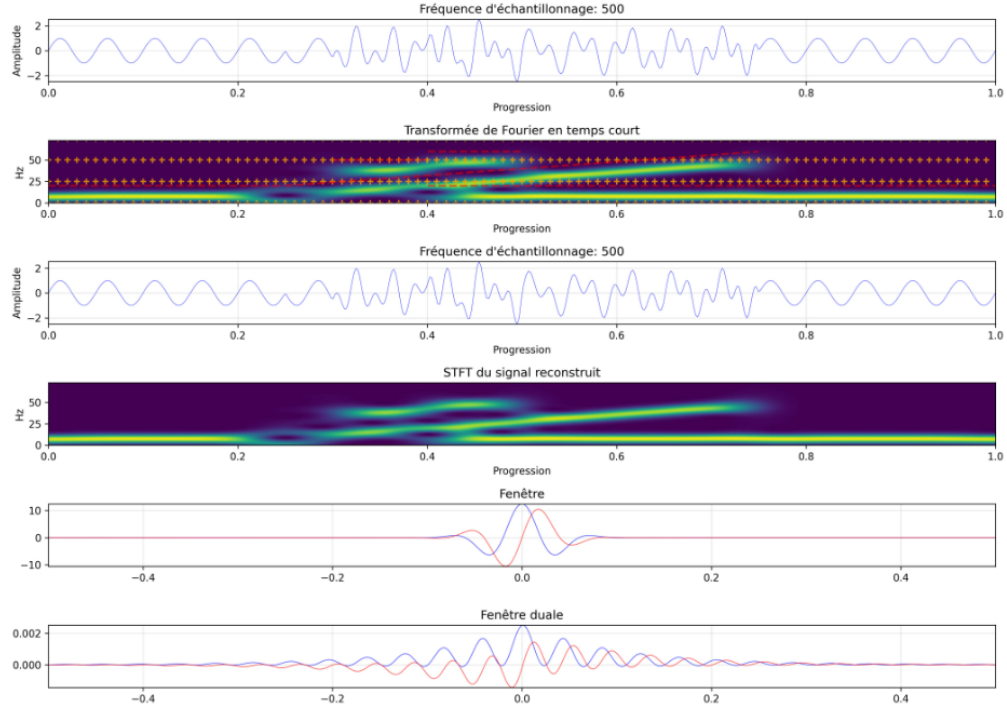


FIGURE 13 – $\alpha = 5, \beta = 25$, sur-échantillonnage, fenêtre $t \mapsto \exp\left(-\pi\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2\right) \exp\left(i2\pi\left(\frac{t}{\sigma}\right)\right)$ avec $\sigma = 0.08$, module au carré.

6.7 Transformée de Zak

Définition 6.5

Soit $f \in \mathbb{C}^L$.

On définit la **transformée de Zak** de f par :

$$\forall j, \nu \in \llbracket 0, L-1 \rrbracket \quad Zf[j, \nu] := \sum_{\ell=0}^{\tilde{\alpha}-1} f[j - \alpha\ell] \exp\left(i\frac{2\pi}{\tilde{\alpha}}\ell\nu\right)$$

Propriété 6.10 (Formule d'inversion)

Soit $f \in \mathbb{C}^L$.

Alors

$$\forall j \in \llbracket 0, L-1 \rrbracket \quad f[j] = \frac{1}{\tilde{\alpha}} \sum_{\nu=0}^{\tilde{\alpha}-1} Zf[j, \nu]$$

Démonstration. Soit $j \in \llbracket 0, L-1 \rrbracket$.

On calcule

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=0}^{\tilde{\alpha}-1} Zf[j, \nu] &= \sum_{\nu=0}^{\tilde{\alpha}-1} \sum_{\ell=0}^{\tilde{\alpha}-1} f[j - \alpha\ell] \exp(i \frac{2\pi}{\tilde{\alpha}} \ell \nu) \\ &= \sum_{\ell=0}^{\tilde{\alpha}-1} f[j - \alpha\ell] \left(\sum_{\nu=0}^{\tilde{\alpha}-1} \exp(i \frac{2\pi}{\tilde{\alpha}} \ell \nu) \right)\end{aligned}$$

Puis on calcule pour $\ell \in \llbracket 0, \tilde{\alpha} - 1 \rrbracket$:

Cas $\ell \neq 0$: Alors pour $\nu \in \llbracket 0, \tilde{\alpha} - 1 \rrbracket$

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=0}^{\tilde{\alpha}-1} \exp(i \frac{2\pi}{\tilde{\alpha}} \ell \nu) &= \frac{1 - \exp(i \frac{2\pi}{\tilde{\alpha}} \ell \tilde{\alpha})}{1 - \exp(i \frac{2\pi}{\tilde{\alpha}} \ell)} \\ &= \frac{1 - \exp(i 2\pi \ell)}{1 - \exp(i \frac{2\pi}{\tilde{\alpha}} \ell)} \\ \sum_{\nu=0}^{\tilde{\alpha}-1} \exp(i \frac{2\pi}{\tilde{\alpha}} \ell \nu) &= 0\end{aligned}$$

Cas $\ell = 0$:

$$\sum_{\nu=0}^{\tilde{\alpha}-1} \exp(i \frac{2\pi}{\tilde{\alpha}} \ell \nu) = \tilde{\alpha}$$

Donc

$$\sum_{\nu=0}^{\tilde{\alpha}-1} Zf[j, \nu] = \tilde{\alpha} f[j]$$

commu voulu. □

Propriété 6.11 (Quasi-périodicité)

Soit $f \in \mathbb{C}^L$.

Soit $j, \nu \in \llbracket 0, L - 1 \rrbracket$

Alors

$$Zf(j + \alpha, \nu) = \exp(i \frac{2\pi}{\tilde{\alpha}} \nu) Zf(j, \nu)$$

Et

$$Zf(j, \nu + \tilde{\alpha}) = Zf(j, \nu)$$

Remarque 6.9. On observe que Zf est alors entièrement déterminé sur $\llbracket 0, \alpha - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, \tilde{\alpha} - 1 \rrbracket$.

