

一 填空题

1. 设 $\mathbf{a}=[1, 3, 4]^T$, $\mathbf{b}=[1, -1, 2]^T$, 则 $(\mathbf{ab}^T)^{80} =$ _____
2. 设 A 为三阶方阵, $|A|=3$, 则 $|A^* + A^{-1}| =$ _____
3. 设 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 都是三元列向量, $A=[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]$, $B=[\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_2, -\mathbf{a}_1]$, 则 $|A+B| =$ _____
4. 设方阵 A 满足 $A^2 - A = 0$, 则 $(A - 3E)^{-1} =$ _____
5. 设 A 为三阶方阵, $r(A)=2$, $\mathbf{u}_1=[1, -1, 2]^T$ 和 $\mathbf{u}_2=[0, 0, 1]^T$ 是方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的两个解, 则方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的通解为_____
6. 设向量 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ 线性无关, $\mathbf{b}_1=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_2=2\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3$, $\mathbf{b}_3=2\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_4$, $\mathbf{b}_4=2\mathbf{a}_4+k\mathbf{a}_1$, 则向量组 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4$ 线性无关的充要条件是 k 满足_____
7. 向量 $\mathbf{b}=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$ 在基 $\mathbf{a}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_3=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ 下的坐标向量为_____
8. 设 A 为三阶方阵, $|A|=0$, $\text{tr}(A)=1$, $r(3E+A)=2$, 则 $|A+E| =$ _____
9. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + kx_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2kx_2x_3$ 为正定二次型的充要条件是 k 满足_____
10. 设 $A = \begin{bmatrix} k & 3 & 3 & 3 \\ 3 & k & 3 & 3 \\ 3 & 3 & k & 3 \\ 3 & 3 & 3 & k \end{bmatrix}$, $r(A^*)=1$, 则 $k =$ _____

二 (1) 求过点 $P_0(1, 1, 0)$ 且平行于向量 $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ 和 $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}$ 的平面方程

(2) 将直线 L 的一般式方程 $\begin{cases} x+y-z=0 \\ -x+y-2z=2 \end{cases}$ 化为对称式方程

三 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

四 已知向量组 $\mathbf{a}_1=[1, -2, 0, 1]^T$, $\mathbf{a}_2=[-1, 3, 2, -2]^T$, $\mathbf{a}_3=[2, -3, 2, 1]^T$, $\mathbf{a}_4=[0, 1, 3, 1]^T$, $\mathbf{a}_5=[3, -8, -5, k]^T$ 的秩为3, 求 k 及列向量组的一个极大无关组并将其他向量用该极大无关组线性表示。

五 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $X = A^{-1}X + E$, 求 X

六 当 a, b 满足什么条件时, 方程组
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 & = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 & = b \\ -2x_1 + 3x_2 + ax_3 & = 1 \end{cases}$$
 (1) 有唯一解 (2) 无解 (3) 无穷多解? 并在有无穷多解时, 求该方程组通解

七 设 $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & a & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ 与 $B = \begin{bmatrix} -2 & & \\ & -2 & \\ & & b \end{bmatrix}$ 相似

(1) 求 a 和 b

(2) 求正交矩阵 Q , 使 $Q^{-1}AQ = B$

(3) 设 $\mathbf{u} = [x, y, z]^T$, 试问方程 $\mathbf{u}^T A \mathbf{u} = 1$ 表示什么曲面

八 设 A 为三阶方阵, α_1, α_2 分别为 A 的特征值 1 和 -1 对应的特征向量。 $A\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$, 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关

九 设 A 为三阶方阵, A 的每个元素都与其对应的代数余子式相等, $|A| \neq 0$.
证明: A 为正交矩阵.