单项选择题

1. 以下关于联合熵的命题__C__恒为真

   A. $H(X_1,\ldots,X_n)=H(X_1)+H(X_1,\ldots,X_{n-1}|X_1)$

   B. $H(X_1,\ldots,X_n)<H(X_1)+H(X_1,\ldots,X_{n-1}|X_1)$

   C. $H(X_1,\ldots,X_n)>H(X_1)+H(X_1,\ldots,X_{n-1}|X_1)$

   D. $H(X_1,\ldots,X_n)\neq H(X_1)+H(X_1,\ldots,X_{n-1}|X_1)$

2. F是一个多对一的函数，则以下为真的是__C__

   A. $H(F(X))=H(X)$

   B. $H(F(X))>H(X)$

   C. $H(F(X))<H(X)$

   D. 都有可能

3. 随机变量X和Y独立，有相同的概率分布，$H(X)$的对数底数为α，则以下为真的是__B__

   A. $P(X=Y)=\alpha^{-H(X)}$

   B. $P(X=Y)\leq\alpha^{-H(X)}$

   C. $P(X=Y)\geq\alpha^{-H(X)}$

   D. 都有可能

4. 对不同的i，(X_i,Y_i)之间是概率独立的离散型联合随机变量，概率分布为$P(X,Y)$,$P(X)$和$P(Y)$分别为各个X_i和Y_i的概率分布，$i=1,2,\ldots,n$.根据大数定律，当n趋于无穷大时，随机变量$\frac{1}{n}\log\frac{P(X_1,\ldots,X_n)P(Y_1,\ldots,Y_n)}{P(X_1,Y_1,\ldots X_n,Y_n)}$的极限是__C__

   A. $H(X|Y)-H(Y|X)$

   B. $H(X|Y)+H(Y|X)$

   C. $I(X;Y)$

   D. $-I(X;Y)$

5. 一个二元对称无记忆离散信道的容量为0.8比特，信道编码采用二进制形式，每个原始数据分组为12位，要使译码的差错概率能够任意地接近于0，信道码字的长度最短不能低于__C__

   A. 8位

   B. 10位

   C. 16位

   D. 20位

分析题

1. X,Y是随机变量，互信息量$I(X;Y)$在条件概率$P_{y|x}$固定的情况下，X的概率分布P_x是凸函数还是凹函数?

   解: 凹函数.
   $P_y=\sum\limits_x P_x\cdot P_{y|x}$，$\frac{\partial P_y}{\partial P_x}=P_{y|x}$
   互信息量

$$
\begin{aligned}
I(X;Y)&=\sum_{x,y}P(x,y)\log P_{y|x}-\sum_y P_y\log P_y\\
&=\sum_{x,y}P_x\cdot P_{y|x}\log P_{y|x}-\sum_{x,y}P_x\cdot P_{y|x}\log P_y
\end{aligned}
$$

其Hessian矩阵H中每个元素为二阶导数$\frac{\partial^2 I}{\partial P_x \partial P_{x'}}$.
一阶导数：$\frac{\partial I}{\partial P_x} = \sum\limits_y P_{y|x} \log P_{y|x} - \sum\limits_y P_{y|x} \log P_y - \sum\limits_{x',y} P_{x'} \cdot P_{y|x'} \frac{P_{y|x}}{P_y}$
二阶导数：$\frac{\partial^2 I}{\partial P_x \partial P_{x'}} = -\sum\limits_y P_{y|x'} \frac{P_{y|x}}{P_y}$
对于任意向量$\mathbf{u} = [u_1, u_2, \ldots, u_n]^T$，$\mathbf{u}^T H \mathbf{u}$的值为

$$\sum_{x,x'} u_x u_{x'} \frac{\partial^2 I}{\partial P_x \partial P_{x'}} = -\sum_y \frac{1}{P_y} (\sum_x P_{y|x} u_x)^2 \leq 0$$

所以其Hessian矩阵为半负定矩阵，$I(X;Y)$是关于变量P_x的凹函数.

2. 互信息量$I(X;Y)$总是非负的吗?