Par abus, on pourra considérer que Zf est définie sur ce rectangle.

Démonstration. On calcule d'une part

$$\begin{aligned}
Zf(j + \alpha, \nu) &= \sum_{k=0}^{\tilde{\alpha}-1} g(j + \alpha - \alpha k) \exp(i \frac{2\pi}{\tilde{\alpha}} k \nu) \\
&= \sum_{\ell=0}^{\tilde{\alpha}-1} g(j - \alpha(k-1)) \exp(i \frac{2\pi}{\tilde{\alpha}} k \nu) \\
Zf(j + \alpha, \nu) &= \sum_{\ell=-1}^{\tilde{\alpha}-2} g(j - \alpha k) \exp(i \frac{2\pi}{\tilde{\alpha}} k \nu) \exp(i \frac{2\pi}{\tilde{\alpha}} \nu)
\end{aligned}$$

Or

$$g(j - \alpha(\tilde{\alpha} - 1)) = g(j - \alpha(-1)) \quad g \text{ } L\text{-périodique}$$

Donc

$$\sum_{\ell=-1}^{\tilde{\alpha}-2} g(j - \alpha k) \exp(i \frac{2\pi}{\tilde{\alpha}} k \nu) = \sum_{\ell=0}^{\tilde{\alpha}-1} g(j - \alpha k) \exp(i \frac{2\pi}{\tilde{\alpha}} k \nu)$$

Et alors

$$\begin{aligned}
Zf(j + \alpha, \nu) &= \exp(i \frac{2\pi}{\tilde{\alpha}} \nu) \sum_{\ell=0}^{\tilde{\alpha}-1} g(j - \alpha k) \exp(i \frac{2\pi}{\tilde{\alpha}} k \nu) \\
&= \exp(i \frac{2\pi}{\tilde{\alpha}} \nu) Zf(j, \nu)
\end{aligned}$$

Et d'autre part,

$$\begin{aligned}
Zf(j, \nu + \tilde{\alpha}) &= \sum_{k=0}^{\tilde{\alpha}-1} g(j - \alpha k) \exp(i \frac{2\pi}{\tilde{\alpha}} k(\nu + \tilde{\alpha})) \\
&= \sum_{k=0}^{\tilde{\alpha}-1} g(j - \alpha k) \exp(i \frac{2\pi}{\tilde{\alpha}} k \nu) \\
Zf(j, \nu + \tilde{\alpha}) &= Zf(j, \nu)
\end{aligned}$$

Comme voulu. □

Corollaire 6.4

Soit $f, g \in \mathbb{C}^L$.

Alors

$$\langle Zf, Zg \rangle = \sum_{k=0}^{\alpha-1} \sum_{\ell=0}^{\tilde{\alpha}-1} \overline{Zf[k, \ell]} Zg[k, \ell]$$

Démonstration. On a $\langle Zf, Zg \rangle = \sum_{j=0}^{L-1} \sum_{\nu=0}^{L-1} \overline{Zf[j, \nu]} Zg[j, \nu]$

Pour $j, \nu \in \llbracket 0, L-1 \rrbracket$, on effectue leur division euclidienne par α et $\tilde{\alpha}$ respectivement : on prend $\tilde{j} \in \llbracket 0, \alpha-1 \rrbracket, k \in \mathbb{N}$ et $\tilde{\nu} \in \llbracket 0, \tilde{\alpha}-1 \rrbracket, \ell \in \mathbb{N}$ vérifiant

$$\begin{cases} j = \tilde{j} + k\alpha \\ \nu = \tilde{\nu} + \ell\tilde{\alpha} \end{cases}$$

Et on observe

$$\begin{cases} \overline{Zf[\tilde{j} + k\alpha, \tilde{\nu} + \ell\tilde{\alpha}]} = \exp(-i\frac{2\pi}{\tilde{\alpha}}kj\nu)Zf[j, \nu] \\ Zg[\tilde{j} + k\alpha, \tilde{\nu} + \ell\tilde{\alpha}] = \exp(i\frac{2\pi}{\tilde{\alpha}}kj\nu)Zg[j, \nu] \end{cases}$$

D'où

$$\sum_{j=0}^{L-1} \sum_{\nu=0}^{L-1} \overline{Zf[j, \nu]}Zg[j, \nu] = \sum_{\tilde{j}=0}^{\alpha-1} \sum_{\tilde{\nu}=0}^{\tilde{\alpha}-1} \overline{Zf[\tilde{j}, \tilde{\nu}]}Zg[\tilde{j}, \tilde{\nu}]$$

C'est le résultat voulu. □

Propriété 6.12

Soit $f, g \in \mathbb{C}^L$.

Alors

$$\langle Zf, Zg \rangle = \tilde{\alpha} \langle f, g \rangle$$

i.e. $\sqrt{\frac{\alpha}{L}}Z$ est une isométrie

Démonstration.

$$\begin{aligned} \langle Zf, Zg \rangle &= \sum_{k=0}^{\alpha-1} \sum_{\ell=0}^{\tilde{\alpha}-1} \overline{Zf[k, \ell]}Zg[k, \ell] \\ &= \sum_{k=0}^{\alpha-1} \sum_{\ell=0}^{\tilde{\alpha}-1} \sum_{m=0}^{\tilde{\alpha}-1} \sum_{n=0}^{\tilde{\alpha}-1} \overline{f[k - m\alpha]} \exp(-i\frac{2\pi}{\tilde{\alpha}}\ell m) g[k - n\alpha] \exp(i\frac{2\pi}{\tilde{\alpha}}\ell n) \\ &= \sum_{k=0}^{\alpha-1} \sum_{m=0}^{\tilde{\alpha}-1} \sum_{n=0}^{\tilde{\alpha}-1} \overline{f[k - m\alpha]} g[k - n\alpha] \left(\sum_{\ell=0}^{\tilde{\alpha}-1} \exp(i\frac{2\pi}{\tilde{\alpha}}\ell(n-m)) \right) \end{aligned}$$

