数学分析

Mathematical Analysis

作者：Peknt

组织：清疏大学

时间：April 27, 2024

版本：1.1

作者联系方式：QQ2499032096

或许是不知梦的缘故，流离之人追逐幻影

前言

参考书

教材

- 数学分析，梅加强
- 数学分析，徐森林　薛春华
- 数学分析教程, 常庚哲　史济怀
- 数学分析，楼红卫
- 数学分析中的问题和反例，汪林
- 基本分析讲义: 第一卷 (单变量理论), 李逸

习题集

- 数学分析习题演练，周民强
- 数学分析中的典型问题与方法，裴礼文
- 数学分析习题课讲义，谢惠民

参考资料

- 第十一届清疏大学生数学竞赛班讲义
- 第十届清疏大学生数学竞赛班讲义
- 第九届清疏大学生数学竞赛班讲义
- 南开大学凯淼淼 notes

目录

第一章 实数理论

1.1 实数理论

第二章 数列极限

2.1 数列极限

2.1.1 数列极限的定义

定义 2.1 (数列)

定义在正整数集 $\mathbb{N}$ 上的函数称为数列。设 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ 为数列，记 $a_n=f(n)$，数列 f 常表示为

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$$

简记为 a_n，a_n 称为该数列的第 n 项，有时也称为一般项或通项。

注 因为可数集可以与 $\mathbb{N}$ 建立一一对应，定义在可数集上的函数也可以称为数列。比如定义在非负整数集上的函数也是数列，这种数列可以用 $a_0,a_1,\cdots$ 表示。

定义 2.2 (数列极限)

设 $\{a_n\}$ 是已知实数列，$a\in\mathbb{R}$

1. 称 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 如果对任何 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$，使得
$$|a_n-a|\le\varepsilon,\forall n\ge N$$
2. 称 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$，如果对任何 $M>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$，使得
$$|a_n|\ge M,\forall n\ge N$$
3. 称 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$，如果对任何 $M>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$，使得
$$a_n\ge M,\forall n\ge N$$
4. 称 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$，如果对任何 $M>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$，使得
$$a_n\le -M,\forall n\ge N$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\in\mathbb{R}$，则称 $\{a_n\}$ 收敛，否则称 $\{a_n\}$ 发散。

数列可视为实数轴上的一列点。从直观上看，当 n 越来越大时，若 a_n 越来越靠近（无限靠近）某个点，这个点代表的数就是极限。为了用准确的数学语言来刻画“越来越靠近”和“当 n 越来越大”，我们要用到上述定义中的 ε和N，这里的 N 一般是依赖于给定的 ε 的。这种定义极限的方法也称为 $\varepsilon-N$ 语言法。

按照定义，我们也可以这样来描述极限：$\lim\limits_{x\to\infty}a_n=\alpha$ 当且仅当任给 $\varepsilon>0$，数列 a_n 最多只有有限项位于区间 $(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)$ 之外。因此，如果存在 $\varepsilon_0>0$，使得 a_n 中的无限项位于 $(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)$ 之外，则数列 a_n 不以 α 为极限（这时该数列的极限可能不存在，如果存在则极限也不等于 α）。

也可以用 $\varepsilon-N$ 语言给出数列 a_n 不以 α 为极限的定义：如果存在 $\varepsilon_0>0$，使得任给正数 N，均存在 $n_0>N$，使得 $|a_{n0}-\alpha|\ge\varepsilon_0$，则 a_n 不以 α 为极限。

显然，改变数列 $\{a_n\}$ 的有限多项，或去掉有限多项，或添加有限多项，不会改变数列 $\{a_n\}$ 的收敛和发散性。

命题 2.1

如果数列 a_n 收敛，则其极限是唯一的。

证明 设数列 a_n 既收敛于 α，又收敛于 α'。按照定义，任给 $\varepsilon>0$，存在 N_1,N_2，使得当 $n>N_1$ 时 $|a_n-\alpha|<\varepsilon$；当 $n>N_2$ 时 $|a_n-\alpha'|<\varepsilon$。因此，当 $n>max\{N_1,N_2\}$ 时，有

$$|\alpha-\alpha'|\le|a_n-\alpha|+|a_n-\alpha'|<2\varepsilon$$

由 ε 的任意性可知 $\alpha = \alpha'$。

注 $\alpha \neq \alpha'$ 时，代入 $\varepsilon = |\alpha - \alpha'|/2$ 即可导出矛盾。

定理 2.1 (夹逼定理)

设 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 均为数列，且

$$a_n \leq b_n \leq c_n, \forall n \geq N_0$$

其中 N_0 为正整数。如果

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha(\alpha\text{为实数或}, +\infty, -\infty)$$

则

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$$

♡

证明

任给 $\varepsilon > 0$，存在 N_1, N_2，当 $n > N_1$ 时

$$\alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon$$

当 $n > N_2$ 时

$$\alpha - \varepsilon < c_n < \alpha + \varepsilon$$

取 $N = max\{N_0, N_1, N_2\}$，则当 $n > N$ 时，由 $a_n \leq b_n \leq c_n$ 可得

$$\alpha - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < \alpha + \varepsilon$$

这说明 $\{b_n\}$ 收敛到 α。

注 在应用夹逼原理时，常常用到的事实有：

1. a_n 收敛于 0 当且仅当 $\{|a_n|\}$ 收敛于 0；如果 $\{a_n\}$，C 为常数，则 $\{Ca_n\}$ 也收敛于 0.
2. 如果 $|a_n| \leq b_n$，则 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ 时 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$。这可由定义或 $-b_n \leq a_n \leq b_n$ 推出。
3. 如果条件改为 $\lim_{n\to\infty}(c_n - a_n) = 0$，不能推出，结论不对，收敛性也不确定。

定理 2.2

1. 设 $a_n \geq b_n (n \geq N_0)$, $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$，则 $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$
2. 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$，则 $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$
3. $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$，则 $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \pm\infty$
4. $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$，则 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \pm\infty$
5. $\lim_{n\to\infty} a_n = a < 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$，则 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \mp\infty$
6. $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}(-a_n) = -\infty$
7. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$

♡

例题 2.1 证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$$

证明 注意到当 $1 \leq k \leq n$ 时 $(k-1)(n-k) \geq 0$，从而 $k(n-k+1) \geq n$。我们就有

$$(n!)^2 = (1 \cdot n)(2 \cdot (n-1)) \cdots (k(n-k+1)) \cdots (n \cdot 1) \geq n^n, \forall n \geq 1$$

因此

$$0 < \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}, \forall n \geq 1$$

由夹逼定理知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$$

例题 2.2 设 $a>0$，证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$$

证明 当 $a\geq 1$ 时，记 $a_n=\sqrt[n]{a}-1$，则 $a_n\geq 0$，利用二项式展开得

$$a=(1+a_n)^n=1+na_n+\cdots+a_n^n>na_n$$

这说明

$$1\leq\sqrt[n]{a}=1+a_n<1+\frac{a}{n}$$

由夹逼原理知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$$

当 $0<a<1$ 时，根据刚才的估计有，

$$1<\sqrt[n]{\frac{1}{a}}<1+\frac{1}{na}$$

即

$$1-\frac{1}{1+na}<\sqrt[n]{a}<1$$

由夹逼原理知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$$

例题 2.3 证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

证明

证法 1

记 $a_n=\sqrt[n]{n}-1$，当 $n>1$ 时，

$$n=(1+a_n)^n=1+na_n+\frac{1}{2}n(n-1)a_n^2+\cdots+a_n^n>\frac{1}{2}n(n-1)a_n^2$$

这说明

$$0<a_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

即

$$1<\sqrt[n]{n}=1+a_n<1+\sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

由夹逼原理知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

证法 2

应用几何-算术平均不等式得到

$$\begin{aligned}1\leq\sqrt[n]{n}=n^{\frac{1}{n}}&=(1\cdots 1\sqrt{n}\sqrt{n})^{\frac{1}{n}}\leq\frac{(n-2)+2\sqrt{n}}{n}\\&=1+\frac{2(\sqrt{n}-1)}{n}<1+\frac{2}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$

于是，$\forall\varepsilon>0$，取 $N\in\mathbb{N}$，使得 $N>\frac{4}{\varepsilon^2}$，当 $n>N$ 时，有

$$\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\frac{2}{\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{N}}<\varepsilon$$

所以，$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$。

例题 2.4 设 $a,b>0$，证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=max\{a,b\}$$

证明 不妨设 $a\geq b$，则

$$a=\sqrt[n]{a^n}\leq\sqrt[n]{a^n+b^n}\leq\sqrt[n]{2a^n}=\sqrt[n]{2}a$$

由 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$ 及夹逼原理知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=a$$

例题 2.5 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$，证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\alpha$$

证明 先设 $\alpha=0$，对任意 $\varepsilon>0$，存在 N_0，使得当 $n>N_0$ 时，$|a_n|<\frac{\varepsilon}{2}$。令

$$N>max\{N_0,2\varepsilon^{-1}|a_1+a_2+\cdots+a_N|\}$$

当 $n>N$ 时，有

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right|&\leq\frac{\left|a_1+a_2+\cdots+a_{N_0}\right|}{n}+\frac{1}{n}\sum_{k=N_0+1}^{n}|a_k|\\&<\frac{\left|a_1+a_2+\cdots+a_{N_0}\right|}{N}+\frac{1}{n}(n-N_0)\frac{\varepsilon}{2}\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

这说明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=0$$

一般地，如果有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-\alpha)=0$
则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k-\alpha)=0$$

又有

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k-\alpha)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k-\alpha$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\alpha$$

例题 2.6 任何实数都是某个有理数列的极限。

证明 设 α 为实数。当 α 为有理数时，令 $a_n=\alpha(n\geq1)$ 即可。当 α 为无理数时，令 $a_n=[n\alpha]/n$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数。此时 a_n 是有理数。由 α 为无理数可知

$$n\alpha-1<[n\alpha]<n\alpha,\forall n\geq1$$

这说明

$$\alpha-\frac{1}{n}<a_n=\frac{[n\alpha]}{n}<\alpha,\forall n\geq1$$

由夹逼原理知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$

例题 2.7

1. 设 $a_n\geq0(n\in\mathbb{N})$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=0$
2. 设 $a_n>0(n\in\mathbb{N})$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$

证明

1. 由 $0\leq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\to0(n\to\infty)$，及夹逼定理，立即可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=0$

2. 当 $a>0, a_n>0(n\in\mathbb{N})$ 时，有

$$\frac{1}{(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n})/n}=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\le\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

再由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n})/n}=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}=\frac{1}{\frac{1}{a}}=a=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ 和夹逼定理，可得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$$

2.1.2 数列极限的基本性质

设数列 a_n 为数列。如果 $\{a_n\mid n=1,2,\cdots\}$ 为有界集合，则称 a_n 是有界数列，此时存在 M，使得 $|a_n|\le M$ 对每一个正整数 n 均成立。

命题 2.2 (有界性)

设数列 $\{a_n\}$ 收敛，则 $\{a_n\}$ 是有界数列。

证明 设 $\{a_n\}$ 收敛到 α。取 $\varepsilon=1$，由数列极限定义，存在 N，当 $n>N$ 时 $|a_n-\alpha|\le 1$。因此

$$|a_n|\le|\alpha|+1,\forall n>N$$

令

$$M=max\{|\alpha|+1,|a_1|,\cdots,|a_N|\}$$

则 $|a_n|\le M$ 总成立。

两个发散到无穷的数列有时可以相互比较。

例题 2.8 设 $a>0,b>1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^a}{b^n}=0$

证明 记 $\beta=b^{\frac{1}{a}}-1>0$，当 $n>1$ 时

$$(1+\beta)^n=1+n\beta+\frac{1}{2}n(n-1)\beta^2+\cdots+\beta^n>\frac{1}{2}n(n-1)\beta^2$$

因此

$$0<\frac{n^a}{b^n}=\left[\frac{n}{(1+\beta)^n}\right]^a<\left[\frac{2}{(n-1)\beta^2}\right]^a$$

由夹逼原理知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^a}{b^n}=0$

例题 2.9 设 $a>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$

证明 取正整数 $N_0>|a|$，则当 $n>N_0$ 时，有

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right|=\frac{|a|^{N_0}}{N_0!}\frac{|a|}{N_0+1}\cdots\frac{|a|}{n-1}\frac{|a|}{n}\le\frac{|a|^{N_0}}{N_0!}\frac{|a|}{n}$$

由夹逼原理知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$

命题 2.3 (绝对值性质)

设数列 $\{a_n\}$ 收敛到 α，则 $\{|a_n|\}$ 收敛到 $|\alpha|$

证明 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$，则任给 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n>N$ 时 $|a_n-\alpha|<\varepsilon$，此时

$$||a_n|-|\alpha||\le|a_n-\alpha|<\varepsilon,\forall n>N$$

这说明 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|\alpha|$

命题 2.4 (保序性质)

设数列 $\{a_n\}$ 收敛到 α，$\{b_n\}$ 收敛到 β，则有

1. 如果存在 N_0，当 $n > N_0$ 时 $a_n \geq b_n$，则 $\alpha \geq \beta$
2. 反之，如果 $\alpha > \beta$，则存在 N，使得当 $n > N$ 时 $a_n > b_n$

证明 (1) 任给 $\varepsilon > 0$，存在 N_1, N_2，使得

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon, \forall n > N_1; |b_n - \beta| < \varepsilon, \forall n > N_2$$

令 $N = max\{N_0, N_1, N_2\}$，则 $n > N$ 时，有

$$\alpha - \beta = (\alpha - a_n) + (a_n - b_n) + (b_n - \beta) \geq (\alpha - a_n) + (b_n - \beta) \geq -2\varepsilon$$

由 ε 的任意性可知 $\alpha - \beta \geq 0$，即 $\alpha \geq \beta$

(2) 设 $\alpha > \beta$，取 $\varepsilon = (\alpha - \beta)/2$，则存在 N_1, N_2，使得 $|a_n - \alpha| < \varepsilon, \forall n > N_1; |b_n - \beta| < \varepsilon, \forall n > N_2$ 成立。令 $N = max\{N_1, N_2\}$，则 $n > N$ 时，有

$$a_n - b_n = (a_n - \alpha) + (\alpha - \beta) + (\beta - b_n) > -\varepsilon + (\alpha - \beta) - \varepsilon = 0$$

推论 2.1

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$，如果 $\alpha \neq 0$，则存在 N，使得当 $n > N$ 时，有

$$\frac{1}{2}|\alpha| < |a_n| < \frac{3}{2}|\alpha|$$

证明 由极限的绝对值性质，有

$$\frac{1}{2}|\alpha| < \lim_{n\to\infty} |a_n| = |\alpha| < \frac{3}{2}|\alpha|$$

再由极限的保序性质即得欲证结论。

例题 2.10 设 $q > 1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_q n}{n} = 0$

证明 任给 $\varepsilon > 0$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 < q^{\varepsilon}$。由极限的保序性质，存在 N，当 $n > N$ 时，$\sqrt[n]{n} < q^{\varepsilon}$。这说明

$$0 < \frac{\log_q n}{n} < \varepsilon, \forall n > N$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_q n}{n} = 0$

命题 2.5 (极限的四则运算)

设数列 $\{a_n\}$ 收敛到 α，$\{b_n\}$ 收敛到 β，则有

1. $\{\lambda a_n + \mu b_n\}$ 收敛到 $\lambda\alpha + \mu\beta$，其中 λ, μ 为常数；
2. $\{a_n b_n\}$ 收敛到 $\alpha\beta$；
3. 当 $\beta \neq 0$ 时，$\{a_n/b_n\}$ 收敛到 α/β

证明 (1) 任给 $\varepsilon > 0$，存在 N_1, N_2，使得

$$|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2|\lambda| + 1}, \forall n > N_1; |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2|\mu| + 1}, \forall n > N_2$$

令 $N = max\{N_1, N_2\}$，则 $n > N$ 时，有

$$\begin{aligned}
(\lambda a_n + \mu b_n) - (\lambda\alpha + \mu\beta)| &\leq |\lambda|\,|a_n - \alpha| + |\mu|\,|b_n - \beta| \\
&\leq |\lambda| \frac{\varepsilon}{2|\lambda| + 1} + |\mu| \frac{\varepsilon}{2|\mu| + 1} \\
&< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon
\end{aligned}$$

这说明 $\lim\limits_{n\to\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda\alpha + \mu\beta$

(2) 由有界性可知，存在 M，使得 $|b_n| \le M$ 总成立。因此

$$0 \le |a_n b_n - \alpha\beta| = |(a_n - \alpha)b_n + \alpha(b_n - \beta)| \le M\,|a_n - \alpha| + |\alpha|\,|b_n - \beta|$$

利用 (1) 和夹逼原理知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$

(3) 根据 (2)，我们只须证明 $\lim\limits_{n\to\infty} 1/b_n = 1/\beta$。由保序性质的推论，存在 N，当 $n > N$ 时，$|b_n| > |\beta|/2$。此时

$$0 \le \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{\beta}\right| = \frac{|b_n - \beta|}{|b_n|\,|\beta|} \le \frac{2}{|\beta|^2}\,|b_n - \beta|$$

由夹逼原理知 $\lim\limits_{n\to\infty} 1/b_n = 1/\beta$

例题 2.11 求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{4n^2-3n+1}$

解

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - n}{4n^2 - 3n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{4 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1 - 0}{4 - 0 - 0} = \frac{1}{4}$$

命题 2.6

1. 设 $\{a_n\}$ 收敛到 α，则它的任何子列 $\{a_{nk}\}$ 也收敛到 α
2. 如果 $\{a_n\}$ 的偶子列与奇子列均收敛到 α，则 $\{a_n\}$ 也收敛到 α

证明

1. 必要性：

   对 a 的任何开邻域 U，因 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$，故 $\exists N \in \mathbb{N}$，当 $n > N$ 时，$a_n \in U$。当 $a_{nk} \ge k > K = N$ 时，有 $a_{nk} \in U$，所以 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{nk} = \alpha$。

   充分性：

   令 $n_k = k$，则 $\{a_n\} = \{a_k\} = \{a_{nk}\}$ 为 $\{a_n\}$ 的一个子列，所以

   $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} a_{nk} = \alpha$$

2. 必要性：

   对 a 的任何开邻域 U，因 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$，故 $\exists N \in \mathbb{N}$，当 $n > N$ 时，有 $a_n \in U$。取 $K = N$，当 $k > K$ 时，有 $2k > 2K = 2N > N$，$2k - 1 > 2K - 1 = 2N - 1 \ge N$，故

   $$a_{2k} \in U, a_{2k-1} \in U$$

   从而 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = \alpha, \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1} = \alpha$。

   充分性：

   对 a 的任何开邻域 U，因 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = \alpha$，故 $\exists K_1 \in \mathbb{N}$，当 $k > K_1$ 时，有 $a_{2k} \in U$。又因为 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1} = \alpha$，故 $\exists K2 \in \mathbb{N}$，当 $k > K_2$ 时，有 $a_{2k-1} \in U$。于是，当 $n > N = \max\{2K_1, 2K_2 - 1\}$ 时，必有

   $$a_n \in U$$

   所以

   $$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

例题 2.12 研究数列 $\{a_n = \frac{1}{2}[1 + (-1)^n]\}$ 的敛散性

解 因为 $a_{2k} = 1, a_{2k-1} = 0$，故 $\{a_n\}$ 的偶子列和奇子列均收敛但极限不同，这说明 $\{a_n\}$ 发散。

例题 2.13 研究数列 $\{\sin n\}$ 的敛散性

解 这个数列是发散的（反证法）设 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n = \alpha$，则

$$2\sin 1 \cos n = \sin(n + 1) - \sin(n - 1) \to \alpha - \alpha = 0 (n \to \infty)$$

