单项选择题

1. 以下关于联合熵的命题_____恒为真
   A. $H(X_1,...,X_n) = H(X_1) + H(X_1,...,X_{n-1}|X_1)$
   B. $H(X_1,...,X_n) < H(X_1) + H(X_1,...,X_{n-1}|X_1)$
   C. $H(X_1,...,X_n) > H(X_1) + H(X_1,...,X_{n-1}|X_1)$
   D. $H(X_1,...,X_n) \neq H(X_1) + H(X_1,...,X_{n-1}|X_1)$

2. F是一个多对一的函数，则以下为真的是_____
   A. $H(F(X)) = H(X)$
   B. $H(F(X)) > H(X)$
   C. $H(F(X)) < H(X)$
   D. 都有可能

3. 随机变量X和Y独立，有相同的概率分布，$H(X)$的对数底数为α，则以下为真的是_____
   A. $P(X = Y) = \alpha^{-H(X)}$
   B. $P(X = Y) \leq \alpha^{-H(X)}$
   C. $P(X = Y) \geq \alpha^{-H(X)}$
   D. 都有可能

4. 对不同的i，(X_i, Y_i)之间是概率独立的离散型联合随机变量，概率分布为$P(X,Y)$,$P(X)$和$P(Y)$分别为各个X_i和Y_i的概率分布，$i = 1, 2, ..., n$.根据大数定律，当n趋于无穷大时，随机变量$\frac{1}{n}\log\frac{P(X_1,...,X_n)P(Y_1,...,Y_n)}{P(X_1,Y_1,...X_n,Y_n)}$的极限是_____
   A. $H(X|Y) - H(Y|X)$
   B. $H(X|Y) + H(Y|X)$
   C. $I(X;Y)$
   D. $-I(X;Y)$

5. 一个二元对称无记忆离散信道的容量为0.8比特，信道编码采用二进制形式，每个原始数据分组为12位，要使译码的差错概率能够任意地接近于0，信道码字的长度最短不能低于_____
   A. 8位
   B. 10位
   C. 16位
   D. 20位

分析题

1. X,Y是随机变量，互信息量$I(X;Y)$在条件概率$P_{y|x}$固定的情况下，X的概率分布P_x是凸函数还是凹函数?

2. 互信息量$I(X;Y)$总是非负的吗?

3. 假设一个卫星转发系统的模型表达为一个Markov链$X \to Y \to Z$(其中$X \to Y$和$Y \to Z$分别为所谓的上行链路和下行链路），你可以得出$I(X;Z)$, $I(X;Y)$和$I(Y;Z)$的值之间有怎样的关系？陈述并予以证明.

4. 有人说，通过大幅度提升上行链路$X \to Y$的容量便有可能显著提升以上卫星信道的容量，该论断正确吗?

证明题

1. 随机变量$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 彼此概率独立具有相同的概率分布$P(X)$，$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$彼此概率独立具有相同的概率$P(Y)$，H表达熵，对任何正整数n和正数ε定义集合

$$A_\varepsilon^{(n)} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n) : \left|-\frac{1}{n}\log p(x_1, x_2, \ldots, x_n) - H[X]\right| < \varepsilon, \\ \left|-\frac{1}{n}\log p(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n) - H[X, Y]\right| < \varepsilon\}$$

和集合

$$B_\varepsilon^{(n)} = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \left|\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\right| < \varepsilon\right\}$$

证明：n趋近于无穷大时有极限

$$P\left[(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n) \in A_\varepsilon^{(n)}\right] \to 1$$

2. 请估计集合$A_\varepsilon^{(n)}$的大小的上界，并给出你的证明（除大数定律外，其他环节要求给出推导）

3. 随机变量$U_1, U_2, \ldots, U_n$彼此概率独立且每一个与X有相同的概率分布$P(X)$, $V_1, V_2, \ldots, V_n$彼此概率独立且每一个与Y有相同的概率分布$P(Y)$，此外每个u_i和v_i也概率独立.$(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n)$的集合$A_\varepsilon^{(n)}$如上，请确定

$$P\left[(u_1, u_2, \ldots, u_n; v_1, v_2, \ldots, v_n) \in A_\varepsilon^{(n)}\right]$$

的上界并给出证明.

计算题

1. 设二元对称离散无记忆信息的传输差错概率为p，记为$BSC(p)$，请计算其容量C

2. 将N个$BSC(p)$信道串联，结果得到一个等效的BSC信道.计算其信道容量C(用N和p表示)

3. 将N个$BSC(p)$信道串联且这N个信道相互独立（无串扰），结果得到一个输入和输出为N维的二进制向量的矢量信道，并请计算其容量C(用N和p表示）

4. 将两个容量分别为C_1和C_2的BSC信道依概率组合.即码字X的以概率α在信道1传输，或以概率$1-\alpha$在信道2传输，但两种传输不同时发生。请计算这种组合的最大容量C（用C_1和C_2表示）