Or

$$\sum_{\ell=0}^{\tilde{\alpha}-1} \exp(i\frac{2\pi}{\tilde{\alpha}}\ell(n-m)) = \begin{cases} \tilde{\alpha} & \text{si } m = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc

$$\langle Zf, Zg \rangle = \tilde{\alpha} \sum_{k=0}^{\alpha-1} \sum_{m=0}^{\tilde{\alpha}-1} \overline{f[k - m\alpha]} g[k - m\alpha]$$

Or

$$\begin{cases} \llbracket 0, \alpha-1 \rrbracket \times \llbracket 0, \tilde{\alpha}-1 \rrbracket \rightarrow \llbracket 0, L-1 \rrbracket \\ (k, m) \mapsto k - m\alpha \end{cases}$$

est une bijection (car $\alpha\tilde{\alpha} = L$), et alors

$$\begin{aligned}\langle Zf, Zg \rangle &= \tilde{\alpha} \sum_{k=0}^{\ell-1} \overline{f[k]} g[k] \\ &= \tilde{\alpha} \langle f, g \rangle\end{aligned}$$

□

Propriété 6.13 (Surjectivité de Z)

à écrire

Définition 6.6

Soit $f \in \mathbb{C}^L$.

On suppose $\frac{\alpha\beta}{L} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ écrit sous forme irréductible.

On définit la **transformée de Zak par morceaux** de f par :

Pour $j, \nu \in \llbracket 0, L-1 \rrbracket$

$$Z_{pm}f(j, \nu) := F(j, \nu) := \begin{pmatrix} F_0(j, \nu) \\ \vdots \\ F_{p-1}(j, \nu) \end{pmatrix}$$

où

$$\forall r \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket \quad F_r(j, \nu) := Zf(j + r\frac{\alpha}{p}, \nu)$$

Remarque 6.10. On a $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{p}{q}$ d'où $\frac{\alpha}{p} = \frac{\tilde{\beta}}{q}$

On a $\alpha q = \tilde{\beta} p$ d'où $p|\alpha q$. Or p, q sont premiers entre eux par hypothèse, donc le lemme de Gauss nous assure $p|\alpha$ et alors $\frac{\alpha}{p} = \frac{\tilde{\beta}}{q} \in \mathbb{N}^*$.

De la même manière, on montre $\frac{\tilde{\alpha}}{q} = \frac{\beta}{p} \in \mathbb{N}^*$. On aurait pu aussi définir $Z_{pm}f$ via $Zf(j, \nu + r\frac{\tilde{\alpha}}{q})$

Remarque 6.11. On déduit que $Z_{pm}f$ est entièrement définie sur $\llbracket 0, \frac{\alpha}{p} - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, \tilde{\alpha} - 1 \rrbracket$

Corollaire 6.5

Soit $f, g \in \mathbb{C}^L$. On suppose $\frac{\alpha\beta}{L} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ écrit sous forme irréductible.

On note F_r, G_r ($r \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$) les fonctions coordonnées de $Z_{pm}f$ et $Z_{pm}g$ respectivement.

Alors en notant

$$\langle Z_{pm}f, Z_{pm}g \rangle := \sum_{r=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{\alpha/p-1} \sum_{\nu=0}^{\tilde{\alpha}-1} \overline{F_r(j, \nu)} G_r(j, \nu)$$

on a

$$\langle Z_{pm}f, Z_{pm}g \rangle = \tilde{\alpha} \langle f, g \rangle$$

i.e. $\sqrt{\frac{\alpha}{L}} Z_{pm}$ est une isométrie.

Démonstration. On a

$$\langle Z_{pm}f, Z_{pm}g \rangle = \sum_{r=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{\alpha/p-1} \sum_{\nu=0}^{\tilde{\alpha}-1} \overline{Zf(j + r\frac{\alpha}{p}, \nu)} Zg(j + r\frac{\alpha}{p}, \nu)$$

Or $\begin{cases} \llbracket 0, p-1 \rrbracket \times \llbracket 0, \frac{\alpha}{p}-1 \rrbracket \rightarrow \llbracket 0, \alpha-1 \rrbracket \\ (r, j) \mapsto j + r\frac{\alpha}{p} \end{cases}$ est une bijction. D'où

$$\begin{aligned} \langle Z_{pm}f, Z_{pm}g \rangle &= \sum_{j=0}^{\alpha-1} \sum_{\nu=0}^{\tilde{\alpha}-1} \overline{Zf(j, \nu)} Zg(j, \nu) \\ &= \tilde{\alpha} \langle Zf, Zg \rangle \end{aligned}$$

□

Propriété 6.14 (Surjectivité de Z_{pm})

à écrire

Propriété 6.15 (formule d'inversion de Z_{pm})

à écrire

Définition 6.7

Soit $g, \gamma \in \mathbb{C}^L$

Soit $j, \nu \in \llbracket 0, L-1 \rrbracket$. On définit $A_{g, \gamma}[j, \nu]$ par

$$[A_{g, \gamma}[j, \nu]]_{r, s} := \frac{p\alpha}{L^2} \sum_{\ell=0}^{q-1} \overline{Zg \left[j + s\frac{\alpha}{p}, \nu - \beta\ell \right]} Z\gamma \left[j + r\frac{\alpha}{p}, \nu - \beta\ell \right] \exp \left(i \frac{2\pi}{L} \frac{r-s}{q} \ell \right)$$

On notera $A_g := A_{g, g}$

Corollaire 6.6 (Conjugaison de $S_{g, \gamma}$ par Z_{pm} , représentation de Zibulski-Zeevi)

Soit $f, g, \gamma \in \mathbb{C}^L$. On suppose $\frac{\alpha\beta}{L} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ écrit sous forme irréductible.