因为 $\sin 1 \ne 0$，上式表明 $\cos n \to 0 (n \to \infty)$，从而

$$\sin 2n = 2\sin n \cos n \to 2\alpha \cdot 0 = 0 (n \to \infty)$$

这说明 $\alpha=0$，此时

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\to 0+0=0(n\to\infty)$$

这和恒等式 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ 相矛盾。

例题 2.14 数列 $\{a_n\}$ 无上界 $\Longleftrightarrow \{a_n\}$ 必有子列 $\{a_{n_k}\}\to+\infty(k\to\infty)$

证明 必要性:

设 $\{a_n\}$ 无上界，则 1 不是数列 $\{a_n\}$ 的上界，故 $\exists a_{n_1}>1$。又因 $\max\{2,a_1,\cdots,a_{n_1}\}$ 不是数列 $\{a_n\}$ 的上界，故 $\exists a_{n_2}>\max\{2,a_1,\cdots,a_{n_1}\}$，显然，$n_1<n_2$。以此类推就得到 $a_{n_k}>\max\{k,a_1,\cdots,a_{n_{k-1}}\}$，显然，$n_{k-1}<n_k$。所以 $\{a_{n_k}$ 为 $\{a_n\}$ 的一个子列，且 $a_{n_k}>k$。由极限定义知，$\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=+\infty$。

充分性:

设 $\{a_n\}$ 有子列 $\{a_{nk}\to+\infty(k\to\infty)$，则 $\forall A>0$，$\exists K=K(A)\in\mathbb{N}$，使得，当 $k>K$ 时，$a_{n_k}>A$，所以 A 不为数列 $\{a_n\}$ 的上界。从 A 任取知，数列 $\{a_n\}$ 无上界。

例题 2.15 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=r>1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$

证明

证法 1

取 $\varepsilon_0>0$，使得 $r-\varepsilon_0=1+\alpha>1$。因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=r>1$，故 $\exists N_1\in\mathbb{N}$，当 $n>N_1$ 时，有

$$1+\alpha=r-\varepsilon_0<\sqrt[n]{|a_n|},|a_n|>(1+\alpha)^n>n\alpha$$

$\forall A>0$，取 $N\in\mathbb{N}$，使得 $N>\max\{N_1,\frac{A}{\alpha}\}$，当 $n>N$ 时，有

$$|a_n|>n\alpha>N\alpha\geq A$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$

证法 2

由上述，当 $n>N_1$ 时，有

$$\begin{aligned}1+\alpha=r-\varepsilon_0&<\sqrt[n]{|a_n|}<r+\varepsilon_0\\&=(r-\varepsilon_0)+2\varepsilon_0=1+\alpha+2\varepsilon_0,(1+\alpha)^n<|a_n|<(1+\alpha+2\varepsilon_0)^n\end{aligned}$$

从 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\alpha)^n=+\infty=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\alpha+2\varepsilon_0)^n$ 与夹逼定理可知，

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|=+\infty\Longleftrightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$$

例题 2.16 设 $a_n\geq 0(n\in\mathbb{N})$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{\sqrt{n}}=a$，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=0$$

证明

证法 1

因为

$$\begin{aligned}0\leq\sqrt{n}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}&=\sqrt{n}\frac{\sqrt[n]{a\cdot 2a\cdots na}}{\sqrt[n]{n!}}\\&\leq\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[n]{n!}}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}\\&=\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{\sqrt{n}}\to 0\cdot a=0(n\to\infty)\end{aligned}$$

所以，根据夹逼定理，得到

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=0$$

证法 2

由 $k(n-k+1)=(k-1)(n-k)+n\geq n(1\leq k\leq n)$ 推得

$$(n!)^2=(n\cdot 1)[(n-1)\cdot 2]\cdots(1\cdot n)\geq n\cdots n=n^n$$

于是

$$\begin{aligned}0 &\le \sqrt{n}\cdot\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} = \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n n^{\frac{n}{2}}} \le \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n n!}\\ &= \sqrt[n]{a_1\cdot 2a_2\cdot na_n} \le \frac{a_1+2a_2+\cdots na_n}{n}\\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{\sqrt{n}} \to 0\cdot a = 0(n\to\infty)\end{aligned}$$

2.1 练习

1. 用数列极限证明：

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n-2})=0$$

2. 利用极限定义，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\arctan n=\frac{\pi}{2}$$

3. 设 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$。用 $\varepsilon-N$ 法，$A-N$ 法证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\frac{a}{2}(a\text{为实数},+\infty,-\infty)$$

4. 设 $\lim_{n\to\infty}a_n=a,|q|<1$。用 $\varepsilon-N$ 法证明：

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+a_{n-1}q+\cdots+a_1q^{n-1})=\frac{a}{1-q}$$

5. 设 $\lim_{n\to\infty}a_n=a,\ \lim_{n\to\infty}b_n=b$。用 $\varepsilon-N$ 法证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_1+a_nb_0}{n}=ab$$

6. 设 $\lim_{n\to\infty}a_n=a,b_n\ge 0(n\in\mathbb{N}),\ \lim_{n\to\infty}(b_1+b_2+\cdots+b_n)=S$。证明：$\lim_{n\to\infty}(a_nb_1+a_{n-1}b_2+\cdots+a_1b_n)=aS$
7. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\max(a_1,a_2,\cdots,a_n)}{n}=0$$

8. **(Toeplitz 定理)** 设 $n,k\in\mathbb{N},t_{nk}\ge 0$ 且 $\sum_{k=1}^{n}t_{nk}=1,\ \lim_{n\to\infty}t_{nk}=0$。如果 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$，证明：$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}t_{nk}a_k=a$。
9. 设 a,b,c 为三个给定的实数，令 $a_0=a,b_0=b,c_0=c$，并归纳定义

$$\begin{cases}a_n=\frac{b_{n-1}+c_{n-1}}{2}\\ b_n=\frac{c_{n-1}+a_{n-1}}{2},n=1,2,\cdots\\ c_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\end{cases}$$

证明：$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}c_n=\frac{a+b+c}{3}$

10. 设 a_1,a_2 为实数，令

$$a_n=pa_{n-1}+qa_{n-2},n=3,4,5,\cdots$$

其中 $p>0,q>0,p+q=1$。证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{a_2+a_1q}{1+q}$。

11. 设数列 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 满足 $a_1>0,4\le b_n\le 5,4\le c_n\le 5$，

$$a_n=\frac{\sqrt{b_n^2+c_n^2}}{b_n+c_n}a_{n-1}$$

证明：$\lim_{n\to\infty}a_n=0$

12. 求极限：

$$\lim_{n\to\infty}(n^2-n+2)^{\frac{1}{n}}$$

13. (a). 应用数学归纳法或 $\frac{2k-1}{2k} < \frac{2k}{2k+1}$ 证明不等式：

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

(b). 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}) = 0$

14. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k!}{n!} = 1(1+\frac{1}{n} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n}k!}{n!} \leq 1+\frac{2}{n})$

15. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n = b$。记

$$S_n = \max\{a_n, b_n\}, T_n = \min\{a_n, b_n\}, n = 1, 2, \cdots$$

证明：

$$(1)\lim_{n\to\infty}S_n = \max\{a,b\}, (2)\lim_{n\to\infty}T_n = \min\{a,b\}$$

16. 用 $p(n)$ 表示能整除 n 的素数的个数。证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p(n)}{n} = 0$

17. 设

$$x_n = \sum_{k=1}^{n}(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1)$$

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = \frac{1}{4}$

18. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = a \neq 0$，求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$。举例说明，当 $a = 0$ 时不能得出上述结论。

19. 如果 $a_0 + a_1 + \cdots + a_p = 0$，求证：

$$\lim_{n\to\infty}(a_0\sqrt{n} + a_1\sqrt{n+1} + \cdots + a_p\sqrt{n+p}) = 0$$

20. 设数列 $\{a_n\}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}a_{2n-1} = a, \lim_{n\to\infty}a_{2n} = b$$

证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots}{n} = \frac{a+b}{2}$$

21. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - x_{n-2}) = 0$。求证：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0$$

22. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = a$。证明[1]：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a_k = a$$

23. 设 $a_0 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}(n = 1, 2, \cdots)$。证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n = +\infty$

24. 设 $\{a_n\}$ 是一个正数数列。如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}+a_{n+2}}{a_n} = +\infty$$

那么 $\{a_n\}$ 必为无界数列。

问题与反例

回答下列问题：

1. 若 $\{a_n\},\{b_n\}$ 都发散，对 $\{a_n+b_n\}$ 与 $\{a_nb_n\}$ 是否收敛能不能作出肯定的结论？
2. 若 $\{a_n\}$ 收敛而 $\{b_n\}$ 发散，这时 $\{a_n+b_n\}$ 的敛散性如何？
3. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = a \neq 0$ 而 $\{b_n\}$ 发散，这时 $\{a_nb_n\}$ 的敛散性如何？
4. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = 0$ 而 $\{bn\}$ 发散，这时 $\{a_nb_n\}$ 的敛散性如何？
5. 设 $a_n \leq b_n \leq c_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(c_n - a_n) = 0$，问 $\{b_n\}$ 是否必收敛？

[1]考虑 Toeplitz 定理

2.2 单调数列的极限

一般情况下难以判断数列是否收敛，对于一种特殊情况我们可给出一种数列极限存在性的判别法，它依赖于实数的一个基本性质，即**确界原理**：非空的数集如果有上界则必有上确界，如果有下界则必有下确界。

设 $\{a_n\}$ 为数列，如果

$$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \le \cdots$$

则称 $\{a_n\}$ 是单调递增数列，当上式中的"$\le$"号换成"$<$"号时称 $\{a_n\}$ 是严格单调递增的；如果

$$a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n \ge \cdots$$

则称 $\{a_n\}$ 是单调递减数列，当上式中的"$\ge$"号换成"$>$"号时称 $\{a_n\}$ 是严格单调递减的；单调递增数列和单调递减数列统称为单调数列。

定理 2.3 (单调数列的极限)

设 $\{a_n\}$ 为单调数列

1. 如果 $\{a_n\}$ 为单调递增数列，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_k \mid k \ge 1\}$
2. 如果 $\{a_n\}$ 为单调递减数列，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_k \mid k \ge 1\}$

♡

证明

(1) 记 $M = \sup\{a_k \mid k \ge 1\}$，先考虑 M 有限的情形。任给 $\varepsilon > 0$，由上确界的刻画，存在 a_N，使得 $a_N > M-\varepsilon$。根据 $\{a_n\}$ 的单调性，当 $n > N$ 时

$$M - \varepsilon < a_N \le a_n \le M < M + \varepsilon$$

由数列极限的定义即知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = M$。

如果 $M = +\infty$，则任给 $\alpha > 0$，存在 a_N，使得 $a_N > \alpha$。根据 $\{a_n\}$ 的单调性，当 $n > N$ 时 $a_n \ge a_N > \alpha$，这说明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$。

(2) 可同 (1) 一样类似地证明，也可考虑 $\{-a_n\}$ 然后直接利用 (1)。

推论 2.2

有界单调数列必收敛。

♡

例题 2.17 设 $a_1 = \sqrt{2}, n \ge 1$ 时 $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$。研究数列 $\{a_n\}$ 的极限。

解 用数学归纳法易得 $\sqrt{2} \le a_n < 2$。因此

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} > \sqrt{2a_n} > a_n$$

这说明 $\{a_n\}$ 是单调递减的有界数列，从而收敛。记其极限为 α，则 $\alpha \ge \sqrt{2} > 0$。我们有

$$2 + \alpha = \lim_{n\to\infty} (2 + a_n) = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \alpha^2$$

上式的唯一正解为 $\alpha = 2$，这说明 $\{a_n\}$ 的极限为 2。

例题 2.18 设 $\{x_n\}$ 是一个非负的数列，满足

$$x_{n+1} \le x_n + \frac{1}{n^2} (n = 1, 2, \cdots)$$

证明：$\{x_n\}$ 收敛。

证明 因为 $x_{n+1} \le x_n + \frac{1}{n^2} < x_n + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$，所以 $x_{n+1} + \frac{1}{n} < x_n + \frac{1}{n-1}$，所以 $\{x_n + \frac{1}{n-1}\}$ 单调递减，又有下界 0，所以收敛。又有 $\{\frac{1}{n-1}\}$ 收敛，所以 $\{x_n\}$ 收敛。

例题 2.19 设 $a_1 > 0, n \ge 1$ 时 $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n})$。研究数列 $\{a_n\}$ 的极限。

解 由数学归纳法易见 $a_n > 0$。进一步有

$$a_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n} - 2) = \frac{1}{2}(\sqrt{a_n} - \frac{1}{\sqrt{a_n}})^2 \ge 0$$

因此当 $n \geq 2$ 时，有

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n}) \leq \frac{1}{2}(a_n + a_n) = a_n$$

即 $\{a_n\}$ 从 $n \geq 2$ 开始单调递减且有下界，因此收敛。其极限记为 α，则 $\alpha \geq 1$。另一方面，

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n}) = \frac{1}{2}(\alpha + \frac{1}{\alpha})$$

上式的唯一正解为 $\alpha = 1$，这说明 $\{a_n\}$ 的极限为 1。

例题 2.20 设 $a_1 = 1, n \geq 1$ 时 $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$。研究数列 $\{a_n\}$ 的极限。

解 利用数学归纳法易见 $\frac{1}{2} \leq a_n \leq 1$，并且 $\{a_{2k-1}\}$ 单调递减，$\{a_{2k}\}$ 单调递增，因此它们都是收敛的，极限分别记为 α, β，则

$$\beta = \lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1 + a_{2k-1}} = \frac{1}{1+\alpha},$$

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1 + a_{2k}} = \frac{1}{1+\beta}$$

从上式解出唯一的正解 $\alpha = \beta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$，因此 $\{a_n\}$ 的极限为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$。

讨论**重要极限** $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$

考虑 $a_n = (1+\frac{1}{n})^n, b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}, \forall n \geq 1$ $\{a_n\}$ 是严格单调递增的，$\{b_n\}$ 是严格单调递减的。

$$\begin{aligned}
a_n &= (1+\frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{n^k} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}) \\
&< 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n-1}{n+1}) + \frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n}{n+1}) \\
&= a_{n+1}
\end{aligned}$$

这说明 $\{a_n\}$ 严格单调递增。另一方面，当 $n > 1$ 时，有

$$\begin{aligned}
0 < a_n &< 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \\
&\leq 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} \\
&= 2 + \sum_{k=2}^{n} (\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}) = 3 - \frac{1}{n} < 3
\end{aligned}$$

因此 $\{a_n\}$ 收敛，其极限记为 e，称为自然对数的基底。计算表明

$$e = 2.7182818284590$$

另一方面，由

$$[\frac{1+\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{n}}]^n = (1+\frac{1}{n^2-1})^n > 1 + \frac{n}{n^2-1} > 1 + \frac{1}{n}$$

得

$$b_{n-1} = (1+\frac{1}{n-1})^n > (1+\frac{1}{n})^{n+1} = b_n$$

即 $\{b_n\}$ 严格单调递减，且

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n(1+\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} a_n = e$$

因此有下面的不等式

$$(1+\frac{1}{n})^n < (1+\frac{1}{n+1})^{n+1} < e < (1+\frac{1}{n+1})^{n+2} < (1+\frac{1}{n})^{n+1}, \forall n \geq 1$$

例题 2.21 证明 $\{e_n\}$ 收敛到 e，其中

$$e_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$$

证明 当 $n > 1$ 时 $a_n < e_n$。固定 $k > 1$，当 $n > k$ 时，有

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}) \\ &> 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n}) \end{aligned}$$

在上式中令 $n \to \infty$，得

$$e = \lim_{n\to\infty} a_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!}$$

由于 k 可以任意固定，我们就有

$$a_n < e_n < e, \forall n > 1$$

根据夹逼原理知 $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = e$

我们已经证明，数列 $\{a_n\}$ 与 $\{e_n\}$ 都递增地收敛于 e。从计算来看，使用极限

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}) = e$$

更为有利。由这种近似产生的误差，可以用下面的方法来作估计：由于

$$\begin{aligned} & 0 < e_{n+m} - e_n \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{(n+m)!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!}[1 + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)\cdots(n+m)}] \\ &< \frac{1}{(n+1)!}[1 + \frac{1}{n+1} + (\frac{1}{n+1})^2 + \cdots + (\frac{1}{n+1})^{m-1}] \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!n} \end{aligned}$$

例题 2.22 自然对数的底 e 是无理数。

证明 用反证法。假设 $e = \frac{p}{q}$，其中 $p, q \in \mathbb{N}$。由于 $2 < e < 3$，可见 e 不是正整数，因此 $q \geq 2$。由 $0 < e - e_q \leq \frac{1}{q!q}$ 可得

$$0 < q!(e-e_q) \leq \frac{1}{1} \leq \frac{1}{2}$$

但是

$$q!(e-e_q) = (q-1)!p - q!(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{q!})$$

是整数，矛盾。

例题 2.23 证明：

1. $e(n/e)^n < n! < en(n/e)^n, \forall n > 1$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$

证明 对 $k = 1, 2, \cdots, n-1$，均有

$$\frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}\frac{1}{k+1} < e < \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}\frac{1}{k}$$

将这 $n-1$ 个不等式相乘，得

$$\frac{n^n}{n!} < e^{n-1} < \frac{n^n}{(n-1)!}$$

整理后就是 (1) 中要证的不等式。(2) 可由 (1) 及夹逼原理得。

以 e 为基底的对数函数记为 $\ln x$，有

$$k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) < 1 < (k+1)\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

即

$$\frac{1}{k+1} < \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) < \frac{1}{k}, \text{或} \frac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{k}$$

对 $k = 1, 2, \cdots, n$，将上述不等式相加，得

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) < 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$

如果令

$$c_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$$

则 $c_n > \ln(n+1) - \ln n > 0$，且

$$c_{n+1} - c_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 0$$

这说明 $\{c_n\}$ 收敛，其极限记为 γ，称为 *Euler* 常数，计算表明

$$\gamma = 0.5772156649\cdots$$

例题 2.24 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n})$

解 利用 c_n 的收敛性，有

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n})\\
=&\lim_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n})-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})]\\
=&\lim_{n\to\infty}[(c_{2n}+\ln(2n))-(c_n+\ln n)]\\
=&\gamma-\gamma+\ln 2
\end{aligned}$$

我们利用单调数列研究一般的有界数列。设 $\{a_n\}$ 为有界数列，我们要研究它的收敛性。我们不知道 a_n 是否逐渐趋于某个数，一个好的想法就是去考虑 n 很大时 $\{a_n\}$ 中"最大"的项和"最小"的项，看看它们是否相近。当然，"最大"和"最小"的项不一定存在，但我们可以用"上确界"和"下确界"分别代替它们。为此，令

$$\underline{a}_n = \inf\{a_k \mid k \geq n\}, \overline{a}_n = \sup\{a_k \mid k \geq n\}$$

单调数列 $\{\underline{a}_n\}$ 和 $\{\overline{a}_n\}$ 的极限分别称为 $\{a_n\}$ 的**下极限**和**上极限**，记为

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\underline{a}_n, \varlimsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\overline{a}_n$$

命题 2.7 (上下极限的等价定义)

假定 $\{a_n\}$ 是个实数列，则有

1. 设 A 是某个实数，则 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = A$ 的充分必要条件是对任何 $\varepsilon > 0$，存在无穷多个 n，使得 $a_n > A-\varepsilon$ 且存在 $N \in \mathbb{N}$，使得 $a_n \leq A+\varepsilon, \forall n \geq N$
2. $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ 的充分必要条件是对任何 $A > 0$，存在 n，使得 $a_n > A$
3. 设 A 是某个实数，则 $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = A$ 的充分必要条件是对任何 $\varepsilon > 0$，存在无穷多个 n，使得 $a_n < A+\varepsilon$ 且存在 $N \in \mathbb{N}$，使得 $a_n \geq A-\varepsilon, \forall n \geq N$
4. $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ 的充分必要条件是对任何 $A < 0$，存在 n，使得 $a_n < A$

