Аннотация

Выпускная квалификационная работа посвящена использованию фрактальной геометрии для анализа изображений водных объектов (на примере реки Волга).

В работе рассмотрены основные понятия фрактальной геометрии, показаны способы ее использования в гидрологии. Приведен обзор методов вычисления фрактальной размерности: клеточного и канторовского. Данные методы реализованы на языке *Python* и принимают в качестве входных данных изображения водных объектов. Приведены примеры расчетов для карт реки Волга, а также описаны пути трактовки и применения полученных результатов.

Сведения о фрактальных параметрах рек могут найти применение в схемах комплексного использования и охраны водных объектов, информационных системах и базах данных о водных объектах, для развития методов гидрологических расчетов и прогнозов при управлении водными ресурсами.

Ключевые слова: фрактальная геометрия, фракталы, гидрология, речные системы, клеточный метод, канторовский метод.

Abstract

The final qualification work is devoted to the use of fractal geometry to analyze images of water bodies (using the example of the Volga River).

The work discusses the basic concepts of fractal geometry and shows how it can be used in hydrology. It contains a review of methods for calculating fractal dimension: cellular and Cantor. These methods are implemented in Python and take images of water bodies as input. Examples of calculations for maps of the Volga River are given, and ways of interpreting and applying the results are described.

Information about the fractal parameters of rivers is of great importance and will be useful in schemes for the integrated use and protection of water bodies, information systems and databases on water bodies, for the development of methods of hydrological calculations and forecasts for water resource management.

Key words: fractal geometry, fractals, hydrology, river systems, cellular method, Cantor method.

Оглавление

Введение

С давних времен человечество изучало лишь идеальные фигуры: окружности, параллелограммы, треугольники, которых нет в реальном мире, но которые относительно просто описываются. Знакомая всем школьная геометрия не способна описать облака, потому что это не просто сферы, горы, которые лишь очень приближенно похожи на конусы, а о причудливых формах береговой линии и вообще говорить не приходится, тут уж и представить нельзя, чем их можно аппроксимировать. Окружающий нас мир устроен гораздо сложнее, не все можно заменить на что-то просто устроенное. Существует множество вещей, обладающих замысловатыми формами и свойствами, описывать которые нужно соответствующими объектами. И тут нам помогут фракталы.

Открытие фракталов произвело революцию не только в геометрии, но и в физике, химии, биологии, во всех областях нашей жизни. Так, фракталами в живой природе являются кораллы, цветы и другие растения (брокколи, капуста Романеско), плоды (ананас), кровеносная система и бронхи животных. Много их и в неживой природе. Например, уже упомянутые береговые линии, горные хребты, и облака, а также снежинки, молнии и кристаллы. Да, даже человек, если задуматься, является фракталом. Он рождается ребенком, а затем растет, и этот процесс сопровождается «принципом самоподобия», фрактальностью.

Фракталы широко применяются в компьютерной графике при построении изображений деревьев, кустов, гор и других природных объектов. Из фракталов делают антенны, точнее используют лишь несколько первых их итераций. Удобство таких антенн заключается в их дробной размерности. Фракталы даже используют в торговле, так как они лучше описывают поведение рынка, чем линейные функции. [6]

Фракталы можно встретить почти везде. Они замечательно описывают многие природные объекты, в частности, речные системы. С помощью фракталов можно довольно неплохо анализировать дренированность речных систем и даже прогнозировать то, насколько территория будет подвержена затоплению в периоды паводков. Фрактальная размерность – это показатель степени развитости речных систем и, как следствие, дренированности территории. Этим обусловлена актуальность выбранной темы и практическое значение данной работы.

Постановка задачи

Цель

Вычисление фрактальной размерности клеточным и канторовским методами на примере речной системы Волга.

Исходные данные

Литература и статьи по фрактальной геометрии, карты реки Волга.

Модельные представления

Алгоритмы расчета фрактальной размерности: клеточный и канторовский.

Средства реализации

- Язык:

Программа должна быть создана на языке *Python* версии 3.8

- Библиотеки:

Для воплощения функциональности программы необходимы библиотеки *sklearn.linear_model* (для линейной регрессии), *math* (для использования математических функций, в частности, логарифма), *numpy* (для визуального упрощения кода и использования функций обработки матриц), *matplotlib* (для построения графиков), *PIL* (для работы с изображениями)

- Среда:

Spyder (разделена на две секции и позволяет одновременно увидеть код, график и консоль, удобна при работе с графиками)

Ожидаемые результаты

Программа, для вычисления фрактальной размерности участков местности клеточным и канторовским методами.

Критерии оценки результатов

Программа выводит адекватные значения фрактальной размерности для каждого участка местности (чем большую площадь на этом участке занимают притоки рек, тем больше фрактальная размерность).

Глава 1. Обзор предметной области Понятие фрактала

Для того, чтобы говорить о теоретической составляющей фракталов, необходимо понять, что же такое фрактал. Одно из определений гласит, что это самоподобные объекты. Но в этом случае непонятно, почему множество Мандельброта относят к фракталам, ведь при его приближении можно обнаружить похожие на это множество узоры, но они все равно отличаются от самого множества. Получается, что не все фракталы самоподобны.

Значит более верным определением фрактала будет то, что это не самоподобная фигура, а фигура с дробной размерностью. Что же значит дробная размерность, она же фрактальная? Интуитивно мы понимаем термин *размерность* как число координат, необходимых для задания положения точки внутри фигуры. Так, любая линия (например, окружность или прямая) одномерна — достаточно всего одной координаты, чтобы точно указать точку, а плоскость и поверхность шара двумерны. Но в математике такое «определение» не всегда работает хорошо: его трудно применить к очень большому числу разнообразных фигур и множеств, в том числе и к фракталам. Поэтому фрактальную размерность определяют по-другому.

Допустим, что фигура F, размерность которой мы хотим найти, расположена на плоскости. А плоскость, в свою очередь, покрыта сеткой из квадратиков со стороной δ. Через $N(\delta)$ обозначим число квадратиков, которые пересекаются с фигурой F (объединение всех таких квадратиков содержит в себе F). Ясно, что это число зависит от размера квадратиков: чем они меньше, тем больше их нужно, чтобы покрыть фигуру. Если эта зависимость выражается степенным законом: число $N(\delta)$ пропорционально некоторой степени $\left(\frac{1}{\delta}\right)^D$, то будем считать, что фигура F имеет размерность D (вполне может случиться, что число D не целое).

Это — определение фрактальной размерности по Минковскому. Для «хороших» фигур оно дает тот же результат, что и интуитивное представление о размерности. Например, посчитаем размерность квадрата со стороной 1 (располагая его на плоскости так, что стороны квадрата каждый раз лежат на линиях сетки): $N(1) = 1$, $N(1/2) = 4$, $N(1/3) = 9$, $N(1/4) = 16$, и т. д. Видно, что в этом случае $D = 2$, то есть квадрат двумерен, как и должно быть. [8]

Но на самом деле под это определение тоже попадают не все фракталы. Тоже множество Мандельброта имеет размерность ровно два. Можно прийти к еще более точному определению, что фрактал – это бесконечно кривой объект. Но опять же находим исключение в виде кривой Гильберта, в которой после бесконечного количества шагов линия заполняет всю плоскость.

Получается, что такой фрактал имеет размерность просто два, т. е. заполняет всю плоскость. Одномерная линия превращается в двумерную плоскость. И так как она заполняет всю плоскость, она уже не бесконечно кривая, как другие фракталы.

Поэтому уже четвертым и на этот раз точным определением фрактала будет фигура, у которой ее хаусдорфова размерность превышает ее топологическую размерность. Но для понимания этого определения стоить разобраться, что это за такие размерности. Начнем с топологической. Топологическая размерность — это обычная геометрическая размерность. Она может принимать только целые значения. Так, для отрезка она равна 1, для квадрата 2, а для куба — 3. А с хаусдорфовой размерностью мы уже встречались — это тоже самое, что и фрактальная размерность.

