Содержание

Введение 3
Задание на работу 4
Теоретическая часть 6
Понятие фрактала 6
Множество Мандельброта 8
Множество Жюлиа 9
Практическая часть 12
Описание структуры программы 12
Построение фрактала Мандельброта 14
Построение множеств Жюлиа 14
Вывод 16
Литература 17
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. План-график выполнения курсовой работы 18
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Блок-схемы 19

Введение

С давних времен человечество изучало лишь идеальные фигуры: окружности, параллелограммы, треугольники, которых нет в реальном мире, но которые относительно просто описываются. Знакомая всем школьная геометрия не способна описать облака, потому что это не просто сферы, горы, которые лишь очень приближенно похожи на конусы, а о причудливых формах береговой линии и вообще говорить не приходится, тут уж и представить нельзя, чем их можно аппроксимировать. Окружающий нас мир устроен гораздо сложнее, не все можно заменить на что-то просто устроенное. Существует множество вещей, обладающих замысловатыми формами и свойствами, описывать которые нужно соответствующими объектами. И тут нам помогут фракталы.

Открытие фракталов произвело революцию не только в геометрии, но и в физике, химии, биологии, во всех областях нашей жизни. Так, фракталами в живой природе являются кораллы, цветы и другие растения (брокколи, капуста Романеско), плоды (ананас), кровеносная система и бронхи животных. Много их и в неживой природе. Например, уже упомянутые береговые линии, горные хребты, и облака, а также снежинки, молнии и кристаллы. Да, даже человек, если задуматься, является фракталом. Он рождается ребенком, а затем растет, и этот процесс сопровождается «принципом самоподобия», фрактальностью.

Фракталы широко применяются в компьютерной графике при построении изображений деревьев, кустов, гор и других природных объектов. Из фракталов делают антенны, точнее используют лишь несколько первых их итераций. Удобство таких антенн заключается в их дробной размерности. Фракталы даже используют в торговле, так как они лучше описывают поведение рынка, чем линейные функции. [5]

Мало того, фракталы даже полезны тем, что повышают стрессоустойчивость на 60% при их просмотре. [8]

Таким образом, фракталы можно встретить почти везде. Мало того, что они замечательно описывают многие природные объекты, их можно применять и в большом количестве областей человеческой жизни, да даже просто наслаждаться их красотой. Поэтому актуальность выбранной темы полностью обоснована.

Задание на работу

Цель:

Создать программу для построения множества Мандельброта по данным входным параметрам, которые задаст пользователь, а также множества Жюлиа.

Входные параметры:

- Два числа типа *double* для задания действительной и мнимой части точки приближения и два числа типа *int* для указания во сколько раз нужно приблизить фрактал и выбора степени, генерирующей фрактал функции (для построения множества Мандельброта и его модификаций)
- Четыре числа типа *double* для задания действительной и мнимой части точки приближения и действительной и мнимой части параметра с (составляющая формулы, которая генерирует фрактал) и число типа *int* для указания во сколько раз нужно приблизить фрактал (для построения множества Жюлиа и приближения его в любую точку)

Функциональность:

- Расчет множества по заданным параметрам
- Построение выбранного фрактала
- Приближение множества в заданную пользователем точку
- Воспроизведение анимации

Средства реализации:

- Язык:

Программа должна быть создана на языке *Python* версии 3.9.0.

- Библиотеки:

Для воплощения функциональности программы необходимы библиотеки *PyQt5* (для создания интерфейса), *sys* (для связи готовой программы с компьютером), *numpy* (для визуального упрощения кода и увеличения скорости построения фракталов), *matplotlib* (для создания фракталов), *PIL* (для реализации функции, изменяющей размеры изображений)

- Среда:

Atom (не содержит ничего лишнего, удобно делать интерфейс), *Spyder* (разделена на две секции и позволяет одновременно увидеть код, график и консоль, удобна для реализации и тестирования функций построения фракталов)

Результат работы:

Результатом работы будет программа, которая дает возможность пользователю построить фракталы Мандельброта и Жюлиа при введенных им параметрах, а также просмотреть анимацию приближения фракталов, но уже при конкретных параметрах, которые нельзя выбрать.

Теоретическая часть

Понятие фрактала

Для того, чтобы говорить о теоретической составляющей фракталов, необходимо понять, что же такое фрактал. Одно из определений гласит, что это самоподобные объекты. Но в этом случае непонятно, почему множество Мандельброта относят к фракталам, ведь при его приближении можно обнаружить похожие на это множество узоры, но они все равно отличаются от самого множества. Получается, что не все фракталы самоподобны.