上极限和下极限一般不容易计算，其用处主要体现在下面的定理中。

定理 2.4

设 $\{a_n\}$ 为有界数列，则下列命题等价：

1. $\{a_n\}$ 收敛；
2. $\{a_n\}$ 的上极限和下极限相等；
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(\overline{a}_n - \underline{a}_n) = 0$

证明 (1) $\Longrightarrow$ (2) : 设 $\{a_n\}$ 收敛到 α。任给 $\varepsilon > 0$，存在 N，当 $n > N$ 时，有

$$\alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon$$

由确界的定义可知，当 $n > N$ 时

$$\alpha - \varepsilon \le \underline{a}_n \le \overline{a}_n \le \alpha + \varepsilon$$

这说明 $\{\underline{a}_n\}$ 和 $\{\overline{a}_n\}$ 均收敛到 α

(2) $\Longrightarrow$ (1) : 利用 $\underline{a}_n \le a_n \le \overline{a}_n$ 和夹逼原理即可。(2) 和 (3) 的等价是显然的。

一般来说，上极限和下极限不再满足四则运算的等式，不过保序性任然成立。

命题 2.8

设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 为有界数列。

1. 如果存在 N_0，当 $n > N_0$ 时 $a_n \ge b_n$，则
$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \ge \underline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n, \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \ge \overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n$$
2. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(a_n + b_n) \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, b_n$

证明 (1) 当 $n > N_0$ 时

$$\underline{b}_n \le b_k \le a_k, \forall k \ge n$$

关于 k 取下确界，得

$$\underline{b}_n \le \underline{a}_n, \forall n > N_0$$

由极限的保序性即得

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n \le \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$$

上极限的情形可类似证明。

(2) 利用不等式 $a_n + b_n \le \overline{a}_n + \overline{b}_n$ 以及极限的保序性即可。

考虑从另一角度引入上下极限，并证明等价。

考察任意给定的数列 $\{a_n\}$。如果它收敛于一个有穷的数列，那么它的任一子列都收敛于这个极限。如果它不收敛于一个有穷的极限，但是有界，按照 $Bolzano - Weierstrass$ 定理，从中可以找出一个收敛的子列。如果 $\{a_n\}$ 无界，那么总可以找到一个子列趋向于 $+\infty$ 或 $-\infty$。

我们把数列 $\{a_n\}$ 的收敛子列 $\{a_{k_n}\}$ 的极限称为 $\{a_n\}$ 的一个极限点。对收敛数列而言，极限点只有一个，即它的极限。对发散数列而言，如果它有界，则它可以有若干个甚至无穷多个极限点；如果它无界，则除了有限的极限点外，他还可以以 $+\infty$ 或 $-\infty$ 为其极限点。

定义 2.3

设 $\{a_n\}$ 是一个数列，E 是由 $\{a_n\}$ 的全部极限点构成的集合。记

$$a^* = \sup E, a_* = \inf E$$

则 a^* 和 a_* 分别称为数列 $\{a_n\}$ 的上极限和下极限，记为

$$a^* = \lim_{n\to\infty} \sup a_n, a_* = \lim_{n\to\infty} \inf a_n$$

♣

定理 2.5

设 $\{a_n\}$ 为一数列，E 与 a^* 的意义已在定义 2.3 中描述。那么：

1. $a^* \in E$
2. 若 $x > a^*$，则存在 $N \in \mathbb{N}^*$，使得当 $n \geq N$ 时，有 $a_n < x$
3. a^* 是满足前两条性质的唯一的数

♡

定理 2.6

$$\lim_{n\to\infty} \underline{a}_n = a_*, \lim_{n\to\infty} \overline{a}_n = a^*$$

♡

证明 我们只证明 $\lim_{n\to\infty} \overline{a}_n = a^*$，$\lim_{n\to\infty} \underline{a}_n = a_*$ 的证明是类似的。

(1)a^* 是一个有限数。

任取 $l \in E$，则有 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{i_k}\}$，使得 $\lim_{k\to\infty} a_{i_k} = l$。对任意给定的 n，选取 $k \geq n$，于是 $i_k \geq k \geq n$，因而

$$a_{i_k} \leq \sup\{a_n, a_{n+1}, \cdots\} = \overline{a}_n$$

令 $k \to \infty$，即得 $l \leq \overline{a}_n$。由于 l 是 E 中的任意数，则有 $a^* \leq \overline{a}_n$。这样 $\{\overline{a}_n\}$ 是一个递减的有下界的数列，因而有极限，故得

$$a^* \leq \lim_{n\to\infty} \overline{a}_n$$

对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $n_0 \in \mathbb{N}^*$，当 $n \geq n_0$ 时，$a_n \leq a^* + \varepsilon$，因此 $\overline{a}_n \leq a^* + \varepsilon$，从而得 $\lim_{n\to\infty} \overline{a}_n \leq a^* + \varepsilon$。再令 $\varepsilon \to 0$，得

$$\lim_{n\to\infty} \overline{a}_n \leq a^*$$

综上，$\lim_{n\to\infty} \overline{a}_n = a^*$

(2) 设 $a^* = +\infty$，则有一个子列以 $+\infty$ 为极限，于是

$$\overline{a}_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \cdots\} = +\infty$$

故 $\lim_{n\to\infty} \overline{a}_n = a^*$

(3) 设 $a^* = -\infty$，则对任意的 $A > 0$，存在 $n_0 \in \mathbb{N}$，当 $n \geq n_0$ 时，$a_n < -A$，因而

$$\overline{a}_n \leq -A$$

，这正是 $\lim_{n\to\infty} \overline{a}_n = -\infty$

例题 2.25 证明下列不等式：

$$\lim_{n\to\infty} \inf a_n + \lim_{n\to\infty} \inf b_n \leq \lim_{n\to\infty} \inf(a_n + b_n) \leq \lim_{n\to\infty} \inf a_n + \lim_{n\to\infty} \sup b_n$$
$$\lim_{n\to\infty} \inf a_n + \lim_{n\to\infty} \sup b_n \leq \lim_{n\to\infty} \sup(a_n + b_n) \leq \lim_{n\to\infty} \sup a_n + \lim_{n\to\infty} \sup b_n$$

证明

我们只证明第一个不等式，第二个类似。

我们只需证明

$$\inf_{k\ge n} a_k + \inf_{k\ge n} b_k \le \inf_{k\ge n}(a_k+b_k) \le \inf_{k\ge n} a_k + \sup_{k\ge n} b_k$$

当 $k \ge n$ 时

$$\inf_{k\ge n} a_k \le a_k, \inf_{k\ge n} b_k \le b_k$$

当 n 固定时，$\inf_{k\ge n} a_k + \inf_{k\ge n} b_k$ 是 $\{a_k+b_k\}$ 的一个下界，因而

$$\inf_{k\ge n} a_k + \inf_{k\ge n} b_k \le \inf_{k\ge n}(a_k+b_k)$$

记 $c_k = a_k + b_k$，则 $a_k = c_k - b_k$，于是

$$\inf_{k\ge n} a_k = \inf_{k\ge n}(c_k - b_k) \ge \inf_{k\ge n} c_k + \inf_{k\ge n}(-b_k) = \inf_{k\ge n} c_k - \sup_{k\ge n} b_k$$

由此即得

$$\inf_{k\ge n}(a_k+b_k) \le \inf_{k\ge n} a_k + \sup_{k\ge n} b_k$$

例题 2.26 设 $a_n > 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$。记 $b_n = (a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha$

证明 由题设，任取 $\varepsilon > 0$，存在 N，当 $n > N$ 时 $0 < a_n < \alpha + \varepsilon$。此时有

$$b_n \le (a_1a_2\cdots a_N)^{\frac{1}{n}}(\alpha+\varepsilon)^{\frac{n-N}{n}}$$

令 $n\to\infty$，得 $\overline{\lim}_{n\to\infty} b_n \le \alpha+\varepsilon$。同理可证 $\underline{\lim}_{n\to\infty} b_n \ge \alpha-\varepsilon$。由 ε 的任意性可知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n = \alpha = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n$$

这说明 $\{b_n\}$ 收敛到 α。

例题 2.27 设 $b_n > 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \alpha$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n^{\frac{1}{n}} = \alpha$

证明 令 $a_1 = b_1, n \ge 1$ 时 $a_{n+1} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$。由题设，$\{a_n\}$ 收敛到 α。由上例可得

$$\lim_{n\to\infty} b_n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}} = \alpha$$

例题 2.28 设数列 $\{a_n\}$ 满足以下条件：

$$a_n \ge 0, a_{m+n} \le a_m + a_n, \forall m,n \ge 1$$

证明数列 $\{a_n/n\}$ 收敛。

证明 由归纳法易见 $0 \le a_n \le na_1$，因此 $\{a_n/n\}$ 为有界数列。设 k 是固定的正整数，当 $n \ge k$ 时，n 可以表示为

$$n = mk + l, 0 \le l \le k-1$$

因此

$$a_n \le a_{mk} + a_l \le ma_k + la_1 \le \frac{n}{k}a_k + (k-1)a_1$$

即

$$\frac{a_n}{n} \le \frac{a_k}{k} + \frac{k-1}{n}a_1, \forall n \ge k$$

令 $n\to\infty$，得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_n}{n} \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_k}{k} + \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{k-1}{n}a_1 = \frac{a_k}{k}$$

再在上式中令 $k\to\infty$，得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_n}{n} \le \underline{\lim_{k\to\infty}}\frac{a_k}{k}$$

这说明 $\{a_n/n\}$ 的上下极限一定是相等的，从而收敛。

定义 2.4 (一致收敛)

设 A 是任意一个非空集合，我们称函数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 关于 $x \in A$ 一致收敛到函数 $f(x)$，如果对任何 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall n \geq N, x \in A$$

函数列 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ 是一致收敛的可记做 $f_n \rightrightarrows f$

注 因为对每个 x 来说，$f_n(x)$ 都是一个序列，给定 ε 之后，需要的 N 也会不同，而所谓的一致收敛就是需要 N 相同

定理 2.7 (函数列一致收敛的充要条件)

函数列 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ 一致收敛的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

例题 2.29

1. 证明 $\lim_{n\to\infty} x^n, x \in [0, \frac{1}{2}]$ 是一致收敛的
2. 证明 $\lim_{n\to\infty} x^n, x \in [0, 1)$ 不是一致收敛的

证明 由 $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\frac{1}{2}]} |x^n - 0| = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{2})^n = 0$, $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1)} |x^n - 0| \neq 0$

2.2 练习

1. 设 $\{x_n\}$ 是一个非负的数列，满足

$$x_{n+1} \leq x_n + \frac{1}{n^2}(n = 1, 2, \cdots)$$

证明：$\{x_n\}$ 收敛。

2. 设 $c > 0, a_1 = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2}(n = 1, 2, \cdots)$，证明：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 1 - \sqrt{1-c}, 0 < c \leq 1 \\ +\infty, c > 1 \end{cases}$$

3. 设数列 $\{u_n\}$ 定义如下：

$$u_1 = b$$
$$u_{n+1} = u_n^2 + (1 - 2a)u_n + a^2(n = 1, 2, \cdots)$$

问 a, b 为何值时 $\{u_n\}$ 收敛？极限值是什么？

4. 设 $A > 0, 0 < y_0 < A^{-1}$，且

$$y_{n+1} = y_n(2 - Ay_n)(n = 0, 1, \cdots)$$

证明：$\lim_{n\to\infty} y_n = A^{-1}$

5. 设数列 $\{a_n\}$ 由下式定义：

$$a_n = 2^{n-1} - 3a_{n-1}(n = 1, 2, \cdots)$$

求 a_0 所有可能的值，使得 $\{a_n\}$ 是严格递增的。

6. 求证：

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n}$$

其中 $\theta_n \in (\frac{n}{n+1}, 1)$。

7. 求极限 $\lim_{n\to\infty} (n!e - [n!e])$。

8. 求证：当 $n \geq 3$ 时，有不等式

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{3}{2n} < (1+\frac{1}{n})^n < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$$

考虑如下引理: 设 $n \geq 2$，实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都大于-1，并且它们有着相同的符号。

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) > 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

9. 求证等式：

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} = \ln 2\sqrt{n} + \frac{\gamma}{2} + \varepsilon_n$$

其中 γ 是 *Euler* 常数，$\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$

10. 求极限

$$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})\cdots(1+\frac{n}{n^2})$$

11. 记 $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} (n = 1, 2, \cdots)$，用 k_n 表示使得 $H_k \geq n$ 的最小下标。证明：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_{n+1}}{k_n} = e$$

12. 设 $s_n = 1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n$。求证：当 $n \geq 3$ 时，有

$$n^n(1 + \frac{1}{4(n-1)} < s_n < n^n(1 + \frac{2}{e(n-1)})$$

13. 设 $a_n \geq 0 (n \in \mathbb{N}^*)$。求证：$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{a_n} \leq 1$ 的充分必要条件是，对任意的 $l > 1$，有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{l^n} = 0$$

14. 设数列 $\{x_n\}$ 有界，且 $\lim\limits_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$，分别记 $\{x_n\}$ 的上下极限为 L 和 l。证明：$\{x_n\}$ 的极限点充满区间 $[l, L]$。

15. 设 $a_n > 0$。求证：

$$\lim_{n\to\infty} \sup n(\frac{1 + a_{n+1}}{a_n} - 1) \geq 1$$

2.3 Cauchy 准则

一般的有界数列可以用上下极限来处理，其基本想法就是去观察某些项之后的“最大”项和“最小”项，看看二者之间的差异是否趋于零。因为上下极限并不好算，我们不妨换一种思路，即可以比较某些项之后一般项之间的差异，看看这些差异是否趋于零：如果 a_n 逐渐趋于某个数，则当 n 很大时 a_n 之间的差别应该很小。

定义 2.5 (Cauchy 数列)

设 a_n 为数列，如果任给 $\varepsilon > 0$，均存在 $N = N(\varepsilon)$，当 $m, n > N$ 时，有

$$|a_m - a_n| < \varepsilon$$

则称 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 数列或基本列。

♣

例题 2.30 对于 $n \geq 1$，定义

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

则 $\{a_n\}$ 不是 Cauchy 数列。

证明 对于 $n \geq 1$，我们有

$$\begin{aligned} a_{2n} - a_n &= \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &\geq \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

由定义即知 $\{a_n\}$ 不是 Cauchy 数列。

例题 2.31 设 $\{a_n\}$ 为数列，如果存在常数 $C \geq 0, 0 \leq q < 1$，以及 N_0，使得当 $n > N_0$ 时，有

$$|a_{n+1} - a_n| \leq Cq^n$$

则 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 数列。

证明 当 $m > n > N_0$ 时，有

$$\begin{aligned}|a_m - a_n| &\leq |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + \cdots + |a_{n+1} - an| \\ &\leq Cq^{m-1} + Cq^{m-2} + \cdots + Cq^n \\ &= Cq^n(q^{m-n-1} + q^{m-n-2} + \cdots + q + 1) \\ &= Cq^n \frac{1 - q^{m-n}}{1 - q} \leq \frac{C}{1 - q} q^n\end{aligned}$$

上式对 $m = n$ 当然也成立。由于 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$，故任给 $\varepsilon > 0$，存在 N_1，使得当 $n > N_1$ 时 $\frac{C}{1-q}q^n < \varepsilon$。于是，当 $m, n > N = max\{N_0, N_1\}$ 时（不妨设 $m \geq n$），有

$$|a_m - a_n| \leq \frac{C}{1 - q} q^n < \varepsilon$$

这说明 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 数列。

命题 2.9

Cauchy 数列必为有界数列。

证明 按定义，取 $\varepsilon = 1$，则存在 N，当 $m, n > N$ 时 $|a_m - a_n| < 1$。特别地，当 $n > N$ 时

$$|a_n| \leq |a_n - a_{N+1}| + |a_{N+1}| < 1 + |a_{N+1}|$$

令 $M = max\{1 + |a_1|, \cdots, 1 + |a_{N+1}|\}$，则 $|a_n| \leq M$ 总成立。

定理 2.8 (Cauchy 准则)

数列 $\{a_n\}$ 收敛当且仅当它是 Cauchy 数列。

证明 必要性：设 $\{a_n\}$ 收敛到 α。任给 $\varepsilon > 0$，存在 N，当 $n > N$ 时 $|a_n - \alpha| < \varepsilon/2$。因此，当 $m, n > N$ 时，有

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - \alpha| + |\alpha - a_n| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

这说明 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 数列。

充分性：设 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 数列，则 $\{a_n\}$ 是有界数列。于是可以研究其上下极限。根据 Cauchy 数列的定义，任给 $\varepsilon > 0$，存在 N，当 $m, n > N$ 时

$$-\varepsilon < a_m - a_n < \varepsilon$$

在上式子中暂时固定 $n > N$，对 $\{a_n\}$ 取上极限，利用上极限的保序性可得

$$-\varepsilon \leq \overline{\lim_{m\to\infty}} a_m - a_n \leq \varepsilon$$

由数列极限的定义即可看出 $\{a_n\}$ 收敛。

还可以证明一个引理和一个定理来证明充分性

Lemma 从任一数列中必可取出一个单调子列。

$\mathcal{P}roof$

$case1$. 在数列中有无穷多项大于它们之后的所有数，那么依次取这些数，则可以得到一个严格递减的数列。

$case2$. 在数列中只存在有限项大于它们之后的所有数，那么取这些数最后一项的后一项，记作 a_{i_1}。那么在 a_{i_1} 后必有一项 $a_{i_2}(i_2 > i_1)$ 满足 $a_{i_1} < a_{i_2}$；如此进行，得到子列 $\{a_{i_n}$，它显然是一个递增的子列。

Theorem: 从任何有界数列中必可选出一个收敛的子列。此定理也称作 $Bolzano - Weierstrass$ 定理。

$\mathcal{P}roof$

设 $\{a_n\}$ 是一个有界的数列。根据引理，从中可以取出一个单调子列 $\{a_{i_n}\}$，这个子列有界，所以 $\{a_{i_n}\}$ 是一个收敛数列。

下面我们利用 $Bolzano-Weierstrass$ 定理来证明充分性。

设 $\{a_n\}$ 是一个基本列，则 $\{a_n\}$ 有界，由 $Bolzano-Weierstrass$ 定理，从有界数列 $\{a_n\}$ 中可选出一个收敛子列 $\{a_{i_n}\}$，设 $a_{i_n} \to a(n \to \infty)$。我们来证明 a 也是数列 $\{a_n\}$ 的极限。由于 $\{a_n\}$ 是基本列，对任给的 $\varepsilon > 0$，存在一个 $N_1 \in \mathbb{N}$，使得当 $m, n > N_1$ 时，都有 $|a_m - a_n| < \varepsilon/2$。又因 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{i_n} = a$，所以对任给的 $\varepsilon > 0$，存在 $N_2 \in \mathbb{N}$，当 $k > N_2$ 时，$\left|a_{i_n} - a\right| < \varepsilon/2$。现取 $N = \max(N_1, N_2)$，当 $n > N$ 时，有

$$|a_n - a| \le \left|a_n - a_{i_n}\right| + \left|a_{i_n} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

这说明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$。

例题 2.32 设 $a_0 > 0, n \ge 0$ 时 $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$。研究 $\{a_n\}$ 的敛散性。

