选择题

1. 以下关于联合熵的命题__C__恒为真
   A. $H(X_1,\ldots,X_n) = H(X_1) + \cdots + H(X_n)$
   B. $H(X_1,\ldots,X_n) \leq H(X_1) + \cdots + H(X_n)$
   C. $H(X_1,\ldots,X_n) \geq H(X_1) + \cdots + H(X_n)$
   D. $H(X_1,\ldots,X_n) \neq H(X_1) + \cdots + H(X_n)$

2. F是一个多对一的函数，则以下为真的是__C__
   A. $H(F(X)) = H(X)$
   B. $H(F(X)) > H(X)$
   C. $H(F(X)) < H(X)$
   D. 都有可能

3. X和Y同分布且概率独立，则以下命题__B__恒为真
   A. $H(X,Y,Z) - H(X,Y) = H(X,Z) - H(X)$
   B. $H(X,Y,Z) - H(X,Y) \leq H(X,Z) - H(X)$
   C. $H(X,Y,Z) - H(X,Y) \geq H(X,Z) - H(X)$
   D. $H(X,Y,Z) - H(X,Y) \neq H(X,Z) - H(X)$

4. 对不同的i，(X_i,Y_i)之间是概率独立的离散型联合随机变量，概率分布为$P(X,Y)$,$P(X)$和$P(Y)$分别为各个X_i和Y_i的概率分布，$i = 1,2,\ldots,n$.根据大数定律，当n趋于无穷大时，随机变量$\frac{1}{n}\log\frac{P(X_1,\ldots,X_n)P(Y_1,\ldots,Y_n)}{P(X_1,Y_1,\ldots X_n,Y_n)}$的极限是__C__
   A. $H(X|Y) - H(Y|X)$
   B. $H(X|Y) + H(Y|X)$
   C. $I(X;Y)$
   D. $-I(X;Y)$

5. 一个二元对称无记忆离散信道的容量为0.8比特，信道编码采用二进制形式，可以表达为16种序列，要使译码的差错概率能够任意地接近于0，信道码字的长度最短不能低于__B__
   A. 4位
   B. 5位
   C. 6位
   D. 7位

证明题

以下出现的随机变量X、Y和Z都是离散随机变量

1. 请证明关于离散随机变量X的信息熵$H(X)$是凹函数

   解:

   $$H(X) = -\sum_x p_x \log(p_x)$$

   对于任意一个x，一阶导数:

   $$\frac{\partial H}{\partial p_x} = -\log(p_x) - 1$$

   二阶导数:

   $$\frac{\partial^2 H}{\partial p_x \partial p_{x'}} = \begin{cases} -\frac{1}{p_x} & x = x' \\ 0 & x \neq x' \end{cases}$$

   $H(X)$的Hessian矩阵$\left[\frac{\partial^2 H}{\partial p_x \partial p_{x'}}\right]$可以写作:

   $$\begin{bmatrix} -\frac{1}{p_{x_1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{p_{x_2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{p_{x_n}} \end{bmatrix}$$

   是主对角线元素全为负数的对角矩阵，显然是一个负定矩阵，所以$H(X)$是关于p的凹函数.

2. 陈述信息处理不等式

   解:
   有Markov链:

   $$X \to Y \to Z$$

   则存在不等式关系:

   $$I(X;Y) \geq I(X;Z)$$

3. 证明上述的信息处理不等式

   解:
   Markov链$X \to Y \to Z$的联合概率分布为:

   $$p(x, y, z) = p(x)p(y|x)p(z|y)$$

   也就是在给定给定Y时，X和Z是条件独立的，即$I(X;Z|Y) = 0$，因为:

   $$p(x, z|y) = p(x, y, z)/p(y) = p(x|y)p(z|y)$$

   根据链式法则展开互信息量:

   $$\begin{aligned} I(X;Y,Z) &= I(X;Z) + I(X;Y|Z) \\ &= I(X;Y) + I(X;Z|Y) \\ &= I(X;Y) \end{aligned}$$

由于互信息量始终非负$I(X;Y|Z) \geq 0$

$$I(X;Y) = I(X;Z) + I(X;Y|Z) \geq I(X;Z)$$

4. 规定条件互信息量为$I(X;Y|Z)$: $I(X;Y|Z) = H(X|Z) - H(X|Y,Z)$, 请证明$I(X;Y|Z)$对于$X$和$Y$满足对称性，即$I(X;Y|Z) = I(Y;X|Z)$

