Prova NP-Completude

Redução do problema do clique para isomorfismo de subgrafos

Lívia Corazza Ferrão
Brenda Silva Machado

O que é um grafo isomorfo a outro?

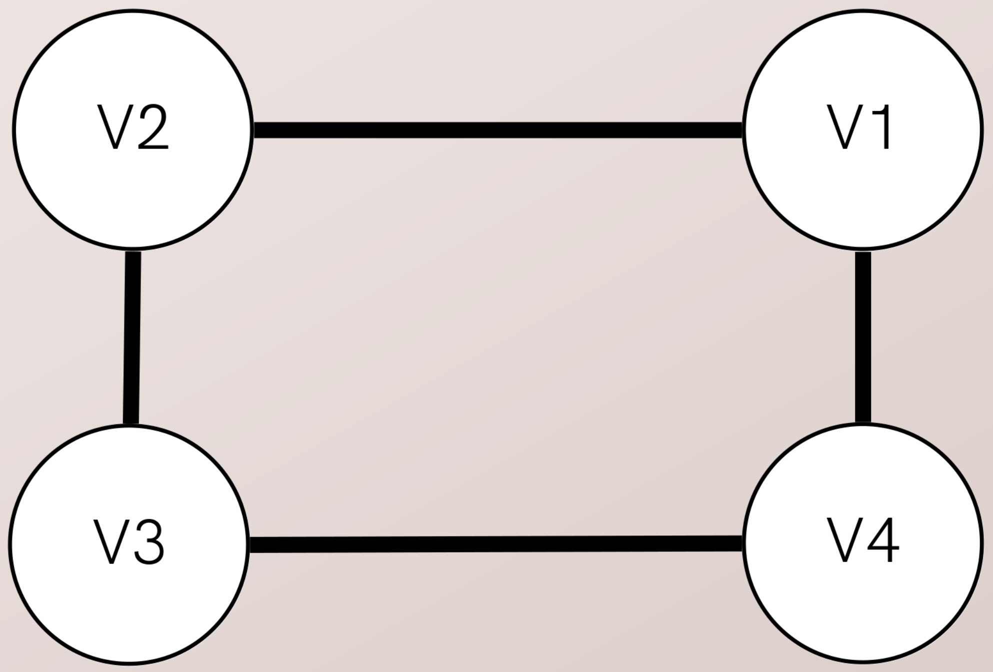
É quando podemos dizer que o arranjo de um grafo G1 é igual ao grafo G2, em outras palavras conseguimos para cada par de vértices unidos por uma aresta em G1, conseguimos mapear com uma bijeção de 1 para 1 no grafo G2.

Dizemos que um grafo G1(V1, E1) é isomórfico ao grafo G2(V2, E2) sse:

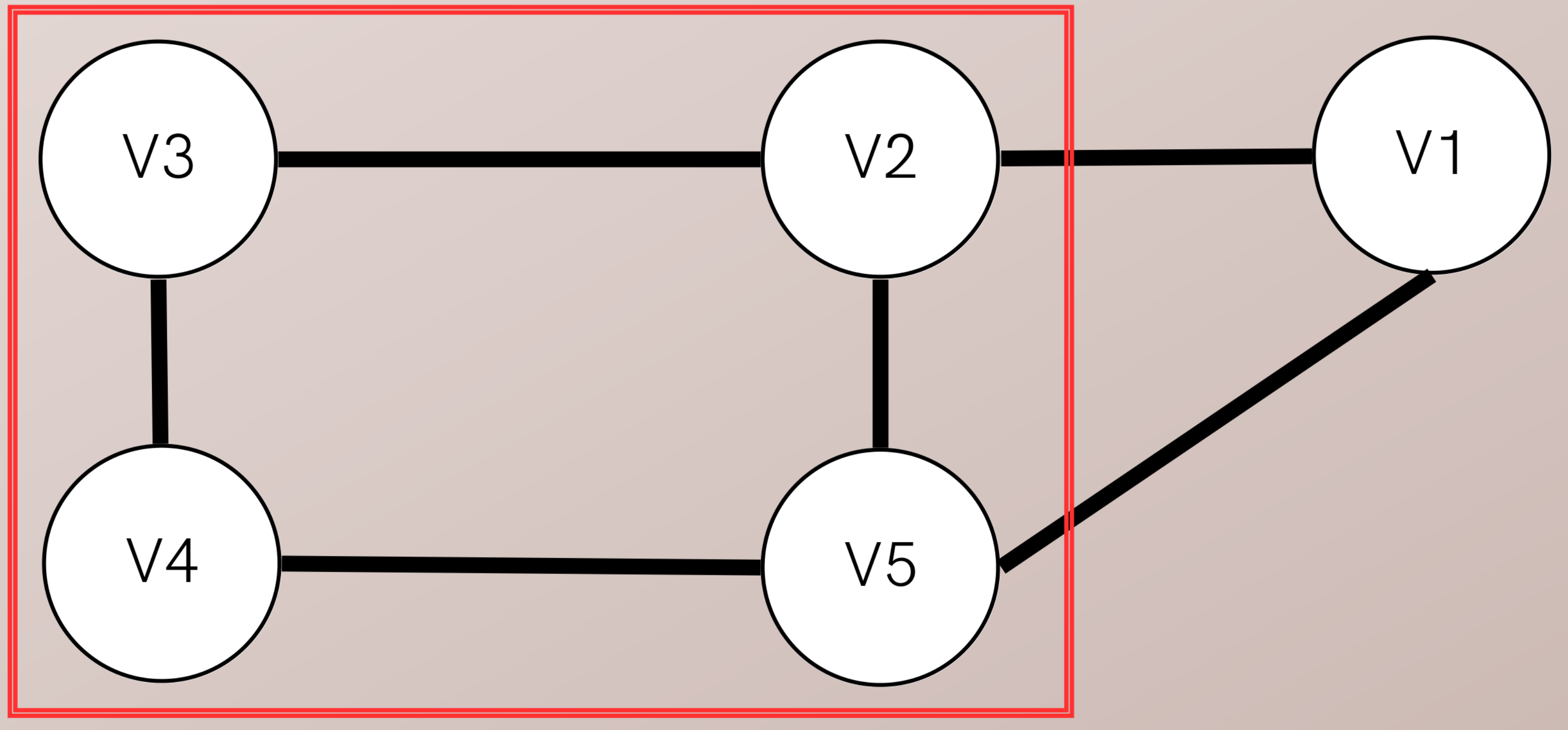
- ∃f:V1 -> V2 tal que f é bijetora
- ∃g:E1 -> E2 tal que g é bijetora