解 利用归纳法易见 $a_n > 0$ 总成立。于是，当 $n \ge 0$ 时 $0 < a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n} < 1$；进一步，当 $n \ge 1$ 时 $1 > a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n} > \frac{1}{2}$。这说明，当 $n \ge 3$ 时

$$\begin{aligned} |a_{n+1} - a_n| &= \left|\frac{1}{1+a_n} - \frac{1}{1+a_{n-1}}\right| = \frac{|a_n - a_{n-1}|}{(1+a_n)(1+a_{n-1})} \\ &\le \frac{4}{9}|a_n - a_{n-1}| \end{aligned}$$

不难看出 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 数列。

2.3 练习

1. (a). 数列 $\{a_n\}$ 满足
$$\left|a_{n+p} - a_n\right| \le \frac{p}{n}$$
且对一切 $n, p \in \mathbb{N}^*$ 成立。问 $\{a_n\}$ 是不是基本列？
   (b). 当 $\left|a_{n+p} - a_n\right| \le \frac{p}{n^2}$ 时，上述结论又如何？
2. 设 $a_n \in [a, b](n \in \mathbb{N}^*)$。证明：如果 $\{a_n\}$ 发散，则 $\{a_n\}$ 必有两个子列收敛于不同的数。

2.4 Stolz 公式

引理 2.1

当 $1 \le k \le n$ 时设 $b_k > 0$ 且 $m \le \frac{a_k}{b_k} \le M$，则

$$m \le \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \le M$$

证明 由已知条件可知，当 $1 \le k \le n$ 时 $mb_k \le a_k \le Mb_k$，关于 k 从 1 到 n 求和可得

$$m(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \le (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \le M(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$

此即欲证不等式。

定理 2.9 (Stolz 公式之一)

设 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 为数列，且 $\{y_n\}$ 严格单调地趋于 $+\infty$。如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \alpha$$

其中 α 为实数或 $\pm\infty$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \alpha$ 也成立，常记为 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$

证明 分情况讨论。

(1)$\alpha \in \mathbb{R}$。先设 $\alpha = 0$。此时，任给 ε，存在 N，当 $n > N$ 时

$$-\varepsilon < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < \varepsilon$$

利用 $\{y_n\}$ 的单调性和上面的引理，当 $n > N$ 时，得到

$$-\varepsilon < \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} = \frac{(x_n - x_{n-1}) + \cdots + (x_{N+1} - x_N)}{(x_n - x_{n-1}) + \cdots + (y_{N+1} - y_N)} < \varepsilon$$

整理以后可得

$$\frac{x_N + \varepsilon y_N}{y_n} - \varepsilon < \frac{x_n}{y_n} < \varepsilon + \frac{x_N - \varepsilon y_N}{y_n}$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ 以及上式可知，当 n 充分大时，$-2\varepsilon < \frac{x_n}{y_n} < 2\varepsilon$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$。

一般地，记 $\tilde{x}_n = x_n - \alpha y_n$，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{x}_n - \tilde{x}_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - \alpha = 0$$

这说明 $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{x}_n / y_n = 0$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n / y_n = \alpha$

(2)$\alpha = +\infty$。此时，存在 N，当 $n > N$ 时 $\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} > 1$。于是，当 $n > N$ 时

$$x_n - x_{n-1} > y_n - y_{n-1} > 0$$

即 $n > N$ 时 $\{x_n\}$ 也是严格单调递增的，且

$$\begin{aligned} x_n - x_N &= (x_n - x_{n-1}) + \cdots + (x_{N+1} - x_N) \\ &> (y_n - y_{n-1}) + \cdots + (y_{N+1} - y_N) = y_n - y_N \end{aligned}$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ 可知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$。可得 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = 0$。应用 (1) 的结论可得 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n / x_n = 0$，于是 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n / y_n = +\infty$

(3)$\alpha = -\infty$。这时只要将 x_n 换成 $-x_n$，然后应用 (2) 的结论即可。

注 若 $\alpha = \infty$，定理不成立，考虑反例：$a_n = (-1)^{n-1} n$，显然 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$，而

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2k}}{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(1-2) + \cdots + (2k-1-2k)}{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{-k}{2k} = -\frac{1}{2} \neq \infty$$

例题 2.33 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}(a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n) = \frac{1}{2}\alpha$$

证明 n^2 关于 n 单调递增趋于 $+\infty$，由 Stolz 公式，得

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}(a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{na_n}{n^2 - (n-1)^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} a_n = \frac{1}{2}\alpha \end{aligned}$$

例题 2.34 设 k 为正整数，则

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2}$$

证明 用 Stolz 公式有

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} - \frac{1}{k+1}\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{(k+1)(1^k + 2^k + \cdots + n^k) - n^{k+1}}{(k+1)n^k} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(k+1)n^k - [n^{k+1} - (n-1)^{k+1}]}{(k+1)[n^k - (n-1)^k]} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}k(k+1)n^{k-1} + \cdots}{(k+1)kn^{k-1} + \cdots} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

定理 2.10 (Stolz 公式之二)

设数列 $\{y_n\}$ 严格单调递减趋于 0，数列 $\{x_n\}$ 也收敛到 0. 如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\alpha$$

其中 α 为实数或 $\pm\infty$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\alpha$ 也成立。

证明 分情况讨论。

(1)$\alpha\in\mathbb{R}$。不妨设 $\alpha=0$。任给 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n>N$ 时，

$$-\varepsilon<\frac{x_n-x_{n+1}}{y_n-y_{n+1}}=\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}<\varepsilon$$

则当 $m>n>N$ 时可得

$$-\varepsilon<\frac{(x_n-x_{n+1})+\cdots+(x_{m-1}-x_m)}{(y_n-y_{n+1})+\cdots+(y_{m-1}-y_m)}=\frac{x_n-x_m}{y_n-ym}<\varepsilon$$

即

$$-\varepsilon(y_n-y_m)<(x_n-x_m)<\varepsilon(y_n-y_m)$$

令 $m\to\infty$ 可得 $-\varepsilon y_n\le x_n\le\varepsilon y_n$，这说明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n/y_n=0$

一般地，记 $\tilde{x}_n=x_n-\alpha y_n$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\tilde{x}_n-\tilde{x}_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}-\alpha=0$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{x}_n/y_n=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n/y_n=\alpha$

(2)$\alpha=+\infty$。任给 $M>0$，存在 N，当 $n>N$ 时 $\frac{x_n-x_{n+1}}{y_n-y_{n+1}}>M$。当 $m>n>N$ 时，有

$$x_n-x_m>M(y_n-y_m)$$

令 $m\to\infty$，得 $x_n\ge My_n$，这说明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n/y_n=+\infty$

(3)$\alpha=-\infty$。将 (2) 中的 x_n 换成 $-x_n$ 即可。

注 Stolz 公式反过来不一定对，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$ 不能推出 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，考虑 $a_n=(-1)^n$

我们可以考虑下面这个例子。

例题 2.35 如果 $a_n\le a_{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1+\cdots+a_n)=a$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$

证明

例题 2.36 设 $x_1\in(0,1)$, $n\ge1$ 时 $x_{n+1}=x_n(1-x_n)$。证明 $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=1$

证明 由归纳法易见当 $n\ge1$ 时 $x_n\in(0,1)$，因此

$$x_{n+1}=x_n(1-x_n)<x_n$$

即 $\{x_n\}$ 是单调递减有界数列，从而收敛。设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\alpha$，在上式中令 $n\to\infty$，得

$$\alpha=\alpha(1-\alpha)$$

由此解出 $\alpha=0$。进而有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_n}+\frac{1}{1-x_n}-\frac{1}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-x_n}=1\right.$$

由 Stolz 公式，有

$$\lim_{n\to\infty}nx_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{x_n^{-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-(n-1)}{x_n^{-1}-x_{n-1}^{-1}}=1$$

例题 2.37 反向 Stolz 设 $\{a_n\}$ 是递增的数列，令

$$x_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$

证明 因为任意 n 有 $a_n\le a_{n+1}$，所以

$$x_n==\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\le a_n$$

固定 n，令 $m > n$

$$
\begin{aligned}
x_m &= \frac{1}{m}(\sum_{k=1}^{n} a_n + \sum_{k=n+1}^{m} a_n) \\
&\geq \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} a_n + \frac{m-n}{m} a_n
\end{aligned}
$$

令 $m \to \infty$，可得

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n \geq a_n$$

所以有

$$x_n \leq a_n \leq a$$

由夹逼定理，得

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

2.4 练习

1. 设 $0 < x_1 < \frac{1}{q}(0 < q \leq 1)$，并且 $x_{n+1} = x_n(1 - qx_n)(n \in \mathbb{N}^* a)$。求证：$\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = \frac{1}{q}$
2. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$。求证：$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{3n} a_n = 1$
3. 令
$$x_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \ln\binom{n}{k} (n = 1, 2, 3, \cdots)$$
求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$
4. 试利用 $Toeplitz$ 定理证明 $Stolz$ 定理。

第三章 一元函数极限

3.1 函数的极限

3.1.1 定义和基本性质

设 $x_0 \in \mathbb{R}, \delta > 0$。我们记 $V(x_0,\delta) = (x_0-\delta, x_0) \cup (x_0, x_0+\delta)$，称为 x_0 的一个去心开邻域或空心开邻域。

定义 3.1

设函数 f 在 x_0 的一个空心开邻域 $V(x_0,\delta_0)$ 中有定义。如果存在 $\alpha \in \mathbb{R}$，使得任给 $\varepsilon > 0$，均存在 $\delta \in (0,\delta_0)$，当 $x \in V(x_0,\delta)$ 时 $|f(x)-\alpha| < \varepsilon$，则称函数 f 在 x_0 处有极限 α，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha \quad 或 \quad f(x) \to \alpha (x \to x_0)$$

♣

注 f 在 x_0 处的极限与 f 在 x_0 处的值没有直接关系，f 甚至可以在 x_0 处没有定义。

例题 3.1 当 $x \neq 0$ 时定义 $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$，研究 f 在 $x_0 = 0$ 处的极限。

解 任给 $\varepsilon > 0$，取 $\delta = \varepsilon$，当 $x \in V(x_0,\delta)$ 时，

$$|f(x)| \le |x| < \delta = \varepsilon$$

这说明 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

类似地，我们也可以定义函数在 x_0 处的单侧极限：如果存在 $\alpha \in \mathbb{R}$，使得任给 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta \in (0,\delta_0)$，当 $x \in (x_0-\delta, x_0)$ 时 $|f(x)-\alpha| < \varepsilon$，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处（当 x 趋于 x_0^- 时）有**左极限** α，记为

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \alpha \quad 或 \quad f(x) \to \alpha(x \to x_0^-)$$

$f(x)$ 在 x_0 处的左极限也记为 $f(x_0^-)$ 或 $f(x_0-0)$。如果存在 $\beta \in \mathbb{R}$，使得任给 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta \in (0,\delta_0)$，当 $x \in (x_0, x_0+\delta)$ 时 $|f(x)-\beta| < \varepsilon$，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处（当 x 趋于 x_0^+ 时）有**右极限** β，记为

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \beta \quad 或 \quad f(x) \to \beta(x \to x_0^+)$$

$f(x)$ 在 x_0 处的右极限也记为 $f(x_0^+)$ 或 $f(x_0+0)$。显然，如果 f 在 x_0 处极限存在，则其左右极限也存在且等于此极限。

例题 3.2 考虑函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases}$$

研究 f 在 $x_0 = 0$ 处的极限。

解 f 在 0 的左边为常数 0，右边为常数 1，故 f 在 0 处的左极限为 0，右极限为 1. 因为左右极限不相等，故 f 在 0 处的极限不存在。

命题 3.1

f 在 x_0 处有极限当且仅当 f 在 x_0 处的左极限和右极限都存在且相等。

♠

证明 必要性显然，只要证明充分性即可。设 f 在 x_0 处的左极限和右极限均为 α。由定义，任给 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$，使得

$$|f(x)-\alpha| < \varepsilon, \forall x \in (x_0-\delta_1, x_0); |f(x)-\alpha| < \varepsilon, \forall x \in (x_0, x_0+\delta_2)$$

记 $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $x \in V(x_0,\delta)$ 时 $|f(x)-\alpha| < \varepsilon$，这说明 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \alpha$。

命题 3.2 (极限的唯一性)

设 α,β 均为函数 f 在 x_0 处的极限，则 $\alpha=\beta$。

证明 任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_1>0,\delta_2>0$，使得

$$|f(x)-\alpha|<\varepsilon,\forall x\in V(x_0,\delta_1);|f(x)-\beta|<\varepsilon,\forall x\in V(x_0,\delta_2)$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则

$$|\alpha-\beta|\le|f(x)-\alpha|+|f(x)-\beta|<2\varepsilon,\forall x\in V(x_0,\delta)$$

由 ε 的任意性知 $\alpha-\beta=0$，即 $\alpha=\beta$。

命题 3.3 (夹逼原理)

设在 x_0 的一个空心开邻域中有

$$f_1(x)\le f(x)\le f_2(x)$$

如果函数 f_1,f_2 在 x_0 处的极限存在且等于 α，则 f 在 x_0 处的极限也等于 α。

证明 由定义，任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_1>0,\delta_2>0$，使得

$$|f_1(x)-\alpha|<\varepsilon,\forall x\in V(x_0,\delta_1);|f_2(x)-\alpha|<\varepsilon,\forall x\in V(x_0,\delta_2)$$

即

$$f_1(x)>\alpha-\varepsilon,\forall x\in V(x_0,\delta_1);f_2(x)<\alpha+\varepsilon,\forall x\in V(x_0,\delta_2)$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $x\in V(x_0,\delta)$ 时有

$$\alpha-\varepsilon<f_1(x)\le f(x)\le f_2(x)<\alpha+\varepsilon,\forall x\in V(x_0,\delta)$$

即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\alpha$。

命题 3.4 (绝对值性质)

设函数 f 在 x_0 处的极限为 α，则 $|f|$ 在 x_0 处的极限为 $|\alpha|$。

证明 因为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\alpha$，所以任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta\in(0,\delta_0)$，当 $x\in V(x_0,\delta)$ 时有 $|f(x)-\alpha|<\varepsilon$。则当 $x\in V(x_0,\delta)$ 时，有

$$||f(x)|-|\alpha||\le|f(x)-\alpha|<\varepsilon$$

则 $|f|$ 在 x_0 处的极限为 $|\alpha|$

命题 3.5

(1)(局部有界性) 如果函数 f 在 x_0 处有极限，则它在 x_0 的一个空心开邻域中有界。

(2)(保序性) 设函数 f,g 在 x_0 处的极限分别为 α,β。如果 $f(x)\geq g(x)$ 在 x_0 的一个空心开邻域中成立，则 $\alpha\geq\beta$；反之，如果 $\alpha>\beta$，则在 x_0 的一个空心开邻域中 $f(x)>g(x)$；特别地，如果 $\alpha>0$，则在 x_0 的一个空心开邻域中 $f(x)>0$。

(3)(四则运算) 设函数 f,g 在 x_0 处的极限分别为 α,β，则

1. $\lim\limits_{x\to x_0}[\lambda f(x)+\mu g(x)]=\lambda\alpha+\mu\beta$，其中 λ,μ 为常数；
2. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=\alpha\beta$；当 $\beta\neq 0$ 时 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)/g(x)=\alpha/\beta$

证明

(1) 因为函数 f 在 x_0 处有极限，不妨设为 α，则假设 $\varepsilon=1$，存在 $\delta\in(0,\delta_0)$，对 $x\in V(x_0,\delta)$，有

$$|f(x)-\alpha|<1$$

即

$$\alpha-1<f(x)<\alpha+1$$

取 $M=\max\{|\alpha-1|,|\alpha+1|\}$，则对 $\forall x\in V(x_0,\delta)$, 有 $|f(x)|\leq M$。则 f 在 x_0 的一个空心邻域中有界。

(2) 如果 $f(x)\geq g(x)$ 在 x_0 的一个空心开邻域中成立，不妨设存在 $\delta\in(0,\delta_0)$，对于 $x\in V(x_0,\delta)$，有 $f(x)\geq g(x)$, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta_1>0,\delta_2>0$, 对 $\forall x\in V(x_0,\delta_1)$, 有 $|f(x)-\alpha|<\varepsilon$。对 $\forall x\in V(x_0,\delta_2)$, 有 $|g(x)-\beta|<\varepsilon$。取 $\delta_3=\min\{\delta,\delta_1,\delta_2\}$，当 $x\in V(x_0,\delta_3)$ 时有

$$\alpha-\beta=(\alpha-f(x))+(f(x)-g(x))+(g(x)-\beta)\geq-\varepsilon-\varepsilon=-2\varepsilon$$

由 ε 的任意性知 $\alpha\geq\beta$。

如果 $\alpha>\beta$，取 $\varepsilon=\frac{\alpha-\beta}{2}$，存在 $\delta_1>0,\delta_2>0$，有

$$|f(x)-\alpha|<\varepsilon,\forall x\in V(x_0,\delta_1);|g(x)-\beta|<\varepsilon,\forall x\in V(x_0,\delta_2)$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，当 $x\in V(x_0,\delta)$ 时有

$$f(x)-g(x)=(f(x)-\alpha)+(\alpha-\beta)+(\beta-g(x))>-\varepsilon+\alpha-\beta-\varepsilon=0$$

即 $f(x)>g(x)$。

特别地，取 $\beta=0,g(x)=0$ 即得 $\alpha>0$ 时，存在 x_0 的一个空心邻域中 $f(x)>0$。

(3)

1. 因为函数 f,g 在 x_0 处的极限分别为 α,β，则对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_1>0,\delta_2>0$，有

$$|f(x)-\alpha|<\frac{\varepsilon}{|\lambda|+|\mu|},\forall x\in V(x_0,\delta_1);|g(x)-\beta|<\frac{\varepsilon}{|\lambda|+|\mu|},\forall x\in V(x_0,\delta_2)$$

则取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，对 $x\in V(x_0,\delta)$ 有

$$\begin{aligned}|\lambda f(x)+\mu g(x)-\lambda\alpha-\mu\beta|&=|\lambda(f(x)-\alpha)+\mu(g(x)-\beta)|\\&\leq|\lambda|\,|f(x)-\alpha|+|\mu|\,|g(x)-\beta|\\&<|\lambda|\frac{\varepsilon}{|\lambda|+|\mu|}+|\mu|\frac{\varepsilon}{|\lambda|+|\mu|}=\varepsilon\end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{x\to x_0}[\lambda f(x)+\mu g(x)]=\lambda\alpha+\mu\beta$

2. 因为函数 f,g 在 x_0 处的极限分别为 α,β，则对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_1>0,\delta_2>0$，有

$$|f(x)-\alpha|<\varepsilon,\forall x\in V(x_0,\delta_1);|g(x)-\beta|<\varepsilon,\forall x\in V(x_0,\delta_2)$$

设存在 $\delta_3>0,M>0$，对 $\forall x\in V(x_0,\delta_3)$，有

$$|f(x)|\leq M,|g(x)|\leq M$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$，当 $x\in V(x_0,\delta)$ 时，有

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-\alpha\beta| &= |f(x)(g(x)-\beta)+\beta(f(x)-\alpha)|\\ &\le |f(x)|\,|g(x)-\beta|+|\beta|\,|f(x)-\alpha|\\ &\le M\varepsilon+|\beta|\,\varepsilon\\ &= (M+|\beta|)\varepsilon\end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=\alpha\beta$。

要证当 $\beta\neq 0$ 时有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)/g(x)=\alpha/\beta$，即证当 $\beta\neq 0$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0} 1/g(x)=1/\beta$。

由函数极限的绝对值性质，因为 $\lim\limits_{x\to x_0}|g(x)|=|\beta|>\frac{1}{2}|\beta|$，所以由函数极限的局部保序性质，存在 $\delta_1>0$，当 $x\in V(x_0,\delta_1)$ 时，有 $|g(x)|>\frac{1}{2}|\beta|$。对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_2>0$，当 $x\in V(x_0,\delta_2)$ 时，有 $|g(x)-\beta|<\varepsilon$。取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，当 $x\in V(x_0,\delta)$ 时，有

$$\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{\beta}\right|=\frac{|g(x)-\beta|}{|g(x)|\,|\beta|}\le\frac{2\,|g(x)-\beta|}{|\beta|^2}<\frac{2\varepsilon}{|\beta|^2}$$

