

选择题

1. 以下关于联合熵的命题 C 恒为真
 - A. $H(X_1, \dots, X_n) = H(X_1) + \dots + H(X_n)$
 - B. $H(X_1, \dots, X_n) \leq H(X_1) + \dots + H(X_n)$
 - C. $H(X_1, \dots, X_n) \geq H(X_1) + \dots + H(X_n)$
 - D. $H(X_1, \dots, X_n) \neq H(X_1) + \dots + H(X_n)$
2. F 是一个多对一的函数, 则以下为真的是 C
 - A. $H(F(X)) = H(X)$
 - B. $H(F(X)) > H(X)$
 - C. $H(F(X)) < H(X)$
 - D. 都有可能
3. X 和 Y 同分布且概率独立, 则以下命题 B 恒为真
 - A. $H(X, Y, Z) - H(X, Y) = H(X, Z) - H(X)$
 - B. $H(X, Y, Z) - H(X, Y) \leq H(X, Z) - H(X)$
 - C. $H(X, Y, Z) - H(X, Y) \geq H(X, Z) - H(X)$
 - D. $H(X, Y, Z) - H(X, Y) \neq H(X, Z) - H(X)$
4. 对不同的 i , (X_i, Y_i) 之间是概率独立的离散型联合随机变量, 概率分布为 $P(X, Y)$, $P(X)$ 和 $P(Y)$ 分别为各个 X_i 和 Y_i 的概率分布, $i = 1, 2, \dots, n$. 根据大数定律, 当 n 趋于无穷大时, 随机变量 $\frac{1}{n} \log \frac{P(X_1, \dots, X_n)P(Y_1, \dots, Y_n)}{P(X_1, Y_1, \dots, X_n, Y_n)}$ 的极限是 C
 - A. $H(X|Y) - H(Y|X)$
 - B. $H(X|Y) + H(Y|X)$
 - C. $I(X; Y)$
 - D. $-I(X; Y)$
5. 一个二元对称无记忆离散信道的容量为0.8比特, 信道编码采用二进制形式, 可以表达为16种序列, 要使译码的差错概率能够任意地接近于0, 信道码字的长度最短不能低于 B
 - A. 4位
 - B. 5位
 - C. 6位
 - D. 7位

证明题

以下出现的随机变量 X 、 Y 和 Z 都是离散随机变量

1. 请证明关于离散随机变量 X 的信息熵 $H(X)$ 是凹函数

解:

$$H(X) = - \sum_x p_x \log(p_x)$$

对于任意一个 x ，一阶导数:

$$\frac{\partial H}{\partial p_x} = -\log(p_x) - 1$$

二阶导数:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_x \partial p_{x'}} = \begin{cases} -\frac{1}{p_x} & x = x' \\ 0 & x \neq x' \end{cases}$$

$H(X)$ 的Hessian矩阵 $\left[\frac{\partial^2 H}{\partial p_x \partial p_{x'}} \right]$ 可以写作:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{p_{x_1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{p_{x_2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{p_{x_n}} \end{bmatrix}$$

是主对角线元素全为负数的对角矩阵，显然是一个负定矩阵，所以 $H(X)$ 是关于 p 的凹函数。

2. 陈述信息处理不等式

解:

有Markov链:

$$X \rightarrow Y \rightarrow Z$$

则存在不等式关系:

$$I(X; Y) \geq I(X; Z)$$

3. 证明上述的信息处理不等式

解:

Markov链 $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ 的联合概率分布为:

$$p(x, y, z) = p(x)p(y|x)p(z|y)$$

也就是在给定给定 Y 时， X 和 Z 是条件独立的，即 $I(X; Z|Y) = 0$ ，因为:

$$p(x, z|y) = p(x, y, z)/p(y) = p(x|y)p(z|y)$$

根据链式法则展开互信息量:

$$\begin{aligned} I(X; Y, Z) &= I(X; Z) + I(X; Y|Z) \\ &= I(X; Y) + I(X; Z|Y) \\ &= I(X; Y) \end{aligned}$$

由于互信息量始终非负 $I(X; Y|Z) \geq 0$

$$I(X; Y) = I(X; Z) + I(X; Y|Z) \geq I(X; Z)$$

4. 规定条件互信息量为 $I(X; Y|Z)$: $I(X; Y|Z) = H(X|Z) - H(X|Y, Z)$, 请证明 $I(X; Y|Z)$ 对于 X 和 Y 满足对称性, 即 $I(X; Y|Z) = I(Y; X|Z)$