Problema de isomorfismo em um subgrafo

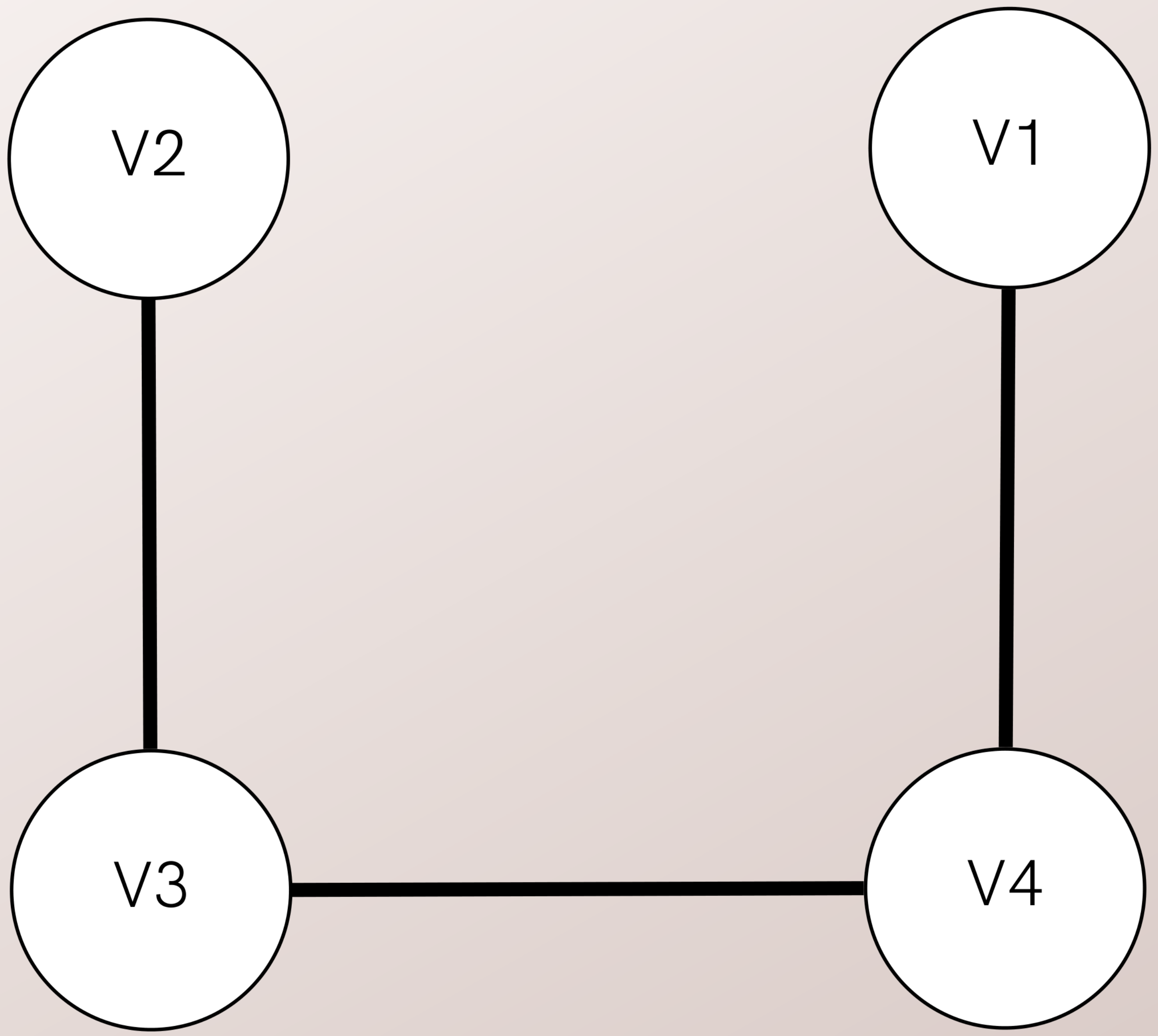
Os dois grafos possuem a mesma estrutura