Значит более верным определением фрактала будет то, что это не самоподобная фигура, а фигура с дробной размерностью. Что же значит дробная размерность, она же фрактальная? Интуитивно мы понимаем термин *размерность* как число координат, необходимых для задания положения точки внутри фигуры. Так, любая линия (например, окружность или прямая) одномерна — достаточно всего одной координаты, чтобы точно указать точку, а плоскость и поверхность шара двумерны. Но в математике такое «определение» не всегда работает хорошо: его трудно применить к очень большому числу разнообразных фигур и множеств, в том числе и к фракталам. Поэтому фрактальную размерность определяют по-другому.

Допустим, что фигура F, размерность которой мы хотим найти, расположена на плоскости. А плоскость, в свою очередь, покрыта сеткой из квадратиков со стороной δ. Через $N(\delta)$ обозначим число квадратиков, которые пересекаются с фигурой F (объединение всех таких квадратиков содержит в себе F). Ясно, что это число зависит от размера квадратиков: чем они меньше, тем больше их нужно, чтобы покрыть фигуру. Если эта зависимость выражается степенным законом: число $N(\delta)$ пропорционально некоторой степени $\left(\frac{1}{\delta}\right)^D$, то будем считать, что фигура F имеет размерность D (вполне может случиться, что число D не целое).

Это — определение фрактальной размерности по Минковскому. Для «хороших» фигур оно дает тот же результат, что и интуитивное представление о размерности. Например, посчитаем размерность квадрата со стороной 1 (располагая его на плоскости так, что стороны квадрата каждый раз лежат на линиях сетки): $N(1) = 1$, $N(1/2) = 4$, $N(1/3) = 9$, $N(1/4) = 16$, и т. д. Видно, что в этом случае $D = 2$, то есть квадрат двумерен, как и должно быть. [7]

Но на самом деле под это определение тоже попадают не все фракталы. Тоже множество Мандельброта имеет размерность ровно два. Можно прийти к еще более точному определению, что фрактал – это бесконечно кривой объект. Но опять же находим исключение в виде кривой Гильберта, в которой после бесконечного количества шагов линия заполняет всю плоскость.

Получается, что такой фрактал имеет размерность просто два, т. е. заполняет всю плоскость. Одномерная линия превращается в двумерную плоскость. И так как она заполняет всю плоскость, она уже не бесконечно кривая, как другие фракталы.

Поэтому уже четвертым и на этот раз точным определением фрактала будет фигура, у которой ее хаусдорфова размерность превышает ее топологическую размерность. Но для понимания этого определения стоить разобраться, что это за такие размерности. Начнем с топологической. Топологическая размерность — это обычная геометрическая размерность. Она может принимать только целые значения. Так, для отрезка она равна 1, для квадрата 2, а для куба — 3. А с хаусдорфовой размерностью мы уже встречались — это тоже самое, что и фрактальная размерность.

Теперь, когда мы разобрались с тем, что же представляет из себя фрактал, стоит поговорить о его разновидностях. Итак, существуют:

- Геометрические (конструктивные) фракталы: фракталы этого типа строятся поэтапно. Сначала изображается основа. Затем некоторые части основы заменяются на фрагмент. На каждом следующем этапе части уже построенной фигуры, аналогичные замененным частям основы, вновь заменяются на фрагмент, взятый в подходящем масштабе. Всякий раз масштаб уменьшается. Когда изменения становятся визуально незаметными, считают, что построенная фигура хорошо приближает фрактал и дает представление о его форме. Для получения самого фрактала нужно бесконечное число этапов. Меняя основу и фрагмент, можно получить много разных геометрических фракталов. Такими фракталом является, уже упомянутая, кривая Гильберта.
- Динамические (алгебраические) фракталы: на них мы остановимся подробнее позже.
- Стохастические фракталы: кривая Коха, как бы ни была похожа на границу берега, не может выступать в качестве её модели из-за того, что она самоподобна. Фракталы, при построении которых в системе случайным образом изменяются какие-либо

параметры, называются стохастическими. Примером может служить траектория броуновского движения частицы. [6]

В данной работе мы будем работать с двумя динамическими фракталами, а именно с множеством Мандельброта и множествами Жюлиа. Так что же такое динамический (алгебраический) фрактал? Фракталы этого типа возникают при исследовании нелинейных динамических систем (отсюда и название). Поведение такой системы можно описать комплексной нелинейной функцией (многочленом) $f(z)$. Возьмем какую-нибудь начальную точку z_0 на комплексной плоскости. Теперь рассмотрим бесконечную последовательность чисел на комплексной плоскости, каждое следующее из которых получается из предыдущего: z_0, $z_1 = f(z_0)$, $z_2 = f(z_1)$, ... $z_{n+1} = f(z_n)$. В зависимости от начальной точки z0 такая последовательность может вести себя по-разному: стремиться к бесконечности при n → ∞; сходиться к какой-то конечной точке; циклически принимать ряд фиксированных значений; возможны и более сложные варианты.

