数学分析

Mathematical Analysis

作者：Peknt

组织：清疏大学

时间：March 20, 2024

版本：1.1

作者联系方式：QQ2499032096

或许是不知梦的缘故，流离之人追逐幻影

前言

参考书

教材

- 数学分析，梅加强
- 数学分析，徐森林　薛春华
- 数学分析教程, 常庚哲　史济怀
- 数学分析，楼红卫
- 数学分析中的问题和反例，汪林
- 基本分析讲义: 第一卷 (单变量理论), 李逸

习题集

- 数学分析习题演练，周民强
- 数学分析中的典型问题与方法，裴礼文
- 数学分析习题课讲义，谢惠民

参考资料

- 第十一届清疏大学生数学竞赛班讲义
- 第十届清疏大学生数学竞赛班讲义
- 第九届清疏大学生数学竞赛班讲义
- 南开大学凯淼淼 notes

目录

第一章 实数理论

第二章 数列极限

2.1 数列极限

2.1.1 数列极限的定义

定义 2.1 (数列)

定义在正整数集 $\mathbb{N}$ 上的函数称为数列。设 $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ 为数列，记 $a_n = f(n)$，数列 f 常表示为

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

简记为 a_n，a_n 称为该数列的第 n 项，有时也称为一般项或通项。

♣

注 因为可数集可以与 $\mathbb{N}$ 建立一一对应，定义在可数集上的函数也可以称为数列。比如定义在非负整数集上的函数也是数列，这种数列可以用 $a_0, a_1, \cdots$ 表示。

定义 2.2 (数列极限)

设 $\{a_n\}$ 是已知实数列，$a \in \mathbb{R}$

1. 称 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 如果对任何 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得
$$|a_n - a| \le \varepsilon, \forall n \ge N$$
2. 称 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$，如果对任何 $M > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得
$$|a_n| \ge M, \forall n \ge N$$
3. 称 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$，如果对任何 $M > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得
$$a_n \ge M, \forall n \ge N$$
4. 称 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$，如果对任何 $M > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得
$$a_n \le -M, \forall n \ge N$$

♣

若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$，则称 $\{a_n\}$ 收敛，否则称 $\{a_n\}$ 发散。

数列可视为实数轴上的一列点。从直观上看，当 n 越来越大时，若 a_n 越来越靠近（无限靠近）某个点，这个点代表的数就是极限。为了用准确的数学语言来刻画“越来越靠近”和“当 n 越来越大”，我们要用到上述定义中的 ε和N，这里的 N 一般是依赖于给定的 ε 的。这种定义极限的方法也称为 $\varepsilon - N$ 语言法。

按照定义，我们也可以这样来描述极限：$\lim\limits_{x\to\infty} a_n = \alpha$ 当且仅当任给 $\varepsilon > 0$，数列 a_n 最多只有有限项位于区间 $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ 之外。因此，如果存在 $\varepsilon_0 > 0$，使得 a_n 中的无限项位于 $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ 之外，则数列 a_n 不以 α 为极限（这时该数列的极限可能不存在，如果存在则极限也不等于 α)。

也可以用 $\varepsilon - N$ 语言给出数列 a_n 不以 α 为极限的定义：如果存在 $\varepsilon_0 > 0$，使得任给正数 N，均存在 $n_0 > N$，使得 $|a_{n0} - \alpha| \ge \varepsilon_0$，则 a_n 不以 α 为极限。

显然，改变数列 $\{a_n\}$ 的有限多项，或去掉有限多项，或添加有限多项，不会改变数列 $\{a_n\}$ 的收敛和发散性。

命题 2.1

如果数列 a_n 收敛，则其极限是唯一的。

♠

证明 设数列 a_n 既收敛于 α，又收敛于 α'。按照定义，任给 $\varepsilon > 0$，存在 N_1, N_2，使得当 $n > N_1$ 时 $| a_n - \alpha | < \varepsilon$；当 $n > N_2$ 时 $| a_n - \alpha' | < \varepsilon$。因此，当 $n > max\{N_1, N_2\}$ 时，有

$$| \alpha - \alpha' | \le | a_n - \alpha | + | a_n - \alpha' | < 2\varepsilon$$

由 ε 的任意性可知 $\alpha=\alpha'$。

注 $\alpha\neq\alpha'$ 时，代入 $\varepsilon=|\alpha-\alpha'|/2$ 即可导出矛盾。

定理 2.1 (夹逼定理)