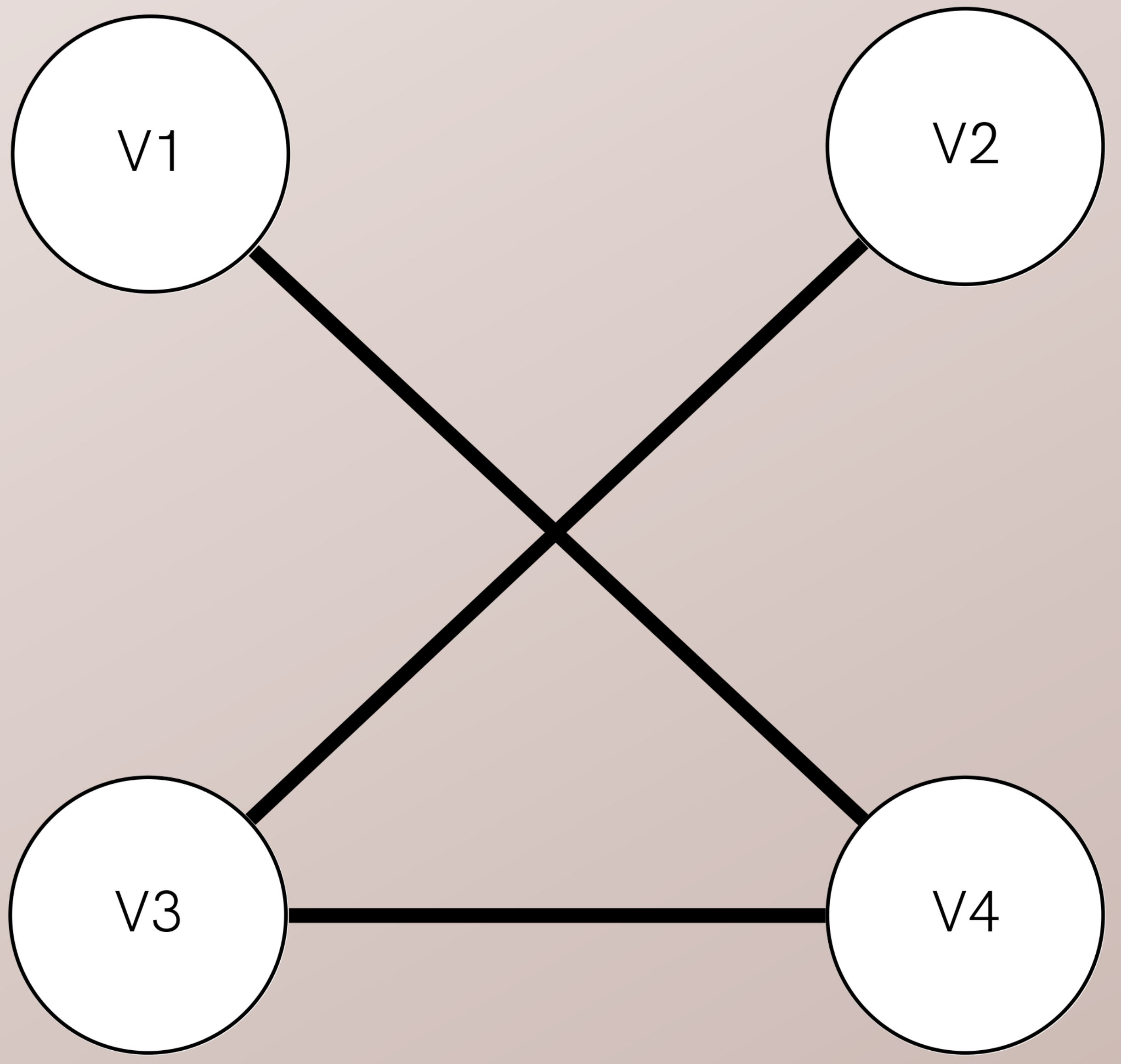
Grafo G1



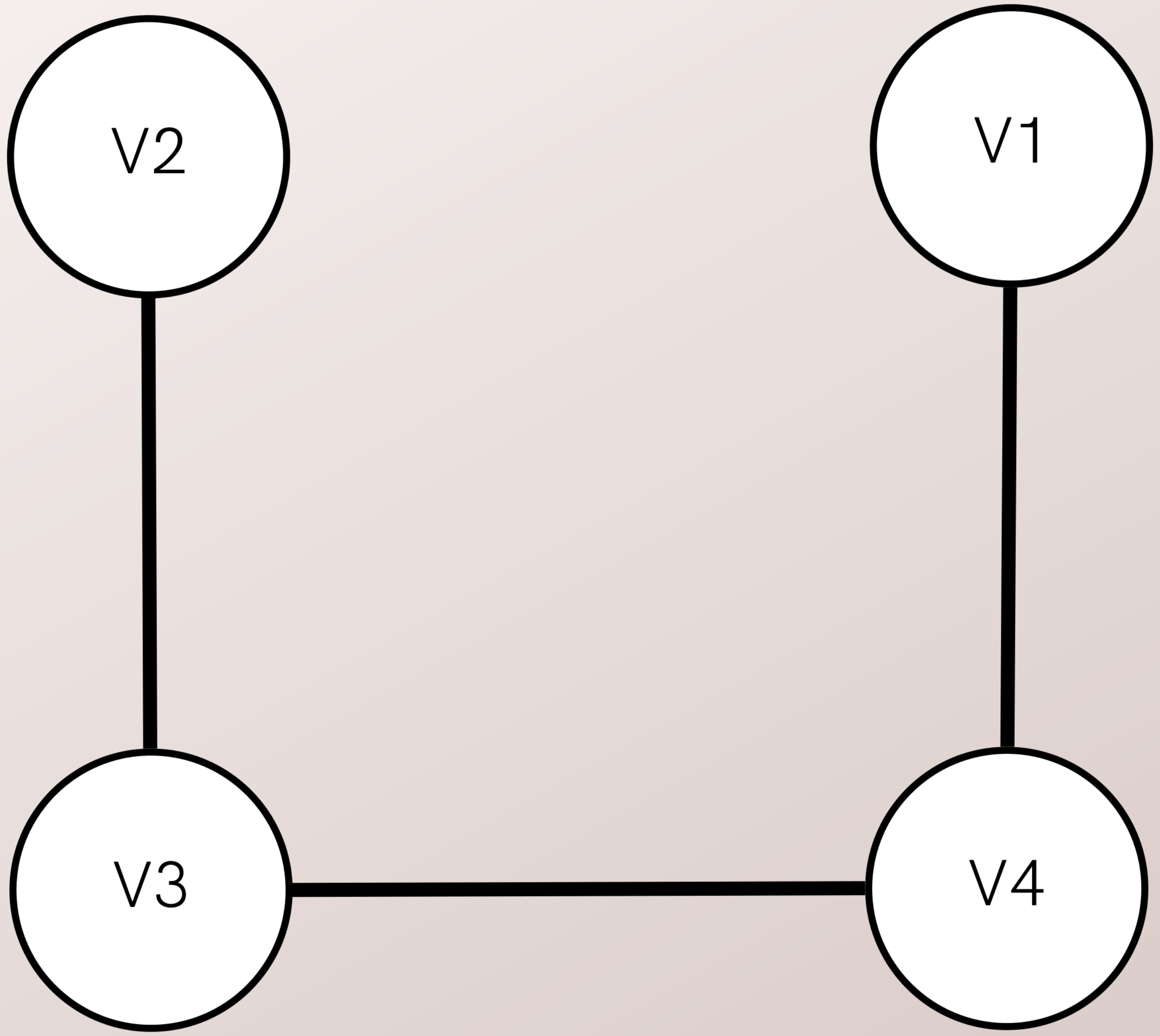
Grafo G2



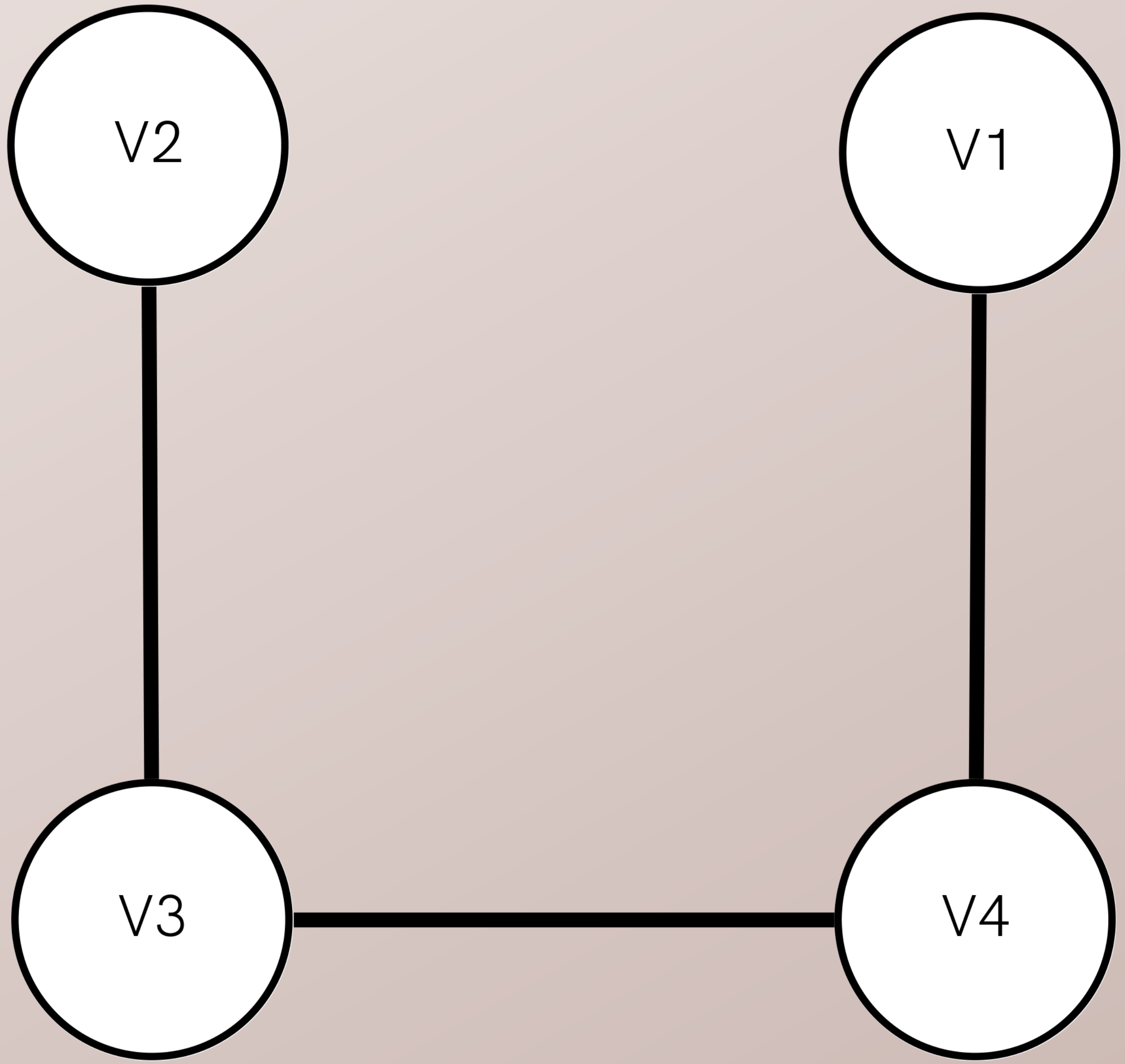
Grafo G1



Grafo G2



Grafo G1



Grafo G2

Ideia da prova

S = {<G1,G2> | G1 É isomorfo a um subgrafo de G2}

1. Demonstrar que S pertence à classe NP.
2. Reduzir polinomialmente o problema do clique para S.

MTND que decide *S* em tempo polinomial

M = Entrada (<G1,G2>, onde G1 e G2 são grafos):

1. Calcule a quantidade de nós no G1;
2. De forma não-determinística, seleciona um subgrafo G3 de G2 com n vértices;
3. Verifique se G3 é isomórfico no G1;
4. Se sim, aceite, caso contrário, rejeite.

Como ocorre a verificação do isomorfismo?

- Para cada vértice do G1, um ramo de computação é criado para comparar com vértices do G2.