解: $I(X;Y) \geq 0$恒成立.
互信息量可以写作

$$I(X;Y) = \sum_{x,y} p(x,y) log \frac{p(x,y)}{p(x)p(y)}$$

$\because p(x,y) \geq p(x) \cdot p(y)$ 当且仅当X, Y概率独立时取等号.
$\therefore \frac{p(x,y)}{p(x) \cdot p(y)} \geq 1$, 即$log \frac{p(x,y)}{p(x)p(y)} \geq 0$
$\therefore I(X;Y) = \sum\limits_{x,y} p(x,y) log \frac{p(x,y)}{p(x)p(y)} \geq 0$

3. 假设一个卫星转发系统的模型表达为一个Markov链$X \to Y \to Z$(其中$X \to Y$和$Y \to Z$分别为所谓的上行链路和下行链路），你可以得出$I(X;Z)$, $I(X;Y)$和$I(Y;Z)$的值之间有怎样的关系？陈述并予以证明.

解: 数据处理不等式：$I(X;Y) \geq I(X;Z)$, $I(Y;Z) \geq I(X;Z)$.
$\because X \to Y \to Z$形成了Markov链, $\therefore p(x,y,z) = p(x)p(y|x)p(z|y)$,
$\therefore p(x,z|y) = p(x,y,z)/p(y) = p(x|y)p(z|y)$ 在给定Y的条件下，X与Z互相独立
$\therefore I(X;Z|Y) = 0$
根据互信息量的链式法则：

$$\begin{aligned} I(X;Y,Z) &= I(X;Z) + I(X;Y|Z) \\ &= I(X;Y) + I(X;Z|Y) \\ &= I(X;Y) \end{aligned}$$

由于互信息量始终非负$I(X;Y|Z) \geq 0$

$$I(X;Y) = I(X;Z) + I(X;Y|Z) \geq I(X;Z)$$

Markov链具有对称性，故$I(Y;Z) \geq I(X;Z)$的证明与$I(X;Y) \geq I(X;Z)$的证明同理.

4. 有人说，通过大幅度提升上行链路$X \to Y$的容量便有可能显著提升以上卫星信道的容量，该论断正确吗?

解: 不正确.
通过上题的证明，$I(X;Y) \geq I(X;Z)$和$I(Y;Z) \geq I(X;Z)$同时成立，$I(X;Z)$上限不仅取决于$I(X;Y)$，也取决于$I(Y;Z)$.因此仅仅依靠大幅提高$I(X;Y)$的最大值，即上行链路的信道容量，而不对下行链路进行优化，该信道的容量将无法突破下行链路的信道容量.

证明题

1. 随机变量$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 彼此概率独立具有相同的概率分布$P(X)$，$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$彼此概率独立具有相同的概率$P(Y)$，H表达熵，对任何正整数n和正数ε定义集合

$$A_\varepsilon^{(n)} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n) : \left| -\frac{1}{n} \log p(x_1, x_2, \ldots, x_n) - H[X] \right| < \varepsilon,$$
$$\left| -\frac{1}{n} \log p(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n) - H[X, Y] \right| < \varepsilon\}$$

和集合

$$B_\varepsilon^{(n)} = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) : \left| \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \right| < \varepsilon \right\}$$

证明：n趋近于无穷大时有极限

$$P\left[(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n) \in A_\varepsilon^{(n)} \right] \to 1$$

解:
弱大数定律:

$$-\frac{1}{n} \log p(X^n) \to -E\left[\log p(X)\right] = H(X) \qquad \text{依概率}$$

因此，给定$\varepsilon > 0$，存在n_1，使得对于任意$n > n_1$，

$$\Pr\left(\left| -\frac{1}{n} \log p(X^n) - H(X) \right| \geq \varepsilon \right) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

同理，存在n_2，使得对于任意$n > n_2$，

$$\Pr\left(\left| -\frac{1}{n} \log p(X^n, Y^n) - H(X, Y) \right| \geq \varepsilon \right) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

那么对于任意$n > \max(n_1, n_2)$, 将不等式(1), (2)的集合之并的概率也小于ε. 对于充分大的n，集合$A_\varepsilon^{(n)}$的概率大于$1-\varepsilon$，则

$$\lim_{n \to \infty} p\left[(x_n, y_n) \in A_\varepsilon^{(n)} \right] = 1$$

2. 请估计集合$A_\varepsilon^{(n)}$的大小的上界，并给出你的证明（除大数定律外，其他环节要求给出推导）

解： $2^{n(H(X,Y)+\varepsilon)}$

$$\begin{aligned} 1 &= \sum p(x^n, y^n) \\ &\geq \sum\nolimits_{A_\varepsilon^{(n)}} p(x^n, y^n) \\ &\geq \left|A_\varepsilon^{(n)}\right| 2^{-n(H(X,Y)+\varepsilon)} \end{aligned}$$