Теперь, когда мы разобрались с тем, что же представляет из себя фрактал, стоит поговорить о его разновидностях. Итак, существуют:

- Геометрические (конструктивные) фракталы: фракталы этого типа строятся поэтапно. Сначала изображается основа. Затем некоторые части основы заменяются на фрагмент. На каждом следующем этапе части уже построенной фигуры, аналогичные замененным частям основы, вновь заменяются на фрагмент, взятый в подходящем масштабе. Всякий раз масштаб уменьшается. Когда изменения становятся визуально незаметными, считают, что построенная фигура хорошо приближает фрактал и дает представление о его форме. Для получения самого фрактала нужно бесконечное число этапов. Меняя основу и фрагмент, можно получить много разных геометрических фракталов. Такими фракталом является, уже упомянутая, кривая Гильберта.
- Динамические (алгебраические) фракталы: фракталы этого типа возникают при исследовании нелинейных динамических систем (отсюда и название). Поведение такой системы можно описать комплексной нелинейной функцией (многочленом) $f(z)$.
- Стохастические фракталы: кривая Коха, как бы ни была похожа на границу берега, не может выступать в качестве её модели из-за того, что она самоподобна. Фракталы, при построении которых в системе случайным образом изменяются какие-либо параметры, называются стохастическими. Примером может служить траектория броуновского движения частицы. [7]

Применение в исследовании рек

Более 70% земного шары покрывает вода и лишь около 30% занимает суша. Поэтому важно изучать гидросферу нашей планеты. Но все оказывается не так уж и просто. Так при измерении длины береговой линии Великобритании люди получали совершенно разные результаты. И все из-за того, что они использовали разные масштабы. Кто-то смотрел, сколько отрезков по 100 метров укладывается в очертания береговой линии, а кто-то в качестве единицы измерения брал 10 м и получал значительно большую длину. Но кто же ошибался? Как оказалось оба были правы. Измерим длину береговой линии, заменяя ее ломаной линией, составленной из отрезков длины ε.

Если $\varepsilon \to 0$, то мы учитываем все больше и больше изгибов берега, а значит длина стремится к бесконечности. Тогда длина береговой линии Британии была бы бесконечной если бы мы измеряли ее отрезками, длина которых стремится к нулю (см. рис. 1).

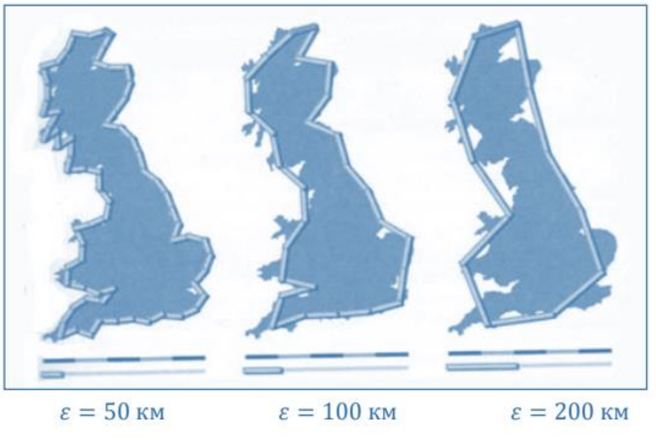

Рисунок 1.1. Вычисление длины береговой линии Великобритании

Поэтому лучше определить криволинейность береговой линии степенью ее изгибания (а не длиной), которое Б.Мандельброт и предложил назвать фрактальной размерностью D.

Так же и с речными системами – в зависимости от выбранного масштаба можно получить совершенно разные значения протяженности речной системы. А определение фрактальной размерности дает вполне конкретный результат, не зависящий от масштаба, в связи с чем фрактальная геометрия является хорошим инструментом для описания рек.

Вывод

Евклидова геометрия не позволяет описывать природные объекты, так как природа не состоит из идеальных фигур. Но средствами фрактальной геометрии все же можно систематизировать и упорядочить знания, например, для водных объектов.

Глава 2. Алгоритмы измерения фрактальной размерности

Что такое фрактальная размерность?

Так как природные объекты невозможно описать с помощью Евклидовой геометрии. Поэтому попытаемся это сделать средствами фрактальной геометрии и формализуем для начала основное ее понятием – фрактальную размерность.

Если обратиться к привычной нам топологической размерности, то для единичного отрезка, если мы меряем его отрезком длинной $r = \frac{1}{3}$, то его длину можно найти как

$$N * r = 1.$$

Площадь единичного квадрата при измерении маленькими квадратиками со стороной r, равна:

$$N * r^2 = 1.$$

А для объема единичного куба, измеренного кубами со стороной r, получим формулу для объема (см. рис. 2.1):

$$N * r^3 = 1.$$

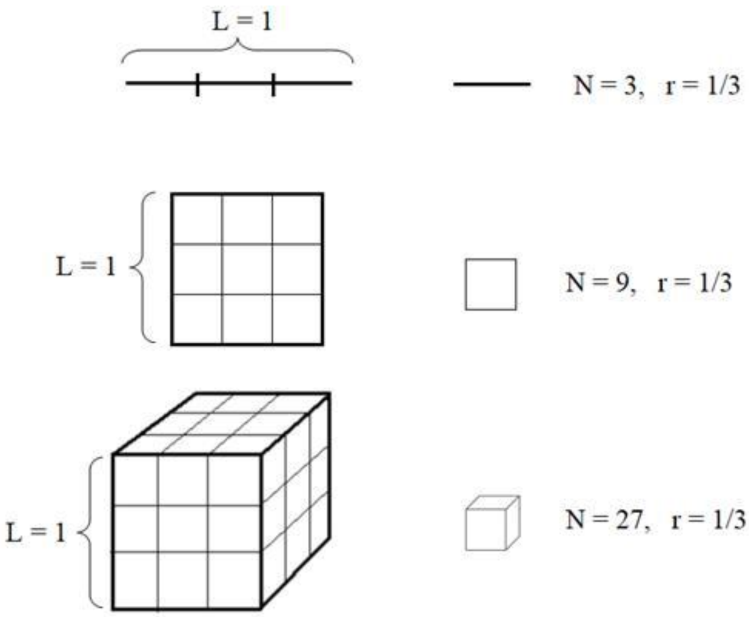

Рисунок 2.1. Вывод фрактальной размерности

Получается, что размерность совпадает со степенью r, а значит можно записать в общем виде:

$$N * r^D = 1.$$

Выразим D из этой формулы:

$$\log(N \cdot r^D) = \log 1$$
$$\log N + D \cdot \log r = 0$$
$$D \cdot \log r = -\log N$$
$$-D \cdot \log(\frac{1}{r}) = -\log N$$
$$D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{r}}.$$

Таким образом получаем формулу определения фрактальной размерности, которую получил Мандельброт:

$$D = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N}{\log \frac{1}{\varepsilon}}.$$

Например, в случае измерения отрезками, это означает, что при уменьшении длины отрезка, отношение логарифма количества потребовавшихся для измерения отрезков к логарифму длины отрезка будет в пределе давать фрактальную размерность.

Далее представлены методы вычисления фрактальной размерности фрактальной линии по изображению.

Линейная регрессия

Формула фрактальной размерности предполагает предельный переход, что приводит к необходимости использования аппроксимации полученных представленными далее методами данных. В силу структуры формулы будем использовать линейную регрессию.

Линейная регрессия – это приближение данных линейной функцией:

$$f(x) = a + b \cdot x.$$

Мы имеем набор $x = (x_1, \ldots, x_r)$ – величин связанных с линейными размерами единиц измерения (они немного меняются в зависимости от алгоритмов расчет фрактальной размерности, представленных далее) и набор $y = (y_1, \ldots, y_r)$ – величин определяющих количество этих единиц измерения. Оценочная функция регрессии выражается уравнением:

$$f(x) = b_0 + b_1 \cdot x.$$

Для каждого результата наблюдения $i = 1, \ldots, n$, оценочный ответ $f(x_i)$ должен быть как можно ближе к соответствующему фактическому ответу y_i. Разницы $y_i - f(x_i)$ для всех результатов наблюдений называются остатками. Регрессия определяет лучшие прогнозируемые весы измерения, которые соответствуют наименьшим остаткам. Остатки будем оценивать с помощью метода наименьших квадратов.

Метод наименьших квадратов — математический метод, применяемый для решения различных задач, основанный на минимизации суммы квадратов отклонений некоторых функций от искомых переменных (минимизация функции F).

$$F(x; y) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$

Нужно рассчитать оптимальные значения спрогнозированных весов b_0 и b_1 для минимизации квадрата ошибки и определить оценочную функцию регрессии (см. рис. 2.2).