所以 $\lim\limits_{x\to x_0} 1/g(x)=1/\beta$，即证。

例题 3.3 设 $\alpha\neq 0$。研究幂函数 $f(x)=x^a$ 的函数极限。

解 分情况讨论。

(1)$a=k$ 为整数。当 $k>0$ 时，f 的定义域为 $\mathbb{R}$。当 $k<0$ 时 f 的定义域为 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$。利用函数极限的四则运算性质容易看出，在定义域内均有 $\lim\limits_{x\to x_0} x^a=x_0^a$。

(2)$a>0$ 且不是整数。此时 f 的定义域为 $[0,\infty)$。当 $x_0=0$ 时，任给 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon^{\frac{1}{a}}$，当 $x_0=0$ 时，任给 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon^{\frac{1}{a}}$，当 $0<x<\delta$ 时 $0<x^a<\varepsilon$，这说明 $\lim\limits_{x\to x_0^+} x^a=0$。当 $x_0>0$ 时，任给 $\varepsilon>0$，不妨设 $\varepsilon<x_0^a$，取

$$\delta=\min\{x_0-(x_0^a-\varepsilon)^{\frac{1}{a}},(x_0+\varepsilon)^{\frac{1}{a}}-x_0\}$$

当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$0<x_0-\delta<x<x_0+\delta$，从而有

$$-\varepsilon\le(x_0-\delta)^a-x_0^a<x^a-x_0^a<(x_0+\delta)^a-x_0^a\le\varepsilon$$

这说明 $\lim\limits_{x\to x_0} x^a=x_0^a$。

(3)$a<0$ 且不是整数。此时 f 的定义域为 $(0,\infty)$。利用 (2)，由 $x^a=(x^{-a})^{-1}$ 以及函数极限的四则运算性质容易看出，在定义域内仍有 $\lim\limits_{x\to x_0} x^a=x_0^a$。

例题 3.4 设 $a>0$。研究指数函数 $f(x)=a^x$ 的函数极限。

解 当 $a=1$ 时 $a^x\equiv 1$，因此 a^x 的极限处处为 1；当 $a>1$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=1$。任给 ε，存在 N，当 $n>N$ 时 $0<a^{\frac{1}{n}}-1<\varepsilon$。取 $\delta=\frac{1}{N}$，当 $0<x<\delta$ 时，

$$0<a^x-1<a^{\frac{1}{N}}-1<\varepsilon$$

当 $-\delta<x<0$ 时，上式表明 $1<a^{-x}<1+\varepsilon$，即 $(1+\varepsilon)^{-1}<a^x<1$，从而有

$$-\varepsilon<(1+\varepsilon)^{-1}-1<a^x-1<0$$

总之 $\lim\limits_{x\to 0} a^x=1$。利用 $a^x=a^{x_0}a^{x-x_0}$ 不难得出 $\lim\limits_{x\to x_0} a^x=a^{x_0}$。

当 $0<a<1$ 时，利用 $a^x=1/(a^{-1})^x$ 仍可得出 $\lim\limits_{x\to x_0} a^x=a^{x_0}$。

例题 3.5 设 $q>0,q\neq 1$。研究对数函数 $f(x)=\log_q x$ 的函数极限。

解 对数函数的定义域为 $(0,\infty)$。不妨设 $q>1,x_0>0$。任给 $\varepsilon>0$，取

$$\delta=\min\{x_0(1-q^{-\varepsilon}),x_0(q^{\varepsilon}-1)\}$$

当 $0<|x-x_0|$ 时

$$x_0(q^{-\varepsilon}-1)<x-x_0<x_0(q^{\varepsilon}-1)$$

即
$$x_0q^{-\varepsilon} < x < x_0q^{\varepsilon}, \log_q x_0 - \varepsilon < \log_q x < \log_q x_0 + \varepsilon$$
这说明 $\lim\limits_{x\to x_0} \log_q x = \log_q x_0$。

若 $0 < q < 1, x_0 > 0$, 由
$$\log_q x = \frac{\log_{q^{-1}} x}{\log_{q^{-1}} q} = -\log_{q^{-1}} x = \log_{q^{-1}} x^{-1}$$
所以
$$\lim_{x\to x_0} \log_q x = \log_{q^{-1}} x_0^{-1} = \frac{\log_q x_0^{-1}}{\log_q q^{-1}} = -\log_q x_0^{-1} = \log_q x_0$$
即 $\lim\limits_{x\to x_0} \log_q x = \log_q x_0$。

3.1.2 重要的函数极限

例题 3.6 研究函数 $\frac{\sin x}{x}$ 在 $x_0 = 0$ 处的极限。

解 先考虑 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，有 $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$，即
$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$$
由于 $\cos x$ 和 $\frac{\sin x}{x}$ 为偶函数，故上式对 $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ 也成立。因此当 $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ 时有
$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < 1 - \cos x = 2\sin^2(x/2) < 2(x/2)^2 = \frac{1}{2}x^2$$
由夹逼原理知
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$
注 当 $|x| \geq \frac{1}{2}\pi$ 时
$$|\sin x| \leq 1 < \frac{1}{2}\pi \leq |x|$$
因此我们得到下面的不等式:
$$|\sin x| \leq |x|, \forall x \in \mathbb{R}$$
等号仅在 $x = 0$ 处成立。

例题 3.7 当 $x_0 \in \mathbb{R}$ 时，有
$$\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0, \lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$$
证明 任给 $\varepsilon > 0$，取 $\delta = \varepsilon$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有
$$\begin{aligned}|\sin x - \sin x_0| &= 2\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right|\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \\ &\leq 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon\end{aligned}$$
任给 $\varepsilon > 0$，取 $\delta = \varepsilon$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有
$$\begin{aligned}|\cos x - \cos x_0| &= 2\left|\sin\frac{x+x_0}{2}\right|\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \\ &\leq 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon\end{aligned}$$
例题 3.8 研究函数 $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{|x|}}$ 在 $x_0 = 0$ 处的极限。

解 当 $x \neq 0$ 时，有
$$\left|\frac{|\sin x|}{\sqrt{|x|}}\right| \leq \frac{|x|}{\sqrt{|x|}} = \sqrt{|x|}$$
于是，任给 $\varepsilon > 0$，当 $0 < |x| < \varepsilon^2$ 时 $|f(x)| < \varepsilon$，这说明 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$。

下面我们讨论函数在变量趋于无穷远时的极限，数列极限其实就是变量趋于无穷远时的一种极限。

设函数 f 在 $(a,+\infty)$ 中有定义。如果存在 $\alpha \in \mathbb{R}$，使得对于任给的 $\varepsilon > 0$，均存在 $A > a$，当 $x > A$ 时 $|f(x)-\alpha| < \varepsilon$，则称 f 在 $+\infty$ 处有极限 α，记为

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \alpha \quad 或 \quad f(x) \to \alpha(x \to +\infty)$$

类似地，设 f 在 $(-\infty, a)$ 中有定义。如果存在 $\beta \in \mathbb{R}$，使得对于任给的 $\varepsilon > 0$，均存在 $B < a$，当 $x < B$ 时 $|f(x)-\beta| < \varepsilon$，则称 f 在 $-\infty$ 处有极限 β，记为

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \beta \quad 或 \quad f(x) \to \beta(x \to -\infty)$$

如果 f 在 $-\infty$ 以及 $+\infty$ 处的极限均为 γ，则称 f 在 ∞（无穷远）处有极限 γ，记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \gamma \quad 或 \quad f(x) \to \gamma(x \to \infty)$$

例题 3.9 研究函数 $f(x) = (1+\frac{1}{x})^x$ 在无穷远处的极限。

解 当 $x \ge 1$ 时，

$$(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]} < (1+\frac{1}{x})^x < (1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1}$$

其中 $[x]$ 是不超过 x 的最大整数。因此

$$(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]+1}(1+\frac{1}{[x]+1})^{-1} < (1+\frac{1}{x})^x < (1+\frac{1}{[x]})^{[x]}(1+\frac{1}{[x]})$$

利用数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$ 以及夹逼原理可得 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$。

当 $x \le -2$ 时，令 $y = -x-1$，则

$$\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{y\to+\infty}(1-\frac{1}{y+1})^{-y-1} = \lim_{y\to+\infty}(\frac{y+1}{y})^{y+1} = \lim_{y\to+\infty}(1+\frac{1}{y})^y(1+\frac{1}{y}) = e$$

这说明 $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$。

3.1.3 进一步的例子和性质

定理 3.1 (复合函数的极限)

设函数 $f(y)$ 在 y_0 处的极限为 α，函数 $g(x)$ 在 x_0 处的极限为 y_0。如果存在 x_0 的一个空心开邻域，在此开邻域中 $g(x) \ne y_0$，则复合函数 $f(g(x))$ 在 x_0 处的极限为 α。

证明 任给 $\varepsilon > 0$，由 $\lim\limits_{y\to y_0} = \alpha$ 可知，存在 $\delta > 0$，当 $0 < |y-y_0| < \delta$ 时 $|f(y)-\alpha| < \varepsilon$。因为 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = y_0$，对于这个 δ，存在 $\eta > 0$，使得当 $0 < |x-x_0| < \eta$ 时 $0 < |g(x)-y_0| < \delta$。此时 $|f(g(x))-\alpha| < \varepsilon$，这说明 $f(g(x))$ 在 x_0 处的极限为 α。

注

1. 定理中的条件 $g(x) \ne y_0$ 一般不能去掉，反例如下：令

$$f(y) = \begin{cases} 1, y \ne 0 \\ 0, y = 0 \end{cases}$$

$g(x) \equiv 0$，则 $\lim\limits_{y\to 0} f(y) = 1$，但 $f(g(x)) = 0$。不过，当 $f(y_0) = \alpha$ 时条件 $g(x) \ne y_0$ 可以去掉。[1]

2. 对于无穷远处的极限也有完全类似的结果。

例题 3.10 研究函数 $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 在 $x_0 = 0$ 处的极限。

解 作变量替换 $y = \frac{1}{x}$，则当 $x \to 0$ 时 $y \to \infty$，由复合函数的极限及例题 3.9 可得

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to\infty}(1+\frac{1}{y})^y = e$$

[1] 函数极限是对一点处函数值的逼近，与该点函数值无关。若 $f(y_0) \ne \alpha$ 时没有条件 $g(x) \ne y_0$，对 x 逼近 x_0 时，若映到 y_0，则会使得 $f(g(x))$ 超出范围，所以需要补充条件。若 $f(y_0) = \alpha$，则不需要补充条件。

等价地，我们有如下很有用的极限等式：

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

例题 3.11 设 $a>0$，研究函数 $\frac{a^x-1}{x}$ 在 $x_0=0$ 处的极限。

解 不妨设 $a\neq1$。作变量替换 $y=a^x-1$，则 $x\to0$ 时 $y\to0$。于是

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}&=\lim_{y\to0}\frac{y}{\log_a(1+y)}\\&=\lim_{y\to0}\frac{y}{\ln(1+y)}\ln a=\ln a\end{aligned}$$

例题 3.12 设 $a\in\mathbb{R}$，研究函数 $\frac{(1+x)^a-1}{x}$ 在 $x_0=0$ 处的极限。

解 不妨设 $a\neq0$。当 $x\to0$ 时 $a\ln(1+x)\to0$，于是

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^a-1}{x}&=\lim_{x\to0}\frac{e^{a\ln(1+x)}-1}{x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{e^{a\ln(1+x)}-1}{a\ln(1+x)}\frac{a\ln(1+x)}{x}\\&=\lim_{y\to0}\frac{e^y-1}{y}a=a\end{aligned}$$

定理 3.2 (单调函数的极限)

设函数 f 在 (a,b) 中有定义，如果 f 单调递增且有上界，或单调递减且有下界，则 f 在 b 处有左极限。对于右极限有类似的结论。

证明 以 f 单调递增为例。记 $\beta=\sup\{f(x)\mid x\in(a,b)\}$。根据确界的刻画，任给 $\varepsilon>0$，存在 $c\in(a,b)$，使得 $f(c)>\beta-\varepsilon$。记 $\delta=b-c$，当 $x\in(b-\delta,b)=(c,b)$ 时，由 f 单调递增可得

$$\beta-\varepsilon<f(c)\leq f(x)\leq\beta$$

于是 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=\beta$。

定理 3.3 (Heine 定理)

设函数 f 在 x_0 的一个空心开邻域中有定义，则 f 在 x_0 处的极限为 α 当且仅当对空心开邻域中任何收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}$，均有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\alpha$。

证明 必要性：由函数极限的定义，任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $x\in V(x_0,\delta)$ 时 $|f(x)-\alpha|<\varepsilon$。设 $\{x_n\}$ 是空心开邻域中收敛于 x_0 的数列，由数列极限的定义，对于上述 δ，存在 N，使得当 $n>N$ 时 $|x_n-x_0|<\delta$。这说明当 $n>N$ 时 $|f(x_n)-\alpha|<\varepsilon$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\alpha$。

充分性：（反证法）此时，根据函数极限的定义，存在 $\varepsilon_0>0$，使得任给 $n\geq1$，均存在 $x_n\in V(x_0,\frac{1}{n})$，使得 $|f(x_n)-\alpha|\geq\varepsilon_0$。这说明 $\{x_n\}$ 是空心开邻域中收敛于 x_0 的数列，但 $\{f(x_n)\}$ 不收敛到 α。

注

1. Heine 定理可以改述为应用起来较为方便的形式：$f(x)$ 在 x_0 处有极限 $\Longleftrightarrow$ 对空心开邻域中任何收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\},\{f(x_n)\}$ 均收敛。这时充分性的证明是这样的：只要说明如果 $\{f(x_n)\}$ 均收敛，则它们的极限必定都相同。设 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 是收敛于 x_0 的两个数列，使得 $\{f(x_n)\}$ 收敛于 α，$\{f(y_n)\}$ 收敛于 β。定义数列 $\{z_n\}$，使得 $z_{2k}=x_{2k},z_{2k-1}=y_{2k-1}(k\geq1)$，则 $\{z_n\}$ 收敛于 x_0，从而 $\{f(z_n)\}$ 收敛，此时必有 $\alpha=\beta$。
2. 对于单侧极限，无穷远处的极限，有完全类似的 Heine 型定理。

定理 3.4 (Cauchy 准则)

设 f 在 x_0 的空心开邻域中有定义，则 f 在 x_0 处有极限当且仅当任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $x,y\in V(x_0,\delta)$ 时 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$。

证明 必要性：设 f 在 x_0 处的极限为 α，则任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $x\in V(x_0,\delta)$ 时，$|f(x)-\alpha|<\varepsilon/2$。因此，当 $x,y\in V(x_0,\delta)$ 时

$$|f(x)-f(y)|\le|f(x)-\alpha|+|f(y)-\alpha|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

充分性：我们用 Heine 定理来证。设 $\{x_n\}$ 为 x_0 的空心开邻域中收敛于 x_0 的数列，由题设可知 $\{f(x_n)\}$ 是 Cauchy 数列，根据数列极限的 Cauchy 准则，$\{f(x_n)\}$ 收敛。由 Heine 定理即知 f 在 x_0 处有极限。

注

1. 对于无穷远处极限，Cauchy 准则仍然成立。
2. 从证明过程可以看出，f 在 x_0 处不存在极限当且仅当存在 $\varepsilon_0>0$，使得任给 $\delta>0$，总存在 $x,y\in V(x_0,\delta)$，使得 $|f(x)-f(y)|\ge\varepsilon_0$。

例题 3.13 研究 Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, x\in\mathbb{Q}\\ 0, x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

的极限。

解 在任何一点 x_0 附近都有点取值为 0 或 1，取 $\varepsilon=1$，由 Cauchy 准则知 D 在 x_0 处极限不存在。

3.1 练习

1. 设 $f\in C^0[a,b]$。如果任给 $x\in[a,b]$，均存在 $y\in[a,b]$，使得 $f(y)\le\frac{f(x)}{2}$，证明：存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)\le 0$
2. 求极限 $\lim\limits_{x\to x_0}R(x)$，其中 $R(x)$ 为 Riemann 函数
3. 设 f 为周期函数，如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=C$，证明 $f\equiv C$
4. 设 f,g 为两个周期函数，如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$，证明 $f=g$
5. 设 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}[f(2x)-f(x)]=0$，证明 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$
6. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cdots\cos nx}{x^2}$
7. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin(2\pi n!e)$ 的值。
8. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是任意给定的正数。计算极限
$$l=\lim_{x\to0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$$

3.2 无穷小（大）量

研究函数的变化趋势时，有两种情形特别值得注意。一种是趋于零的情形，另一种是趋于无穷大的情形。

无穷小量：设 x_0 为实数或 $\pm\infty$。如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，则称函数 f 在 $x\to x_0$ 时为无穷小量，记为 $f(x)=o(1)(x\to x_0)$。

无穷大量：如果 $1/f$ 在 $x\to x_0$ 时为无穷小量，则称 f 在 $x\to x_0$ 时为无穷大亮。

注 无穷小（大）量不是固定不变的数，而是变化的量（函数）。

对于数列，也有无穷小量和无穷大量的概念：如果数列 $\{a_n\}$ 收敛于 0，则称 $n\to\infty$ 时它是无穷小量，记为 $a_n=o(1)(n\to\infty)$；如果 $\{a_n\}$ 发散到无穷大，则称 $n\to\infty$ 时它是无穷大量。对于函数，无穷大亮也可以用趋于无穷的极限来描述。我们只介绍 x_0 为实数的情形，设 f 在 x_0 的一个空心开邻域中有定义。如果任给 $\alpha>0$，均存在 $\delta>0$，当 $x\in V(x_0,\delta)$ 时 $f(x)>\alpha$，则称 f 在 x_0 处的极限为 $+\infty$，记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=+\infty\quad\text{或}\quad f(x)\to+\infty(x\to x_0)$$

容易看出，f 在 $x\to x_0$ 时为无穷大量是指 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty$。

如果任给 $\beta < 0$，均存在 $\delta > 0$，当 $x \in V(x_0, \delta)$ 时 $f(x) < \beta$，则称 f 在 x_0 处的极限为 $-\infty$，记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \quad 或 \quad f(x) \to -\infty (x \to x_0)$$

我们也可以完全类似地给出 f 在 x_0 处的左极限或右极限为无穷大的定义。

例题 3.14 证明 $\sqrt{x+1} - 1 = o(1)(x \to 0)$。

证明 因为

$$\sqrt{x+1} - 1 = \frac{x}{\sqrt{x+1}+1} \to 0(x \to 0)$$

故由定义可知 $\sqrt{x+1} - 1$ 在 $x \to 0$ 时为无穷小量。

我们来考察常见的初等函数。根据前一节的结果，当 $x \to 0$ 时 $\sin x$ 为无穷小量。如果 k 为负整数，则 $x \to 0$ 时幂函数 x^k 为无穷大量。当 $a > 0$ 时，幂函数 x^a 在 $x \to +\infty$ 时为无穷大量。当 $a < 0$ 时，x^a 在 $x \to +\infty$ 时为无穷小量。当 $a > 1$ 时，指数函数 a^x 在 $x \to -\infty$ 时为无穷小量，在 $x \to +\infty$ 时为无穷大量。当 $q > 1$ 时，对数函数 $\log_q x$ 在 $x \to 1$ 时为无穷小量，$x \to +\infty$ 时为无穷大量。