Таким образом, любая точка z комплексной плоскости имеет свой характер поведения при итерациях функции $f(z)$, а вся плоскость делится на части. При этом точки, лежащие на границах этих частей, обладают таким свойством: при сколь угодно малом смещении характер их поведения резко меняется (такие точки называют точками бифуркации). Так вот, оказывается, что множества точек, имеющих один конкретный тип поведения, а также множества бифуркационных точек часто имеют фрактальные свойства.

Это что касается всех динамических фракталов. А теперь остановимся конкретно на множестве Мандельброта и множествах Жюлиа.

Множество Мандельброта

Множество Мандельброта (см. рис. 1) — это множество точек c на комплексной плоскости, для которых последовательность z_0, определяемая итерациями $z_0 = 0$, $z_1 = z_0^2 + c$, ..., $z_{n+1} = z_n^2 + c$, конечна (то есть не уходит в бесконечность). Рассмотрим функцию $f_c\colon C \to C, c \in C$. Множество Мандельброта определяется как множество всех $c \in C$, для которых орбита точки $z = 0$ при отображении $f_c(z)$ ограничена. Визуально множество Мандельброта выглядит как набор бесконечного количества различных фигур, самая большая из которых называется кардиоидой (она похожа на стилизованное изображение сердца и получила свое название от двух греческих слов — «сердце» и «вид»).

Кардиоида окружена всё уменьшающимися кругами, каждый из которых окружен еще меньшими кругами, и т. д. до бесконечности. При любом увеличении этого фрактала будут выявляться всё более и более мелкие детали изображения, дополнительные ветки с более мелкими кардиоидами, кругами. И этот процесс можно продолжать бесконечно. [4]

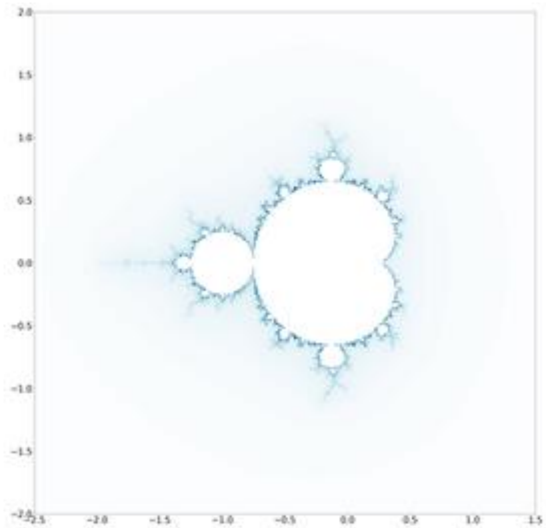

Рис. 1. Множество Мандельброта

Множество Жюлиа

Удивительно, но множества Жюлиа (см. рис. 2, 3) образуются по той же самой формуле, что и множество Мандельброта. Множество Жюлиа было изобретено французским математиком Гастоном Жюлиа, по имени которого и было названо множество. Первый вопрос, возникающий после визуального знакомства с множествами Мандельброта и Жюлиа это «если оба фрактала сгенерированы по одной формуле, почему они такие разные?» Сначала посмотрите на картинки множества Жюлиа. Достаточно странно, но существуют разные типы множеств Жюлиа. При построении фрактала с использованием различных начальных точек (чтобы начать процесс итераций), генерируются различные изображения. Это применимо только ко множеству Жюлиа.