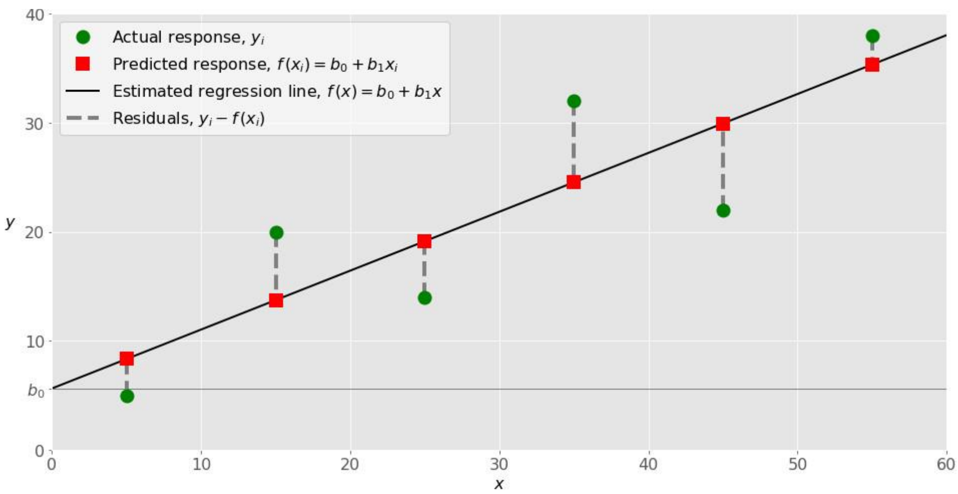

Рисунок 2.2. Линейная регрессия

Клеточный метод (box-counting dimension)

- Линия покрывается сеткой с размером ячейки δ.
- Подсчитывается количество клеток $N(\delta)$, накрывающих исследуемую линию.
- Далее величина δ несколько раз уменьшается и два предыдущих пункта повторяются (см. рис. 2.3).
- В результате, получаем несколько пар значений δ и $N(\delta)$, для которых вычисляем логарифмы. Далее строим систему координат в двойном логарифмическом масштабе и наносим точки с полученными координатами на плоскость. Проводим прямую линию через эти точки (см. рис. 2.4).

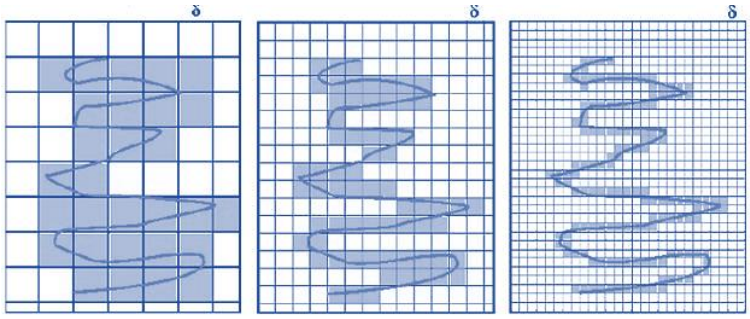

Рисунок 2.3. Клеточный метод

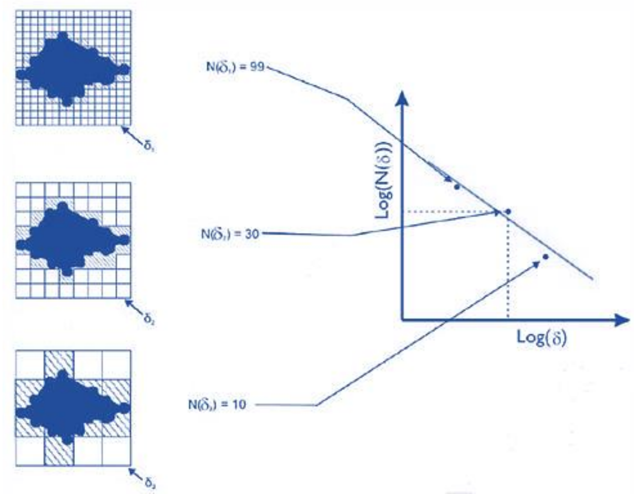

Рисунок 2.4. Линейная регрессия

- Далее определим угол наклона линии регрессии (см. рис. 2.5).

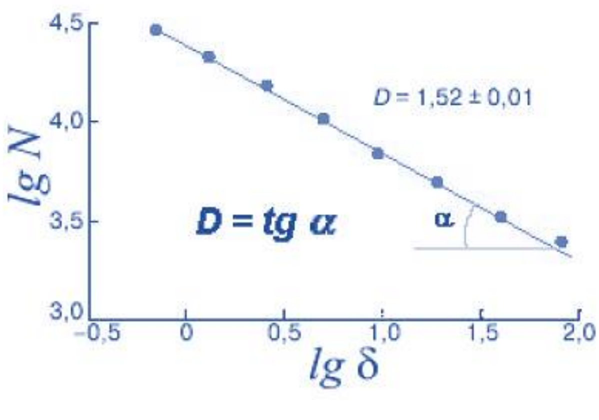

Рисунок 2.5. Угол наклона линейной регрессии

- Фрактальная размерность D будет равна тангенсу этого угла.

Канторовский метод (квадраты)

- Изображение покрывается сеткой, состоящей из квадратов, с площадью ε^2 каждый.
- Подсчитывается число пересечений $N(\varepsilon)$ линии на изображении с клеткой сетки.

- Повторяются два предыдущих шага с увеличением количества задействованных клеток сетки на одну (см. рис. 2.6).
- Строится график зависимости $N(\varepsilon)$ в билогарифмических координатах. Методом наименьших квадратов оценивается наклон этого графика, он и представляет собой размерность блуждания h, через которую по формуле находится фрактальная размерность:

$$h = 2(D - 1)$$

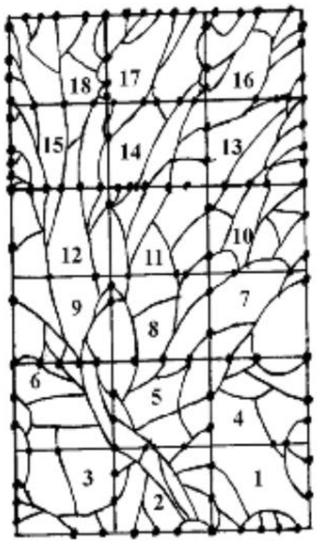

Рисунок 2.6. Канторовский метод с прямойгольной сеткой

Канторовский метод (окружности)

- Выбирается раствор циркуля ε – радиус окружности.
- Строится окружность и подсчитывается число пересечений $N(\varepsilon)$ линии на изображении с этой окружностью.
- Повторяются два предыдущих шага с увеличением раствора циркуля ε от минимального до максимального, центр окружности при этом не меняется (см. рис. 2.7).
- Строится график зависимости $N(\varepsilon)$ в билогарифмических координатах. Методом наименьших квадратов оценивается наклон этого графика, он и представляет собой размерность блуждания h, через которую по формуле находится фрактальная размерность D:

$$h = 2(D - 1)$$

$$D = \frac{h}{2} + 1$$

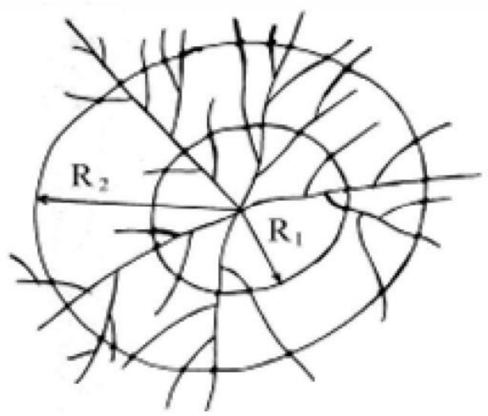

Рисунок 2.7. Канторовский метод с окружностями

Результат можно обосновать следующим образом. Если ветвлений нет, то число N не зависит от размера R (см. рис. 2.7), т.е. в этом случае

$$D = 1,\ N = const \text{ и } h = 0.$$

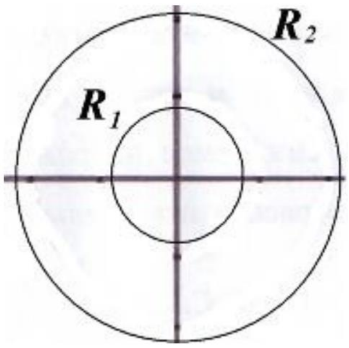

Рисунок 2.8. Ветвления отсутствуют

Если ветвления полностью заполняют плоскость, то их число N прямо пропорционально площади области (см. рис. 2.9), т.е. в этом случае

$$D = 1,\ N = R^2 \text{ и } h = 2.$$

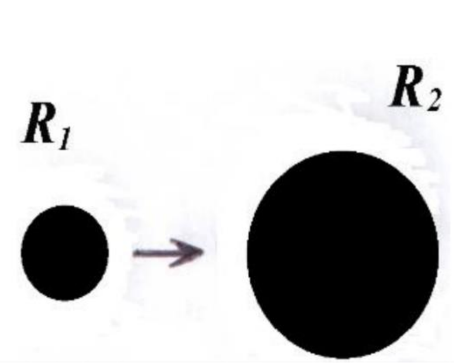

Рисунок 2.9. Ветвления заполняют всю плоскость

Предполагая, что размерность блуждания линейно связано с фрактальной размерностью, т.е. $h = a + b\,D$, из выше приведенных условий поручаем

$$h = 2(D - 1).$$

Вывод

Для вычисления фрактальной размерности существуют разные методы.

Глава 3. Реализация алгоритмов расчета фрактальной размерности

Описание задачи

Необходимо реализовать проект на языке *Python*, который разбивает исходное изображение реки на области и подсчитывает фрактальную размерность в каждой области (см. рис. 3.1).