解:

$$\begin{aligned}
I(X;Y|Z) &= H(X|Z) - H(X|Y,Z) \\
&= -\sum_{x,z} p(x,z)\log\frac{p(x,z)}{p(z)} + \sum_{x,y,z} p(x,y,z)\log\frac{p(x,y,z)}{p(y,z)} \\
&= -\sum_{x,y,z} p(x,y,z)\log\frac{p(x,z)p(y,z)}{p(z)p(x,y,z)} \\
&= -\sum_{x,y,z} p(x,y,z)\log\frac{p(y|z)}{p(y|x,z)} \\
&= -\sum_{y,z} p(y,z)\mathrm{logp}(y|z) + \sum_{x,y,z} p(x,y,z)\log p(y|x,z) \\
&= H(Y|Z) - H(Y|X,Z) \\
&= I(Y;X|Z)
\end{aligned}$$

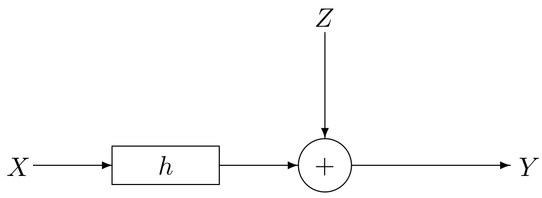
5. 以上符号含义不变请证明$I(X;Z|Y) - I(Y;Z|X) = I(X;Z) - I(Y;Z)$

解:

$$\begin{aligned}
I(X;Z|Y) - I(Y;Z|X) &= H(Z|Y) - H(Z|X,Y) - (H(Z|X) - H(Z|X,Y)) \\
&= H(Z|Y) - H(Z|X) \\
&= -(H(Z) - H(Z|Y)) + (H(Z) - H(Z|X)) \\
&= I(X;Z) - I(Y;Z)
\end{aligned}$$

计算题

1. 推导高斯信道$Y = hX + Z$的信道容量表达式. h是已知的信号放大系数（信号增益）, X是功率为P的输入信号, Z信号独立的为均值为零方差为a^2的高斯噪声.



解: 对于连续随机变量$X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$,即概率密度为表达为$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$,微分熵为

$$
\begin{aligned}
h(x) &= -\int_{-\infty}^{\infty} p(x) \ln p(x) \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} p(x)(-\frac{x^2}{2\sigma^2} - \ln \sqrt{2\pi}\sigma) \\
&= \frac{EX^2}{2\sigma^2} + \frac{1}{2} \ln 2\pi\sigma^2 \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 2\pi\sigma^2 \\
&= \frac{1}{2} \ln 2\pi e\sigma^2 \qquad \text{改变对数底数，写作}\frac{1}{2} \log 2\pi e\sigma^2
\end{aligned}
$$

将$I(X;Y)$展开，其中X和Z互相独立:

$$
\begin{aligned}
I(X;Y) &= h(Y) - h(Y|X) \\
&= h(Y) - h(hX + Z|X) \\
&= h(Y) - h(Z|X) \\
&= h(Y) - h(Z)
\end{aligned}
$$

此时，$h(Z) = \frac{1}{2}log 2\pi e a^2$, X与Z互相独立，且$E(Z) = 0$，所以:

$$
EY^2 = E(hX + Z)^2 = h^2 EX^2 + 2hEX + EZ^2 = h^2 P + a^2
$$

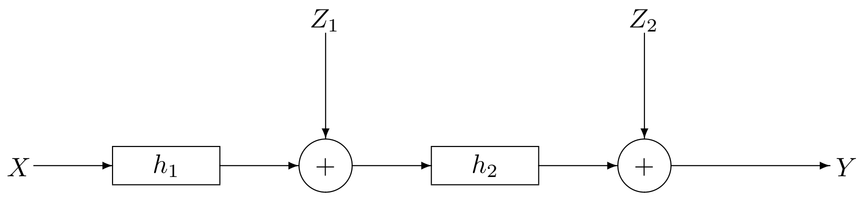
在给定方差时，正态分布使熵达到最大，Y的上界为$\frac{1}{2} \log 2\pi e(h^2 P + a^2)$,那么互信息量:

$$
\begin{aligned}
I(X;Y) = h(Y) - h(Z) &\leq \frac{1}{2} \log 2\pi e(h^2 P + a^2) - \frac{1}{2} log 2\pi e a^2 \\
&= \frac{1}{2} \log(1 + \frac{h^2 P}{a^2})
\end{aligned}
$$

因此，高斯信道的容量为:

$$
C = \max_{p(x): EX^2 \leq P} I(X;Y) = \frac{1}{2} \log(1 + \frac{h^2 P}{a^2})
$$