因此

$$\left|A_\varepsilon^{(n)}\right| \leq 2^{n(H(X,Y)+\varepsilon)}$$

3. 随机变量$U_1, U_2, \ldots, U_n$彼此概率独立且每一个与X有相同的概率分布$P(X)$, $V_1, V_2, \ldots, V_n$彼此概率独立且每一个与Y有相同的概率分布$P(Y)$，此外每个u_i和v_i也概率独立.$(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n)$的集合$A_\varepsilon^{(n)}$如上，请确定

$$P\left[(u_1, u_2, \ldots, u_n; v_1, v_2, \ldots, v_n) \in A_\varepsilon^{(n)}\right]$$

的上界并给出证明.

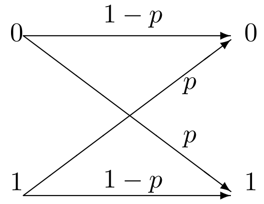
解： $2^{-n(I(X;Y)-3\varepsilon)}$

$$\begin{aligned} \Pr((U^n, V^n) \in A_\varepsilon^{(n)}) &= \sum_{(x^n, y^n) \in A_\varepsilon^{(n)}} p(x^n) p(y^n) \\ &\leq 2^{n(H(X,Y)+\varepsilon)} 2^{-n(H(X)-\varepsilon)} 2^{-n(H(Y)-\varepsilon)} \\ &= 2^{-n(I(X;Y)-3\varepsilon)} \end{aligned}$$

计算题

1. 设二元对称离散无记忆信息的传输差错概率为p，记为$BSC(p)$，请计算其容量C

解： $1 - H(p)$



$$\begin{aligned} I(X;Y) &= H(Y) - H(Y|X) \\ &= H(Y) - \sum p(x) H(Y|X=x) \\ &= H(Y) - \sum p(x) H(p) \\ &\leq 1 - H(p) \qquad \text{当且仅当输入分布是均匀分布时取等号} \end{aligned}$$

这里的$H(p) = -plogp - (1-p)log(1-p)$.

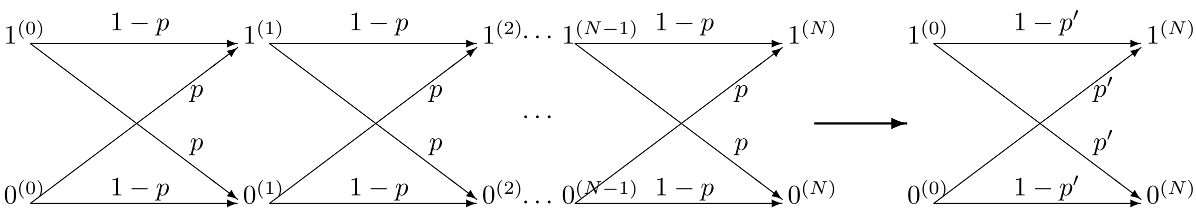
$$C = \max_{p(x)} I(X;Y) = 1 - H(p)$$

2. 将N个$BSC(p)$信道串联，结果得到一个等效的BSC信道.计算其信道容量C(用N和p表示)

解： $1 - H(\frac{1}{2}(1-(1-2p)^N)$

$$X_0 \to \boxed{\text{BSC}} \to X_1 \to \cdots \to X_{N-1} \to \boxed{\text{BSC}} \to X_N$$

每个信道的原始差错概率为p，那么整个串联信道的差错概率p'即：



当$x = p$, $y = 1-p$时，$(x+y)^N$的二项展开的奇次项之和：

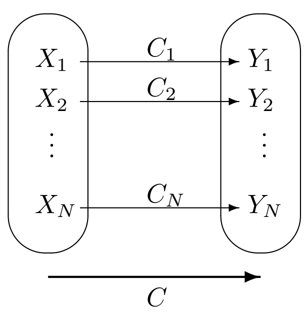
$$p' = \frac{1}{2}(x+y)^N - \frac{1}{2}(y-x)^N = \frac{1}{2}(1-(1-2p)^N)$$