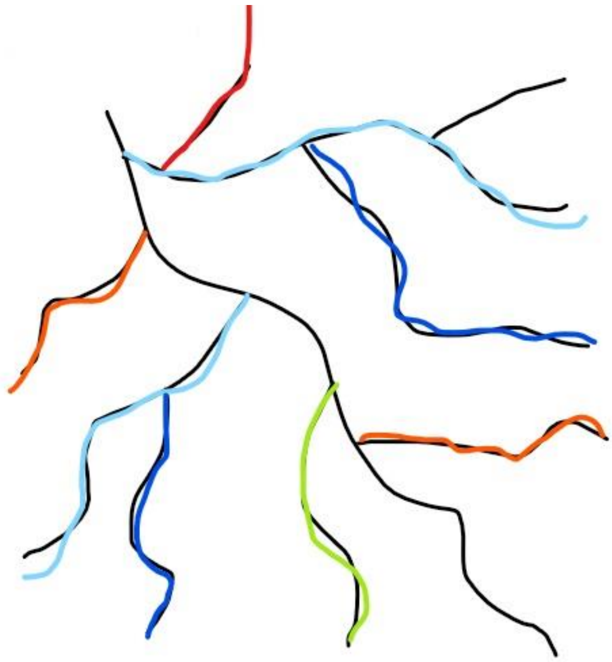

Рисунок 3.1. Исходное изображение

Клеточный метод (box-counting dimension)

Программа состоит из трех смысловых частей. Сначала происходит видоизменение входного изображения (чтение данных, преобразование в черно-белую картинку, разбивка на области).

Этап 1. *Преобразование исходного изображения*

При запуске программы происходит открытие картинки и преобразование значений ее пикселей в массив (см. рис. 3.2).

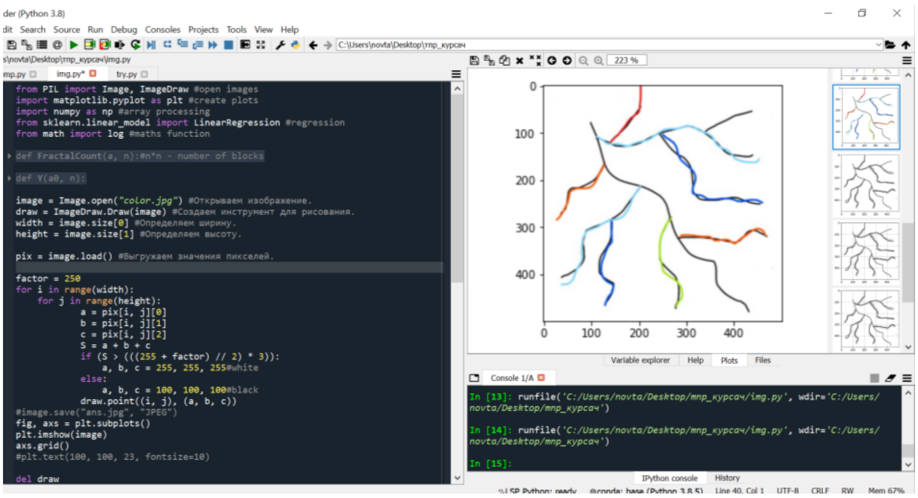

Рисунок 3.2. Преобразование изображения

Затем проходимся по массиву и меняем значения пикселей на белый или черный цвета, в зависимости от того, к кому цвету ближе их значения *RGB*. Получается черно-белое изображение (см. рис. 3.3).

Далее идет разбивка на области (на графике накладывается сетка, а затем в коде эта разбивка осуществляется с помощью введения условий на делимость номера пикселя на размер сетки при проходе по массиву) (см. рис. 3.4).

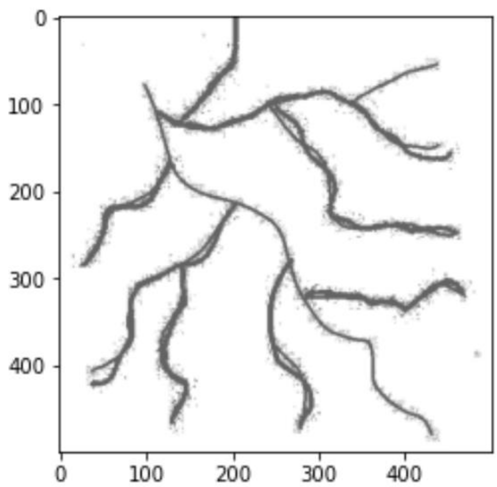

Рисунок 3.3 Черно-белый вариант

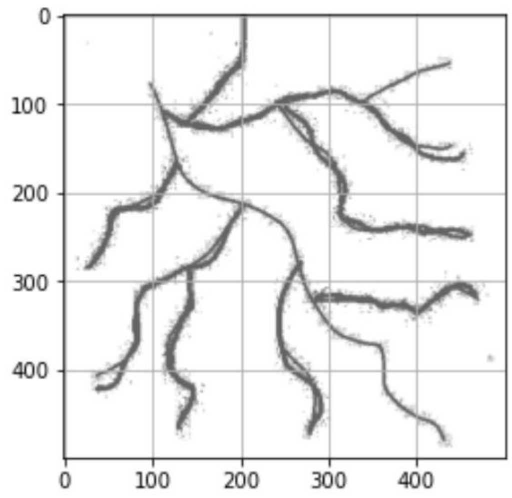

Рисунок 3.4 Сетка

Этап 2. *Подсчет количества черных пикселей в каждой области*

Теперь переходим ко второму этапу. В нем осуществляется проход по массиву и подсчет количества черных клеток.

Будем считать клетку черной, если в ней находится хотя бы 1 черный пиксель. Последовательно на изображение накладываются сетки, ячейки в которых становятся все меньше и меньше и на каждом этапе рассчитывается количество черных клеток.

Этап 3. *Регрессия*

На третьем этапе используется линейная регрессия. Она необходима для нахождения тангенса угла наклона, который и определяет фрактальную размерность. В качестве параметров берутся логарифмы размеров сетки и количества окрашенных клеток. Таким образом находится угол наклона. И в конце на график наносится значение фрактальной размерности (см. рис. 3.5). Красным цветом обозначены районы, где затопление наиболее вероятно, в желтых районах есть опасность, а в зеленых беспокоиться не о чем.

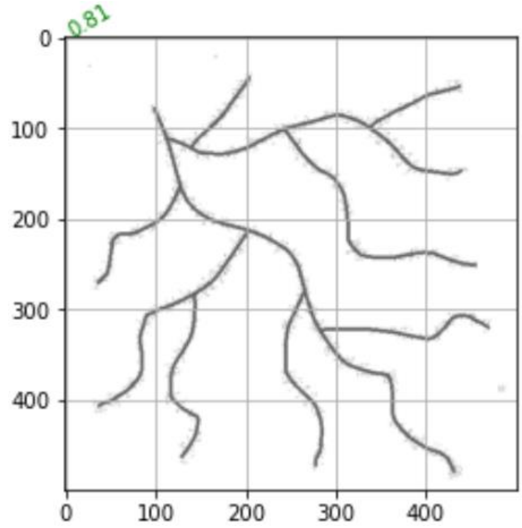

Рисунок 3.5. Фрактальная размерность способ1

Канторовский метод (квадраты)

В данном методе фрактальная размерность определяется за счет подсчета количества пересечений изображения с прямоугольной сеткой.

Определение наличия пересечения

Реализована функция, которая по одномерному массиву определяет есть ли пересечение или нет. Если после черного пикселя идет белый, то это конец пересечения и значит можно увеличивать счетчик.

Подсчет количества пересечений

На массив накладываем сетку и проходим по сетке последовательно захватывая все квадраты, начиная с левого верхнего края и направо (см. рис. 3.6).

Рисунок 3.6. Порядок обхода сетки

Осуществляется проход по массиву последовательно, начиная с квадрата фиксированной площади и далее добавляем по одному квадрату к нашей сетке. При этом запоминается размер сетки и количество пересечений на каждом этапе.

При реализации алгоритма выделено 3 типа подсеток:

1 тип – это случаи, когда мы проходим по периметрам прямоугольников в рамках одной строки (1 строки сетки) (см. рис. 3.7).

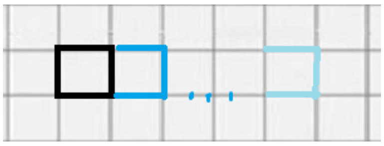

Рисунок 3.7 Тип1 подсетки

2 тип – проход по прямоугольникам, включающим строки сетки (см. рис. 3.8).