我们经常需要比较两个变化量的大小，了解它们之间的量级关系。可以利用相对无穷小量和无穷大量来比较函数。

1. 如果 $f/g = o(1)(x \to x_0)$，则称当 $x \to x_0$ 时 f 关于 g 为高（低）阶无穷小（大）量，记为
$$f(x) = o(g(x))(x \to x_0)$$
2. 如果 f/g 在 x_0 的一个空心邻域中有界（我们约定：当 $g(x) = 0$ 时 $f(x) = 0$），则记
$$f(x) = O(g(x))(x \to x_0)$$
3. 对于数列也可以定义相对无穷小（大）量：设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 为两个数列，如果 $a_n/b_n = o(1)(n \to \infty)$，则称 $\{a_n\}$ 关于 $\{b_n\}$ 为无穷小量，记为 $a_n = o(b_n)$；无穷大量可类似定义。
4. 如果 f/g 在 x_0 处的极限为非零实数，则称当 $x \to x_0$ 时 f 和 g 是同阶量，记为
$$f(x) = O^*(g(x))(x \to x_0)$$
特别地，如果 f/g 在 x_0 处的极限等于 1，则称当 $x \to x_0$ 时 f 和 g 是等价量，记为
$$f \sim g(x \to x_0)$$
5. 设 $\alpha > 0$。如果 $|f(x)| = O^*(|x - x_0|^\alpha)(x \to x_0)$，则称当 $x \to x_0$ 时 f 是 α 阶无穷小量；如果 $|f(x)| = O^*(|x - x_0|^{-\alpha})(x \to x_0)$，则称当 $x \to x_0$ 时 f 是 α 阶无穷大量。α 为正整数时也可以将定义中的绝对值去掉。

注 这些量级的比较也可在无穷远处进行。

例题 3.15 证明 $1 - \cos x \sim x^2/2(x \to 0)$。

证明

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2(x/2)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

例题 3.16 设 $\alpha \in \mathbb{R}, b > 1$，则 $x^a = o(b^x)(x \to +\infty)$。

证明 不妨设 $\alpha \geq 0$。当 $x > 1$ 时

$$0 < \frac{x^a}{b^x} \leq \frac{([x]+1)^a}{b^{[x]}} = b\frac{([x]+1)^a}{b^{[x]+1}}$$

由 $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^a}{b^n} = 0$ 和夹逼原理知 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^a}{b^x} = 0$

例题 3.17 设 $a > 0$，则 $\ln x = o(x^a)(x \to +\infty)$。

证明 作变量替换 $y = \ln x$，则 $x \to +\infty$ 时 $y \to +\infty$，此时有

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^a} = \lim_{y \to +\infty} \frac{y}{e^{ay}} = \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{a} \frac{ay}{e^{ay}}$$

即 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$。

例题 3.18 设 $P(x), Q(x)$ 是次数相同的多项式，则 $P(x) = O^*(Q(x))(x \to \infty)$。

证明 设 $P(x), Q(x)$ 次数为 n。记

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n, Q(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n$$

其中，$a_0, b_0\neq 0$。由

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0+a_1x^{-1}+\cdots+a_nx^{-n}}{b_0+b_1x^{-1}+\cdots+b_nx^{-n}}$$

以及极限的四则运算性质可得 $\lim\limits_{x\to\infty}P(x)/Q(x)=a_0/b_0$。

定理 3.5 (等价代换)

设 $x\to x_0$ 时，$f\sim f_1, g\sim g_1$。如果 f_1/g_1 在 x_0 处有极限，则 f/g 在 x_0 处有极限，且两个极限相等。

证明 只要注意到

$$\frac{f}{g}=\frac{f}{f_1}\frac{f_1}{g_1}\frac{g_1}{g}$$

以及当 $x\to x_0$ 时 $f/f_1\to 1, g/g_1\to 1$ 即可。

注 等价代换在无穷远处也可进行。

例题 3.19 设 $\beta\neq 0$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$。

解 因为当 $x\to 0$ 时 $\sin\alpha x\sim\alpha x, \sin\beta x\sim\beta x$，故由等价代换可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha x}{\beta x}=\frac{\alpha}{\beta}$$

例题 3.20 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$。

解 当 $x\to 0$ 时

$$\tan x-\sin x=\frac{\sin x}{\cos x}(1-\cos x)\sim x(x^2/2)=x^3/2$$

故由等价代换可得 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=1/2$。

注 等价代换一般不能用于加法和减法运算。例如，当 $x\to 0$ 时，我们知道 $\tan x\sim\sin x\sim x$，但在上例中 $\tan x-\sin x$ 不能代换为零。

例题 3.21 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\tan^2 x}$。

解 有

$$\ln(1+x)\sim x(x\to 0)$$

于是，当 $x\to 0$ 时，有

$$\ln\cos x=\ln[1-(1-\cos x)]\sim-(1-\cos x)\sim -x^2/2$$

另一方面

$$\tan^2 x=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\sim x^2(x\to 0)$$

利用等价代换可得 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\tan^2 x}=-1/2$。

命题 3.6

设 f, g 分别在 y_0, x_0 的空心开邻域中有定义，且

$$f(y)=o(y-y_0)(y\to y_0), g(x)-y_0=O(x-x_0)(x\to x_0)$$

在以下两种情况下均有 $f\circ g(x)=o(x-x_0)(x\to x_0)$:

1. $x\neq x_0$ 时 $g(x)\neq y_0$
2. f 在 y_0 处有定义且 $f(y_0)=0$

证明 由题设，存在常数 M, 使得 $|g(x)-y_0|\leq M|x-x_0|$。特别地，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=y_0$。若条件 (1) 成立，则当 $x\neq x_0$

时
$$\left|\frac{f\circ g(x)}{x-x_0}\right|=\left|\frac{f\circ g(x)}{g(x)-y_0}\frac{g(x)-y_0}{x-x_0}\right|\le M\left|\frac{f\circ g(x)}{g(x)-y_0}\right|$$

当条件 (2) 成立时，定义函数 $\tilde{f}(y)$ 如下：$\tilde{f}(y_0)=0$；$y\neq y_0$ 时 $\tilde{f}(y)=\frac{f(y)}{y-y_0}$。此时 $\tilde{f}(y)=o(1)(y\to y_0)$，且 $f(y)=\tilde{f}(y)\cdot(y-y_0)$ 在 y_0 附近均成立。于是有
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f\circ g(x)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\tilde{f}(g(x))\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-y_0}{x-x_0}=0$$

3.3 连续函数

我们可以用函数极限来刻画连续变化的量。

3.3.1 定义和基本性质

定义 3.2 (连续函数)

设 f 在区间 I 中有定义，$x_0\in I$。如果 $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称 f 在 x_0 处连续；如果 $\lim_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称 f 在 x_0 处左连续；如果 $\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称 f 在 x_0 处右连续。如果 f 在 I 的内部每一点处都连续，且在可能的左端点处右连续以及右端点处左连续，则称 f 为 I 中的连续函数，记为 $f\in C^0(I)$。 ♣

注

1. 可以用 $\varepsilon-\delta$ 的语言来描述连续性：f 在 x_0 处连续是指任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$。注意：这里的 δ 一般依赖于给定的 x_0 和 ε。左连续和右连续可以类似地描述。
2. 上半连续和下半连续：如果任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时 $f(x)>f(x_0)-\varepsilon$，则称 f 在 x_0 处下半连续；如果任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时 $f(x)<f(x_0+\varepsilon$，则称 f 在 x_0 处上半连续。

根据前面的计算，我们知道正弦函数和余弦函数，幂函数，指数函数和对数函数在各自的定义域中均为连续函数。利用函数之间的四则运算和复合运算可以从已有的连续函数出发得到新的连续函数。

命题 3.7 (连续函数的保序性质)

设函数 f 在 x_0 处连续，如果 $f(x_0)\neq 0$，则在 x_0 附近 $f(x)$ 介于 $\frac{1}{2}f(x_0)$ 和 $\frac{3}{2}f(x_0)$ 之间。特别地，f 在 x_0 附近处处不为零且保持符号不变。 ♠

证明 不妨设 $f(x_0)>0$。在连续性的 $\varepsilon-\delta$ 语言描述中取 $\varepsilon=\frac{1}{2}f(x_0)$ 即得欲证结论。

命题 3.8 (连续函数的四则运算)

设 $f(x),g(x)$ 都在 x_0 处连续，则

1. $\lambda f(x)+\mu g(x)$ 在 x_0 处连续，其中 λ,μ 为常数；
2. $f(x)g(x)$ 在 x_0 处连续；
3. 当 $g(x_0\neq 0$ 时，$f(x)/g(x)$ 在 x_0 处连续。 ♠

命题 3.9 (复合函数的连续性)

设函数 $f(y)$ 在 y_0 处连续，函数 $g(x)$ 在 x_0 处的极限为 y_0，则 $f(g(x))$ 在 x_0 处的极限为 $f(y_0)$。特别地，当 g 在 x_0 处连续时，复合函数 $f(g(x))$ 在 x_0 处也连续。 ♠

命题 3.10 (绝对值与连续性)

设函数 f 在 x_0 处连续，则 $|f|$ 在 x_0 处也连续。 ♠

利用四则运算可知三角函数在其定义域中都是连续函数。将幂函数写成指数函数和对数函数的复合。例如，当 $x > 0$ 时 $x^a = e^{a\ln x}$，这说明利用指数函数和对数函数的连续性可以导出幂函数的连续性。

例题 3.22 如果 f, g 为连续函数，则 $\max\{f, g\}$ 和 $\min\{f, g\}$ 均为连续函数。

解 有

$$\max\{f, g\} = \frac{1}{2}\{(f+g) + |f-g|\}, \min\{f, g\} = \frac{1}{2}\{(f+g) - |f-g|\}$$

由四则运算和绝对值性质知 $\max\{f, g\}$ 和 $\min\{f, g\}$ 均为连续函数。

命题 3.11 (连续函数的有界性质)

设函数 f 在 x_0 处连续，则 f 在 x_0 附近局部有界。特别地，闭区间中的连续函数必为有界函数。

证明 f 的局部有界性质可由函数极限的局部有界性质直接得出。设 f 是 $[a, b]$ 中的局部有界函数，则任给 $x \in [a, b]$，均存在 $\delta(x) > 0$ 以及 $M(x)$，使得

$$|f(y)| \le M(x), \forall y \in (x - \delta(x), x + \delta(x)) \cap [a, b]$$

显然，$[a, b]$ 包含于集合族 $\{(x-\delta(x), x+\delta(x))\}_{x\in[a,b]}$ 之并。由 Heine-Borel 定理，存在 $x_1, \cdots, x_k \in [a, b]$，使得

$$[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^{k}(x_i - \delta(x_i), x_i + \delta(x_i))$$

记 $M = \max\{M(x_i) \mid i = 1, 2\cdots, k\}$，则 $|f| \le M$ 在 $[a, b]$ 中总成立。

推论 3.1

设 f 为闭区间中的连续函数。如果 f 处处为正，则 f 必有正下界；如果 f 处处为负，则 f 必有负上界。

证明 不妨设 f 处处为正，此时 $1/f$ 也是连续函数，从而是有界函数。特别地，存在常数 $M > 0$，使得 $0 < 1/f \le M$ 处处成立。这说明 $f \ge 1/M$ 处处成立。

3.3.2 间断点和振幅

如果函数 f 不在 x_0 处连续，则称 x_0 是 f 的一个**间断点**。可以将间断点分类：如果 $f(x)$ 在间断点 x_0 处的左极限 $f(x_0^-)$ 和右极限 $f(x_0^+)$ 都存在（且有极限），则称 x_0 为第一类间断点；其它的间断点都称为第二类间断点。左极限和右极限不相等的第一类间断点称为跳跃间断点，左极限和右极限相等的第一类间断点称为可去间断点。

例题 3.23 研究 *Riemann* 函数 $R(x)$ 的连续性，其中

$$R(x) = \begin{cases} 1/q, x = p/q, p, q\text{为互素正整数},p < q \\ 1, x = 0, 1 \\ 0, (0, 1)\text{中的无理数} \end{cases}$$

解 设 $x_0 \in [0, 1]$，我们来说明 $R(x)$ 在 x_0 处的极限为 0，因而 $R(x)$ 的间断点为有理点，它们都是可去间断点。

任给 $\varepsilon > 0$，因为满足条件 $1/q \ge \varepsilon$（即 $q \le 1\varepsilon$）的正整数只有有限多个，相应的既约分数 $p/q(p \le q)$ 也只有有限多个，记为 $\{x_i\}_{i=1}^k$。令

$$\delta = \min\{|x_i - x_0| \mid x_i \ne x_0, i = 1, 2, \cdots, k\}$$

当 $x \in V(x_0, \delta) \cap [0, 1]$ 时，如果 x 为无理数，则 $R(x) = 0$；如果 $x = p/q$ 为有理数，则 $R(x) = 1/q < \varepsilon$。总之，均有

$$|R(x) - 0| = R(x) < \varepsilon$$

这说明 $R(x)$ 在 x_0 处的极限为 0。

例题 3.24 研究 Gauss 函数 $G(x) = [x]$ 的连续性，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数。

解 任给整数 k，当 $k \le x < k+1$ 时，$[x] = k$。因此，当 x 不是整数时，$G(x)$ 在 x 处连续。当 $x = k$ 为整数时，

$G(x)$ 在 k 处的左极限为 $k-1$，右极限为 k。这说明 $G(x)$ 的间断点恰为所有的整数点。根据定义，Gauss 函数 $G(x)=[x]$ 的间断点都是跳跃间断点。

命题 3.12

设 f 是区间 (a,b) 中的单调函数，$x_0\in(a,b)$。如果 x_0 为 f 的间断点，则 x_0 是跳跃间断点。

证明 不妨设 f 单调递增。由单调性知 f 在 x_0 处的左极限和右极限都存在，且

$$f(x_0^-)\le f(x_0)\le f(x_0^+)$$

这说明，若 x_0 为 f 的间断点，则它必为跳跃间断点。

推论 3.2

设 f 是定义在区间 I 中的单调函数，则 f 的间断点全体组成至多可数集。

证明 不妨设 f 单调递增，且 I 为开区间。假设 $x_1<x_2$ 为间断点，则

$$f(x_1^-)\le f(x_1)\le f(x_1^+)\le f(x_2^-)\le f(x_2)\le f(x_2^+)$$

因此，区间 $(f(x_1^-),f(x_1^+))$ 和 $(f(x_2^-),f(x_2^+))$ 不相交。如果我们把每一个间断点 x 均对应到开区间 $(f(x^-),f(x^+))$ 中的一个有理数，则这个对应是单射。这说明 f 的间断点全体组成至多可数集。

对于一般的函数 f，判断 f 在某一点 x_0 处是否连续的方法有：

1. (Heine 定理) f 在 x_0 处连续当且仅当任给收敛到 x_0 的数列 $\{x_n\}$，$\{f(x_n)\}$ 均收敛到 $f(x_0)$；
2. (Cauchy 准则)f 在 x_0 处连续当且仅当任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$ 时 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$。

我们研究有界数列极限的时候，在证明 Cauchy 准则之前先引入了上下极限的概念。研究函数极限和连续性也可以这么做。为此，我们引入函数振幅的概念。某个变化量的振幅，是指其“最大”值和“最小”值之差。如果这个变化量的值趋于一个定数，则其振幅应趋于零。

定义 3.3 (振幅)

设 f 为区间 I 中的有界函数，记

$$\omega(f,I)=\sup\{|f(x)-f(y)|\mid x,y\in I\}$$

称为 f 在 I 中的振幅。设 $x_0\in I$，当 n 为正整数时，记

$$\omega_n(f,x_0)=\omega(f,(x_0-1/n,x_0+1/n)\cap I)$$

显然，数列 $\{\omega_n(f,x_0)\}$ 单调递减且有界，其极限记为 $\omega(f,x_0)$，称为 f 在 x_0 处的振幅。

引理 3.1

设 f 为区间 I 中的有界函数，则

$$\omega(f,I)=\sup\{f(x)\mid x\in I\}-\inf\{f(x)\mid x\in I\}$$

证明 f 在 I 中的上确界和下确界分别记为 M,m。任给 $x,y\in I$，$f(x),f(y)$ 均属于区间 $[m,M]$。这说明 $|f(x)-f(y)|\le M-m$。另一方面，由确界的刻画，任给 $\varepsilon>0$，存在 $x,y\in I$，使得

$$f(x)>M-\varepsilon/2,\ f(y)<m+\varepsilon/2$$

此时

$$|f(x)-f(y)|\ge f(x)-f(y)>M-m-\varepsilon$$

再一次由确界的刻画即得 $\omega(f,I)=M-m$。

记 $M_n(f,x_0),m_n(f,x_0)$ 分别为 f 在 $(x_0-1/n,x_0+1/n)\cap I$ 中的上确界和下确界，由此引理可得

$$\omega_n(f,x_0)=M_n(f,x_0)-m_n(f,x_0)$$

注意到数列 $\{M_n(f,x_0)\}$ 单调递减，$\{m_n(f,x_0)\}$ 单调递增，其极限分别记为 $\overline{f}(x_0),\underline{f}(x_0)$，称为 f 在 x_0 处的上极限和下极限。此时有 $\omega(f,x_0)=\overline{f}(x_0)-\underline{f}(x_0)$。

定理 3.6

设 f 为区间 I 中的有界函数，$x_0\in I$，则以下结论等价：

1. f 在 x_0 处连续
2. $\overline{f}(x_0)=\underline{f}(x_0)=f(x_0)$
3. $\omega(f,x_0)=0$

3.3 练习

1. 证明：如果一个连续函数在有理数上取值均为零，则它恒为零；两个连续函数如果在有理点上取值相同，则它们是相等的函数。（提示：无理数可以用有理数逼近，用 Heine 定理。）
2. 设函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足条件
$$f(x+y)=f(x)+f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}$$
证明：当 f 连续时，必存在常数 c，使得 $f(x)=cx$。
3. 函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足条件
$$f(x+y)=f(x)f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}$$
证明：当 f 连续时，要么 f 恒为零，要么存在常数 $a>0$，使得 $f(x)=a^x$。

3.4 连续函数的整体性质

连续函数的性质密切依赖于实数系的基本性质。

3.4.1 最值定理和介值定理

连续函数的性质实际上是实数系的基本性质的某种反应。

定理 3.7 (最值定理)

设 $f\in C^0[a,b]$，则 f 在 $[a,b]$ 中必定取到最大值和最小值，即存在 $x_*,x^*\in[a,b]$，使得

$$f(x_*)\leq f(x)\leq f(x^*),\forall x\in[a,b]$$

证明

证法一

因为 $f\in C[a,b]$，所以 f 有界，因此 f 必有上确界和下确界。记上确界为 M。根据确界的刻画，存在 $[a,b]$ 中的数列 $\{x_n\}$，使得

$$M-\frac{1}{n}\leq f(x_n)\leq M$$

根据 *Bolzano* 定理，$\{x_n\}$ 有收敛子列 $\{x_{n_i}$，其极限记为 x^*。由极限的保序性质可知 $x^*\in[a,b]$。因为 f 在 x^* 处连续，故 $\{f(x_{n_i}$ 收敛于 $f(x^*\}$。因为 f 在 x^* 处连续，故 $\{f(x_{n_i}\}$ 收敛于 $f(x^*)$。这说明，$f(x^*)=M$，M 即为 f 的最大值。同理可证 f 可以取到最小值 (或考虑 $-f$ 的最大值)。

证法二(反证法)

设 M 为 f 的上确界，但 f 处处不等于 M。此时，$M-f$ 是 $[a,b]$ 中处处为正的连续函数。则存在正数 C，使得 $M-f \geq C$。这说明 $f \leq M-C$ 处处成立，但这与 M 为 f 的上确界相矛盾。