解:

$$\begin{aligned} I(X; Y|Z) &= H(X|Z) - H(X|Y, Z) \\ &= - \sum_{x,z} p(x, z) \log \frac{p(x, z)}{p(z)} + \sum_{x,y,z} p(x, y, z) \log \frac{p(x, y, z)}{p(y, z)} \\ &= - \sum_{x,y,z} p(x, y, z) \log \frac{p(x, z)p(y, z)}{p(z)p(x, y, z)} \\ &= - \sum_{x,y,z} p(x, y, z) \log \frac{p(y|z)}{p(y|x, z)} \\ &= - \sum_{y,z} p(y, z) \log p(y|z) + \sum_{x,y,z} p(x, y, z) \log p(y|x, z) \\ &= H(Y|Z) - H(Y|X, Z) \\ &= I(Y; X|Z) \end{aligned}$$

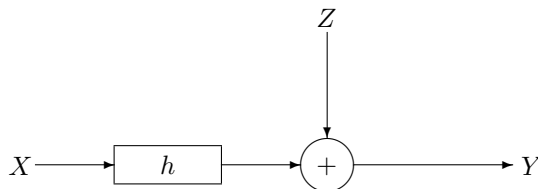
5. 以上符号含义不变请证明 $I(X; Z|Y) - I(Y; Z|X) = I(X; Z) - I(Y; Z)$

解:

$$\begin{aligned} I(X; Z|Y) - I(Y; Z|X) &= H(Z|Y) - H(Z|X, Y) - (H(Z|X) - H(Z|X, Y)) \\ &= H(Z|Y) - H(Z|X) \\ &= -(H(Z) - H(Z|Y)) + (H(Z) - H(Z|X)) \\ &= I(X; Z) - I(Y; Z) \end{aligned}$$

计算题

1. 推导高斯信道 $Y = hX + Z$ 的信道容量表达式. h 是已知的信号放大系数（信号增益）， X 是功率为 P 的输入信号， Z 信号独立的为均值为零方差为 a^2 的高斯噪声.



解: 对于连续随机变量 $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, 即概率密度为表达为 $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, 微分熵为

$$\begin{aligned}
 h(x) &= - \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \ln p(x) \\
 &= - \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \left(-\frac{x^2}{2\sigma^2} - \ln \sqrt{2\pi}\sigma \right) \\
 &= \frac{EX^2}{2\sigma^2} + \frac{1}{2} \ln 2\pi\sigma^2 \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 2\pi\sigma^2 \\
 &= \frac{1}{2} \ln 2\pi e\sigma^2 \quad \text{改变对数底数, 写作} \frac{1}{2} \log 2\pi e\sigma^2
 \end{aligned}$$

将 $I(X; Y)$ 展开, 其中 X 和 Z 互相独立:

$$\begin{aligned}
 I(X; Y) &= h(Y) - h(Y|X) \\
 &= h(Y) - h(hX + Z|X) \\
 &= h(Y) - h(Z|X) \\
 &= h(Y) - h(Z)
 \end{aligned}$$

此时, $h(Z) = \frac{1}{2} \log 2\pi e a^2$, X 与 Z 互相独立, 且 $E(Z) = 0$, 所以:

$$EY^2 = E(hX + Z)^2 = h^2 EX^2 + 2hEXZ + EZ^2 = h^2 P + a^2$$

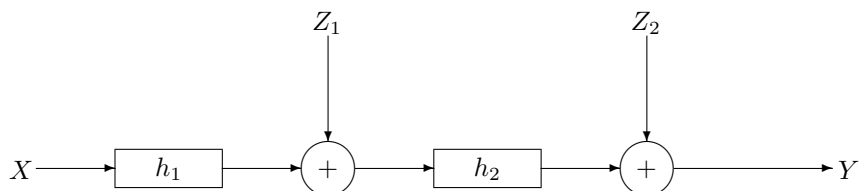
在给定方差时, 正态分布使熵达到最大, Y 的上界为 $\frac{1}{2} \log 2\pi e(h^2 P + a^2)$, 那么互信息量:

$$\begin{aligned}
 I(X; Y) &= h(Y) - h(Z) \leq \frac{1}{2} \log 2\pi e(h^2 P + a^2) - \frac{1}{2} \log 2\pi e a^2 \\
 &= \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{h^2 P}{a^2} \right)
 \end{aligned}$$

因此, 高斯信道的容量为:

$$C = \max_{p(x): EX^2 \leq P} I(X; Y) = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{h^2 P}{a^2} \right)$$