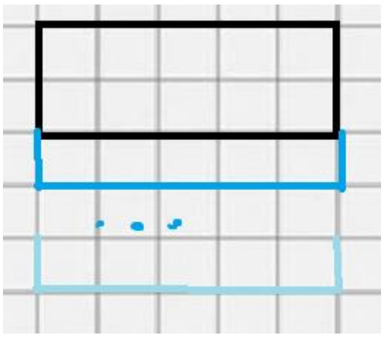

Рисунок 3.8. Тип2 подсетки

3 тип – Г-образные фигуры (см. рис. 3.9).

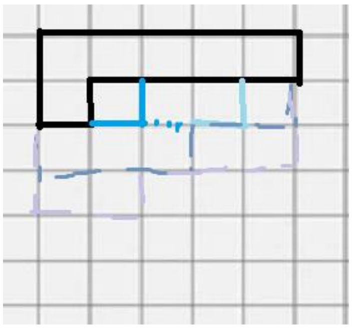

Рисунок 3.9. Тип3 подсетки

Для каждого случая реализован свой алгоритм обхода в отдельном операторе *if* функции, которая принимает в качестве параметров массив и количество ячеек сетки *(n)*, по которым нужно осуществить обход. Основная идея: для нахождения количества включенных в фигуру строк используется целая часть от деления n на количество ячеек в строке, остаток от деления – это количество ячеек в незаконченной полностью строке. Затем по этим параметрам выбирается тип фигуры и осуществляется проход по ней в поисках пересечений обрабатываемого изображения с сеткой.

Регрессия

В третьем этапе используется линейная регрессия. Она необходима для нахождения тангенса угла наклона, который и определяет размерность блуждания. В качестве параметров берутся логарифмы квадратного корня из площади фигуры и количество пересечений на каждом этапе. По этим данным находится угол наклона – это и есть размерность блуждания, затем по размерности блуждания вычисляется фрактальная размерность. И в конце на график наносятся значения фрактальной размерности (см. рис. 3.10).

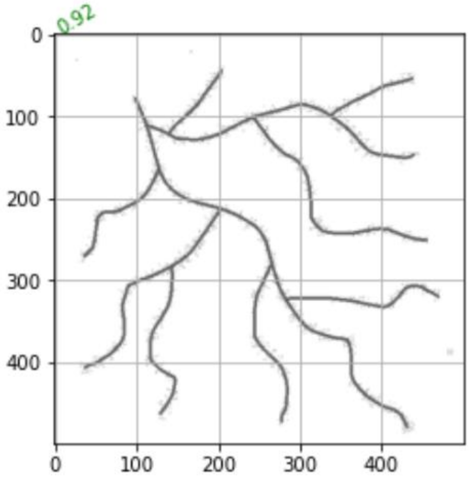

Рисунок 3.10. Фрактальная размерность способ2

Канторовский метод (круги)

В данном методе фрактальная размерность определяется за счет подсчета количества пересечений изображения с окружностями.

Определение наличия пересечения

Реализована функция, которая по одномерному массиву определяет, есть ли пересечение изображения с сеткой или нет. Если после черного пикселя идет белый, то это конец пересечения и значит можно увеличивать счетчик.

Подсчет количества пересечений

На массив накладываем окружности и проходим по ним последовательно от окружности с минимальным радиусом к окружности с максимальным радиусом (см. рис. 3.11).

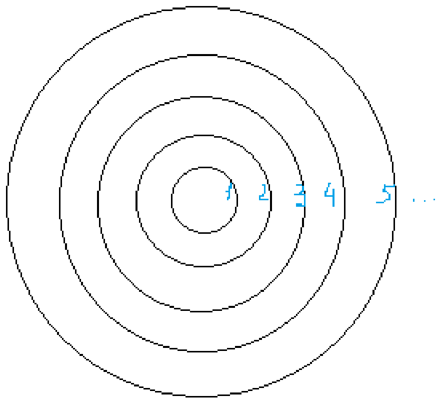

Рисунок 3.11. Порядок обхода

Осуществляется проход по массиву последовательно, начиная с окружности фиксированного радиуса и далее не меняя центра окружности увеличиваем ее радиус. При этом запоминается радиус и количество пересечений на каждом этапе.

Для каждого случая реализован свой алгоритм обхода в отдельном операторе *if* функции, которая принимает в качестве параметров массив и количество ячеек сетки *(n)*, по которым нужно осуществить обход. Основная идея: для нахождения количества включенных в фигуру строк используется целая часть от деления n на количество ячеек в строке, остаток от деления – это количество ячеек в незаконченной полностью строке. Затем по этим параметрам выбирается тип фигуры и осуществляется проход по ней в поисках пересечений обрабатываемого изображения с сеткой.

Регрессия

В третьем этапе используется линейная регрессия. Она необходима для нахождения тангенса угла наклона, который и определяет размерность блуждания. В качестве параметров берутся логарифмы из радиуса окружности и количество пересечений. По этим данным находится угол наклона – это и есть размерность блуждания, затем по размерности блуждания вычисляется фрактальная размерность. И в конце на график наносятся значения фрактальной размерности (см. рис. 3.12).

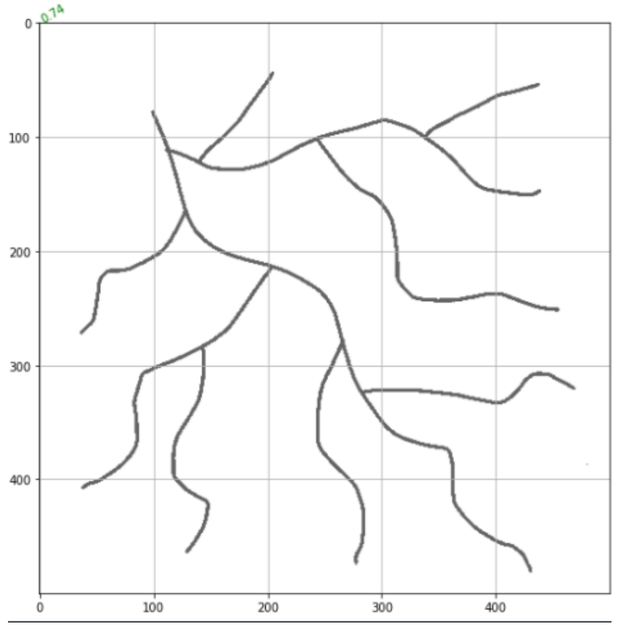

Рисунок 3.12. Фрактальная размерность способ3

Глава 4. Примеры вычисления фрактальной размерности

Расчеты для дельты Волги

Рассмотрим применение описанных методов на примере дельты реки Волги. Расчеты будем проводить по следующему изображению 500*500 пикселей (см. рис. 4.1) (источник: https://stepnoy-sledopyt.narod.ru/geologia/samoilov/volga1.htm).

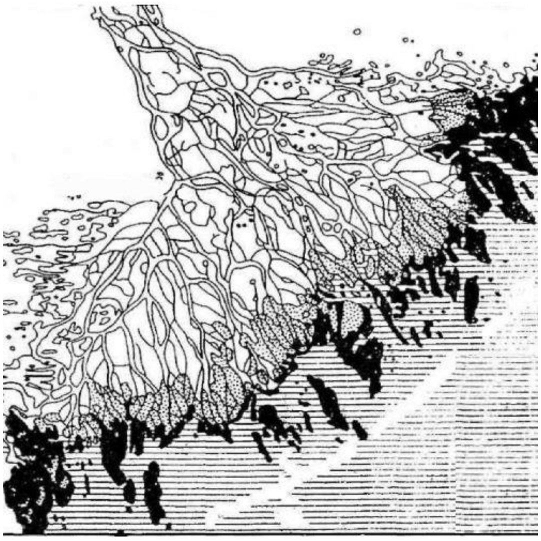

Рисунок 4.1. Дельта Волги

Для клеточного метода необходимо задать параметры сетки, накладываемой на изображение. Разобьем сначала на 10 частей по горизонтали и вертикали (т. е получим, что каждая клетка имеет размер 500/10=50 пикселей) и далее будем постепенно увеличивать количество клеток вплоть до разбиения на 100 частей. И по результатам подсчета количества занятых (черных клеток), использую линейную регрессию, получим следующее значение фрактальной размерности (см. рис. 4.2).:

$D1 = 1.61$

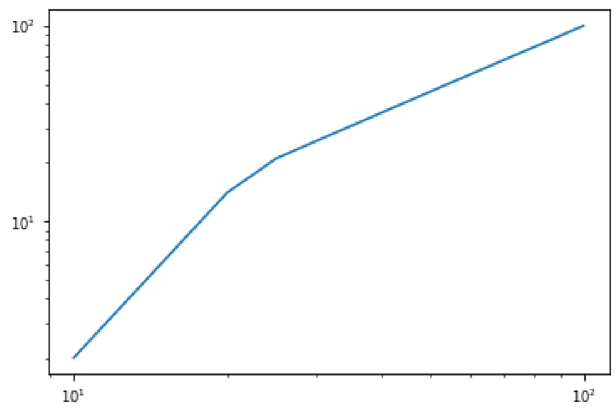

Рисунок 4.2. Линейная регрессия для клеточного метода

Далее получим фрактальную размерность канторовым методом, путем определения количества пересечений изображения с квадратной сеткой, начиная от верхнего левого края. В данном методе будем использовать часть изображения, так как он чувствителен к пропускам данных (белые промежутки, где нет реки на исходном изображении) (см. рис. 4.3).