注 闭区间的条件一般不能减弱，如 $f(x)=x$ 在 $(0,1)$ 中取不到最小（大）值。

定理 3.8 (零值定理，Bolzano)

设 $f \in C^0[a,b]$，如果 $f(a)f(b) \leq 0$，则存在 $\xi \in [a,b]$，使得 $f(\xi)=0$。

证明

证法一

不妨设 $f(a)<0, f(b) \geq 0$。将 $[a,b]$ 二等分，如果 $f(\frac{a+b}{2}) \geq 0$，则取 $a_1=a, b_1=\frac{a+b}{2}$；如果 $f(\frac{a+b}{2})<0$，则取 $a_1=\frac{a+b}{2}, b_1=b$。再将 $[a_1,b_1]$ 二等分，用 $[a_2,b_2]$ 表示满足 $f(a_2)<0, f(b_2) \geq 0$ 的那一半小区间。如此继续，可得闭区间套 $\{[a_n,b_n]\}$，使得 $f(a_n)<0, f(b_n) \geq 0$ 总成立。注意到 $b_n-a_n=2^{-n}(b-a)$ 趋于零，由闭区间套原理，存在 $\xi \in [a,b]$，使得 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均收敛于 ξ。由 f 连续可得

$$0 \geq \lim_{n\to\infty} f(a_n)=f(\xi)=\lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0$$

这说明 $f(\xi)=0$。

证法二(反证法)

不妨设 $f(a)<0, f(b)>0$。若 f 处处非零，考虑 $[a,b]$ 中的函数 $g(x)=\frac{f(x)}{|f(x)|}$，则 g 仍为连续函数。显然，当 $f(x)>0$ 时 $g(x)=1$；当 $f(x)<0$ 时 $g(x)=-1$。记

$$A=\{x \in [a,b] \mid g(x)=-1\}$$

则 $a \in A$。A 的上确界记为 ξ，则 $\xi \in [a,b]$。若 $g(\xi)=-1$，则 $\xi<b$。根据连续函数的保序性质，在 ξ 右边附近 g 是负的，从而只能等于 -1，但这与 ξ 的定义相矛盾；若 $g(\xi)=1$，则 $\xi>a$. 根据连续函数的保序性质，在 ξ 的左边附近 g 是正的，从而只能等于 1，但这也与 ξ 的定义相矛盾。

定理 3.9 (介值定理)

设 $f \in C^0[a,b]$，μ 是严格介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的数，则存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi)=\mu$。

证明 设 μ 是严格介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的数，则 $(f(a)-\mu)(f(b)-\mu)<0$。因此，由零点定理，连续函数 $f(x)-\mu$ 在 (a,b) 内存在零点 ξ，此时 $f(\xi)=\mu$。

推论 3.3

设 $f \in C^0[a,b]$，则 $f([a,b])=[m,M]$，其中 m, M 分别是 f 的最小值和最大值。

证明 当 $m=M$ 时，f 为常值函数，结论自然成立。设 $m<M$。显然，$f([a,b]) \subset [m,M]$。另一方面，由最值定理，存在 x_*, x^*，使得 $f(x_*)=m, f(x^*)=M$。由介值定理，介于 m 和 M 之间的值也能被 f 取到，因此 $[m,M] \subset f([a,b])$。这说明 $f([a,b])=[m,M]$。

推论 3.4

设 f 为区间 I 中的非常值连续函数，则 $f(I)$ 仍为区间。

证明 任取 $y_1<y_2 \in f(I)$，设 $f(x_1)=y_1, f(x_2)=y_2$，在以 x_1, x_2 为端点的闭区间上用介值定理，我们就知道 $[y_1,y_2] \subset f(I)$。由 y_1, y_2 的任意性知 $f(I)$ 为一个区间。

命题 3.13

设 f 为区间 I 中的单调函数，则 f 为非常值连续函数当且仅当 $f(I)$ 也是区间。

证明 如果 f 是连续函数，由前一推轮可知 $f(I)$ 是区间。反之，若 $f(I)$ 为区间，则由前一界讨论可知 f 没有间断点，从而连续。

推论 3.5

设 f 为区间 I 中的连续函数，则 f 可逆当且仅当它是严格单调函数，此时反函数也连续。

例题 3.25 设 $f:[a,b]\to[a,b]$ 为连续函数，则存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=\xi$。

证明 考虑 $[a,b]$ 中的函数 $F(x)=f(x)-x$。F 仍为连续函数，且

$$F(a)F(b)=(f(a)-a)(f(b)-b)\le 0$$

由零值定理，存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\xi$。

例题 3.26 证明奇数次的实系数多项式必有实根。

证明 设 $P(x)=a_0x^{2n-1}+a_1x^{2n-2}+\cdots+a_{2n-2}x+a_{2n-1}$ 是次数为 $2n-1(n\ge 1)$ 的多项式，系数 a_i 都是实数，且 $a_0\ne 0$。不妨设 $a_0>0$，则

$$\lim_{x\to\infty}x^{1-2n}P(x)=\lim_{x\to\infty}(a_0+a_1x^{-1}+\cdots+a_{2n-1}x^{1-2n}=a_0>0$$

从而存在 $x<0,y>0$，使得 $x^{1-2n}P(x)>0,y^{1-2n}P(y)>0$。此时 $P(x)<0,P(y)>0$。因为多项式是连续函数，由零值定理，存在 $\xi\in(x,y)$，使得 $P(\xi)=0$。

3.4.2 一致连续性

闭区间上的连续函数的另一条重要性质就是所谓的一致连续性。

定义 3.4 (一致连续)

设 f 是区间 I 中的函数。如果任给 $\varepsilon>0$，均存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得当 $x,y\in I$ 且 $|x-y|<\delta$ 时，$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$，则称 f 在 I 中一致连续。

注

1. 显然，一致连续函数一定是连续函数，一致连续性和连续性的区别就是，用 $\varepsilon-\delta$ 语言定义 x_0 处的连续性时，定义中出现的 δ 一般会依赖于 x_0 以及 ε，而一致连续性定义中出现的 δ 是不依赖于某个点的，即对所有的点都能取到一个公共的 δ，一致性就体现在这儿。
2. 可以用振幅来刻画一致连续性：f 在 I 中一致连续当且仅当任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当区间 $J\subset I$ 且 J 的长度小于 δ 时，$\omega(f,J)<\varepsilon$
3. f 在 I 中不一致连续当且仅当存在 $\varepsilon_0>0$，以及 I 中数列 $\{a_n\},\{b_n\}$，使得
$$|a_n-b_n|<\frac{1}{n},|f(a_n)-f(b_n)|\ge\varepsilon_0,\forall n\ge 1$$

定理 3.10 (一致连续的等价刻画)

设 I 是一个区间，则 $f:I\to\mathbb{R}$ 是一致连续的的充分必要条件是对任何 $\{x_n\},\{y_n\}\subset I$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$。都有

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n)-f(y_n)]=0$$

例题 3.27 研究函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x},x\in(0,+\infty)$ 的一致连续性。

解 取 $a_n=\frac{1}{2n\pi},b_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$，则

$$a_n-b_n=\frac{1}{2n\pi}-\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2n(4n+1)\pi}\to 0(n\to\infty)$$

且当 $n\ge 0$ 时，$|f(a_n)-f(b_n)|=1$。这说明 f 在 $(0,+\infty)$ 中不一致连续。

例题 3.28 研究三角函数 $\sin x,\cos x$ 的一致连续性。

解 任给 $x,y\in\mathbb{R}$，有

$$|\sin x-\sin y|=\left|2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\right|\le 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right|\le|x-y|$$

任给 $\varepsilon > 0$，取 $\delta = \varepsilon$。当 $x, y \in \mathbb{R}$，且 $|x-y| < \delta$ 时

$$|\sin x - \sin y| \le |x-y| < \delta = \varepsilon$$

这说明 $\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 中一致连续。同理，$\cos x$ 也一致连续。

$\sin x, \cos x$ 是所谓 Lipschitz 函数的特殊情形。

设 f 是 I 中的函数。如果存在 $o < \alpha < 1$，以及常数 M，使得

$$|f(x) - f(y)| \le M|x-y|^{\alpha}, \forall x, y \in I$$

则称 f 是 I 中的 α 阶 Hölder 函数，记为 $f \in C^{\alpha}(I)$；如果存在常数 L，使得

$$|f(x) - f(y)| \le L|x-y|, \forall x, y \in I$$

则称 f 为 I 中的 Lipschitz 函数，记为 $f \in Lip(I)$

Hölder 函数和 Lipschitz 函数都是一致连续的，在微分方程的研究中很有用。

命题 3.14

设 f, g 为区间 I 中的一致连续函数，$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$。则

1. $\lambda f + \mu g$ 在 I 中也是一致连续的
2. 如果 f, g 为有界函数，则 fg 也是一致连续的
3. 如果 f 有界，且 g 有正下界，则 $\frac{f}{g}$ 也是一致连续的
4. 一致连续函数的复合函数仍为一致连续函数

定理 3.11 (Cantor)

闭区间中的连续函数是一致连续函数的

证明

我们用两种方法证明。设 $f \in C^0[a,b]$

证法一(反证法)

若 f 不一致连续，则存在 $\varepsilon_0 > 0$，以及 $[a,b]$ 中的数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0, |f(a_n) - f(b_n)| \ge \varepsilon_0, \forall n \ge 1$$

根据 Bolzano 定理，$\{b_n\}$ 有收敛子列 $\{b_{n_i}$，设其极限为 ξ，则 $\xi \in [a,b]$。此时

$$a_{n_i} = (a_{n_i} - b_{n_i}) + b_{n_i} \to 0 + \xi = \xi (i \to \infty)$$

因为 f 在 ξ 处连续，故

$$\varepsilon_0 \le \left|f(a_{n_i} - f(b_{n_i})\right| \to |f(\xi) - f(\xi)| = 0 (i \to \infty)$$

这就导出了矛盾。

证法二

任给 $\varepsilon > 0$，因为 f 连续，故任给 $x \in [a,b]$，存在 $\delta(x) > 0$，使得

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon, \forall y \in (x - \delta(x), x + \delta(x)) \cup [a,b]$$

显然，$[a,b]$ 包含于开集族 $\{(x - \frac{\delta(x)}{2}, x + \frac{\delta(x)}{2})\}_{x\in[a,b]}$ 之并。根据有限覆盖定理，存在 $x_1, x_2, \cdots, x_k$，使得

$$[a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{k}(x - \frac{\delta(x_i)}{2}, x_i + \frac{\delta(x_i)}{2})$$

记 $\delta = \min\{\frac{\delta(x_i)}{2} \mid i = 1, 2, \cdots, k\}$。当 $x, y \in [a,b]$ 且 $|x-y| < \delta$ 时，不妨设 $x \in (x_i - \frac{\delta(x_i)}{2}, x_i + \frac{\delta(x_i)}{2}$，则

$$|y - x_i| \le |y - x| + |x - x_i| < \delta + \frac{\delta(x_i)}{2} \le \delta(x_i)$$

即 $y \in (x_i - \delta(x_i), x_i + \delta(x_i))$。此时有

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

这说明 f 在 $[a,b]$ 中一致连续。

3.4 练习

1. 设 f 在 $(a,c]$ 和 $[c,b)$ 中一致连续，证明 f 在 (a,b) 中也一致连续。
2. 研究下列函数的一致连续性：
$$(1)\sqrt{x},x\geq 0 \quad (2)x\cos\frac{1}{x},x>0 \quad (3)\cos\left(x^2\right),x\in\mathbb{R}$$
3. 设 f 为 $[a,+\infty)$ 中的连续函数，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\alpha\in\mathbb{R}$。证明 f 在 $[a,+\infty)$ 中一致连续。
4. 设 f 为 (a,b) 中的连续函数。证明：f 在 (a,b) 中一致连续当且仅当 f 在 a 处的右极限以及在 b 处的左极限均存在且有限。
5. 设 $f\in C^0[a,b]$，当 $x\in[a,b]$ 时，定义
$$M(x)=\max\{f(t)\mid a\leq t\leq x\},m(x)=\min\{f(t)\mid a\leq t\leq x\}$$
证明 $M(x)$ 和 $m(x)$ 也是 $[a,b]$ 中的连续函数。
6. 设 $f\in C^0(\mathbb{R})$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(f(x))=\infty$，证明 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$
7. 是否存在 $f\in C^0(\mathbb{R})$，使得 $f(f(x))=e^{-x}$?（考虑 f 的单调性）
8. 证明：$\mathbb{R}$ 中的连续周期函数必定一致连续；利用此结论说明 $\sin\left(x^2\right)$ 不是周期函数。
9. 设 $a>0,f\in Lip[a,+\infty)$。证明 $\frac{f(x)}{x}$ 为 $[a,+\infty)$ 中的一致连续函数。
10. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续，且对任何 $x\in[0,1]$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x+n)=0(n\in\mathbb{N}^*$ 。证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=$。举例说明，仅由 f 在 $[0,+\infty)$ 上的连续性推不出上述结论。
11. 如果 f 在 (a,b) 上一致连续，证明：f 在 (a,b) 上有界。
12. 若函数 f 和 g 都在区间 I 上一致连续，问 fg 是否在 I 上一致连续？试就 I 为有限区间或无穷区间分别讨论之。
13. 设对任意的 $x,y\in(-\infty.+\infty)$，函数 f 满足 $|f(x)-f(y)|\leq k\,|x-y|\,(0<k<1)$ 求证：
    (a). 函数 $kx-f(x)$ 递增
    (b). 存在唯一的 $\xi\in(-\infty,+\infty)$，使得 $f(\xi)=\xi$
14. 设 $f,g\in C[a,b]$。如果存在 $x_n\in[a,b]$，使得 $g(x_n)=f(x_{n+1})(n=1,2,\cdots)$，则必存在 $x_0\in[a,b]$，使得 $f(x_0)=g(x_0)$
15. 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上连续且有界。求证：对每一个数 $\lambda>0$，存在数列 $x_n\to+\infty$，使得
$$\lim_{n\to\infty}(f(x_n+\lambda)-f(x_n))=0$$

第四章 一元函数微分学

4.1 导数和微分

为了研究函数在某一点附近的局部变化性质，我们引入导数和微分的概念。将微分和积分这一对概念统一在一起的是重要的 Newton-Leibniz 公式。

4.1.1 导数和高阶导数

在前一章中我们研究了连续函数。函数 f 在 x_0 处连续大体上是指 f 在 x_0 附近变化不大。如果要将这种变化刻画得更精细一点，还可以考虑所谓的变化率，即研究 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 如何随 x 而变化。

定义 4.1 (导数)

设函数 f 在 x_0 附近有定义，如果极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在且有限，则称 f 在 x_0 处可导，此极限称为 f 在 x_0 处的导数，记为 $f'(x_0)$。

注

1. 如果记 $y=f(x),\Delta x=x-x_0,\Delta y=f(x)-f(x_0)$，则导数也可表示为
$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
用 f' 表示导数的是 Lagrange，Newton 常用 $\dot{y}$ 表示导数，Leibniz 则用 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ 表示导数。
2. 可以用 $\varepsilon-\delta$ 语言来描述导数：如果存在 $\alpha\in\mathbb{R}$，使得任给 $\varepsilon>0$，均存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，
$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\alpha\right|<\varepsilon$$
则 f 在 x_0 处可导，导数为 α。
如果考虑左、右极限，则有左导数和右导数的概念。左、右导数分别记为 $f'_-(x_0),f'_+(x_0)$。f 在 x_0 处可导当且仅当其左、右导数相等。

命题 4.1

设 f 在 x_0 处可导，则 f 在 x_0 处连续。

证明 设 f 在 x_0 处可导，则 $\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|$ 在 x_0 附近有界，即存在常数 C，使得
$$|f(x)-f(x_0)|\le C\,|x-x_0|\,,or\quad f(x)-f(x_0)=O(x-x_0)(x\to x_0)$$
特别地，f 在 x_0 处连续。

命题 4.2 (导数的四则运算)

设 f,g 在 x_0 处可导，$\lambda,\mu\in\mathbb{R}$，则 fg 和 $\lambda f+\mu g$ 也在 x_0 处可导，且

1. $(\lambda f+\mu g)'(x_0)=\lambda f'(x_0)+\mu g'(x_0)$
2. $(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$
3. 当 $g(x_0)\neq 0$ 时，$\frac{f}{g}$ 也在 x_0 处可导，且
$$(\frac{f}{g})'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

证明

1. 可从导数的定义和函数极限的性质直接得处
2. 设 f,g 在 x_0 处可导。利用

$$f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)=[f(x)-f(x_0)]g(x)+f(x_0)[g(x)-g(x_0)]$$

可得

$$\begin{aligned}(fg)'(x_0)&=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}\\&=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)+\lim_{x\to x_0}f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\\&=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)\end{aligned}$$

3. 由 g 在 x_0 处可导可知 g 在 x_0 处连续，再由 $g(x_0)\neq 0$ 可知 g 在 x_0 附近不为零。我们先说明 $\frac{1}{g}$ 在 x_0 处可导:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1/g(x)-1/g(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{-1}{g(x)g(x_0)}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=-\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0}$$

再对 $\frac{f}{g}=f\cdot(\frac{1}{g})$ 用 (2) 即得欲证等式。

例题 4.1 三角函数的导数

解 设 $x_0\in\mathbb{R}$，利用 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 可得

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}=\cos x_0$$

即 $(\sin x)'=\cos x$。同理可得 $(\cos x)'=-\sin x$。利用导数的四则运算可得

$$\begin{aligned}(\tan x)'&=\sec^2 x\\(\cot x)'&=-\csc^x 2\\(\sec x)'&=\sec x\tan x\\(\csc x)'&=-\csc x\cot x\end{aligned}$$

例题 4.2 幂函数的导数

解 设 $x_0\neq 0$ 且属于幂函数 x^a 的定义域，有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x^a-x_0^a}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(\frac{x}{x_0})^a-1}{\frac{x}{x_0}-1}x_0^{a-1}=ax_0^{a-1}$$

例题 4.3 指数函数和对数函数的导数

解 设 $a>0,a\neq 1$。当 $x_0\in\mathbb{R}$ 时，有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{a^x-a^{x_0}}{x-x_0}=a^{x_0}\lim_{x\to x_0}\frac{a^{x-x_0}-1}{x-x_0}=a_{x_0}\ln a$$

特别地，$(e^x)'=e^x$。定义

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$，于是 $(\cosh t,\sinh t)$ 可以视为双曲线 $x^2-y^2=1$ 的一种参数化。$\sinh x,\cosh x$ 分别称为双曲正弦函数和双曲余弦函数。和三角函数类似，我们还有双曲正切函数 $\tanh x$ 和双曲余切函数 $\coth x$:

$$\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x},\coth x=\frac{\cosh x}{\sinh x}$$

这些都称为双曲三角函数。简单的计算表明，双曲三角函数满足如下等式:

$$\begin{aligned}\sinh(x+y)&=\sinh x\cdot\cosh x+\cosh x\cdot\sinh x\\\sinh(x-y)&=\sinh x\cdot\cosh y-\cosh x\cdot\sinh y\\\cosh(x+y)&=\cosh x\cdot\cosh y+\sinh x\cdot\sinh y\\\cosh(x-y)&=\cosh x\cdot\cosh y-\sinh x\cdot\sinh y\end{aligned}$$

利用导数的四则运算可得

$$(\sinh x)' = \cosh x, (\cosh x)' = \sinh x$$

$$(\tanh x)' = 1 - (\tanh x)^2, (\coth x)' = 1 - (\coth x)^2$$

我们考虑对数函数的导数。设 $x_0 > 0$，可得

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\ln(x/x_0)}{x/x_0 - 1} \frac{1}{x_0} = \frac{1}{x_0}$$

当 $q > 1, q \neq 1$ 时，利用 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ 可得 $(\log_q x)' = \frac{(\ln x)'}{\ln q} = \frac{1}{x \ln q}$