2. 将两个高斯信道如图串联，第一级增益为 h_1 ，第二级增益为 h_2 ，两个信道的噪声 Z_1 和 Z_2 的方差分别为 a^2 和 b^2 ，输入信号 X 的功率仍然是 P ，求信道容量



解：这个串联信道可以等效为

$$Y = h_2(h_1X + Z_1) + Z_2 = h_1h_2X + (h_2Z_1 + Z_2)$$

等效噪声 $Z = h_2Z_1 + Z_2$ 满足 $Z \sim \mathcal{N}(0, h_1^2a^2 + b^2)$ ，等效增益 $h = h_1h_2$ ，所以信道容量

$$C = \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{h^2P}{N}\right) = \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{h_1^2h_2^2P}{h_1^2a^2 + b^2}\right)$$

3. 分别考虑两种情况下上题信道容量 C 的极限

- (1) h_2 固定， h_1 趋于无穷大
- (2) h_1 固定， h_2 趋于无穷大

解：

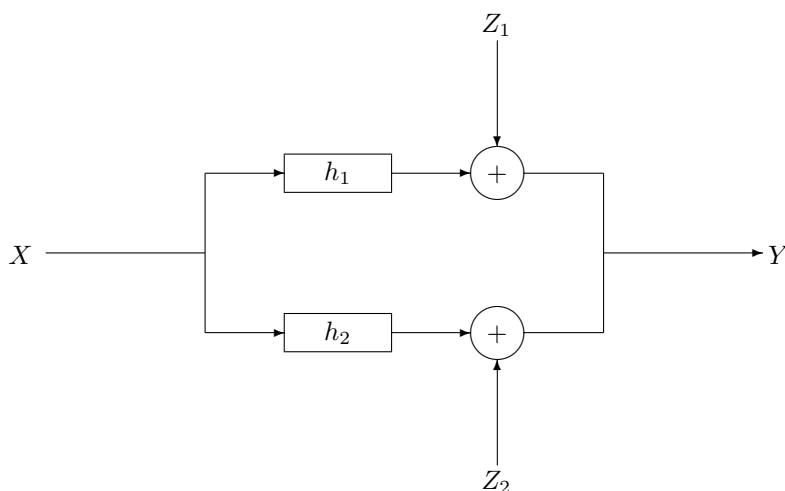
(1)

$$\lim_{h_1 \rightarrow +\infty} C = \lim_{h_1 \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{h_1^2h_2^2P}{h_1^2a^2 + b^2}\right) = \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{h_2^2P}{a^2}\right)$$

(2)

$$\lim_{h_2 \rightarrow +\infty} C = \lim_{h_2 \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{h_1^2h_2^2P}{h_1^2a^2 + b^2}\right) = \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{h_1^2P \lim_{h_2 \rightarrow +\infty} h_2^2}{h_1^2a^2 + b^2}\right) = +\infty$$

4. 以上符号含义不变，求如图并联的高斯信道的信道容量



解：该并联信道可以等价高斯信道

$$Y = h_1 X + Z_1 + h_2 X + Z_2 = (h_1 + h_2)X + (Z_1 + Z_2) = h'X + Z'$$

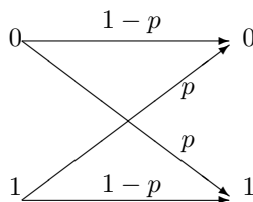
等效增益 $h' = h_1 + h_2$, 等效噪声 $Z' = Z_1 + Z_2$, $Z' \sim \mathcal{N}(0, a^2 + b^2)$

$$C = \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{h'^2 P}{N'}\right) = \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{(h_1 + h_2)^2 P}{a^2 + b^2}\right)$$

计算题

1. 设二元对称离散无记忆信息的传输差错概率为 p , 记为 $BSC(p)$, 请计算其容量 C

解:



$$\begin{aligned}
 I(X; Y) &= H(Y) - H(Y|X) \\
 &= H(Y) - \sum p(x) H(Y|X = x) \\
 &= H(Y) - \sum p(x) H(p) \\
 &\leq 1 - H(p) \quad \text{当且仅当输入分布是均匀分布时取等号}
 \end{aligned}$$

这里的 $H(p) = -p \log p - (1-p) \log(1-p)$.