设 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 均为数列，且

$$a_n\le b_n\le c_n,\forall n\ge N_0$$

其中 N_0 为正整数。如果

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha,\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha(\alpha\text{为实数或},+\infty,-\infty)$$

则

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha$$

证明

任给 $\varepsilon>0$，存在 N_1,N_2，当 $n>N_1$ 时

$$\alpha-\varepsilon<a_n<\alpha+\varepsilon$$

当 $n>N_2$ 时

$$\alpha-\varepsilon<c_n<\alpha+\varepsilon$$

取 $N=max\{N_0,N_1,N_2\}$，则当 $n>N$ 时，由 $a_n\le b_n\le c_n$ 可得

$$\alpha-\varepsilon<a_n\le b_n\le c_n<\alpha+\varepsilon$$

这说明 $\{b_n\}$ 收敛到 α。

注 在应用夹逼原理时，常常用到的事实有：

1. a_n 收敛于 0 当且仅当 $\{|a_n|\}$ 收敛于 0；如果 $\{a_n\}$，C 为常数，则 $\{Ca_n\}$ 也收敛于 0.
2. 如果 $|a_n|\le b_n$，则 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$ 时 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$。这可由定义或 $-b_n\le a_n\le b_n$ 推出。
3. 如果条件改为 $\lim_{n\to\infty}(c_n-a_n)=0$，不能推出，结论不对，收敛性也不确定。

定理 2.2

1. 设 $a_n\ge b_n(n\ge N_0)$, $\lim_{n\to\infty}b_n=+\infty$，则 $\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$
2. 设 $\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$, $\lim_{n\to\infty}b_n=+\infty$，则 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=+\infty$
3. $\lim_{n\to\infty}a_n=a\in\mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\pm\infty$，则 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\pm\infty$
4. $\lim_{n\to\infty}a_n=a>0$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\pm\infty$，则 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\pm\infty$
5. $\lim_{n\to\infty}a_n=a<0$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\pm\infty$，则 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\mp\infty$
6. $\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty\iff\lim_{n\to\infty}(-a_n)=-\infty$
7. $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty\iff\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$

例题 2.1 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$$

证明 注意到当 $1\le k\le n$ 时 $(k-1)(n-k)\ge 0$，从而 $k(n-k+1)\ge n$。我们就有

$$(n!)^2=(1\cdot n)(2\cdot(n-1))\cdots(k(n-k+1))\cdots(n\cdot 1)\ge n^n,\forall n\ge 1$$

因此

$$0<\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\le\frac{1}{\sqrt{n}},\forall n\ge 1$$

由夹逼定理知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$$

例题 2.2 设 $a>0$，证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$$

证明 当 $a\geq 1$ 时，记 $a_n=\sqrt[n]{a}-1$，则 $a_n\geq 0$，利用二项式展开得

$$a=(1+a_n)^n=1+na_n+\cdots+a_n^n>na_n$$

这说明

$$1\leq\sqrt[n]{a}=1+a_n<1+\frac{a}{n}$$

由夹逼原理知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$$

当 $0<a<1$ 时，根据刚才的估计有，

$$1<\sqrt[n]{\frac{1}{a}}<1+\frac{1}{na}$$

即

$$1-\frac{1}{1+na}<\sqrt[n]{a}<1$$

由夹逼原理知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$$

例题 2.3 证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

证明

证法 1

记 $a_n=\sqrt[n]{n}-1$，当 $n>1$ 时，

$$n=(1+a_n)^n=1+na_n+\frac{1}{2}n(n-1)a_n^2+\cdots+a_n^n>\frac{1}{2}n(n-1)a_n^2$$