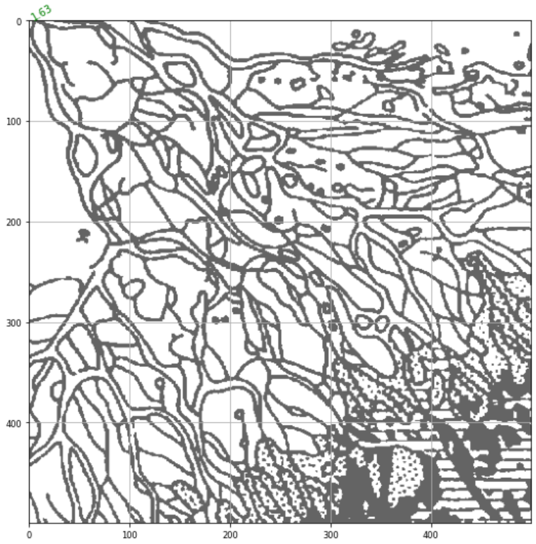

Рисунок 4.3. Канторовский метод с прямоугольной решеткой

Применяя описанный ранее алгоритм получим (см. рис. 4.4).:

$D2$ = 1.63

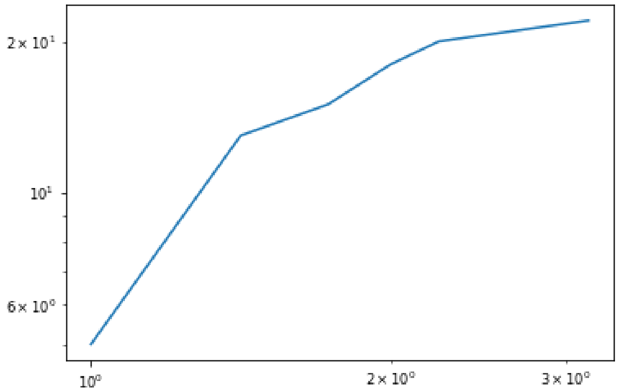

Рисунок 4.4. Линейная регрессия для канторовского метода с прямоугольной решеткой

И в последнем канторовском методе с окружностями задаем центр всех окружностей в точке (100, 0) и постепенно увеличиваем радиус окружности с центром в этой точке с шагом в 30 пикселей. При этом учитываем не всю окружность, а ее четверть от 270 до 360 градусов ввиду геометрии дельты.

Расчеты данным методом дают значение (см. рис. 4.5).:

D3 = 1.59

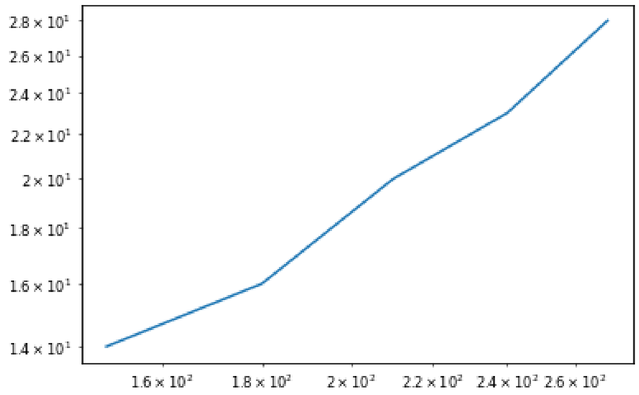

Рисунок 4.5 Линейная регрессия для канторовского метода с окружностями

Три метода дали следующие результаты:

Таблица 4.1. — Фрактальная размерность дельты Волги

метод	Клеточный	Канторовский (квадраты)	Канторовский (круги)
Значение фрактальной размерности	1.61	1.63	1.59

Расчет для участка Волги в месте слияния с Камой

Рассмотрим теперь другой участок реки Волга. (см. рис. 4.6): (источник: https://ru.wikipedia.org/wiki/

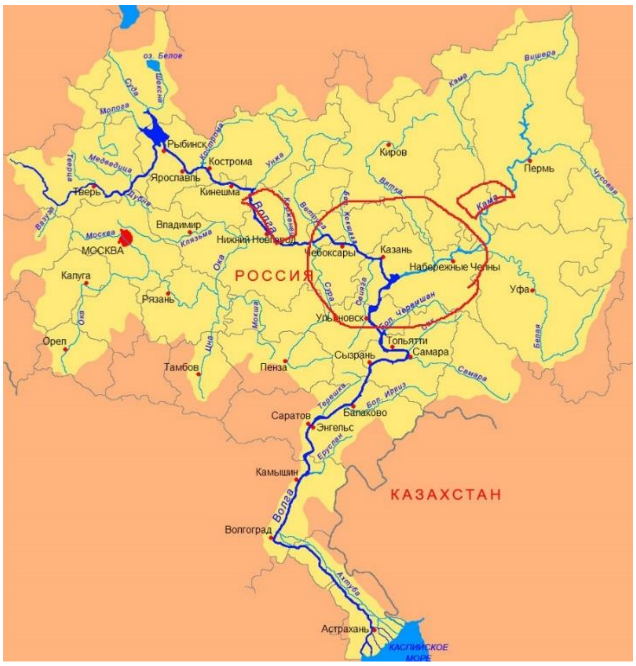

Рисунок 4.6. Речная система Волга

Для расчетов будем использовать часть следующего изображения: (см. рис. 4.7): (источник: https://app.onlineschool-1.ru/6-klass/geografiya/reki2/article)

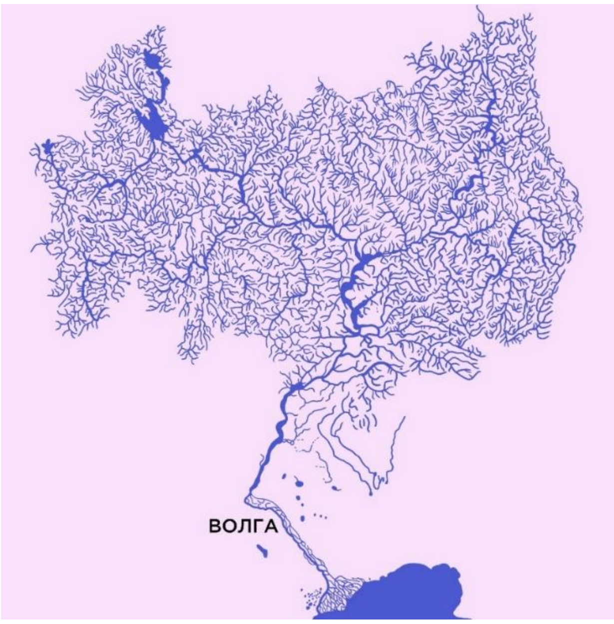

Рисунок 4.7. Речная система Волга (другое изображение)

Клеточный метод

Так как в данном случае изображение не черно белое, то для начала, используем фильтр, чтобы сделать его таковым, так как реализованные методы работают с черно-белым изображением.

Так же для клеточного метода потребуется повысить четкость линий (при преобразовании в ч/б, середина рек оказывается более черная с RGB=(100, 100, 100), а ближе к берегу RGB смещается больше в сторону белого (255, 255, 255), поэтому меняя значения с которых происходит преобразование в черный цвет можно сделать линии более тонкими. Например, если выставить параметры так, что только пиксели изображения с *RGB* = (100, 100, 100) будем считать черными, то все остальные пиксели станут белыми, но при этом можно и часть серых пикселей в зависимости от RGB сделать черными) (см. рис. 4.8).

