Europ. J. Combinatorics (1992) **13**, 473–476

Dénombrement des Cycles Hamiltoniens dans un Rectangle Quadrillé

GERMAIN KREWERAS

The number of hamiltonian cycles in a rectangle made of ab squares is investigated with the help of generating functions for fixed values of b. The cases $b = 1, 2, 3, 4$ yield particularly simple recursion formulas.

Etant donné deux entiers positifs a et b, un *rectangle quadrillé* de dimension $a \times b$ est un graphe $G(a, b)$ qui a:

(1) pour *sommets* les points des coordonnées (u, v) tels que $u \in \{0, 1, 2, \ldots, a\}$ et $v \in \{0, 1, 2, \ldots, b\}$;

(2) pour *arêtes* les paires de sommets qui ont une coordonnée commune et qui ne diffèrent que de 1 pour l'autre coordonnée.

Le graphe $G(a, b)$ a $(a + 1)(b + 1)$ sommets et $a(b + 1) + b(a + 1)$ arêtes.

L'objet du présent article est de dénombrer les cycles hamiltoniens de $G(a, b)$. La Figure 1 donne deux exemples de cycles hamiltoniens de $G(7, 6)$.

Chaque cycle hamiltonien définit, si l'on veut, un *polyomino* 'fin' (c'est-à-dire sans points communs à quatre carrés), inscrit dans le rectangle et de périmètre maximal. Néanmoins les dénombrements entrepris ici n'ont que des rapports lointains avec les dénombrements de polyominos étudiés par exemple dans [1]. Ils ne sont pas non plus sans une certaine parenté avec ceux abordés sous l'angle asymptotique dans [2].

Nous appellerons $H(a, b)$ le nombre de cycles hamiltoniens du graphe $G(a, b)$; on a évidemment $H(a, b) = H(b, a)$.

Pour qu'un cycle hamiltonien existe, remarquons d'abord que l'un au moins des deux entiers a ou b doit être *impair*. En effet la parité de $u + v$ change à chaque étape du cycle et a donc changé un nombre pair de fois quand on revient au point de départ; c'est-à-dire au bout de $(a + 1)(b + 1)$ étapes. Donc l'un au moins des facteurs du produit $(a + 1)(b + 1)$ est pair, et l'un des entiers a ou b est impair.

Trivialement $H(a, 1) = 1$ quel que soit a; le seul circuit hamiltonien est le périmètre du rectangle $a \times 1$. Nous nous proposons d'étudier la façon dont $H(a, b)$ varie avec a pour des valeurs fixes de b; l'un des objets principaux de notre attention sera la fonction génératrice

$$F_b(z) = \sum_a H(a, b) z^a.$$

Le résultat trivial qui vient d'être mentionné se traduit par

$$F_1(z) = z/(1 - z).$$

On calcule $F_2(z)$ en commençant par remarquer que seuls les coefficients des puissances impaires de z sont non nuls; il s'agit donc d'une fonction impaire de z.

Si $a = 2m + 1$, un cycle hamiltonien ne peut avoir que l'une des formes illustrées à titre d'exemple par la Figure 2.

En chacune des m positions *paires* il y a une 'poche' (que nous appellerons 'transversale') tournée indifféremment vers le haut ou vers le bas; il y a 2^m manières

0195-6698/92/060473 + 04 $08.00/0

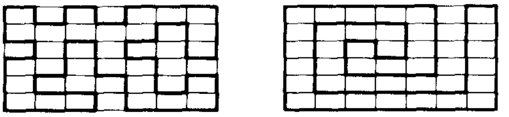


FIGURE 1.

possibles de spécifier ces orientations, donc 2^m cycles. La fonction génératrice est ainsi

$$F_2(z) = \sum_m 2^m z^{2m+1}$$
$$= z/(1-2z^2).$$

Pour $b = 3$, il peut y avoir en outre des poches 'longitudinales', c'est-à-dire débouchant non pas vers le haut ou le bas, mais vers la droite ou la gauche. Nous commencerons cependant par le cas où toutes les poches sont sont transversales; un exemple est donné par la Figure 3, dans laquelle $a = 18$.

On peut, dans certaines positions (ici 7 et 13), voir apparaitre des 'étranglements', c'est-à-dire des configurations formées de deux poches transversales débouchant l'une vers le haut, l'autre vers le bas. Mais il est commode d'examiner d'abord ce qui se passerait s'il n'y avait *aucun* étranglement, donc s'il y avait uniquement des poches 'profondes', composées chacune d'un *fond de poche* et d'une *ouverture*; les fonds de poche sont hachurés sur la Figure 3.