这说明

$$0<a_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

即

$$1<\sqrt[n]{n}=1+a_n<1+\sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

由夹逼原理知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

证法 2

应用几何-算术平均不等式得到

$$\begin{aligned}1\leq\sqrt[n]{n}=n^{\frac{1}{n}}=(1\cdots 1\sqrt{n}\sqrt{n})^{\frac{1}{n}}&\leq\frac{(n-2)+2\sqrt{n}}{n}\\&=1+\frac{2(\sqrt{n}-1)}{n}<1+\frac{2}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$

于是，$\forall\varepsilon>0$，取 $N\in\mathbb{N}$，使得 $N>\frac{4}{\varepsilon^2}$，当 $n>N$ 时，有

$$\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\frac{2}{\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{N}}<\varepsilon$$

所以，$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$。

例题 2.4 设 $a,b>0$，证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=max\{a,b\}$$

证明 不妨设 $a\geq b$，则

$$a=\sqrt[n]{a^n}\leq\sqrt[n]{a^n+b^n}\leq\sqrt[n]{2a^n}=\sqrt[n]{2}a$$

由 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$ 及夹逼原理知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=a$$

例题 2.5 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$，证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\alpha$$

证明 先设 $\alpha=0$，对任意 $\varepsilon>0$，存在 N_0，使得当 $n>N_0$ 时，$|a_n|<\frac{\varepsilon}{2}$。令

$$N>max\{N_0,2\varepsilon^{-1}|a_1+a_2+\cdots+a_N|\}$$

当 $n>N$ 时，有

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right|&\leq\frac{|a_1+a_2+\cdots+a_{N_0}|}{n}+\frac{1}{n}\sum_{k=N_0+1}^{n}|a_k|\\&<\frac{|a_1+a_2+\cdots+a_{N_0}|}{N}+\frac{1}{n}(n-N_0)\frac{\varepsilon}{2}\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

这说明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=0$$

一般地，如果有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-\alpha)=0$

则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k-\alpha)=0$$

又有

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k-\alpha)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k-\alpha$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\alpha$$

例题 2.6 任何实数都是某个有理数列的极限。

证明 设 α 为实数。当 α 为有理数时，令 $a_n=\alpha(n\geq1)$ 即可。当 α 为无理数时，令 $a_n=[n\alpha]/n$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数。此时 a_n 是有理数。由 α 为无理数可知

$$n\alpha-1<[n\alpha]<n\alpha,\forall n\geq1$$

这说明

$$\alpha-\frac{1}{n}<a_n=\frac{[n\alpha]}{n}<\alpha,\forall n\geq1$$

由夹逼原理知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$

例题 2.7

1. 设 $a_n\geq0(n\in\mathbb{N})$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=0$
2. 设 $a_n>0(n\in\mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$

证明

1. 由 $0\leq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\to0(n\to\infty)$，及夹逼定理，立即可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=0$

2. 当 $a>0, a_n>0(n\in\mathbb{N})$ 时，有

$$\frac{1}{(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n})/n}=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\le\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

再由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n})/n}=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}=\frac{1}{\frac{1}{a}}=a=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ 和夹逼定理，可得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$$

2.1.2 数列极限的基本性质

设数列 a_n 为数列。如果 $\{a_n \mid n=1,2,\cdots\}$ 为有界集合，则称 a_n 是有界数列，此时存在 M，使得 $|a_n|\le M$ 对每一个正整数 n 均成立。

命题 2.2 (有界性)

设数列 $\{a_n\}$ 收敛，则 $\{a_n\}$ 是有界数列。

证明 设 $\{a_n\}$ 收敛到 α。取 $\varepsilon=1$，由数列极限定义，存在 N，当 $n>N$ 时 $|a_n-\alpha|\le 1$。因此

$$|a_n|\le|\alpha|+1, \forall n>N$$

令

$$M=max\{|\alpha|+1,|a_1|,\cdots,|a_N|\}$$

则 $|a_n|\le M$ 总成立。

两个发散到无穷的数列有时可以相互比较。

例题 2.8 设 $a>0, b>1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^a}{b^n}=0$