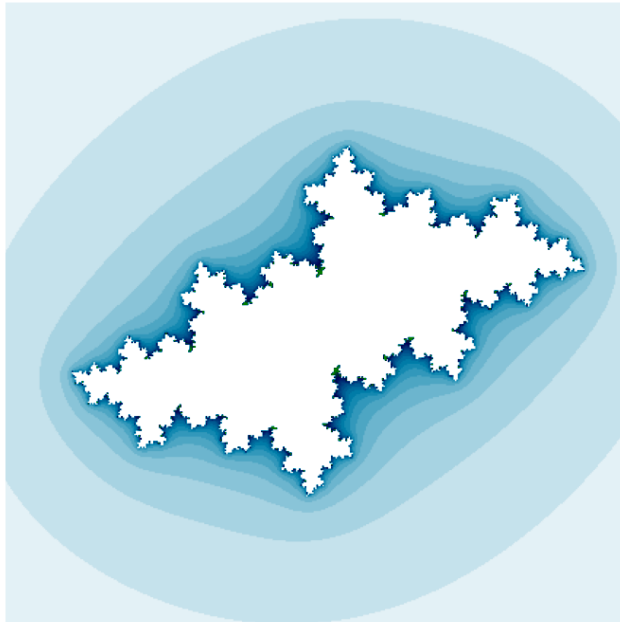

Рис. 2. Множество Жюлиа 1

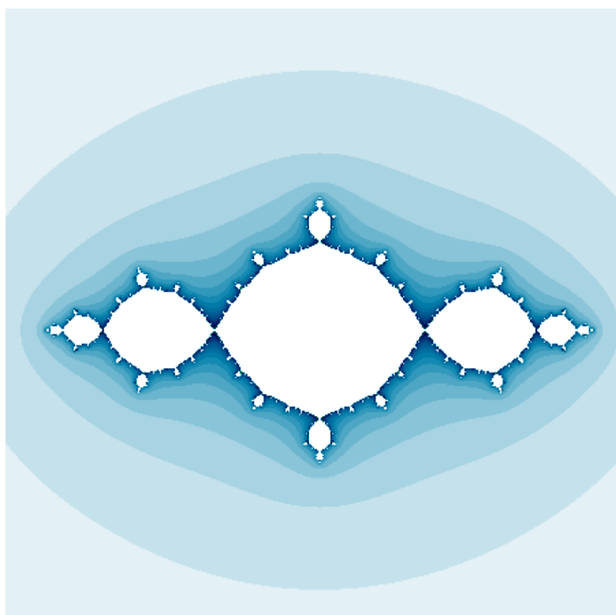

Рис. 3. Множество Жюлиа 2

Хотя это нельзя увидеть на картинке, фрактал Мандельброта — это, на самом деле, множество фракталов Жюлиа, соединенных вместе. Каждая точка (или координата) множества Мандельброта соответствует фракталу Жюлиа (см. рис. 4).

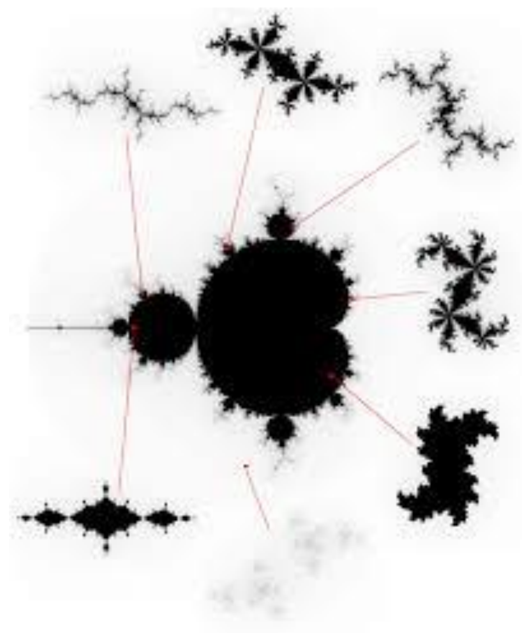

Рис. 4. Множества Жюлиа в множестве Мандельброта

Рассмотрим функцию $f: C \to C$. Множество Жюлиа определяется как граница множества точек z, стремящихся к бесконечности при итерировании $f(z)$.

Простыми словами, отличие множества Мандельброта от множеств Жюлиа заключается в том, что, хотя и формула их генерирующая одинаковая (1), в первом множестве мы фиксируем начальное значение $z = 0$ и смотрим что будет происходить при разных значениях c, т. е. будет ли последовательность z_n уходить на бесконечность или нет при n стремящемся к бесконечности (если нет, то она принадлежит множеству (черный цвет на картинке)), а во втором случае мы выбираем параметр с и фиксируем уже его (от его значения зависит, как будет выглядеть множество Жюлиа) и также смотрим, что будет с последовательностью z_n, но уже при разных значениях z_0.

Практическая часть

Описание структуры программы

Программа состоит из четырех форм. При запуске программы открывается титульный лист, в том же окне находится кнопка перехода в меню программы, в котором представлено несколько возможностей. Отношение между пользователем и предоставленным ему функциями показана на *use-case* диаграмме (см. рис. 5).