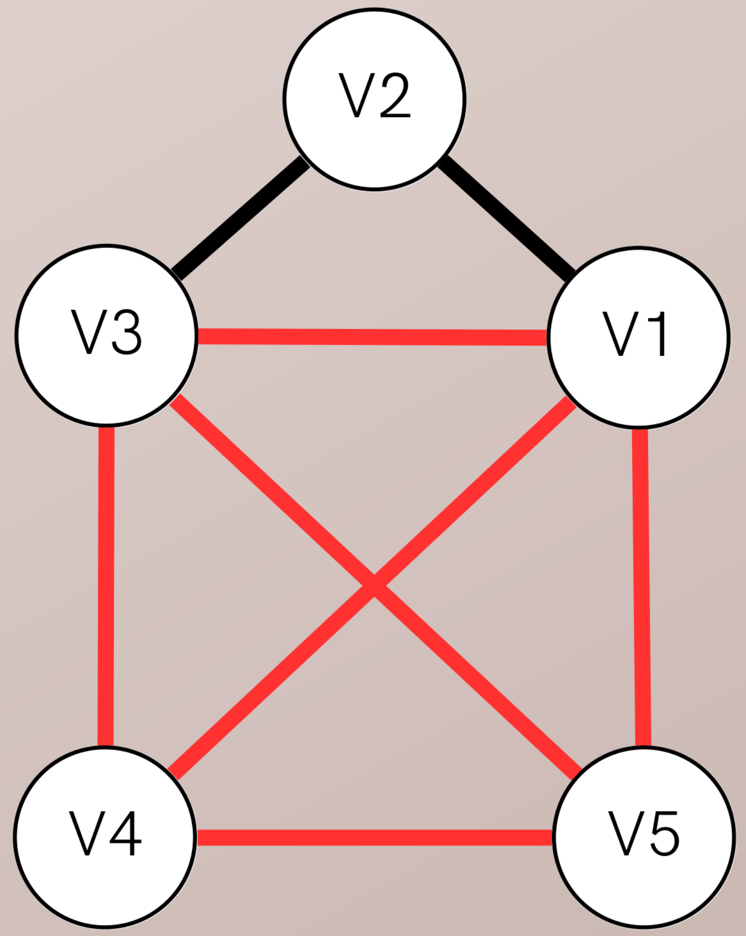
- O pior caso é quando existe a quantidade máxima de arestas em ambos os grafos.

- Complexidade: $n*n(n-1)/2 \Rightarrow O(n^3)$
  n = número de vértices
  $n(n-1)/2$ = quantidade máxima de arestas