Alors

$$\forall j, \nu \in \llbracket 0, L-1 \rrbracket \quad Z_{pm}(S_{g, \gamma}f)[j, \nu] = A_{g, \gamma}[j, \nu] Z_{pm}f[j, \nu]$$

Démonstration. Soit $j, \nu \in \llbracket 0, L-1 \rrbracket$. Soit $k \in \llbracket 0, \tilde{\alpha}-1 \rrbracket$ et $\ell \in \llbracket 0, \tilde{\beta}-1 \rrbracket$.

Soit $f, g, \gamma \in \mathbb{C}^L$.

On calcule d'abord

$$Z(M_{\beta\ell}T_{\alpha k}g)[j, \nu] = e^{i\frac{2\pi}{L}\beta\ell j} Zg[j - \alpha k, \nu - \beta\ell]$$

On prend $\tilde{\ell} \in \llbracket 0, q-1 \rrbracket$ et $n_0 \in \llbracket 0, \frac{\tilde{\beta}}{q}-1 \rrbracket$ vérifiant $\ell = \tilde{\ell} + n_0q$.

Comme $\beta = \tilde{\alpha} \frac{p}{q}$, on déduit $\beta \ell = \tilde{\beta} \ell + n_0 p \tilde{\alpha}$, et alors on peut écrire

$$\begin{aligned} Z(M_{\beta \ell} T_{\alpha k} g)[j, \nu] &= \exp(i \frac{2\pi}{L} \beta \tilde{\ell} j) \exp(i \frac{2\pi}{L} n_0 p \tilde{\alpha} j) \exp(-i \frac{2\pi}{L} \alpha k \nu) \exp(i \frac{2\pi}{L} \alpha \beta k \tilde{\ell}) Zg[j, \nu - \beta \tilde{\ell}] \\ &= \exp(i \frac{2\pi}{L} \beta \tilde{\ell} (j + \alpha k)) \exp(i \frac{2\pi}{L} (p \tilde{\alpha} n_0 j - \alpha k \nu)) Zg[j, \nu - \beta \tilde{\ell}] \\ &= \exp\left(i \frac{2\pi}{L} \beta \tilde{\ell} (j + \alpha k)\right) \exp\left(i (2\pi \frac{p}{\alpha} n_0 j - \frac{2\pi}{L} \alpha k \nu)\right) Zg[j, \nu - \beta \tilde{\ell}] \end{aligned}$$

(remarquons $\frac{\tilde{\beta}}{q} = \frac{\alpha}{p}$ et la bijection que cela explicite)

D'où

$$\begin{aligned} \langle Z_{pm}(M_{\beta \ell} T_{\alpha k} g), Z_{pm} f \rangle &= \sum_{s=0}^{p-1} \sum_{m=0}^{\alpha/p-1} \sum_{n=0}^{\tilde{\alpha}-1} \exp\left(-i \frac{2\pi}{L} \beta \tilde{\ell} (m + s \frac{\alpha}{p} + \alpha k)\right) \exp\left(-i (2\pi \frac{p}{\alpha} n_0 (m + s \frac{\alpha}{p}) - \frac{2\pi}{L} \alpha k n)\right) \\ &\quad \overline{Zg\left[j + s \frac{\alpha}{p}, n - \beta \tilde{\ell}\right]} Zf\left[j + s \frac{\alpha}{p}, n\right] \\ &= \sum_{s=0}^{p-1} \sum_{m=0}^{\alpha/p-1} \sum_{n=0}^{\tilde{\alpha}-1} \exp\left(-i \frac{2\pi}{L} \beta \tilde{\ell} (m + s \frac{\alpha}{p} + \alpha k)\right) \exp\left(-i (2\pi \frac{p}{\alpha} n_0 m - \frac{2\pi}{L} \alpha k n)\right) \\ &\quad \overline{Zg\left[j + s \frac{\alpha}{p}, n - \beta \tilde{\ell}\right]} Zf\left[j + s \frac{\alpha}{p}, n\right] \end{aligned}$$

Et alors

$$\begin{aligned} Z(S_{g, \gamma} f)(j + r \frac{\alpha}{p}, \nu) &= \sum_{k=0}^{\tilde{\alpha}-1} \sum_{\ell=0}^{\tilde{\beta}-1} \langle M_{\beta \ell} T_{\alpha k} g, f \rangle Z(M_{\beta \ell} T_{\alpha k} \gamma) \left[j + r \frac{\alpha}{p}, \nu\right] \\ &= \frac{1}{\tilde{\alpha}} \sum_{k=0}^{\tilde{\alpha}-1} \sum_{\tilde{\ell}=0}^{q-1} \sum_{n_0=0}^{\alpha/p-1} \left(\sum_{s=0}^{p-1} \sum_{m=0}^{\alpha/p-1} \sum_{n=0}^{\tilde{\alpha}-1} \exp\left(-i \frac{2\pi}{L} \beta \tilde{\ell} (m + s \frac{\alpha}{p} + \alpha k)\right) \right. \\ &\quad \exp\left(-i (2\pi \frac{p}{\alpha} n_0 m - \frac{2\pi}{L} \alpha k n)\right) \overline{Zg\left[m + s \frac{\alpha}{p}, n - \beta \tilde{\ell}\right]} Zf\left[m + s \frac{\alpha}{p}, n\right] \Big) \\ &\quad \times \exp\left(i \frac{2\pi}{L} \beta \tilde{\ell} (j + r \frac{\alpha}{p} + \alpha k)\right) \exp\left(i (2\pi \frac{p}{\alpha} n_0 j - \frac{2\pi}{L} \alpha k \nu)\right) Z\gamma[j + r \frac{\alpha}{p}, \nu - \beta \tilde{\ell}] \\ &= \frac{1}{\tilde{\alpha}} \sum_{s=0}^{p-1} \sum_{\tilde{\ell}=0}^{q-1} \left(\sum_{n_0=0}^{\alpha/p-1} \sum_{k=0}^{\tilde{\alpha}-1} \sum_{m=0}^{\alpha/p-1} \sum_{n=0}^{\tilde{\alpha}-1} \overline{Zg\left[m + s \frac{\alpha}{p}, n - \beta \tilde{\ell}\right]} Zf\left[m + s \frac{\alpha}{p}, n\right] \right) \\ &\quad \exp\left(-i (2\pi \frac{p}{\alpha} n_0 m - \frac{2\pi}{L} \alpha k n)\right) \exp\left(-i \frac{2\pi}{L} \beta \tilde{\ell} (m + s \frac{\alpha}{p})\right) \\ &\quad \times \exp\left(i \frac{2\pi}{L} \beta \tilde{\ell} (j + r \frac{\alpha}{p})\right) \exp\left(i (2\pi \frac{p}{\alpha} n_0 j - \frac{2\pi}{L} \alpha k \nu)\right) Z\gamma[j + r \frac{\alpha}{p}, \nu - \beta \tilde{\ell}] \end{aligned}$$