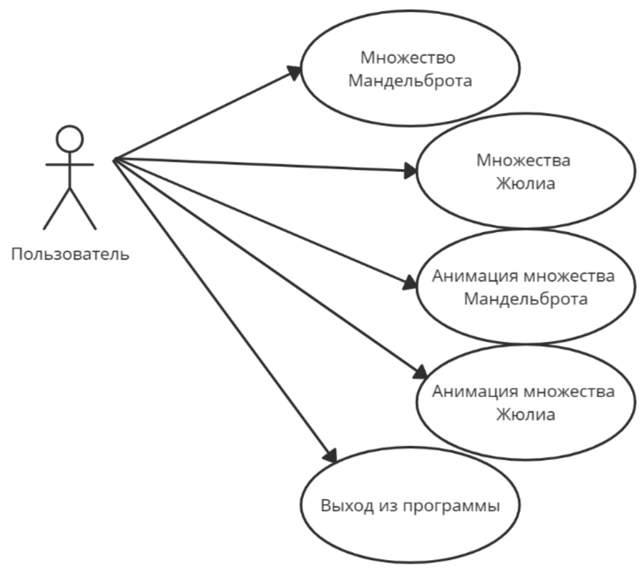

Рис. 5. *Use-case* диаграмма

Алгоритм работы программы отражен в виде блок-схемы (см. Приложение 1, рис. 1).

Из окна меню можно перейти в окна для построения множества Мандельброта и множеств Жюлиа, а также там есть две кнопки, которые открывают проигрыватели с анимацией (см. рис. 6).

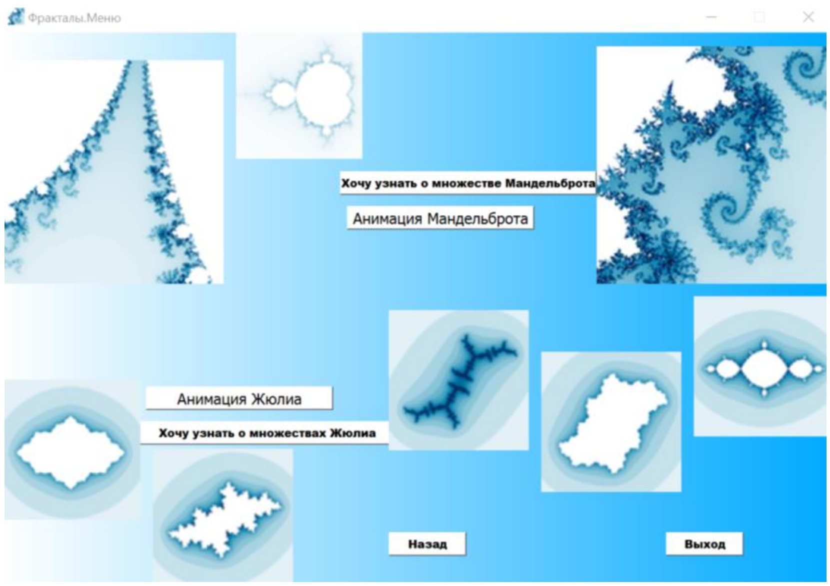

Рис. 6. Меню

В окне для генерации множества Мандельброта (см. рис. 7) можно выбрать точку приближения, величину приближения, а также изменить степень z в формуле $z^2 + c$, которая генерирует картинку.