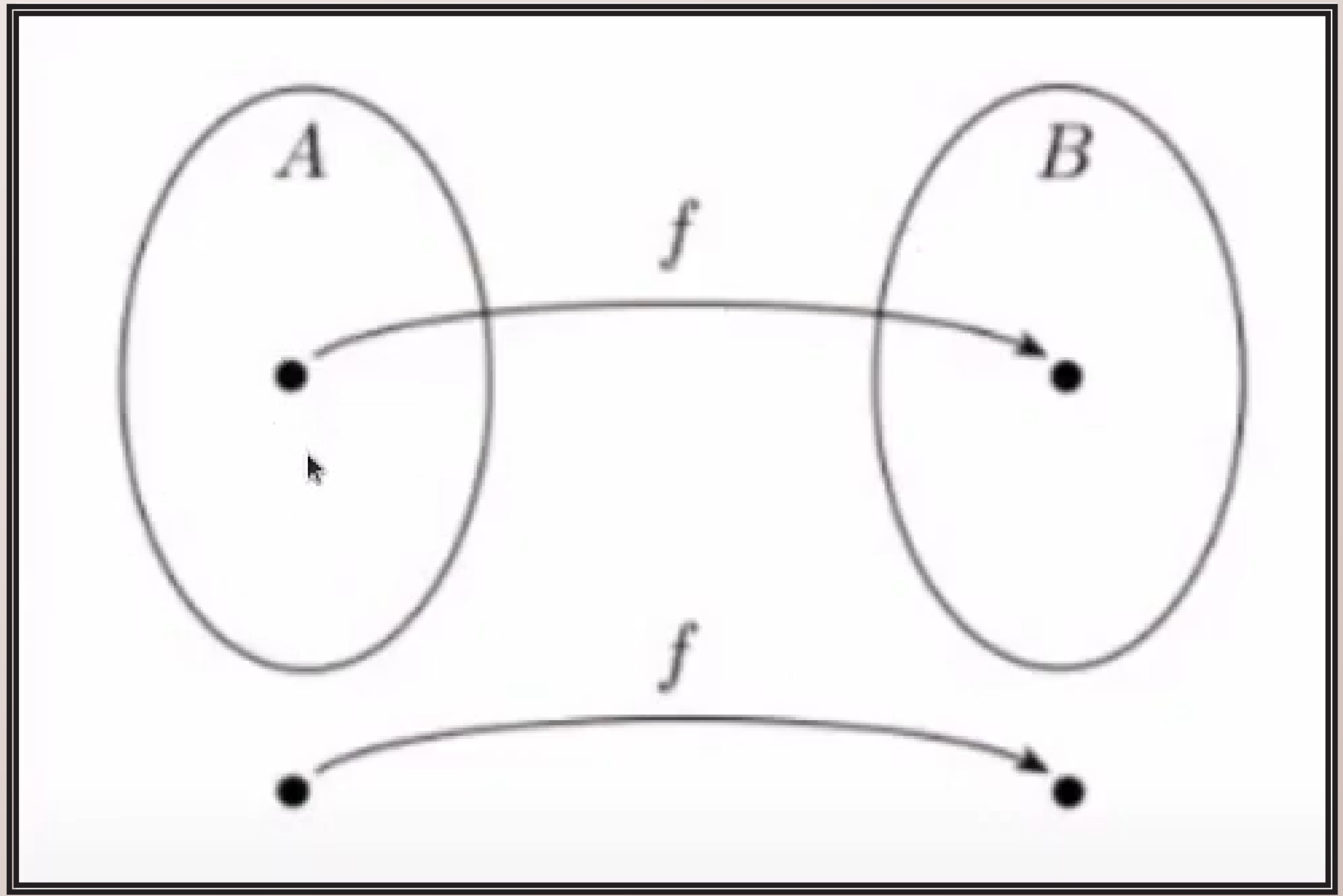
Problema do Clique

Clique = {<G,k> | G é um grafo não-dirigido com uma clique de k nós}

- Consiste em encontrar um subgrafo completo em um grafo G.
- É um problema NP-Completo.



Redução do Clique ao Isomorfismo de Subgrafos



W está em Clique sse f(w) está em S

Redução

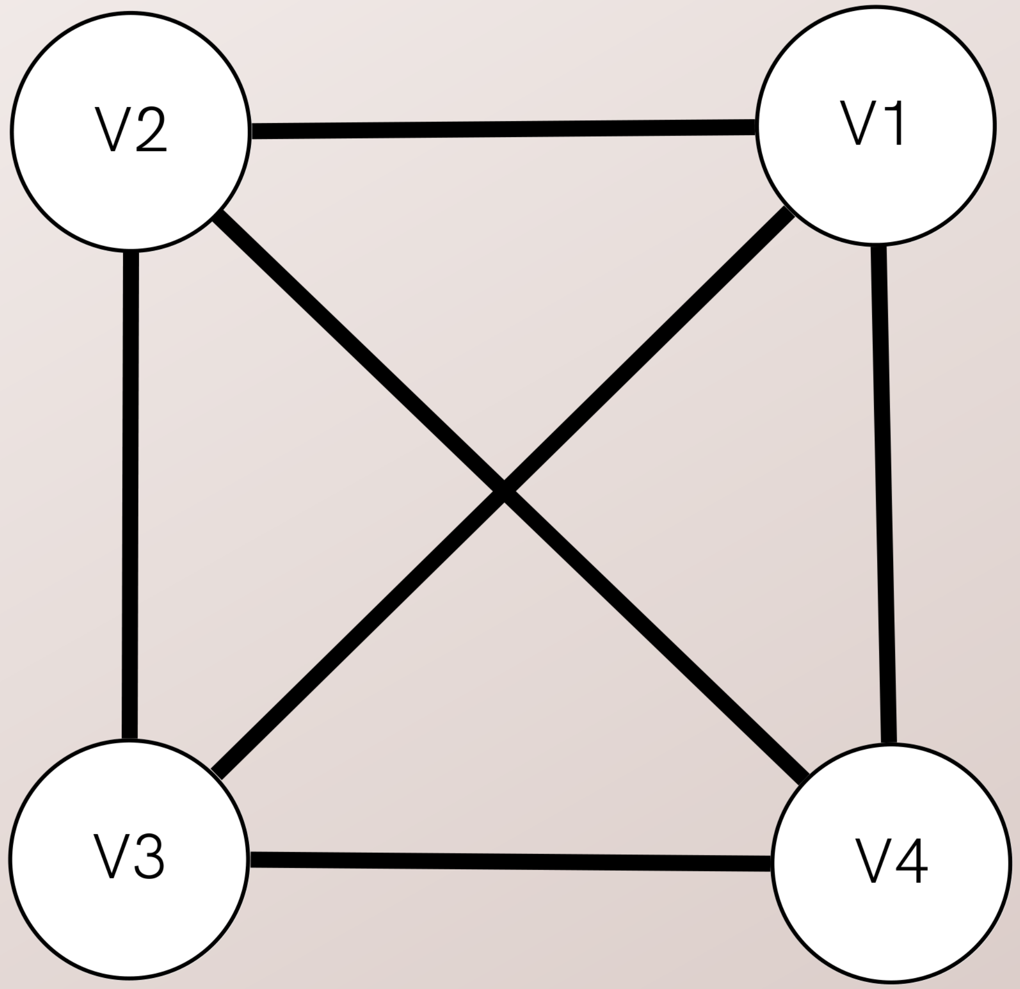
- Uma instância do problema do clique é <G,k>.
- Construir uma tupla de grafos <G1, G2>, de forma que G1 seja o grafo completo de k vértices e G2, seja o G, onde G1 e G2 são entradas para o problema S.
- O k do clique seria utilizado para criar um novo grafo completo com K nós (equivalente à entrada G1 de S), e o próprio G seria o G2 do problema S.