证明 记 $\beta=b^{\frac{1}{a}}-1>0$，当 $n>1$ 时

$$(1+\beta)^n=1+n\beta+\frac{1}{2}n(n-1)\beta^2+\cdots+\beta^n>\frac{1}{2}n(n-1)\beta^2$$

因此

$$0<\frac{n^a}{b^n}=\left[\frac{n}{(1+\beta)^n}\right]^a<\left[\frac{2}{(n-1)\beta^2}\right]^a$$

由夹逼原理知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^a}{b^n}=0$

例题 2.9 设 $a>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$

证明 取正整数 $N_0>|a|$，则当 $n>N_0$ 时，有

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right|=\frac{|a|^{N_0}}{N_0!}\frac{|a|}{N_0+1}\cdots\frac{|a|}{n-1}\frac{|a|}{n}\le\frac{|a|^{N_0}}{N_0!}\frac{|a|}{n}$$

由夹逼原理知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$

命题 2.3 (绝对值性质)

设数列 $\{a_n\}$ 收敛到 α，则 $\{|a_n|\}$ 收敛到 $|\alpha|$

证明 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$，则任给 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n>N$ 时 $|a_n-\alpha|<\varepsilon$，此时

$$||a_n|-|\alpha||\le|a_n-\alpha|<\varepsilon, \forall n>N$$

这说明 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|\alpha|$

命题 2.4 (保序性质)

设数列 $\{a_n\}$ 收敛到 α，$\{b_n\}$ 收敛到 β，则有

1. 如果存在 N_0，当 $n > N_0$ 时 $a_n \geq b_n$，则 $\alpha \geq \beta$
2. 反之，如果 $\alpha > \beta$，则存在 N，使得当 $n > N$ 时 $a_n > b_n$

证明 (1) 任给 $\varepsilon > 0$，存在 N_1, N_2，使得

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon, \forall n > N_1; |b_n - \beta| < \varepsilon, \forall n > N_2$$

令 $N = max\{N_0, N_1, N_2\}$，则 $n > N$ 时，有

$$\alpha - \beta = (\alpha - a_n) + (a_n - b_n) + (b_n - \beta) \geq (\alpha - a_n) + (b_n - \beta) \geq -2\varepsilon$$

由 ε 的任意性可知 $\alpha - \beta \geq 0$，即 $\alpha \geq \beta$

(2) 设 $\alpha > \beta$，取 $\varepsilon = (\alpha - \beta)/2$，则存在 N_1, N_2，使得 $|a_n - \alpha| < \varepsilon, \forall n > N_1; |b_n - \beta| < \varepsilon, \forall n > N_2$ 成立。令 $N = max\{N_1, N_2\}$，则 $n > N$ 时，有

$$a_n - b_n = (a_n - \alpha) + (\alpha - \beta) + (\beta - b_n) > -\varepsilon + (\alpha - \beta) - \varepsilon = 0$$

推论 2.1

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$，如果 $\alpha \neq 0$，则存在 N，使得当 $n > N$ 时，有

$$\frac{1}{2}|\alpha| < |a_n| < \frac{3}{2}|\alpha|$$

证明 由极限的绝对值性质，有

$$\frac{1}{2}|\alpha| < \lim_{n\to\infty} |a_n| = |\alpha| < \frac{3}{2}|\alpha|$$

再由极限的保序性质即得欲证结论。

例题 2.10 设 $q > 1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_q n}{n} = 0$

证明 任给 $\varepsilon > 0$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 < q^{\varepsilon}$。由极限的保序性质，存在 N，当 $n > N$ 时，$\sqrt[n]{n} < q^{\varepsilon}$。这说明

$$0 < \frac{\log_q n}{n} < \varepsilon, \forall n > N$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_q n}{n} = 0$

命题 2.5 (极限的四则运算)

