

Nome:

Cognome:

Matricola:

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Domanda 1

[2+3 punti]

- (i) Enunciare il teorema di Taylor con resto di Peano.
- (ii) Scrivere lo sviluppo di Taylor al quarto ordine nel punto $x_0 = 0$ della funzione

$$f(x) = e^{\sin x}$$

Risposta

- (i) _____
- _____
- _____
- (ii) _____
- _____
- _____
- _____

Domanda 2

[2+3 punti]

- (i) Enunciare il Teorema di esistenza e unicità delle soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

- (ii) Mostrare che qualsiasi soluzione al problema di Cauchy con $f(x, y) = \sin y$, $x_0 = 0$ e $y_0 = \pi/2$ è positiva e limitata.

Risoluzione

- (i) _____
- _____
- _____
- _____
- (ii) _____
- _____
- _____
- _____

Esercizio 1

[3 punti]

Sia f una funzione derivabile non-negativa da \mathbb{R} in \mathbb{R} . Allora

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> a) f ammette sempre uno zero; | <input type="checkbox"/> b) f ammette sempre un punto critico; |
| <input type="checkbox"/> c) $1/f$ è limitata; | <input type="checkbox"/> d) nessuna delle precedenti. |

Risoluzione (giustificare la risposta)

Esercizio 2

[3 punti]

Siano $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ due successioni su \mathbb{R} positive tali che $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n/b_n + b_n^3/a_n) < +\infty$. Allora

- | | |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> a) (a_n) e (b_n) sono infinitesime; | <input type="checkbox"/> b) (a_n) è infinitesima ma (b_n) non lo è; |
| <input type="checkbox"/> c) (b_n) è infinitesima ma (a_n) non lo è; | <input type="checkbox"/> d) nessuna delle precedenti |

Risoluzione (giustificare la risposta)

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $E \subset \mathbb{C}$ il sottoinsieme costituito dalle radici quinte di -1 . Allora

- | | |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> a) E è connesso; | <input type="checkbox"/> b) E forma l'insieme dei vertici di un esagono regolare; |
| <input type="checkbox"/> c) E è illimitato; | <input type="checkbox"/> d) $E \cap \mathbb{R}$ ha cardinalità 1. |

Risoluzione (giustificare la risposta)

Esercizio 4

[5 punti]

Studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità su \mathbb{R}^2 della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{\sinh(x^2 + y^2)} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Risoluzione

Esercizio 5

[4 punti]

Risolvere l'equazione differenziale

$$y' + \frac{3}{x} y = x^{4/3} + x^{2/7}$$

con la condizione iniziale $y(-1) = -6/13$, determinando l'intervallo massimale di esistenza della soluzione.

Risoluzione