当 f 在区间 I 处处可导时，f' 称为 f 的导函数，它在 $x \in I$ 处的值等于 f 在 x 处的导数。在不引起混淆的情况下，导函数也简称导数。

高阶导数 设函数 f 在 x_0 附近处处可导，如果导函数 f' 在 x_0 处仍可导，则称 f 在 x_0 处二阶可导。记 $f''(x_0) = (f')'(x_0)$，称为 f 在 x_0 处的二阶导数。一般地，如果 f 在 x_0 附近 $n(n \geq 1)$ 阶可导，且 n 阶导函数 $f^{(n)}(x)$ 在 x_0 处可导，则称 f 在 x_0 处 $n+1$ 阶可导，记 $f^{(n+1)}(x_0) = (f^{(n)})'(x_0)$，称为 f 在 x_0 处的 $n+1$ 阶导数。

按照我们的记号，$f^{(1)} = f', f^{(2)} = f'', f^{(3)} = f'''$，等等。我们约定 $f^{(0)} = f$。有时也用如下记号表示高阶导数:

$$f'' = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}, f^{(3)} = f''' = \frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}$$

如果 f 在区间 I 的每一点处均 n 阶可导，则称 f 在 I 中 n 阶可导；如果 f 可导，且导函数 f' 连续，则称 f 为连续可导函数，记为 $f \in C^1(I)$;一般地，如果 f 在 I 中 n 阶可导，且导函数 $f^{(n)}(x)$ 连续，则称 f 为 n 阶连续可导函数，记为 $f \in C^n(I)$。如果 f 在 I 中存在任意阶导数，则称 f 为光滑函数，记为 $f \in C^\infty(I)$

三角函数、指数函数、对数函数、多项式函数在各自的定义域中都是光滑函数。

4.1.2 微分和全微分

导数是函数的变化率。我们也可以从几何的角度解释导数。考虑函数 f 在 x_0 附近的图像，经过图像上两点 $(x_0, f(x_0))$ 和 $(x, f(x))$ 的直线（称为割线）的方程为

$$y(t) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(t - x_0) + f(x_0), t \in \mathbb{R}$$

当 $x \to x_0$ 时，考察割线如何变化。当 f 在 x_0 处可导时，割线的极限位置是一条经过 $(x_0, f(x_0)$ 且斜率为 $f'(x_0)$ 的直线，称为 f 在 x_0 处的切线，其方程为

$$y(t) = f'(x_0)(t - x_0) + f(x_0), t \in \mathbb{R}$$

方程 $(x - x_0) + f'(x_0)(y - f(x_0)) = 0$ 所代表的直线则称为 f 在 x_0 处的法线。

切线可以视为 f 的图像在 x_0 处的线性逼近。即，函数 f 在 x_0 附近可以近似地看成线性函数，这种线性逼近或线性化的方法是我们研究函数的一种基本手法。比如，在力学中，考察某个质点的运动时，其运动轨迹可能非常复杂，但在一个非常短的时间之内往往可以认为该质点在做匀速直线运动。引入下面的概念使得我们可以严格地描述这种现象。

定义 4.2 (微分)

设函数 f 在 x_0 附近有定义。如果存在 $\alpha \in \mathbb{R}$，使得

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x - x_0) + o(x - x_0)(x \to x_0)$$

则称 f 在 x_0 处可微，线性映射

$$\mathrm{d}f(x_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \alpha t$$

称为 f 在 x_0 处的微分。

♣

注 函数在某一代处的导数是一个实数，而微分则是一个线性映射。二者之间的关系体现在下面的命题中。

命题 4.3

设 f 在 x_0 附近有定义，则 f 在 x_0 处可导当且仅当 f 在 x_0 处可微，且微分的斜率就是导数 $f'(x_0)$

证明 设 f 在 x_0 处可导，记

$$R_f(x,x_0)=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)$$

则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_f(x,x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)=0$$

即 $R_f(x,x_0)=o(x-x_0)(x\to x_0)$，从而 f 在 x_0 处可微。

反之，设 f 在 x_0 处可微，$f(x)=f(x_0)+\alpha(x-x_0)+o(x-x_0)$，则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\alpha+\lim_{x\to x_0}\frac{o(x-x_0)}{x-x_0}=\alpha$$

这说明 f 在 x_0 处可导，且导数 $f'(x_0)=\alpha$

命题 4.4 (链式法则)

设 g 在 x_0 处可导，f 在 $g(x_0)$ 处可导，则复合函数 $f\circ g=f(g)$ 在 x_0 处可导，且

$$[f(g)]'(x_0)=f'(g(x_0))g'(x_0)$$

证明 记 $y_0=g(x_0)$，有 $R_f(y,y_0)=o(y-y_0)$，又有 $g(x)-y_0=O(x-x_0)(x\to x_0)$，所以有

$$R_f(y,y_0)=o(x-x_0)(x\to x_0)$$

这说明

$$\begin{aligned}f(g(x))&=f(y_0)+f'(y_0)(g(x)-y_0)+R_f(y,y_0)\\&=f(y_0)+f'(y_0)[g'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)]+o(x-x_0)\\&=f(y_0)+f'(y_0)g'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)\end{aligned}$$

因此 $f(g)$ 在 x_0 处可微（可导），其导数为 $f'(y_0)g'(x_0)$

注 链式法则对于任意有限个函数的复合也适用，比如

$$[f(g(h))]'=f'(g(h))g'(h)h'$$

例题 4.4 设 k 为正整数，定义

$$f(x)=\begin{cases}x^{2k+1}\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

研究 f 的高阶导函数。

解 可以算出 $f'(0)=0$，且

$$f'(x)=\begin{cases}(2k+1)x^{2k}\sin\dfrac{1}{x}-x^{2k-1}\cos\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

同理，可以算出

$$f''(x)=\begin{cases}2k(2k+1)x^{2k-1}\sin\dfrac{1}{x}-4kx^{2k-2}\cos\dfrac{1}{x}-x^{2k-3}\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

继续求导可得 $f^{(k)}(0)=0$，且当 $x\neq 0$ 时

$$f^{(k)}(x)=x^2\phi(x)\mp x\sin\frac{1}{x}\quad\text{或}\quad x^2\phi(x)\mp x\cos\frac{1}{x}$$

其中 $\phi(x)$ 在 $x=0$ 附近有界。于是 $f^{(k)}(x)$ 连续但在 $x=0$ 处不可导。特别地，f 是 C^k 函数，但不是 C^{k+1} 函数。

例题 4.5 定义

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ e^{-\frac{1}{x}} & x>0\end{cases}$$

研究 f 的高阶导函数。

解 如同前面的例子那样，可以计算出 $f'(0)=0$，且

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ x^{-2}e^{-\frac{1}{x}} & x>0\end{cases}$$

我们用归纳法说明

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ p_k(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}} & x>0\end{cases}$$

其中 $p_k(t)$ 是次数为 $2k$ 的多项式。$k=1$ 时，$p_1(t)=t^2$。假设 $f^{(k)}$ 如上，则显然 $f_-^{(k+1)}(0)=0$，而

$$f_+^{(k+1)}(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{p_k(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{tp_k(t)}{e^t}=0$$

因此 $f^{(k+1)}(0)=0$。当 $x>0$ 时，

$$f^{(k+1)}(x)=p_k'(\frac{1}{x})\frac{-1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}+p_k(\frac{1}{x})\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=p_{k+1}(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}$$

其中 $p_{k+1}(t)=t^2p_k(t)-t^2p_k'(t)$。这就说明 f 时任意阶可导的光滑函数。

命题 4.5 (反函数求导法则)

设 f 在 x_0 附近连续且有反函数 g。如果 f 在 x_0 处可导且导数 $f'(x_0)\neq 0$，则 g 在 $y_0=f(x_0)$ 处可导，且 $g'(y_0)=[f'(x_0)]^{-1}$。

证明

$$\lim_{y\to y_0}\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}=\lim_{y\to y_0}[\frac{f(g(y))-f(g(y_0))}{g(y)-g(y_0)}]^{-1}=[f'(x_0)]^{-1}$$

注 导数 $f'(x_0)\neq 0$ 的条件不能去掉。例如 $f(x)=x^3$ 是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的可逆函数，f 处处可导，但其反函数 $g(y)=y^{\frac{1}{3}}$ 在 $y=0$ 处不可导。

例题 4.6 反三角函数的导数

证明 正弦函数 $\sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 中可逆，其反函数记为 $\arcsin x$。由反函数求导公式得

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\cos\arcsin x}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\arcsin x}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

余弦函数 $\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 中可逆，其反函数记为 $\arccos x$。由反函数求导公式得

$$(\arccos x)'=\frac{1}{-\sin\arccos x}=\frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2\arccos x}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

正切函数 $\tan x$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 中可逆，其反函数记为 $\arctan x$，则有

$$(\arctan x)'=\frac{1}{\sec^2\arctan x}=\frac{1}{1+\tan^2\arctan x}=\frac{1}{1+x^2}$$

余切函数 $\operatorname{arccot} x$ 在 $(0,\pi)$ 中可逆，其反函数记为 $\operatorname{arccot} x$。同理可得

$$(\operatorname{arccot} x)'=\frac{1}{-\csc^2\operatorname{arccot} x}=-\frac{1}{1+\cot^2\operatorname{arccot} x}=-\frac{1}{1+x^2}$$

例题 4.7 求函数 $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ 的导数。

例题 4.8 设 $u(x)>0,u(x),v(x)$ 都是可导函数，求 $f(x)=u(x)^{v(x)}$ 的导数。

解 我们对 $f(x)=u(x)^{v(x)}$ 求对数再求导：

$$(\ln f(x))'=(v(x)\ln u(x))'=v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{1}{u(x)}u'(x)$$

利用复合求导得到

$$f'(x) = f(x)(\ln f(x))' = u(x)^{v(x)}(v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}$$

上面例子中求对数再求导的方法称为对数法，这是很常用的求导数技巧。

我们知道，f 在 x 处的微分是一个斜率为 $f'(x)$ 的线性映射，当 x 变化时，这些线性映射也随之变化，因此 $x \mapsto \mathrm{d}f(x)$ 是一个新的映射，记为 $\mathrm{d}f$，称为 f 的全微分或外微分。在这个意义下，函数 $f(x) = x$ 的全微分 $\mathrm{d}x$ 是这样一个映射，它把任意点 x 均映为 x 处的恒同线性映射。全微分之间可以自然地定义加法和数乘运算，比如 $\mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x$。一般地，我们把形如 $g(x)\mathrm{d}x$(g 为函数) 的表达式称为一次微分形式。根据导数的运算法则，我们有

命题 4.6

设 f, g 可导，$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$，则

1. $\mathrm{d}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathrm{d}f + \mu \mathrm{d}g$
2. $\mathrm{d}(fg) = g\mathrm{d}f + f\mathrm{d}g$
3. $\mathrm{d}(\frac{f}{g}) = \frac{g\mathrm{d}f - f\mathrm{d}g}{g^2}$，其中 $g \neq 0$

对于可导函数来说，复合函数的链式法则则可以重新表述为全微分的形式不变性，即

命题 4.7

设 f, g 均可导，且复合函数 $f(g)$ 有定义，则 $\mathrm{d}[f(g)] = f'(g)\mathrm{d}g$

证明 根据复合求导和外微分的定义，有

$$\mathrm{d}[f(g)] = [f(g)]'\mathrm{d}x = f'(g)g'\mathrm{d}x = f'(g)\mathrm{d}g$$

有时候，函数不是通过显式表达式给出，而是隐式地给出，称为隐函数. 这时利用全微分算导数显得比较容易一些。

例题 4.9 设 $-y^2 + 2e^y = x^2$ 决定了隐函数 $y = f(x)$，求 f 的导数。

解 在等式两边微分可得

$$-2y\mathrm{d}y + 2e^y\mathrm{d}y = 2x\mathrm{d}x$$

因此

$$\mathrm{d}y = \frac{x}{e^y - y}\mathrm{d}x$$

这说明 f 的导数为 $\frac{x}{e^y-y}$

4.1 练习

1. 设 f, g 为 n 阶可导函数，证明 Leibniz 公式 $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}$
2. 通过对 $(1+x)^n$ 求导并利用二项式定理证明：
$$(1)\sum_{k-0}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}; (2)\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k = n(n+1)2^{n-2}$$
3. 通过对 $(1-x)^n$ 求导并利用二项式定理证明等式：
$$f(x) = \begin{cases} 0 & m = 0, 1, \cdots, n-1 \\ (-1)^n n! & m = n \end{cases}$$
4. 设 $a_{ij}(x)$ 均为可导函数，求行列式函数 $det(a_{ij}(x))_{n\times n}$ 的导数。
5. 证明 Riemann 函数 R(x) 处处不可导。

6. 设 $f(0)=0, f'(0)$ 存在且有限，令

$$x_n = f(\frac{1}{n^2}) + f(\frac{2}{n^2}) + \cdots + f(\frac{n}{n^2})(n \in \mathbb{N}^*)$$

试求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$，并利用以上结果，计算：

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n^2} \quad (2)\ \lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}(1+\frac{i}{n^2})$$

7. 求证：在 $\mathbb{R}$ 不存在可导函数 f，满足

$$f \circ f(x) = -x^3 + x^2 + 1$$

8. 求证：在 $\mathbb{R}$ 不存在可导函数 f，满足

$$f \circ f(x) = x^2 - 3x + 3$$

9. 设 $f(x) = (1+\sqrt{x})^{2n+2}(n \in \mathbb{N}^*$。求 $f^{(n)}(1)$

4.2 函数的极值

定义 4.3 (极值点)

设 f 是定义在区间 I 中的函数，$x_0 \in I$。如果存在 $\delta > 0$，使得

$$f(x) \geq f(x_0)(f(x) \leq f(x_0)), \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap I$$

则称 x_0 为 f 在 I 中的一个极小（大）值点，$f(x_0)$ 称为极小（大）值。

. 如果，$x_0 \in I$，且

$$f(x) \geq f(x_0)(f(x) \leq f(x_0)), \forall x \in I$$

则称 x_0 为 f 在 I 中的一个最小（大）值点，$f(x_0)$ 称为最小（大）值。

我们把极小值点和极大值点统称为极值点，极小值和极大值统称为极值，最大值和最小值统称最值。当定义中的不等号在 x_0 的空心领域中严格成立时，相应的极值点称为严格极值点，相应的极值称为严格极值。当 $x_0 \in I$ 且 x_0 不是 I 的端点时，称 x_0 为 I 的内点。

定理 4.1 (Fermat)

设 x_0 是函数 f 在 I 中的极值点。如果 f 在 x_0 处可导，且 x_0 为 I 的内点，则 $f'(x_0)=0$

注

- 如果 x_0 为 f 在 I 中的极值点，但不是 I 的内点，则有结论：设 x_0 是 I 的左端点，如果 x_0 为 f 的极小（大）值点，则 $f'_+(x_0) \geq 0(\leq 0)$; 设 x_0 是 I 的右端点，如果 x_0 为 f 的极小（大）值点，则 $f'_-(x_0) \leq 0(\geq 0)$
- 函数可能在不可导点处取极值，例如 $f(x)=|x|, x \in [-1,1]$ 在 $x_0=0$ 处取到最小值，但 f 在 $x_0=0$ 处不可导，不过其左导数小于零，右导数大于零。
- 我们把满足 $f'(x_0)=0$ 的点称为 f 的驻点或临界点。需要注意的是，驻点不必为极值点，例如 $f(x)=x^3, x_0=0$ 为 f 的驻点，但不是极值点。

命题 4.8

设 $\delta>0$，f 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 中连续，在 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 中可导。如果

$$f'(x)\le 0, x\in(x_0-\delta,x_0), f'(x)\ge 0, x\in(x_0,x_0+\delta)$$

则 x_0 为 f 的极小值点。如果

$$f'(x)\ge 0, x\in(x_0-\delta,x_0), f'(x)\le 0, x\in(x_0,x_0+\delta)$$

则 x_0 为 f 的极大值点。

命题 4.9

设 f 在内点 x_0 处二阶可导，且 $f'(x_0)=0$。则

- 当 $f''(x_0)>0$ 时，x_0 为 f 的（严格）极小值点
- 当 $f''(x_0)<0$ 时，x_0 为 f 的（严格）极大值点

推论 4.1

设 f 在内点 x_0 处二阶可导，x_0 为 f 的极小（大）值点，则 $f''(x_0)\ge 0(\le 0)$

命题 4.10

设 $f:R\to R$ 为连续函数，且

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty(-\infty)$$

则 f 在 R 中达到最小（大）值。

4.3 微分中值定理

定理 4.2 (Darboux 定理)

设 f 在 $[a,b]$ 中可导，则 f' 可以取到介于 $f'_+(a)$ 和 $f'_-(b)$ 之间的任意值。

证明 设 μ 是介于 $f'_+(a)$ 和 $f'_-(b)$ 之间的数。考虑函数 $g(x)=f(x)-\mu x$，则

$$g'_+(a)g'_-(b)=(f'_+(a)-\mu)(f'_-(b)-\mu)\le 0$$

如果上式为零，则 μ 等于 f 在 a 或 b 处的导数；否则，不妨设 $g'_+(a)>0, g'_-(b)<0$，根据 Fermat 定理的证明，a 和 b 都不是 g 的最大值。于是 g 在 $[a,b]$ 的内部某一点 ξ 处取到最大值。由 Fermat 定理，$g'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=\mu$

推论 4.2 (反函数定理)

设 f 在区间 I 中可导，如果 f' 处处非零，则函数 $f:I\to f(I)$ 可逆，且其反函数也可导。

证明 如果 f' 处处非零，则由 Darboux 定理，f' 恒为正或负。则 f 为严格单调函数，则 f 可逆，且其反函数也可导。

定理 4.3 (Rolle)

设 $f\in C^0[a,b]$。如果 f 在 (a,b) 中可导且 $f(a)=f(b)$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$

设 f 是 n 阶可导函数，且 $f(x)=0$ 有 n 个不同的解 $\{x_9\}_{i=1}^n$，则任给 $c\in[a,b]$，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(c)=\frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)\prod_{i=1}^n(c-x_i)$$

proof

不妨设 $c \neq x_i(1 \leq i \leq n)$，令

$$g(x) = f(x) - \frac{f(c)}{\prod_{i=1}^n (c - x_i)} \prod_{i=1}^n (x - x_i), x \in [a, b]$$

此时 $g(x)$ 有 $n+1$ 个不同的零点 $c, x_i(1 \leq i \leq n)$，对 g 反复使用 Rolle 定理可知，存在 $\xi \in (a, b)$，使得 $g^{(n)}(\xi) = 0$。即证

一般地，如果 f 是 n 阶可导函数，设 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 为 $[a, b]$ 中 n 个不同的点，令

$$p_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^n [\prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - xj)}] f(x_i)$$

则 p_{n-1} 是次数不超过 $n-1$ 的多项式，它与函数 f 在 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 处取值相同，称为 f 的 Lagrange 插值多项式。对 $f - p_{n-1}$ 应用上述公式，得

$$f(x) - p_{n-1}(x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi) \prod_{i=1}^n (x - x_i), \xi \in (a, b)$$

上式称为插值多项式的余项公式，它可用来估计误差。

定理 4.4 (Lagrange)

设 $f \in C^0[a, b]$。如果 f 在 (a, b) 中可导，则存在 $\xi \in (a, b)$，使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

推论 4.3

设 $f \in C^0[a, b]$，如果 f 在 (a, b) 中可导且导数恒为零，则 f 为常值函数

定理 4.5 (Cauchy)

设 $f, g \in C^0[a, b]$ 且在 (a, b) 中可导。如果 g' 在 (a, b) 中处处非零，则存在 $\xi \in (a, b)$，使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$