Or $((j, \nu) \mapsto \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{L}} \exp(i (2\pi \frac{p}{\alpha} n_0 j - \frac{2\pi}{L} \alpha k \nu)) \mid n_0 \in [0, \frac{\alpha}{p} - 1], k \in [0, \tilde{\alpha} - 1])$ est une base ortho-normée de $\mathbb{C}^{p/\alpha} \times \mathbb{C}^{\tilde{\alpha}}$. Donc on reconnait le développement de

$$(m, n) \mapsto \overline{Zg\left[m + s \frac{\alpha}{p}, n - \beta \tilde{\ell}\right]} Zf\left[m + s \frac{\alpha}{p}, n\right] \exp\left(-i \frac{2\pi}{L} \beta \tilde{\ell} (m + s \frac{\alpha}{p})\right)$$

et alors on simplifie en

$$Z(S_{g,\gamma}f)(j+r\frac{\alpha}{p},\nu) = \frac{p}{L\tilde{\alpha}} \sum_{s=0}^{p-1} \sum_{\tilde{\ell}=0}^{q-1} \overline{(Zg[j+s\frac{\alpha}{p},\nu-\beta\tilde{\ell}]Zf[j+s\frac{\alpha}{p},\nu])} \exp\left(-i\frac{2\pi}{L}\beta\tilde{\ell}(j+s\frac{\alpha}{p})\right) \\ \times \exp\left(i\frac{2\pi}{L}\beta\tilde{\ell}(j+r\frac{\alpha}{p})\right) Z\gamma[j+r\frac{\alpha}{p},\nu-\beta\tilde{\ell}]$$

Pour obtenir :

$$\frac{p\alpha}{L^2} \sum_{s=0}^{p-1} \left(\sum_{\tilde{\ell}=0}^{q-1} \overline{Zg[j+s\frac{\alpha}{p},\nu-\beta\tilde{\ell}]} \exp\left(i\frac{2\pi}{L}\beta\tilde{\ell}\frac{\alpha}{p}(r-s)\right) Z\gamma[j+r\frac{\alpha}{p},\nu-\beta\tilde{\ell}] \right) Zf[j+s\frac{\alpha}{p},\nu]$$

que l'on réécrit (car $\frac{\alpha\beta}{L} = \frac{p}{q}$)

$$[A_{g,\gamma}[j,\nu]]_{rs} [Z_{pm}f[j,\nu]]_s$$

□

Propriété 6.16

A_g est bien auto-adjointe positive de partout

Propriété 6.17

on a une trame $\Leftrightarrow A_g$ inversible de partout

Dans ce cas les bornes sont les mins et max (sur tout les points) des valeurs propres

Remarque 6.12. A_g est un scalaire \Leftrightarrow on est en sur-échantillage entier (y compris le cas critique)

Dans ce cas, A_g ne s'annule pas \Leftrightarrow trame

Propriété 6.18

$[A_{g,\gamma}[j+\frac{\alpha}{p},\nu]]_{r,s} = [A_{g,\gamma}[j,\nu]]_{r+1,s+1}$ avec périodicité

et $[A_{g,\gamma}[j,\nu+\beta]]_{r,s} = [A_{g,\gamma}[j,\nu]]_{r,s}$

Remarque 6.13. il suffit de comprendre $[A_{g,\gamma}[j,\nu]]_{r,0}$ pour $r \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, $j \in \llbracket 0, \frac{\alpha}{p}-1 \rrbracket$ et $\nu \in \llbracket 0, \beta-1 \rrbracket$.

il suffit de comprendre $\alpha\beta$ valeurs.

contre $\frac{L}{\beta}\alpha = \alpha\beta$ valeurs pour la méthode précédente.

Corollaire 6.7

Soit $g \in \mathbb{C}^L$. On suppose $\frac{\alpha\beta}{L} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ écrit sous forme irréductible.

On suppose $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ est une trame.

On note γ° la trame duale de g .

Alors

$$\forall j, \nu \in \llbracket 0, L-1 \rrbracket \quad Z_{pm}(S_{\gamma^\circ, \gamma^\circ}f)[j, \nu] = A_{g,g}^{-1}[j, \nu] Z_{pm}f[j, \nu]$$

Démonstration. Soit $j, \nu \in \llbracket 0, L-1 \rrbracket$ On a

$$\underbrace{Z_{pm}(S_{g,g}(S_{g,g}^{-1})g)[j, \nu]}_{=Z_{pm}g[j, \nu]} = A_{g,g}[j, \nu]Z_{pm}(S_{g,g}^{-1}g)[j, \nu]$$

Et $A_{g,g}[j, \nu]$ est inversible car $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ forme une trame. D'où le résultat. \square

6.8 Représentation de Janssen

Soit $g, \gamma \in \mathbb{C}^L$ Soit $\ell \in \llbracket 0, \beta-1 \rrbracket$.

