

单项选择题

1. 以下关于联合熵的命题_____恒为真

- A. $H(X_1, \dots, X_n) = H(X_1) + H(X_1, \dots, X_{n-1}|X_1)$
- B. $H(X_1, \dots, X_n) < H(X_1) + H(X_1, \dots, X_{n-1}|X_1)$
- C. $H(X_1, \dots, X_n) > H(X_1) + H(X_1, \dots, X_{n-1}|X_1)$
- D. $H(X_1, \dots, X_n) \neq H(X_1) + H(X_1, \dots, X_{n-1}|X_1)$

2. F 是一个多对一的函数, 则以下为真的是_____

- A. $H(F(X)) = H(X)$
- B. $H(F(X)) > H(X)$
- C. $H(F(X)) < H(X)$
- D. 都有可能

3. 随机变量 X 和 Y 独立, 有相同的概率分布, $H(X)$ 的对数底数为 α , 则以下为真的是_____

- A. $P(X = Y) = \alpha^{-H(X)}$
- B. $P(X = Y) \leq \alpha^{-H(X)}$
- C. $P(X = Y) \geq \alpha^{-H(X)}$
- D. 都有可能

4. 对不同的 i , (X_i, Y_i) 之间是概率独立的离散型联合随机变量, 概率分布为 $P(X, Y), P(X)$ 和 $P(Y)$ 分别为各个 X_i 和 Y_i 的概率分布, $i = 1, 2, \dots, n$. 根据大数定律, 当 n 趋于无穷大时, 随机变量 $\frac{1}{n} \log \frac{P(X_1, \dots, X_n)P(Y_1, \dots, Y_n)}{P(X_1, Y_1, \dots, X_n, Y_n)}$ 的极限是_____

- A. $H(X|Y) - H(Y|X)$
- B. $H(X|Y) + H(Y|X)$
- C. $I(X; Y)$
- D. $-I(X; Y)$

5. 一个二元对称无记忆离散信道的容量为0.8比特, 信道编码采用二进制形式, 每个原始数据分组为12位, 要使译码的差错概率能够任意地接近于0, 信道码字的长度最短不能低于_____

- A. 8位
- B. 10位
- C. 16位
- D. 20位

分析题

1. X, Y 是随机变量, 互信息量 $I(X; Y)$ 在条件概率 $P_{y|x}$ 固定的情况下, X 的概率分布 P_x 是凸函数还是凹函数?

2. 互信息量 $I(X; Y)$ 总是非负的吗?

3. 假设一个卫星转发系统的模型表达为一个Markov链 $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ (其中 $X \rightarrow Y$ 和 $Y \rightarrow Z$ 分别为所谓的上行链路和下行链路)，你可以得出 $I(X; Z)$, $I(X; Y)$ 和 $I(Y; Z)$ 的值之间有怎样的关系？陈述并予以证明。
4. 有人说，通过大幅度提升上行链路 $X \rightarrow Y$ 的容量便有可能显著提升以上卫星信道的容量，该论断正确吗？

证明题

1. 随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 彼此概率独立具有相同的概率分布 $P(X)$, Y_1, Y_2, \dots, Y_n 彼此概率独立具有相同的概率 $P(Y)$, H 表达熵，对任何正整数 n 和正数 ε 定义集合

$$A_\varepsilon^{(n)} = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n) : \begin{aligned} &\left| -\frac{1}{n} \log p(x_1, x_2, \dots, x_n) - H[X] \right| < \varepsilon, \\ &\left| -\frac{1}{n} \log p(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n) - H[X, Y] \right| < \varepsilon \end{aligned} \right\}$$

和集合

$$B_\varepsilon^{(n)} = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : \left| \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \right| < \varepsilon \right\}$$

证明： n 趋近于无穷大时有极限

$$P \left[(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n) \in A_\varepsilon^{(n)} \right] \rightarrow 1$$

2. 请估计集合 $A_\varepsilon^{(n)}$ 的大小的上界，并给出你的证明（除大数定律外，其他环节要求给出推导）

3. 随机变量 U_1, U_2, \dots, U_n 彼此概率独立且每一个与 X 有相同的概率分布 $P(X)$, V_1, V_2, \dots, V_n 彼此概率独立且每一个与 Y 有相同的概率分布 $P(Y)$, 此外每个 u_i 和 v_i 也概率独立。 $(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n)$ 的集合 $A_\varepsilon^{(n)}$ 如上，请确定

$$P \left[(u_1, u_2, \dots, u_n; v_1, v_2, \dots, v_n) \in A_\varepsilon^{(n)} \right]$$

的上界并给出证明。

计算题

1. 设二元对称离散无记忆信息的传输差错概率为 p ，记为 $BSC(p)$ ，请计算其容量 C

2. 将 N 个 $BSC(p)$ 信道串联, 结果得到一个等效的BSC信道. 计算其信道容量 C (用 N 和 p 表示)
3. 将 N 个 $BSC(p)$ 信道串联且这 N 个信道相互独立 (无串扰), 结果得到一个输入和输出为 N 维的二进制向量的矢量信道, 并请计算其容量 C (用 N 和 p 表示)
4. 将两个容量分别为 C_1 和 C_2 的BSC信道依概率组合. 即码字 X 的以概率 α 在信道1传输, 或以概率 $1 - \alpha$ 在信道2传输, 但两种传输不同时发生。请计算这种组合的最大容量 C (用 C_1 和 C_2 表示)