设数列 $\{a_n\}$ 收敛到 α，$\{b_n\}$ 收敛到 β，则有

1. $\{\lambda a_n + \mu b_n\}$ 收敛到 $\lambda\alpha + \mu\beta$，其中 λ, μ 为常数；
2. $\{a_n b_n\}$ 收敛到 $\alpha\beta$；
3. 当 $\beta \neq 0$ 时，$\{a_n/b_n\}$ 收敛到 α/β

证明 (1) 任给 $\varepsilon > 0$，存在 N_1, N_2，使得

$$|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2|\lambda| + 1}, \forall n > N_1; |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2|\mu| + 1}, \forall n > N_2$$

令 $N = max\{N_1, N_2\}$，则 $n > N$ 时，有

$$\begin{aligned}(\lambda a_n + \mu b_n) - (\lambda\alpha + \mu\beta)| &\leq |\lambda||a_n - \alpha| + |\mu||b_n - \beta| \\ &\leq |\lambda|\frac{\varepsilon}{2|\lambda| + 1} + |\mu|\frac{\varepsilon}{2|\mu| + 1} \\ &< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon\end{aligned}$$

这说明 $\lim\limits_{n\to\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda\alpha + \mu\beta$

(2) 由有界性可知，存在 M，使得 $|b_n| \le M$ 总成立。因此

$$0 \le |a_n b_n - \alpha\beta| = |(a_n - \alpha)b_n + \alpha(b_n - \beta)| \le M\,|a_n - \alpha| + |\alpha|\,|b_n - \beta|$$

利用 (1) 和夹逼原理知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$

(3) 根据 (2)，我们只须证明 $\lim\limits_{n\to\infty} 1/b_n = 1/\beta$。由保序性质的推论，存在 N，当 $n > N$ 时，$|b_n| > |\beta|/2$。此时

$$0 \le \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{\beta}\right| = \frac{|b_n - \beta|}{|b_n|\,|\beta|} \le \frac{2}{|\beta|^2}\,|b_n - \beta|$$

由夹逼原理知 $\lim\limits_{n\to\infty} 1/b_n = 1/\beta$

例题 2.11 求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{4n^2-3n+1}$

解

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - n}{4n^2 - 3n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{4 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1 - 0}{4 - 0 - 0} = \frac{1}{4}$$

命题 2.6

1. 设 $\{a_n\}$ 收敛到 α，则它的任何子列 $\{a_{nk}\}$ 也收敛到 α
2. 如果 $\{a_n\}$ 的偶子列与奇子列均收敛到 α，则 $\{a_n\}$ 也收敛到 α

证明

1. 必要性：

   对 a 的任何开邻域 U，因 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$，故 $\exists N \in \mathbb{N}$，当 $n > N$ 时，$a_n \in U$。当 $a_{nk} \ge k > K = N$ 时，有 $a_{nk} \in U$，所以 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{nk} = \alpha$。

   充分性：

   令 $n_k = k$，则 $\{a_n\} = \{a_k\} = \{a_{nk}\}$ 为 $\{a_n\}$ 的一个子列，所以

   $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} a_{nk} = \alpha$$

2. 必要性：

   对 a 的任何开邻域 U，因 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$，故 $\exists N \in \mathbb{N}$，当 $n > N$ 时，有 $a_n \in U$。取 $K = N$，当 $k > K$ 时，有 $2k > 2K = 2N > N$，$2k - 1 > 2K - 1 = 2N - 1 \ge N$，故

   $$a_{2k} \in U, a_{2k-1} \in U$$

   从而 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = \alpha, \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1} = \alpha$。

   充分性：

   对 a 的任何开邻域 U，因 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = \alpha$，故 $\exists K_1 \in \mathbb{N}$，当 $k > K_1$ 时，有 $a_{2k} \in U$。又因为 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1} = \alpha$，故 $\exists K2 \in \mathbb{N}$，当 $k > K_2$ 时，有 $a_{2k-1} \in U$。于是，当 $n > N = \max\{2K_1, 2K_2 - 1\}$ 时，必有

   $$a_n \in U$$

   所以

   $$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

例题 2.12 研究数列 $\{a_n = \frac{1}{2}[1 + (-1)^n]\}$ 的敛散性

解 因为 $a_{2k} = 1, a_{2k-1} = 0$，故 $\{a_n\}$ 的偶子列和奇子列均收敛但极限不同，这说明 $\{a_n\}$ 发散。

例题 2.13 研究数列 $\{\sin n\}$ 的敛散性

解 这个数列是发散的（反证法）设 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n = \alpha$，则

$$2\sin 1 \cos n = \sin(n + 1) - \sin(n - 1) \to \alpha - \alpha = 0(n \to \infty)$$