On observe que G_ℓ est α -périodique (c'est la périodisée de $T_{\tilde{\beta}\ell}\bar{g} \times \gamma$ par α), on calcule alors ses coefficients de Fourier :

Soit $\nu \in \llbracket 0, L-1 \rrbracket$. On calcule

$$\begin{aligned} \hat{G}_\ell(\nu) &= \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\alpha-1} G_\ell(k) e^{i \frac{2\pi}{\alpha} k \nu} \\ &= \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\tilde{\alpha}-1} (T_{\tilde{\beta}\ell}\bar{g} \times \gamma)[k - \alpha n] \underbrace{e^{i \frac{2\pi}{\alpha} k \nu}}_{=e^{i \frac{2\pi}{\alpha} (k - \alpha k) \nu}} \end{aligned}$$

Or $\left\{ \begin{array}{l} (k, n) \mapsto k - \alpha n \\ \llbracket 0, \alpha-1 \rrbracket \times \llbracket 0, \tilde{\alpha}-1 \rrbracket \rightarrow \llbracket 0, L-1 \rrbracket \end{array} \right.$ est bijective (en considérant la division euclidienne par α), donc

$$\begin{aligned} \hat{G}_\ell(\nu) &= \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{L-1} (T_{\tilde{\beta}\ell}\bar{g} \times \gamma)[k] e^{i \frac{2\pi}{\alpha} k \nu} \\ &= \frac{1}{\alpha} \langle M_{\tilde{\alpha}k} T_{\tilde{\beta}\ell} g, \gamma \rangle \end{aligned}$$

Donc pour $m \in \llbracket 0, L-1 \rrbracket$, on a

$$G_\ell(m) = \frac{1}{\alpha} \sum_{\ell=0}^{L-1} \langle M_{\tilde{\alpha}k} T_{\tilde{\beta}\ell} g, \gamma \rangle e^{i \frac{2\pi}{\alpha} \ell m}$$

Et alors

$$S_{g,\gamma} f = \underbrace{\frac{\tilde{\beta}}{\alpha}}_{=\frac{L}{\alpha\tilde{\beta}}} \sum_{m=0}^{L-1} \langle M_{\tilde{\alpha}k} T_{\tilde{\beta}\ell} g, \gamma \rangle M_{\tilde{\alpha}k} T_{\tilde{\beta}\ell} f$$

D'où la représentation suivante

Théorème 6.1 (Représentation de Janssen)

Soit $g, \gamma \in \mathbb{C}^L$

Alors

$$\forall f \in \mathbb{C}^L \quad S_{g,\gamma} f = \frac{L}{\alpha\beta} \sum_{m=0}^{L-1} \langle M_{\tilde{\alpha}k} T_{\tilde{\beta}\ell} g, \gamma \rangle M_{\tilde{\alpha}k} T_{\tilde{\beta}\ell} f$$

i.e.

$$S_{g,\gamma} = \frac{L}{\alpha\beta} \sum_{m=0}^{L-1} \langle M_{\tilde{\alpha}k} T_{\tilde{\beta}\ell} g, \gamma \rangle M_{\tilde{\alpha}k} T_{\tilde{\beta}\ell}$$

Théorème 6.2 (Relation de biorthogonalité de Wexler-Raz)

Soient $g, \gamma \in \mathbb{C}^L$. Alors sont équivalentes

(i) g et γ forment des trames duales

$$(ii) \quad \forall (k, \ell) \in \llbracket 0, \alpha - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, \beta - 1 \rrbracket \quad \langle M_{\tilde{\alpha}k} T_{\tilde{\beta}\ell} g, \gamma \rangle = \begin{cases} \frac{\alpha\beta}{L} & \text{si } k = \ell = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque 6.14. \triangleleft On aurait pu remplacer la condition " g et γ forment des trames duales" par " $S_{g,\gamma} = D_\gamma D_g^* = \text{id}_{\mathbb{C}^L}$ "

\triangleleft Dans le cas où g et γ forment des trames duales, on a $\langle g, \gamma \rangle = \frac{\alpha\beta}{L}$

Corollaire 6.8

Soient $g, \gamma \in \mathbb{C}^L$. Alors sont équivalentes

(i) g et γ forment des trames duales

$$(ii) \quad \forall \begin{cases} k, k' \in \llbracket 0, \alpha - 1 \rrbracket \\ \ell, \ell' \in \llbracket 0, \beta - 1 \rrbracket \end{cases} \quad \langle M_{\tilde{\alpha}k} T_{\tilde{\beta}\ell} g, M_{\tilde{\alpha}k'} T_{\tilde{\beta}\ell'} \gamma \rangle = \begin{cases} \frac{\alpha\beta}{L} & \text{si } k = k' \wedge \ell = \ell' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans ce cas, $\mathcal{G}(g, \tilde{\beta}, \tilde{\alpha})$ et $\mathcal{G}(\gamma, \tilde{\beta}, \tilde{\alpha})$ sont dits **bi-orthogonaux**

Démonstration. à faire, utiliser $\gamma = S_{g,\gamma} \gamma$

□

Corollaire 6.9

Soit $g \in \mathbb{C}^L$. Supposons $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ soit une trame.

On note γ° la fenêtre duale de g .