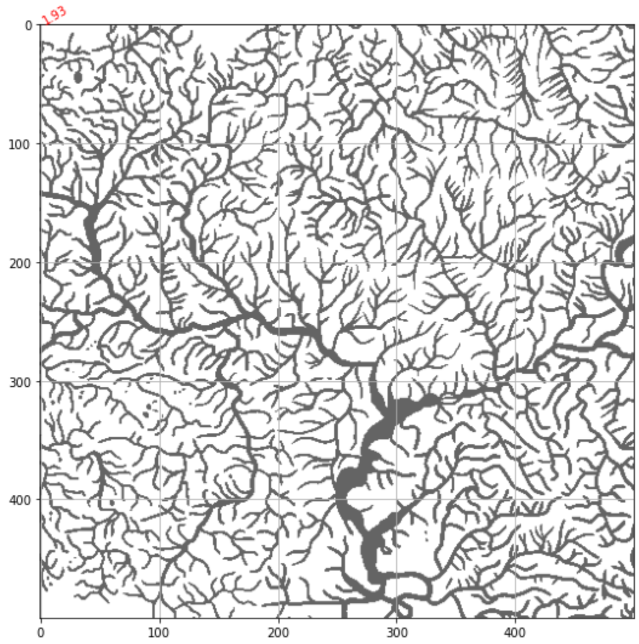

Рисунок 4.8. Преобразованное изображение

При толстых линиях, изображение недостаточно схематично, поэтому получаем неправдоподобно большое значение фрактальной размерности (1.93)

Фрактальная размерность при повышении четкости (1.75) (см. рис. 4.9):

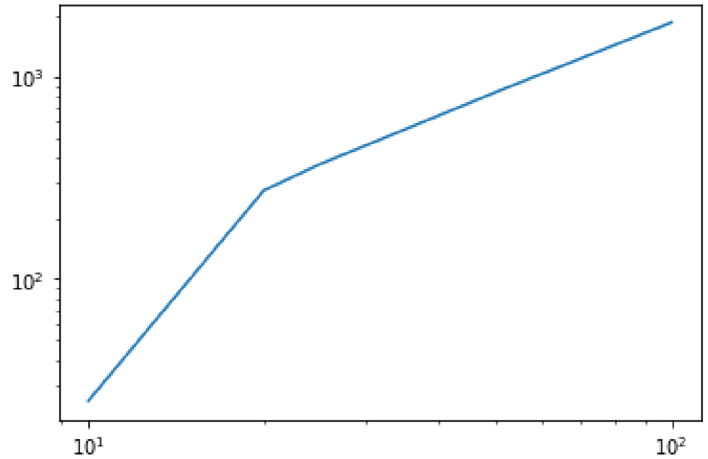

Рисунок 4.9. Линейная регрессия для клеточного метода

Кантровский метод (квадраты)

В данным случае, взят равномерный участок реки, поэтому тоже изображение подходит и для этого метода, но только необходимо перевернуть его на 180 градусов, чтобы основное начало ветвлений находилось сверху, так как в реализации метода проход идет сверху вниз (см. рис. 4.10).

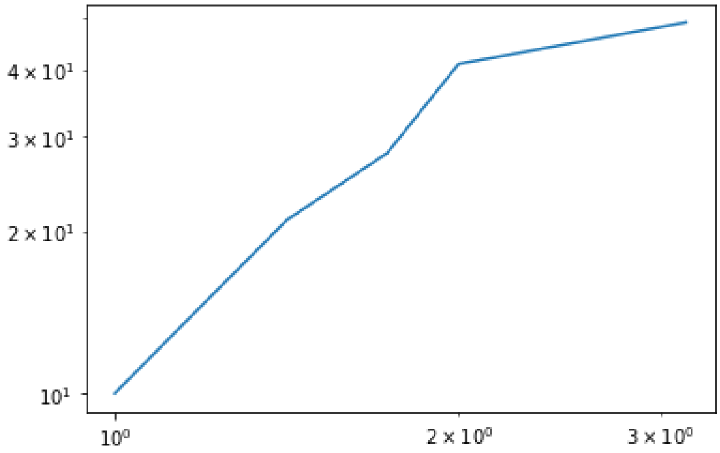

Рисунок 4.10. Линейная регрессия для канторовского метода (квадраты)

Канторовский метод (окружности)

В данном случае берем перевернутое изображение, как и в предыдущем методе, так как по реализации также необходимо, чтобы начало ветвления было наверху (см. рис. 4.11).

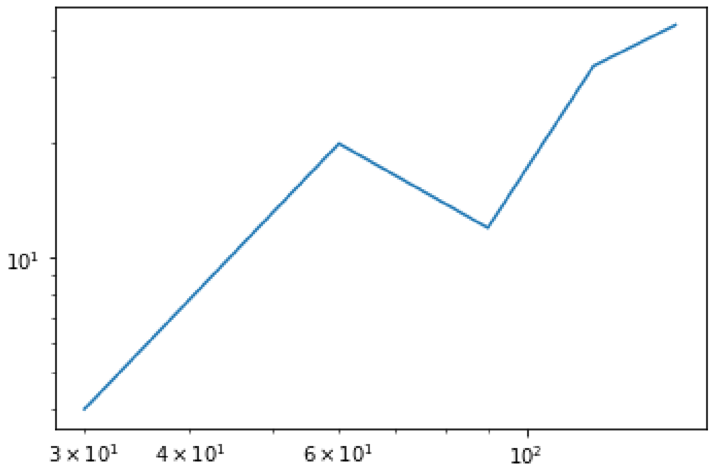

Рисунок 4.11. Линейная регрессия для канторовского метода (окружности)

Таблица 4.2. — Фрактальная размерность участка впадения Камы в Волгу

метод	Клеточный	Канторовский (квадраты)	Канторовский (окружности)
Значение фрактальной размерности	1.88	1.70	1.66

Сравнивая приведенные выше примеры, можно сделать вывод (по значению фрактальной размерности) о большей густоте участка речной системы в месте пересечения Волги с Камой (фрактальная размерность 1.747), нежели дельты Волги (фрактальная размерность 1.610). Это также можно подтвердить и визуально.

Сравнение фрактальной размерности участков Волги

Мы сравнили фрактальные размерности двух участков реки Волга. Также можно накладывать сетку на изображение и исследовать конкретные участки речных систем или даже всю речную систему, например, для определения дренированности территории (чем больше фрактальная размерность, тем больше дренированность) и, как следствие, предотвращения последствий полноводья или же для определения места постройки технических сооружений (см. рис. 4.12). На рисунке красным цветом отмечены наиболее подверженные затоплению участки, а зеленым – сегменты, где волноваться не о чем.

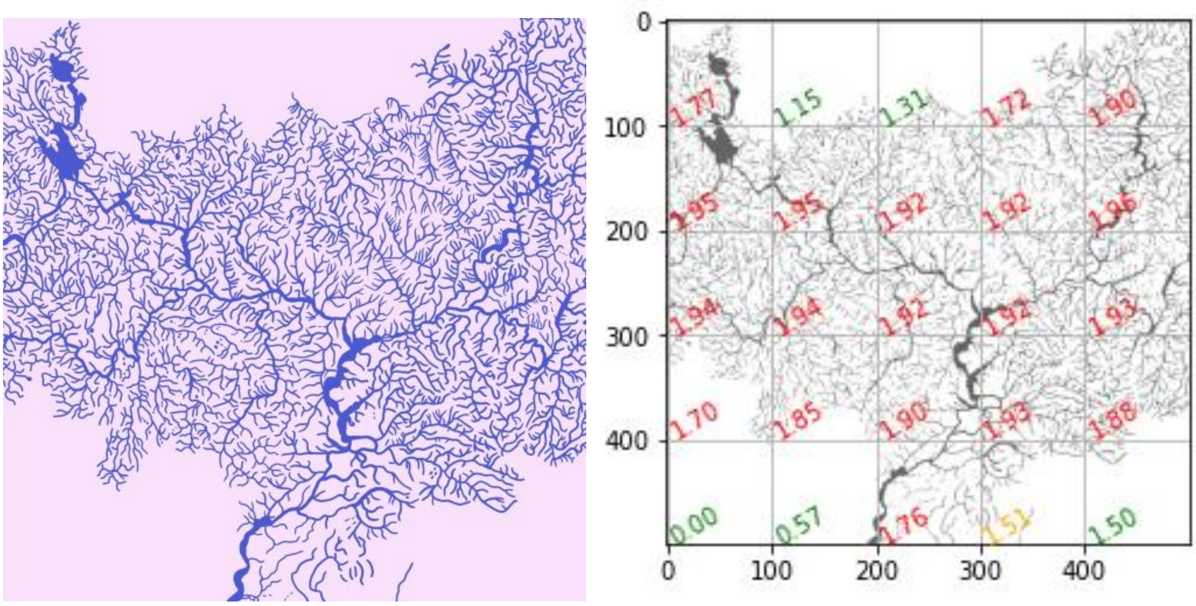

Рисунок 4.12. Сравнение участков Волги

Расчеты длины береговой линии Рыбинского водохранилища

Рассмотрим еще один пример использования фрактальной размерности в гидрологии. Это определение длины береговой линии рыбинского водохранилища. (см. рис. 4.13, 4.14) (источник исходного изображения: https://www.snt-bugorok.ru/reki/ples-reki-eto-mesto-zimovki-ryby).