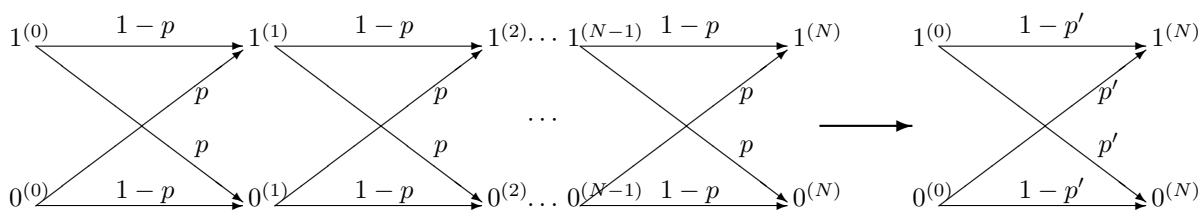
$$C = \max_{p(x)} I(X; Y) = 1 - H(p)$$

2. 将 N 个 $BSC(p)$ 信道串联, 结果得到一个等效的BSC信道. 计算其信道容量 C (用 N 和 p 表示)

解:

$$X_0 \rightarrow \boxed{\text{BSC}} \rightarrow X_1 \rightarrow \dots \rightarrow X_{N-1} \rightarrow \boxed{\text{BSC}} \rightarrow X_N$$

每个信道的原始差错概率为 p , 那么整个串联信道的差错概率 p' 即:



当 $x = p, y = 1 - p$ 时, $(x + y)^N$ 的二项展开的奇次项之和:

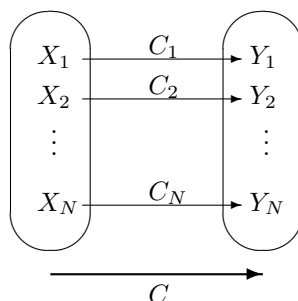
$$p' = \frac{1}{2}(x + y)^N - \frac{1}{2}(y - x)^N = \frac{1}{2}(1 - (1 - 2p)^N)$$

该串联信道可等效为差错概率为 p' 的 $BSC(p')$ 信道:

$$C = 1 - H(p') = 1 - H\left(\frac{1}{2}(1 - (1 - 2p)^N)\right)$$

3. 将 N 个 $BSC(p)$ 信道串联且这 N 个信道相互独立（无串扰），结果得到一个输入和输出为 N 维的二进制向量的矢量信道，并请计算其容量 C （用 N 和 p 表示）

解：



信道间相互概率独立

$$p(y_1, \dots, y_N | x_1, \dots, x_N) = \prod_{i=1}^N p(y_i | x_1, \dots, x_N)$$

$$p(y_i | x_1, \dots, x_N) = \frac{p(x_1, \dots, x_N, y_i)}{p(x_1, \dots, x_N)} = \frac{p(x_i, y_i) p_{n \neq i}(x_1, \dots, x_n, \dots, x_N)}{p(x_i) p_{n \neq i}(x_1, \dots, x_n, \dots, x_N)} = p(y_i | x_i)$$

联合条件熵满足

$$\begin{aligned} H(Y_1, \dots, Y_N | X_1, \dots, X_N) &= - \sum_{x, y} p(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N) \log p(y_1, \dots, y_N | x_1, \dots, x_N) \\ &= - \sum_{i=1}^N \sum_{x, y} p(x_i, y_i) \log p(y_i | x_i) \\ &= \sum_{i=1}^N H(Y_i | X_i) \end{aligned}$$

整个信道的互信息量

$$\begin{aligned} I(X_1, \dots, X_N; Y_1, \dots, Y_N) &= H(Y_1, \dots, Y_N) - H(Y_1, \dots, Y_N | X_1, \dots, X_N) \\ &= H(Y_1, \dots, Y_N) - \sum_{i=1}^N H(Y_i | X_1, \dots, X_N) \\ &\leq \sum_{i=1}^N H(Y_i) - \sum_{i=1}^N H(Y_i | X_i) \quad \text{当且仅当所有的Y概率独立时取等号} \\ &= \sum_{i=1}^N (H(Y_i) - H(Y_i | X_i)) \\ &= \sum_{i=1}^N I(X_i, Y_i) \end{aligned}$$

信道容量

$$\begin{aligned} C &= \max_{p(x_1, \dots, x_N)} I(X_1, \dots, X_N; Y_1, \dots, Y_N) \\ &\leq \max_{p(x_1, \dots, x_N)} \sum_{i=1}^N I(X_i; Y_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^N \max_{p(x_1, \dots, x_N)} I(X_i; Y_i) \\ &= \sum_{i=1}^N C_i \\ &= N(1 - H(p)) \end{aligned}$$