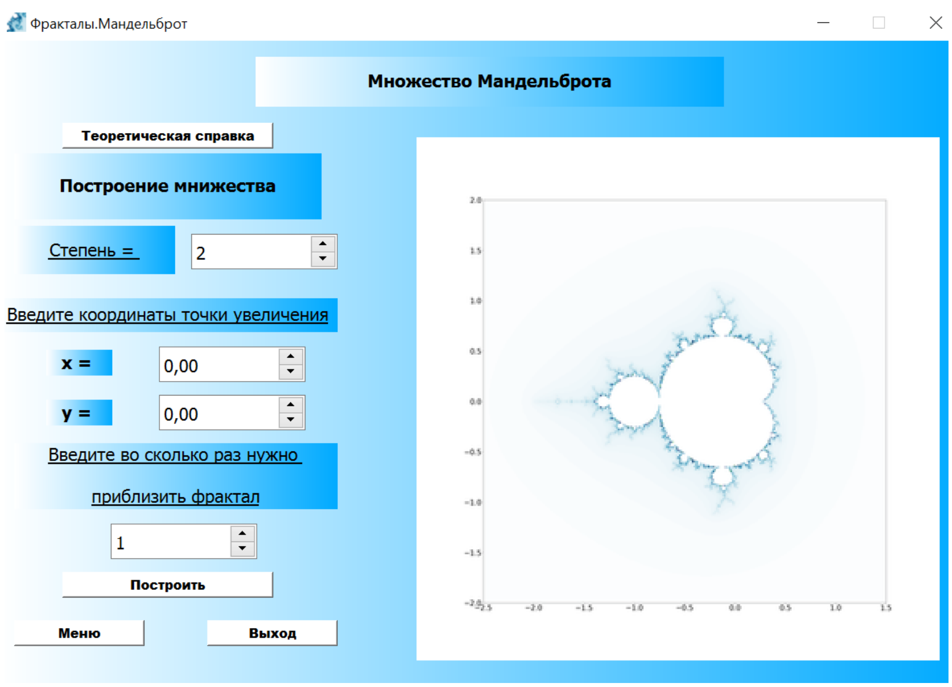

Рис. 7. Окно для генерации множества Мандельброта

Окно для генерации множеств Жюлиа принимает в качестве входных параметров параметр c, точку и величину приближения (см. рис. 8). [2]

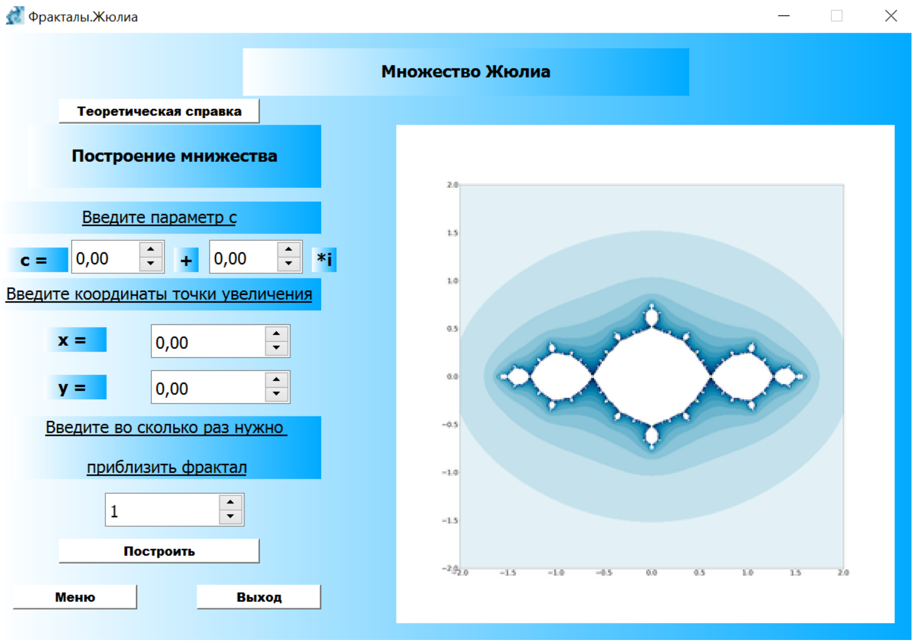

Рис. 8. Окно для генерации множеств Жюлиа

Построение фрактала Мандельброта

Доказано, что всё множество целиком расположено внутри круга радиуса 2 на плоскости. Поэтому будем считать, что если для точки с последовательность итераций функции $f_c = z^2 + c$ с начальным значением $z = 0$ после некоторого большого их числа N (скажем, 100) не вышла за пределы этого круга, то точка принадлежит множеству и красится в черный цвет. Соответственно, если на каком-то этапе, меньшем N, элемент последовательности по модулю стал больше 2, то точка множеству не принадлежит и остается белой. Таким образом, можно получить черно-белое изображение множества, которое и было получено Мандельбротом. Чтобы сделать его цветным, можно, например, каждую точку не из множества красить в цвет, соответствующий номеру итерации, на котором ее последовательность вышла за пределы круга.

Построение множеств Жюлиа

Опишем в общих чертах процедуру рисования множества Жюлиа многочлена $z^2 + c$ для конкретного значения комплексного параметра $c = p + i \times q$. Будем считать, что экран прямоугольный и состоит из $a \times b$ точек и что изображение будет покрашено в $K + 1$ цвет (то есть цвета пронумерованы от 0 до K, причем цвет номер 0 — черный, а для других цветов условимся, что чем больше номер цвета, тем быстрее «убегает на бесконечность» точка, которую мы покрасим в этот цвет). Еще необходимо выбрать область плоскости, которую выведем на экран (для начала подойдет квадрат $\{|Re(z)| \leq 2, |Im(z)| \leq 2\}$; его нужно разрезать на $a \times b$ прямоугольников, каждый из которых будет выступать в роли точки экрана), и радиус R круга D, точки снаружи которого будем считать «бесконечно далекими» (можно взять $R = 10$).