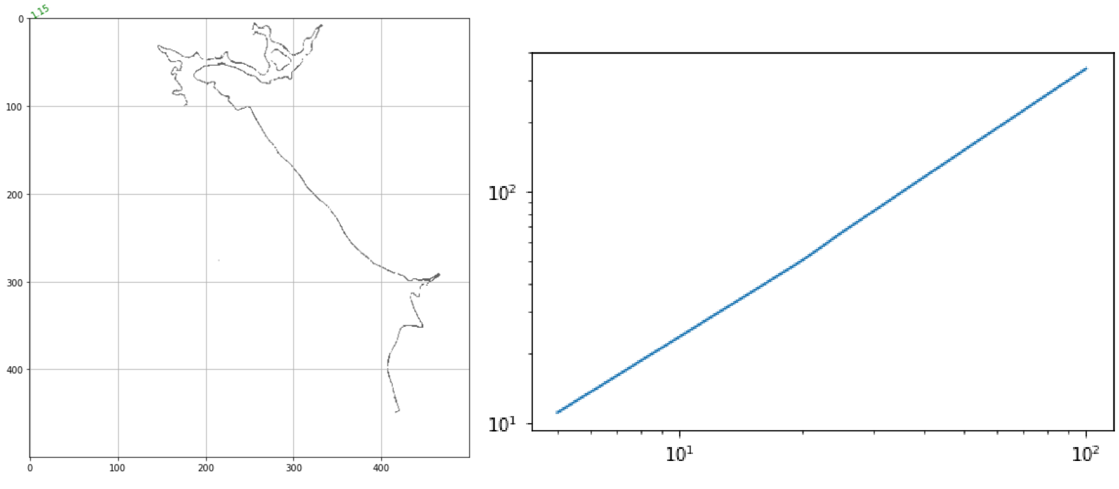

Рисунок 4.13. Фрактальная размерность правой части береговой линии рыбинского водохранилища

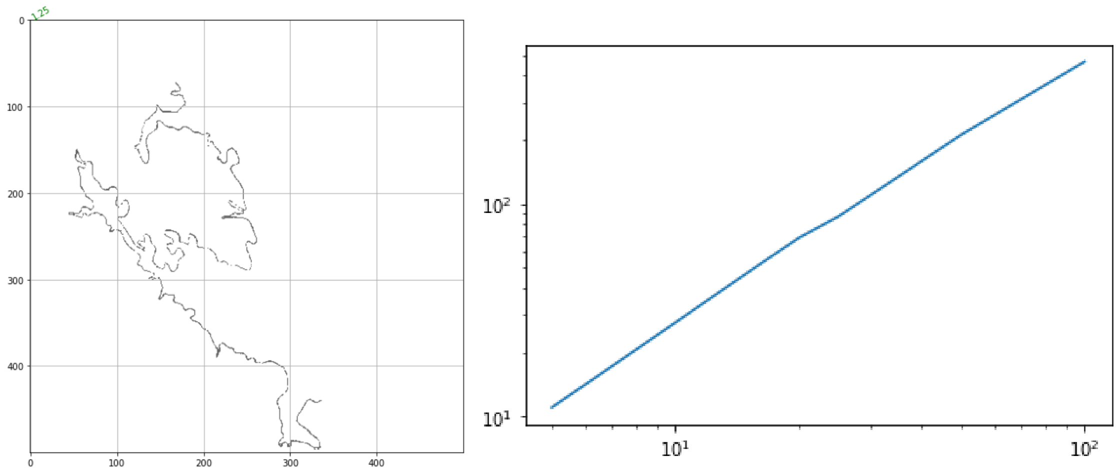

Рисунок 4.14. Фрактальная размерность левой части береговой линии рыбинского водохранилища

Таблица 2.3. — Фрактальная размерность рыбинского водохранилища

	Левая часть берега	Правая часть берега
Фрактальная размерность	1.25	1.15

Пример иллюстрирует различие в правой и левой части береговой линии. Исходя из полученных значений можно сделать вывод о большей извилистости левой части по сравнению с правой.

Анализ полученных результатов

Применяемый нами канторовский метод измерения обладает существенной эффективностью по сравнению с другими методами. Если использовать клеточный метод, то размер клетки должен быть заметно больше толщины русла реки, при этом используемая карта дельты должна быть подробной, учитывать все извилины рукавов и протоков. Канторовский метод позволяет использовать схемы ветвлений с меньшей детализацией условных границ дельты реки Волга.

Возможные способы применения фрактальной размерности

- Определение длины береговой линии в выбранном масштабе

С помощью фрактальной размерности и результата измерения длины береговой линии на участке АБ по карте масштаба 1:200000, можно рассчитать, какой была бы эта длина, если бы измерение проводили по карте другого масштаба, например, 1:200. По выражению

$$N(\varepsilon) = N(\varepsilon') \cdot \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)^D,$$

где ε' – длина мерного отрезка на карте масштаба 1:200000, $N(\varepsilon')$ – количество пересечений изображения с сеткой; ε – длина мерного отрезка на карте масштаба 1:200, получим $N(\varepsilon)$ и длину береговой линии на участке АБ равную $L = N(\varepsilon) \cdot \varepsilon$.

Такое свойство фрактала открывает возможность статистически корректной экспертной оценки параметров береговой линии.

- Расчет фрактальной размерности по спутниковым снимкам

Используя спутниковый снимок можно определить фрактальною размерность. Для этого необходима предварительная обработка изображения для получения монохромного разделения поверхностей воды и суши. Далее из обработанного изображения исходного размера интерполяцией получаем ряд изображений меньшего масштаба, имеющих меньшую точность отображения линии уреза воды, в результате применения квадратичного увеличения размера пикселя. И уже описанными ранее методами (клеточным или канторовским) рассчитываем фрактальную размерность.

- Экстраполяция по картам разных масштабов

При наличии карт разного масштаба возможна экстраполяция длины фрактального объекта. Например, рассчитывая фрактальную размерность по изображениям в масштабе 1:500000, 1:200000 и 1:100000 мы можем спрогнозировать длину и для более подробного изображения.

Заключение

В работе рассмотрены основные понятия фрактальной геометрии.

Реализованы два метода (клеточный метод и канторовский с прямоугольной сеткой и с окружностями) для вычисления фрактальной размерности. Первый метод удобен в реализации и достаточно хорош при наличии четких изображений, что не всегда возможно, например, при определении дренированности территории, так как карты местности как правило делаются с помощью спутника и не имеют большой четкости. Для канторовского метода достаточно лишь схемы реки, что позволяет получить достаточно точный результат даже при нечетких снимках.

Показаны способы применения реализованных методов в гидрологии.

Сведения о фрактальных параметрах рек имеют большое значение и могут найти применение в схемах комплексного использования и охраны водных объектов, информационных системах и базах данных о водных объектах, для развития методов гидрологических расчетов и прогнозов при управлении водными ресурсами.

Рассматривая водные ресурсы, можно найти множество вариантов применения фрактальной геометрии. Но схожие паттерны наблюдаются и в исследовании грозовых разрядов, овражно-балочных сетей, кластеров в химии и многих других объектов. Поэтому фрактальная геометрия имеет большое практическое применение и важна для изучения.

Список литературы

1. Насонов А.Н., Цветков И.В., Жогин И.М., Кульнев В.В., Репина Е.М., Кирносов С.Л., Звягинцева А.В., Базарский О.В. Фракталы в науках о Земле. – 2-е изд. – Воронеж: Издательство «Ковчег», 2018. – 82 с.

2. Качарава А.С. Живая математика: практическое применение фракталов в жизни / А.С. Качарава. – Текст: электронный // Старт в науке: Интернет-портал. – URL: https://school-science.ru/7/7/38898 (дата обращения: 20.03.2024).

3. Христолюбова А. Фракталы в нашей жизни / А. Христолюбова. – Текст: электронный // Алые паруса: Интернет-портал. – URL: https://nsportal.ru/ap/library/drugoe/2015/04/07/issledovatelskaya-rabota-fraktaly-v-nashey-zhizni (дата обращения: 21.03.2024).

4. Элементы: сайт. – URL: https://elementy.ru (дата обращения: 15.03.2024). – Текст: электронный.

5. *Hägerhäll C. M., Laike T., Taylor R. Investigations of Human EEG Response to Viewing Fractal Patterns / C. M. Hägerhäll, T.Laike, R. Taylor*. – Текст: электронный // *Researchgate*: Интернет-портал. – URL: https://www.researchgate.net/publication/23641221_Investigations_of_Human_EEG_Response_to_Viewing_Fractal_Patterns (дата обращения: 20.03.2024).

6. Балханов В.К. Основы фрактальной геометрии и фрактального исчисления/ от. Ред. Ю.Б. Башкуев. – Улан-Удэ: Изд-во Бурятского госуниверситета, 2013. - 224 с. ISBN 978-5-9793-0549-3

7. Соболь С. В. Фрактальные параметры водных объектов: монография / С. В. Соболь; Нижегор. гос. архитектур. - строит. ун - т. – Н. Новгород: ННГАСУ, 2019. – 232 с. ISBN 978-5-528-00344-3