Demonstrando a Redução

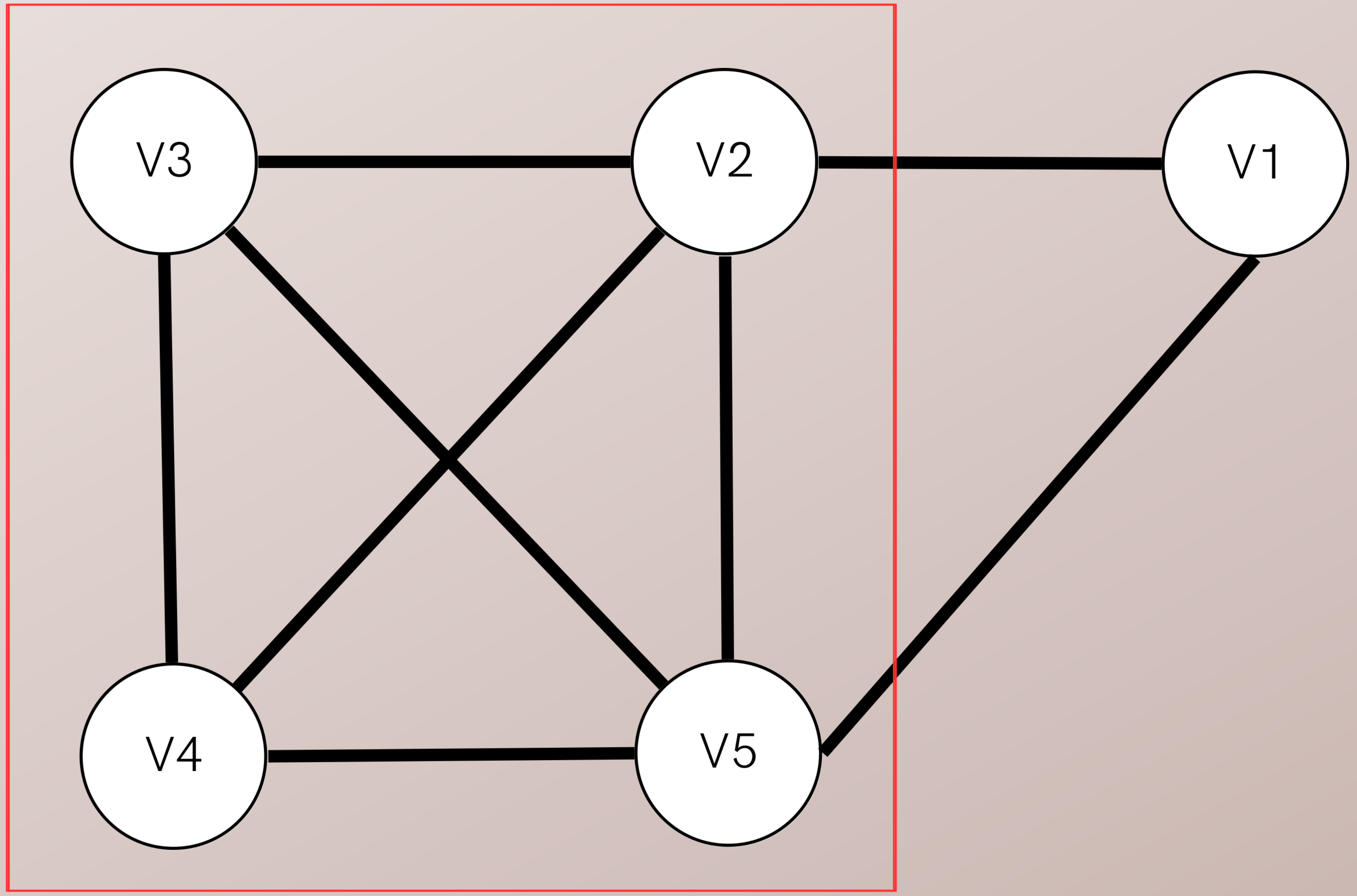
Se w estiver em Clique, então f(w) estará em S da seguinte forma:

- Se w está em clique, então o grafo G possui uma Clique de tamanho K;
- Se G possui uma clique de tamanho K, então G possui um subgrafo completo de K nós;
- Já que G1 é um subgrafo de G2 e todo grafo é isomórfico a si mesmo, f(w) está em S.

Exemplo:



Grafo G1



Grafo G2

Conclusão

- Se w está em clique, então f(w) está em Isomorfismo de subgrafos
- O problema de Isomorfismo em subgrafos é NP-Completo

Referências

- https://www.youtube.com/watch?v=Sxg9Ib9vL2k&t=633s
- https://www.geeksforgeeks.org/proof-that-subgraph-isomorphism-problem-is-np-complete/