Для каждой точки $z_0 = (x_0; y_0)$ экрана (то есть центра соответствующего прямоугольника) нужно в цикле последовательно вычислять z_{k+1} по z_k, используя формулу. Признаком остановки цикла является выполнение одного из двух условий: либо на k-м шаге точка z_k вышла из круга D (то есть верно неравенство, и тогда точку z_0 нужно покрасить в цвет номер k, либо оказалось, что $k = K + 1$, тогда мы считаем, что точка z_0 лежит внутри множества Жюлиа, и красим ее в черный.

В результате работы программы на экран будет выведена квадратная область комплексной плоскости $\{|Re(z)| \leq 2, |Im(z)| \leq 2\}$, на которой черным цветом будет изображено множество Жюлиа многочлена $z^2 + c$ для выбранного параметра $c = p + iq$, а остальные точки будут раскрашены в K цветов.

Увеличивая числа a и b, можно повышать разрешение экрана и тем самым улучшать качество изображения. Меняя K и подбирая соответствие между цветами и их номерами, можно добиться довольно красивых картинок.

Алгоритм работы этих функций представлен также в виде блок-схем (см. Приложение 1, рис. 2) [1, 3]

Это были наиболее интересные части, потому что для их реализации необходимо было разобраться с тем, что из себя представляют данные динамические фракталы, понять их математическую составляющую и различия в параметрах, которые меняются в первом и втором случае, ведь и множество Мандельброта и Множества Жюлиа задаются одной формулой, но при этом они такие разные.

Вывод

В ходе выполнения работы был реализован проект на языке *Python*, который генерирует множества Мандельброта и Жюлиа при параметрах, вводимых пользователем. Так же записана анимация, на которой показано приближение в заданные точки до максимального увеличения в 301 раз относительно начальных размеров. Таким образом, поставленная цель выполнена.

Литература

1. Бэрри П. Изучаем программирование на *Python* / П. Бэрри. – 2-е изд. – Пер. с англ. – Москва: Издательство «Э», 2017. – 624 с. – (Мировой компьютерный бестселлер).
2. Прохоренок Н.А. *Python 3* и *PyQt 5*. Разработка приложений. / Н. А. Прохоренок, В. А. Дронов. – 2-е изд., перераб. и доп. – СПб.: Издательство *BHV*, 2019. – 832 с.
3. Федоров, Д. Ю. Программирование на языке высокого уровня *Python*: учебное пособие для прикладного бакалавриата / Д. Ю. Федоров. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва: Издательство Юрайт, 2019. – 161 с. – (Бакалавр. Прикладной курс).
4. Еровенко В.А. Концепция фрактала Мандельброта с математической и философской точек зрения / В.А. Еровенко. – Текст: электронный // *Cyberleninka*: Интернет-портал. – URL: https://cyberleninka.ru/article/n/kontseptsiya-fraktala-mandelbrota-s-matematicheskoy-i-filosofskoy-tochek-zreniya/viewer (дата обращения: 24.04.2021).
5. Качарава А.С. Живая математика: практическое применение фракталов в жизни / А.С. Качарава. – Текст: электронный // Старт в науке: Интернет-портал. – URL: https://school-science.ru/7/7/38898 (дата обращения: 20.04.2021).
6. Христолюбова А. Фракталы в нашей жизни / А. Христолюбова. – Текст: электронный // Алые паруса: Интернет-портал. – URL: https://nsportal.ru/ap/library/drugoe/2015/04/07/issledovatelskaya-rabota-fraktaly-v-nashey-zhizni (дата обращения: 21.04.2021).
7. Элементы: сайт. – URL: https://elementy.ru (дата обращения: 15.04.2021). – Текст: электронный.
8. *Hägerhäll C. M., Laike T., Taylor R. Investigations of Human EEG Response to Viewing Fractal Patterns / C. M. Hägerhäll, T.Laike, R. Taylor*. – Текст: электронный // *Researchgate*: Интернет-портал. – URL: https://www.researchgate.net/publication/23641221_Investigations_of_Human_EEG_Response_to_Viewing_Fractal_Patterns (дата обращения: 20.04.2021).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. План-график выполнения курсовой работы

№	Этап выполнения	Предполагаемая дата выполнения	Реальная дата выполнения
1	Выбор, согласование и утверждение темы курсовой работы	26.02.2021	26.02.2021
2	Составление и сдача преподавателю плана-графика выполнения курсовой работы	05.03.2021	05.03.2021
3	Сбор информации по теме курсовой работы (если необходимо)	10.03.2021	10.03.2021
4	Разработка начального варианта интерфейса проекта	15.03.2021	15.03.2021
5	Согласование его с преподавателем	15.03.2021	15.03.2021
6	Доработка и согласование с преподавателем окончательного интерфейса проекта	19.03.2021	19.03.2021
7а	Написание кода проекта (*возможно разбиение на два этапа*)	09.04.2021	09.04.2021
7б	*Написание какой-то части кода проекта*	16.04.2021	16.04.2021
8	Создание и утверждение текстового отчета по курсовой работе	20.04.2021	
9	Защита курсовой работы	23.04.2021	