Alors

$$D_{g, \tilde{\beta}, \tilde{\alpha}} : \begin{cases} \mathbb{C}^{\alpha\beta} \rightarrow \mathbb{C}^L \\ (c_{k,\ell})_{k,\ell} \mapsto \sum_{k=0}^{\alpha-1} \sum_{\ell=0}^{\beta-1} c_{k,\ell} M_{\tilde{\alpha}k} T_{\tilde{\beta}\ell} g \end{cases} \quad \text{est injective}$$

Démonstration. Soit $(c_{k,\ell})_{k,\ell} \in \mathbb{C}^{\alpha\beta}$.

$$\text{On note } f := \sum_{\ell=0}^{\beta-1} c_{k,\ell} M_{\tilde{\alpha}k} T_{\tilde{\beta}\ell} g$$

On calcule pour $k' \in \llbracket 0, \alpha - 1 \rrbracket, \ell' \in \llbracket 0, \beta - 1 \rrbracket$

$$\begin{aligned} \langle M_{\tilde{\alpha}k'} T_{\tilde{\beta}\ell'} \gamma^\circ \mid f \rangle &= \sum_{k=0}^{\alpha-1} \sum_{\ell=0}^{\beta-1} c_{k,\ell} \langle M_{\tilde{\alpha}k'} T_{\tilde{\beta}\ell'} \gamma^\circ \mid M_{\tilde{\alpha}k} T_{\tilde{\beta}\ell} g \rangle \\ &= (\alpha\beta) \sum_{k=0}^{\alpha-1} \sum_{\ell=0}^{\beta-1} c_{k,\ell} \delta_{k,k'} \delta_{\ell,\ell'} \\ &= \frac{\alpha\beta}{L} c_{k',\ell'} \end{aligned}$$

ce qui donne l'injectivité de $D_{g,\tilde{\beta},\tilde{\alpha}}$. □

Il se trouve que le sens réciproque est vrai :

Lemme 6.2

Soit $g \in \mathbb{C}^L$.

Supposons $D_{g,\tilde{\beta},\tilde{\alpha}}$ injective.

Alors $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ est une trame.

Démonstration. Notons $\mathcal{K} := \text{Ran } D_{g,\tilde{\beta},\tilde{\alpha}} = \text{Vect}\{M_{\tilde{\alpha}k} T_{\tilde{\beta}\ell} g \mid (k, \ell) \in \llbracket 0, \alpha - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, \beta - 1 \rrbracket\}$ qui est alors de dimension $\alpha\beta$.

Alors $\mathcal{L} := \text{Vect}\{M_{\tilde{\alpha}k} T_{\tilde{\beta}\ell} g \mid (k, \ell) \in \llbracket 0, \alpha - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, \beta - 1 \rrbracket \setminus (0, 0)\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathcal{K} de co-dimension 1.

On prend alors $\tilde{\gamma} \in \mathcal{K}$ vérifiant $\mathcal{K} = \mathcal{L} \oplus \mathbb{C}\tilde{\gamma}$

On prend ensuite $\gamma \in \mathbb{C}\tilde{\gamma}$ vérifiant $\langle g, \gamma \rangle = \frac{\alpha\beta}{L}$

De sorte à avoir

$$\forall (k, \ell) \in \llbracket 0, \alpha - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, \beta - 1 \rrbracket \quad \langle M_{\tilde{\alpha}k} T_{\tilde{\beta}\ell} g \mid \gamma \rangle = \frac{\alpha\beta}{L} \delta_{k0} \delta_{\ell0}$$

i.e. $\mathcal{G}(g, \tilde{\beta}, \tilde{\alpha})$ et $\mathcal{G}(\gamma, \tilde{\beta}, \tilde{\alpha})$ sont bi-orthogonaux. Donc en particulier $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ est une trame. □

On a montré le corollaire qui suit.

Corollaire 6.10 (Principe de dualité de Ron-Shen)

Soit $g \in \mathbb{C}^L$.

Alors

$$\mathcal{G}(g, \alpha, \beta) \text{ est une trame} \iff \mathcal{G}(g, \tilde{\beta}, \tilde{\alpha}) \text{ est une base de Riesz sur son image}$$

que l'on peut reformuler

$$D_{g,\alpha,\beta} \text{ est surjectif} \iff D_{g,\tilde{\beta},\tilde{\alpha}} \text{ est injectif}$$

Propriété 6.19

Soit $g \in \mathbb{C}^L$.

Supposons $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ est une trame.

On note γ° sa fenêtre duale canonique. On note $\mathcal{K} := \text{Vect}(g, \tilde{\beta}, \tilde{\alpha})$.

Alors

$$\gamma^\circ \in \mathcal{K}$$

et

$$\forall \gamma \in \mathbb{C}^L \quad \gamma \text{ duale de } g \iff \gamma \in \gamma^\circ + \mathcal{K}^\perp$$

Remarque 6.15. dans 6.8, on a en fait explicité la trame duale canonique.

Corollaire 6.11

Soient $g, \gamma \in \mathbb{C}^L$. Supposons $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ soit une trame. Soit $\gamma \in \mathbb{C}^L$ une fenêtre duale de g et $\gamma^\circ \in \mathbb{C}^L$ sa fenêtre duale canonique.

Alors

(i)

$$\|\gamma\|_2 \geq \|\gamma^\circ\|_2$$

avec égalité si et seulement si $\gamma = \gamma^\circ$

(ii)

$$\|g\|_2 \|\gamma^\circ\|_2 \geq \frac{\alpha\beta}{L}$$

avec égalité si et seulement si $g \in \gamma^\circ \mathbb{C}$ i.e. g est vecteur propre de S_g

Et

$$\|g\|_2 \|\gamma\|_2 \geq \|g\|_2 \|\gamma^\circ\|_2$$

avec égalité si et seulement si $\gamma = \gamma^\circ$

Démonstration. (i) Vient du théorème de Pythagore

(ii) Notons, comme dans 6.8, $\mathcal{K} := \text{Ran } D_{g, \tilde{\beta}, \tilde{\alpha}}$ et $\mathcal{L} := \text{Vect}\{M_{\tilde{\alpha}k} T_{\tilde{\beta}\ell} g \mid (k, \ell) \in \llbracket 0, \alpha - 1 \rrbracket \times$

$\llbracket 0, \beta - 1 \rrbracket \setminus (0, 0)\}$ On note $g = g_{\mathcal{K}^\perp} + g_L + g_\gamma \in \mathcal{K}^\perp \oplus \mathcal{L} \oplus \mathbb{C}\gamma^\circ$.