该串联信道可等效为差错概率为p'的$BSC(p')$信道：

$$C = 1 - H(p') = 1 - H(\frac{1}{2}(1-(1-2p)^N))$$

3. 将N个$BSC(p)$信道串联且这N个信道相互独立（无串扰），结果得到一个输入和输出为N维的二进制向量的矢量信道，并请计算其容量C(用N和p表示)

解： $N(1 - H(p))$



信道间相互概率独立

$$p(y_1,\ldots,y_N|x_1,\ldots,x_N)=\prod_{i=1}^{N}p(y_i|x_1,\ldots,x_N)$$

$$p(y_i|x_1,\ldots,x_N)=\frac{p(x_1,\ldots,x_N,y_i)}{p(x_1,\ldots,x_N)}=\frac{p(x_i,y_i)p_{n\neq i}(x_1\ldots,x_n,\ldots,x_N)}{p(x_i)p_{n\neq i}(x_1\ldots,x_n,\ldots,x_N)}=p(y_i|x_i)$$

联合条件熵满足

$$\begin{aligned}H(Y_1,\ldots,Y_N|X_1,\ldots,X_n)&=-\sum_{x,y}p(x_1,\ldots,x_N,y_1,\ldots,y_N)\log p(y_1,\ldots,y_N|x_1,\ldots,x_N)\\&=-\sum_{i=1}^{N}\sum_{x,y}p(x_i,y_i)\log p(y_i|x_i)\\&=\sum_{i=1}^{N}H(Y_i|X_i)\end{aligned}$$

整个信道的互信息量

$$\begin{aligned}I(X_1,\ldots,X_n|Y_1,\ldots,Y_N)&=H(Y_1,\ldots,Y_N)-H(Y_1,\ldots,Y_N|X_1,\ldots,X_n)\\&=H(Y_1,\ldots,Y_N)-\sum_{i=1}^{N}H(Y_i|X_1,\ldots,X_n)\\&\leq\sum_{i=1}^{N}H(Y_i)-\sum_{i=1}^{N}H(Y_i|X_i)\qquad\text{当且仅当所有的}Y\text{概率独立时取等号}\\&=\sum_{i=1}^{N}(H(Y_i)-H(Y_i|X_i))\\&=\sum_{i=1}^{N}I(X_i,Y_i)\end{aligned}$$

信道容量

$$\begin{aligned}C&=\max_{p(x_1,\ldots x_N)}I(X_1,\ldots,X_n|Y_1,\ldots,Y_N)\\&\leq\max_{p(x_1,\ldots x_N)}\sum_{i=1}^{N}I(X_i,Y_i)\\&\leq\sum_{i=1}^{N}\max_{p(x_1,\ldots x_N)}I(X_i,Y_i)\\&=\sum_{i=1}^{N}C_i\\&=N(1-H(p))\end{aligned}$$

4. 将两个容量分别为C_1和C_2的BSC信道依概率组合.即码字X的以概率α在信道1传输，或以概率$1-\alpha$在信道2传输，但两种传输不同时发生。请计算这种组合的最大容量C（用C_1和C_2表示）

解： $\log(2^{C_1}+2^{C_2})$

$$X=\begin{cases}X_1 & \text{概率为}\alpha\\ X_2 & \text{概率为}1-\alpha\end{cases}$$

令

$$\theta(X)=\begin{cases}1 & \text{当}X=X_1\\ 2 & \text{当}X=X_2\end{cases}$$

θ是Y的函数，即$X\to Y\to\theta$是Markov链

$$I(X;Y,\theta)=I(X;\theta)+I(X;Y|\theta)=I(X;Y)+I(X;\theta|Y)=I(X;Y)$$

$$\begin{aligned}I(X;Y)&=I(X;\theta)+I(X;Y|\theta)\\&=H(\alpha)+\alpha I(X_1;Y_1)+(1-\alpha)I(X_2;Y_2)\end{aligned}$$

信道容量取决于关于α的函数

$$f(\alpha)=H(\alpha)+\alpha C_1+(1-\alpha)C_2$$

对函数求极值优化

$$\frac{df}{d\alpha}=-\log\alpha+\log(1-\alpha)+C_1-C_2=0$$

当$\alpha=2^{C_1}/(2^{C_1}+2^{C_2})$时，取到极大值

$$C=\max_{\alpha}f(\alpha)=\log(2^{C_1}+2^{C_2})$$