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Блок-схемы

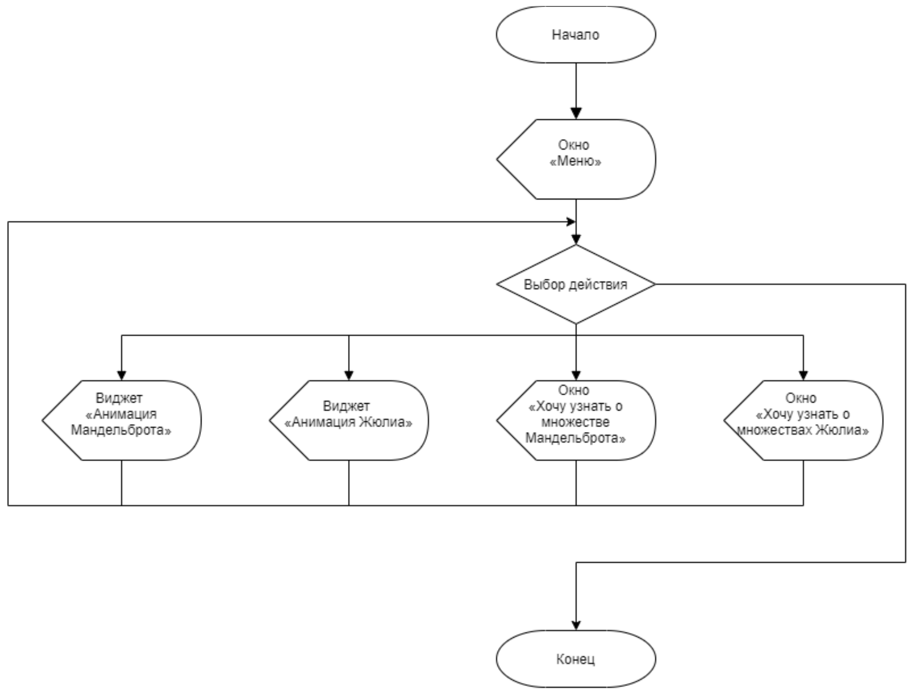

Рис. 1. Блок-схема работы программы

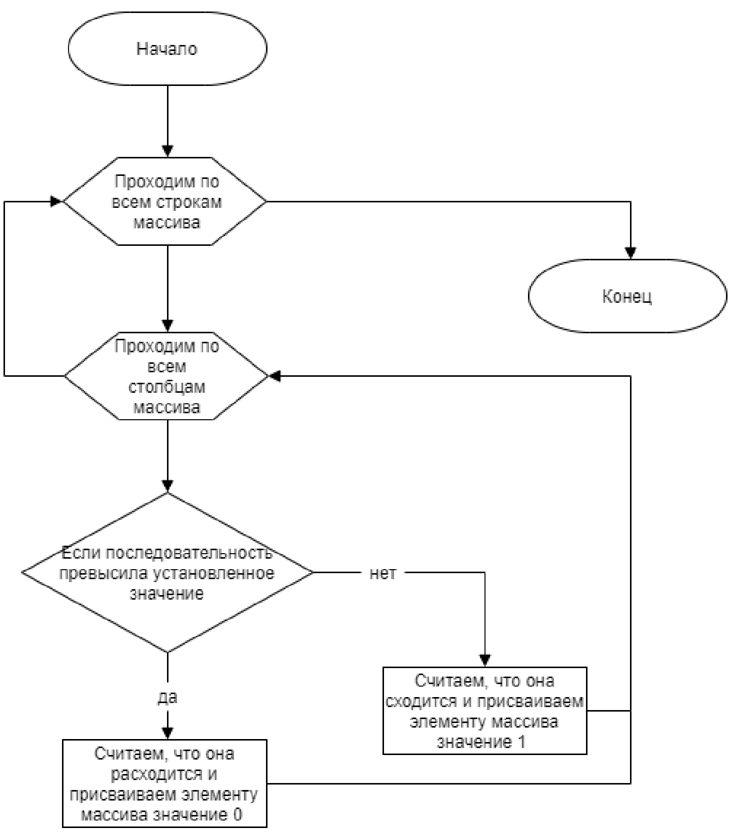

Рис. 2. Блок-схема функций построения фракталов