Or $\langle g, \gamma^\circ \rangle = \alpha\beta$, d'où

$$g_\gamma = \frac{\alpha\beta}{L} \frac{\gamma^\circ}{\|\gamma^\circ\|_2^2}$$

D'où $\|g_\gamma\|_2 = \frac{\gamma^\circ}{\|\gamma^\circ\|_2}$

Et alors par théorème de Pythagore :

$$\|g\|_2^2 = \|g_{\mathcal{K}^\perp}\|_2^2 + \|g_L\|_2^2 + \left(\frac{\gamma^\circ}{\|\gamma^\circ\|_2} \right)^2 \geq \left(\frac{\gamma^\circ}{\|\gamma^\circ\|_2} \right)^2$$

D'où le résultat voulu. □

7 Appendix

Propriété 7.1

Soit H un espace de Hilbert. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$. Soit $S \subseteq H$.

Supposons $\forall \varphi \in S \quad \langle \varphi, T\varphi \rangle > 0$.

Alors

$$\ker T \cap S = \emptyset$$

Démonstration. Par l'absurde, supposons $\ker T \cap S \neq \emptyset$. On prend $\varphi \in \ker T \cap S \neq \emptyset$.

Alors $\langle \varphi, T\varphi \rangle = 0$ car $\varphi \in \ker T$ Mais $\varphi \in S$, d'où $\langle \varphi, T\varphi \rangle > 0$ C'est la contradiction voulue. Donc $\ker T \cap S = \emptyset$. \square

Propriété 7.2

Soit H un espace de Hilbert. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$. Soit $S \subseteq H$ dense dans H .

Supposons $\exists \alpha > 0 \quad \forall \varphi \in S \quad \langle \varphi, T\varphi \rangle > \alpha \|\varphi\|_H^2$.

Alors T est injectif.

Démonstration. On a déjà, par un résultat précédent, $\ker T \cap (S \setminus \{0\}) = \emptyset$. Donc les seuls éléments du noyau qui peuvent être non nuls sont dans $H \setminus S$.

Montrons alors $\ker T \cap (H \setminus S) \in \{\emptyset, \{0\}\}$.

Cas $0 \notin S$:

Alors $\ker T \cap (H \setminus S) \ni 0$ Soit $\varphi \in \ker T \cap (H \setminus S)$. Montrons $\varphi = 0$.

Par densité de S dans H , on prend $(\varphi_n)_n \in H^\mathbb{N}$ vérifiant $\varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|_H} \varphi$.

Par hypothèse, on prend $\alpha > 0$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \langle \varphi_n, T\varphi_n \rangle > \alpha \|\varphi_n\|_H^2$$

Il suffit alors de montrer $\langle \varphi_n, T\varphi_n \rangle \rightarrow 0$ pour pouvoir conclure.

On a pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\langle \varphi_n, T\varphi_n \rangle = \langle \varphi_n, T(\varphi_n - \varphi) \rangle + \underbrace{\langle \varphi_n, T\varphi \rangle}_{=0 \text{ car } \varphi \in \ker T}$$

D'où par inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle \varphi_n, T\varphi_n \rangle| \leq \underbrace{\|T\|}_{<+\infty} \times \underbrace{\|\varphi_n - \varphi\|_H}_{\rightarrow 0} \times \underbrace{\|\varphi_n\|_H}_{\rightarrow \|\varphi\|_H} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

Donc $\|\varphi_n\|_H^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|_H} 0$. Or $\|\varphi_n\|_H^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|_H} \|\varphi\|_H^2$, donc $\varphi = 0$.

Cas $0 \in S$:

$$\text{Montrons } \ker T \cap (H \setminus S) = \underbrace{(\ker T \cap (H \setminus (S \setminus \{0\})))}_{=\{0\} \text{ par le cas précédent}} \setminus \{0\} = \emptyset$$

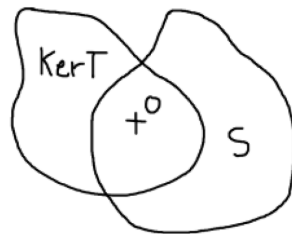


FIGURE 14

□

8 A faire

- ◁ comprendre FFT
- ◁ forcer trame serrée ($S^{-1/2}$) (théorème spectral)
- ◁ se ramener à une dimension 1 pour calculer S^{-1} (marche pour fonctions "tensorialisables"?)
- ◁ trouver bornes cas gaussien
- ◁ trouver trame duale ordi
- ◁ $S = a(id + R)$ avec $|||R||| < 1$, comprendre et exprimer $|||R|||$ (et cas gaussien aussi)
- ◁ Balian Low
- ◁ Wilson (preuve?)
- ◁ faire trame cas gaussien (ne marche pas si $\alpha\beta = 1$, on prend < 1 pour avoir un terme translaté)
- ◁ $S = S_{diag} + S_{nonDiag}$ pour théorème Walnut??
- ◁ comprendre pourquoi on a besoin d'une trame duale
- ◁ papier "da.pdf" (calculs de trame duales)
- ◁ "mesurer" à quel point il faut beaucoup de coefficients pour s'approcher du bon signal
- ◁ éliminer le cas $\alpha\beta > 1$ (jamais une trame)
- ◁ représentation de Janssen (0511209v1 fin, un autre) (partiellement fait)
- ◁ neumann algorithm, conjugate gradient algorithm
- ◁ comprendre quand des fonctions à support compacts donnent des trames
- ◁ comprendre S^{-1} et $S^{-1/2}$ via Zak (JanssenBolcskeiGaborFramesUnimodularityAndWindowDecay)