Si, pour un a donné, il y a *un seul* fond, sa longueur est $a-2$, donc son nombre d'ouvertures possibles est le double de $a-2$; la fonction génératrice correspondante est

$$f_1(z) = 2\sum_{a\geq 2}(a-2)z^a = 2(z^3 + 2z^4 + 3z^5 + \cdots) = 2z^3/(1-z)^2.$$

S'il y a *deux* fonds, le nombre de cycles possibles s'obtient par une *convolution* de deux suites dont chacune est 1 2 3 ... et en quadruplant (puisque *chacun* des deux fonds peut déboucher vers le haut ou vers le bas); d'où

$$f_2(z) = z[2z^2/(1-z)^2]^2,$$

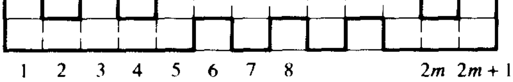
et de façon analogue pour un nombre k de fonds

$$f_k(z) = z[2z^2/(1-z)^2]^k.$$

L'absence de tout fond ($k = 0$) n'est évidemment possible que pour $a = 1$, ce qui peut s'exprimer par une fonction génératrice triviale $f_0(z) = z$; il apparaît donc que pour un nombre non spécifié de poches le nombre de cycles possibles est

$$\sum_{k\geq 0} f_k(z) = (z - 2z^2 + z^3)/(1 - 2z - 2z^2).$$

Appelons $g(z)$ ou plus brièvement g cette expression, qui correspond rappelons-le au cas où il n'y a *aucun étranglement*. Si le nombre e d'étranglements est 1, un raisonnement convolutif analogue au précédent montre que g est remplcé par zg^2. S'il y a e étranglements, l'on obtient de même $z^e g^{e+1}$; d'où finalement, si e n'est pas



Pos. 1 2 3 4 5 6 7 8 $2m$ $2m+1$

FIGURE 2.

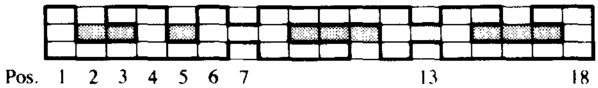


FIGURE 3.

spécifié,

$$G(z) = g/(1 - zg) = (z - 2z^2 + z^3)/(1 - 2z - 2z^2 + 2z^3 - z^4).$$

Jusque là on a exclu toute poche longitudinale. Réintroduisons maintenant la possibilité de deux poches longitudinales et désignons par l la *somme* de leurs longueurs. Les longueurs individuelles respectives de la poche gauche et de la poche droite peuvent être 0 et l, 1 et $l - 1, \ldots, l$ et 0, ce qui représente $l + 1$ possibilités. On obtient ainsi les fonctions génératrices

$$\begin{array}{ll} G(z) & \text{pour } l = 0 \\ 2zG(z) & \text{pour } l = 1 \\ 3z^2G(z) & \text{pour } l = 2 \\ \text{etc.} & \end{array}$$

La fonction génératrice cherchée est finalement

$$F_3(z) = G(z)(1 + 2z + 3z^2 + \cdots) = G(z)/(1 - z)^2.$$

Le numérateur de $G(z)$ se simplifie, et il reste

$$F_3(z) = z/(1 - 2z - 2z^2 + 2z^3 - z^4).$$

Une conséquence remarquable est que la suite des nombres $H(a, 3)$ (ou en abrégé u_a) peut se former *dès le second terme* par la récurrence

$$u_a = 2u_{a-1} + 2u_{a-2} - 2u_{a-3} + u_{a-4}$$

(il suffit de poser $u_a = 0$ pour $a \leqslant 0$). Les premières valeurs numériques sont

$$\begin{array}{lcccccccc} \text{pour } a = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ u_a = & 1 & 2 & 6 & 14 & 37 & 92 & 236 & 596 \end{array}$$

Arrivé à ce point, on se demande tout naturellement si, pour les valeurs de b supérieures à 3, $F_b(z)$ persiste ou non à être le quotient de z par un polynôme.

La réponse se révèle négative: dès que $b = 4$ il n'en est pas ainsi. Le case $b = 4$ donne, on en a vu la raison, une fonction *impaire*; mais il est curieux de remarquer que le numérateur se réduit à deux termes seulement, pour un dénominateur du sixième degré:

$$F_4(z) = (z + 3z^3)/(1 - 11z^2 - 2z^6).$$

Les premiéres valeurs numériques non nulles (on pose $2m + 1 = a$) sont fournies à partir de la troisième par la récurrence

$$u_m = 11u_{m-1} + 2m_{m-3},$$

qui donne

$$\begin{array}{lccccc} \text{pour } a = & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ & 1 & 14 & 154 & 1696 & 18\,684. \end{array}$$

La méthode pour calculer $F_4(z)$ repose sur un codage approprié des fonds de poche, définis de façon analogue à celle du cas $b = 3$. Les calculs complets sont d'une longueur

(4) (2) (2) (4) (2)

FIGURE 4.

disproportionnée avec l'intérêt du résultat. L'auteur les tient néanmoins à la disposition de toute personne intéressée, dans l'espoir qu'une justification plus simple puisse être trouvée ultérieurement.

Voici enfin un tableau récapitulatif des valeurs de $H(a, b)$ pour $a + b < 10$:

	$b = 1$	2	3	4	5	6	7	8
$a = 1$	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	0	2	0	4	0	8	
3	1	2	6	**14**	37	92		
4	1	0	14	0	154			
5	1	4	37	154				
6	1	0	92					
7	1	8						
8	1							

La Figure 4 montre les cinq 'formes' que peuvent prendre les 14 cycles hamiltoniens pour $a = 3$ et $b = 4$ (lesquels s'en déduisent par des symétries).

RÉFÉRENCES

1. M. Delest et X. G. Viennot, Algebraic languages and polyominoes enumeration, *Theor. Comput. Sci.*, **34** (1984), 169–206.
2. G. Slade, Counting self-avoiding walks, *Commun Math. Phys.*, à paraître.

Received 8 January 1992 and accepted 29 June 1992

GERMAIN KREWERAS
Université Pierre et Marie Curie, Paris, France

Home address:
40, Lacépède, 75005 Paris, France