2. 将两个高斯信道如图串联，第一级增益为h_1，第二级增益为h_2，两个信道的噪声Z_1和Z_2的方差分别为a^2和b^2，输入信号X的功率仍然是P，求信道容量



解: 这个串联信道可以等效为

$$Y = h_2(h_1X + Z_1) + Z_2 = h_1h_2X + (h_2Z_1 + Z_2)$$

等效噪声$Z = h_2Z_1 + Z_2$满足$Z \sim \mathcal{N}(0, {h_1}^2a^2 + b^2)$, 等效增益$h = h_1h_2$, 所以信道容量

$$C = \frac{1}{2}\log(1 + \frac{h^2P}{N}) = \frac{1}{2}\log(1 + \frac{{h_1}^2{h_2}^2P}{{h_1}^2a^2 + b^2})$$

3. 分别考虑两种情况下上题信道容量C的极限(1)h_2固定，h_1趋于无穷大
(2)h_1固定，h_2趋于无穷大

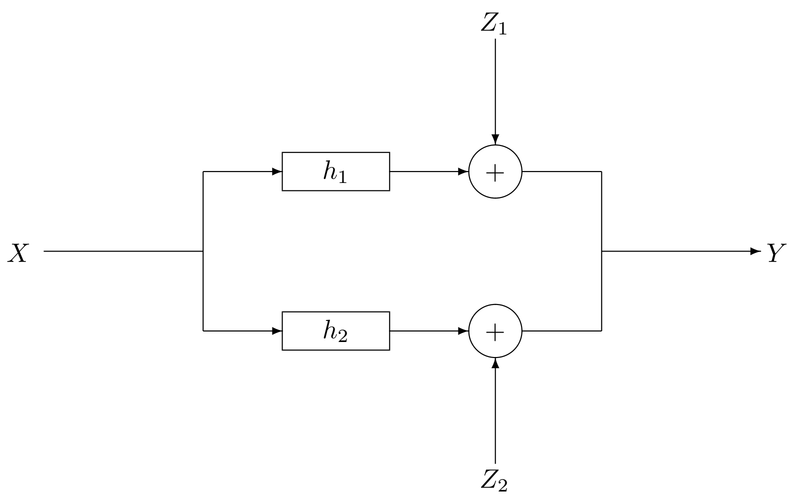
解:
(1)

$$\lim_{h_1\to+\infty} C = \lim_{h_1\to+\infty} \frac{1}{2}\log(1 + \frac{{h_1}^2{h_2}^2P}{{h_1}^2a^2 + b^2}) = \frac{1}{2}\log(1 + \frac{{h_2}^2P}{a^2})$$

(2)

$$\lim_{h_2\to+\infty} C = \lim_{h_2\to+\infty} \frac{1}{2}\log(1 + \frac{{h_1}^2{h_2}^2P}{{h_1}^2a^2 + b^2}) = \frac{1}{2}\log(1 + \frac{{h_1}^2P\lim\limits_{h_2\to+\infty}{h_2}^2}{{h_1}^2a^2 + b^2}) = +\infty$$

4. 以上符号含义不变，求如图并联的高斯信道的信道容量



解：该并联信道可以等价高斯信道

$$Y = h_1X + Z_1 + h_2X + Z_2 = (h_1 + h_2)X + (Z_1 + Z_2) = h'X + Z'$$

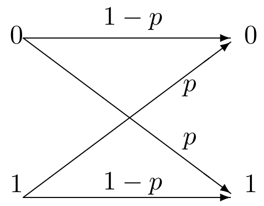
等效增益$h' = h_1 + h_2$，等效噪声$Z' = Z_1 + Z_2$, $Z' \sim \mathcal{N}(0, a^2 + b^2)$

$$C = \frac{1}{2}\log(1 + \frac{h'^2 P}{N'}) = \frac{1}{2}\log(1 + \frac{(h_1 + h_2)^2 P}{a^2 + b^2})$$

计算题

1. 设二元对称离散无记忆信息的传输差错概率为p，记为$BSC(p)$，请计算其容量C

   解:



$$\begin{aligned} I(X;Y) &= H(Y) - H(Y|X) \\ &= H(Y) - \sum p(x)H(Y|X=x) \\ &= H(Y) - \sum p(x)H(p) \\ &\le 1 - H(p) \qquad \text{当且仅当输入分布是均匀分布时取等号} \end{aligned}$$

   这里的$H(p) = -plogp - (1-p)log(1-p)$.

