一. 填空题（每空 1 分，共 22 分）

1. 通过对矩阵进行高斯消元来对矩阵进行 A=LU 分解，假设原矩阵为$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$，则

L=____________，U=____________。

2. 假设函数$F_1(x,y)=\frac{1}{4}x^4+x^2y+y^2, F_2(x,y)=x^3+xy-x$，分别计算其二阶 Hessian 矩阵$H_1=$____________，$H_2=$____________。

3. m×n 的矩阵，假设其行空间维数为 r，零空间维数为 s，则 r+s=____________。

4. 矩阵特征值中，当几何重数 GM____代数重数 AM 时，矩阵不能对角化。

5. 逆时针旋转角度 θ 的 2×2 单位旋转矩阵为：____________。

6. δ(t)与____________构成一对傅里叶变换对。

7. 对于强噪信道的输入输出分别为 X，Y，则 I(X;Y)=____________，对于一般的信道，则 I(X;Y)=____________。（用 X, Y 的熵和联合熵的表达式表示）

8. 回归问题$\min\limits_{W} J=\frac{1}{2}\|DW-y\|^2$的解析解 W=____________，其梯度下降法的迭代公式为：____________。

9. 对$f_1(t)$和$f_2(t)$分别进行傅里叶变换可得$F_1(t)$和$F_2(t)$，则对$F_1(t)*F_2(t)$进行傅里叶逆变换可得：____________。

10. 设$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots\ldots, f_m(x)$均为凸函数，请问凸函数的交集________（是/不是）凸函数。

11. 最优化问题$\min f(x)=x_1-x_2+2x_1^2+2x_1x_2$，取$x_0=(2,3)$，则该点处的梯度方向为____________，最快下降方向为____________。

12. 线性规划问题$\min c^Tx, s.t. Ax=(B \quad N)\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}=b, x\geq 0$，设基本解为$x_{bs}$，则其基本形式为____________（或者用文字描述要满足的条件也可以）。

13. 最优化方法中，最小化可微目标函数 f(x)，在点x_0处的梯度表示为$\nabla f(x_0)$，该点处的方向向量表示为p_0，则方向p_0称为点x_0处的下降方向，如果梯度向量$\nabla f(x_0)$与方向向量满足如下关系：____________。

14. 优化问题$\min f(x)=\frac{1}{3}x_1^3+\frac{1}{3}x_2^3-x_2^2-x_1$的严格局部极小值为____________。

15. 函数$y=|x|, x\in R$在 x=0 点的次微分为____________。

16. $x,y\in R^n$,则点 y 到集合$\{x|Ax=b\}$(A为$m\times n$的矩阵，且$rank(A)=m<n, b\in R^m$)的投

影为____________。

二. 判断题（每个括号 1 分，共 14 分）

17. 矩阵的行空间与零空间正交，矩阵的列空间与其转置矩阵的零空间正交（　　）

18. 矩阵 A 的特征值是 2, 2, 5，则矩阵必定可逆（　　）

19. 矩阵 A 的唯一特征向量是$(1,4)^T$的倍数，则必定不可逆（　　）；有重复的特征值（　　）；不能对角化为$X\Lambda X^{-1}$（　　）

20. 离散信源熵的最大值是当信源符号相互独立，概率分布均匀的时候获得（　　）

21. 如果某个系统算子为 g(n)=af(n)+b，则该系统是线性系统（　　）

22. 图像的 2 维傅里叶变换后，可得幅度谱和相位谱，其中相位谱更重要（　　）

23. 求解方程中，系数矩阵的条件数越大越好（　　）

24. Sherman-Morrison 公式的主要作用是将 n×n 矩阵求逆问题转化为一个低阶 k×k 矩阵的求逆问题，从而降低求逆的复杂度（　　）

25. 相对熵$D(p||q) = \sum p(x) \log\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)$非负（　　）

26. 线性规划问题的最优解必定是其基本可行解（　　）

27. 可以采用混合同余法生成均匀分布的随机数（　　）

28. 常用的随机变量模拟方法有逆变换法、拒绝抽样法等方法（　　）

三. 简答题（每题 4 分，共 28 分）

29. 简述奈奎斯特(Nyquist)采样定理的基本内容并解释混叠产生的原因。

30. 高斯消元法和 LU 分解的复杂性一样，为何还需要做 LU 分解，请举例说明。

31. 请结合课程内容解释逼近思想。

32. 请介绍 PCA 基本原理。

33. 请形式化描述 K-means 算法用于矢量量化的稀疏表示问题。

34. 请描述贝叶斯准则、最大后验概率准则、最大似然准则的基本假设及其表达方式。

35. 请介绍有约束优化问题及其对偶问题的形式化表达方式，并介绍弱对偶与强对偶定理的基本内容。

四. 计算和证明题（第 36 题 8 分，第 37 题 10 分，第 38 题 8 分，共 26 分）

36. 请判断函数$g(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i\,(x_i)\,, x\in R^n, x_i>0, \sum_{i=1}^{n} x_i=1$的凹凸性，并给出证明。

37. 给定线性规划问题$\max z=x_1+4x_2, s.t.\begin{cases} x_1+2x_2\le 8 \\ \qquad\quad x_2\le 2 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$，请：

a). 将其转化为标准形式。

b). 给出基本可行解，并计算其最优值。

38. 给出函数$f: R^n\to R$的共轭函数$f^*(y)$的定义，并计算$f(x)=e^x, x\in R$的共轭函数。

五. 论述题（每题 5 分，共 10 分）

39. 通过对实际问题进行形式化建模，表达为优化问题，然后获取数据并进行标注，进一步根据数据采用有监督机器学习算法来拟合数据的分布，请根据本课程内容，谈谈你对人工智能应用的基本理解（如基本流程、存在的问题与挑战、以后的发展趋势等都可以）。

40. 请谈谈对课程内容的建议。