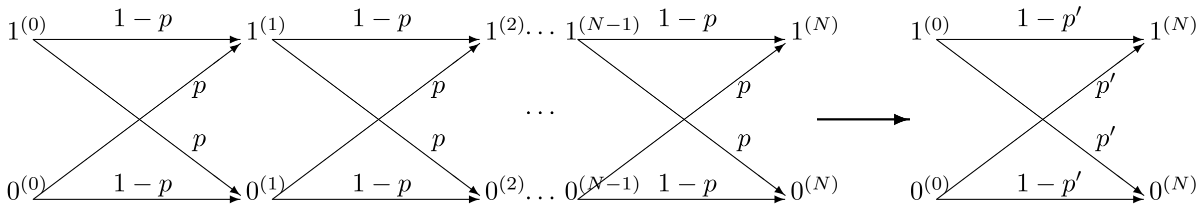
$$C = \max_{p(x)} I(X;Y) = 1 - H(p)$$

2. 将N个$BSC(p)$信道串联，结果得到一个等效的BSC信道.计算其信道容量C(用N和p表示)

   解:

$$X_0 \longrightarrow \boxed{\text{BSC}} \longrightarrow X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{N-1} \longrightarrow \boxed{\text{BSC}} \longrightarrow X_N$$

   每个信道的原始差错概率为p，那么整个串联信道的差错概率p'即:



   当$x = p,\, y = 1-p$时，$(x+y)^N$的二项展开的奇次项之和:

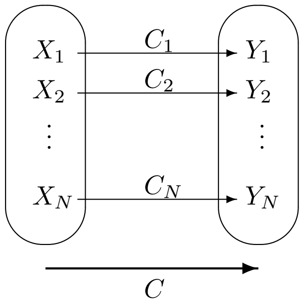
$$p' = \frac{1}{2}(x+y)^N - \frac{1}{2}(y-x)^N = \frac{1}{2}(1-(1-2p)^N)$$

   该串联信道可等效为差错概率为p'的$BSC(p')$信道:

$$C = 1 - H(p') = 1 - H(\frac{1}{2}(1-(1-2p)^N))$$

3. 将N个$BSC(p)$信道串联且这N个信道相互独立（无串扰），结果得到一个输入和输出为N维的二进制向量的矢量信道，并请计算其容量C(用N和p表示）

解:



信道间相互概率独立

$$p(y_1,\dots,y_N|x_1,\dots,x_N)=\prod_{i=1}^{N}p(y_i|x_1,\dots,x_N)$$

$$p(y_i|x_1,\dots,x_N)=\frac{p(x_1,\dots,x_N,y_i)}{p(x_1,\dots,x_N)}=\frac{p(x_i,y_i)p_{n\neq i}(x_1\dots,x_n,\dots,x_N)}{p(x_i)p_{n\neq i}(x_1\dots,x_n,\dots,x_N)}=p(y_i|x_i)$$

联合条件熵满足

$$\begin{aligned}H(Y_1,\dots,Y_N|X_1,\dots,X_n)&=-\sum_{x,y}p(x_1,\dots,x_N,y_1,\dots,y_N)\log p(y_1,\dots,y_N|x_1,\dots,x_N)\\&=-\sum_{i=1}^{N}\sum_{x,y}p(x_i,y_i)\log p(y_i|x_i)\\&=\sum_{i=1}^{N}H(Y_i|X_i)\end{aligned}$$

整个信道的互信息量

$$\begin{aligned}I(X_1,\dots,X_n;Y_1,\dots,Y_N)&=H(Y_1,\dots,Y_N)-H(Y_1,\dots,Y_N|X_1,\dots,X_n)\\&=H(Y_1,\dots,Y_N)-\sum_{i=1}^{N}H(Y_i|X_1,\dots,X_n)\\&\le\sum_{i=1}^{N}H(Y_i)-\sum_{i=1}^{N}H(Y_i|X_i)\qquad\text{当且仅当所有的}Y\text{概率独立时取等号}\\&=\sum_{i=1}^{N}(H(Y_i)-H(Y_i|X_i))\\&=\sum_{i=1}^{N}I(X_i,Y_i)\end{aligned}$$

信道容量

$$\begin{aligned}C&=\max_{p(x_1,\dots x_N)}I(X_1,\dots,X_n;Y_1,\dots,Y_N)\\&\le\max_{p(x_1,\dots x_N)}\sum_{i=1}^{N}I(X_i;Y_i)\\&\le\sum_{i=1}^{N}\max_{p(x_1,\dots x_N)}I(X_i;Y_i)\\&=\sum_{i=1}^{N}C_i\\&=N(1-H(p))\end{aligned}$$