因为 $\sin 1 \ne 0$，上式表明 $\cos n \to 0(n \to \infty)$，从而

$$\sin 2n = 2\sin n \cos n \to 2\alpha \cdot 0 = 0(n \to \infty)$$

这说明 $\alpha=0$，此时

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\to 0+0=0(n\to\infty)$$

这和恒等式 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ 相矛盾。

例题 2.14 数列 $\{a_n\}$ 无上界 $\Longleftrightarrow \{a_n\}$ 必有子列 $\{a_{n_k}\}\to+\infty(k\to\infty)$

证明 必要性：

设 $\{a_n\}$ 无上界，则 1 不是数列 $\{a_n\}$ 的上界，故 $\exists a_{n_1}>1$。又因 $\max\{2,a_1,\cdots,a_{n_1}\}$ 不是数列 $\{a_n\}$ 的上界，故 $\exists a_{n_2}>\max\{2,a_1,\cdots,a_{n_1}\}$，显然，$n_1<n_2$。以此类推就得到 $a_{n_k}>\max\{k,a_1,\cdots,a_{n_{k-1}}\}$，显然，$n_{k-1}<n_k$。所以 $\{a_{n_k}$ 为 $\{a_n\}$ 的一个子列，且 $a_{n_k}>k$。由极限定义知，$\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=+\infty$。

充分性：

设 $\{a_n\}$ 有子列 $\{a_{nk}\to+\infty(k\to\infty)$，则 $\forall A>0$，$\exists K=K(A)\in\mathbb{N}$，使得，当 $k>K$ 时，$a_{n_k}>A$，所以 A 不为数列 $\{a_n\}$ 的上界。从 A 任取知，数列 $\{a_n\}$ 无上界。

例题 2.15 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=r>1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$

证明

证法 1

取 $\varepsilon_0>0$，使得 $r-\varepsilon_0=1+\alpha>1$。因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=r>1$，故 $\exists N_1\in\mathbb{N}$，当 $n>N_1$ 时，有

$$1+\alpha=r-\varepsilon_0<\sqrt[n]{|a_n|},|a_n|>(1+\alpha)^n>n\alpha$$

$\forall A>0$，取 $N\in\mathbb{N}$，使得 $N>\max\{N_1,\frac{A}{\alpha}\}$，当 $n>N$ 时，有

$$|a_n|>n\alpha>N\alpha\geq A$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$

证法 2

由上述，当 $n>N_1$ 时，有

$$\begin{aligned}1+\alpha=r-\varepsilon_0&<\sqrt[n]{|a_n|}<r+\varepsilon_0\\&=(r-\varepsilon_0)+2\varepsilon_0=1+\alpha+2\varepsilon_0,(1+\alpha)^n<|a_n|<(1+\alpha+2\varepsilon_0)^n\end{aligned}$$

从 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\alpha)^n=+\infty=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\alpha+2\varepsilon_0)^n$ 与夹逼定理可知，

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|=+\infty\Longleftrightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$$

例题 2.16 设 $a_n\geq 0(n\in\mathbb{N})$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{\sqrt{n}}=a$，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=0$$

证明

证法 1

因为

$$\begin{aligned}0\leq\sqrt{n}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}&=\sqrt{n}\frac{\sqrt[n]{a\cdot 2a\cdots na}}{\sqrt[n]{n!}}\\&\leq\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[n]{n!}}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}\\&=\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{\sqrt{n}}\to 0\cdot a=0(n\to\infty)\end{aligned}$$

所以，根据夹逼定理，得到

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=0$$

证法 2

由 $k(n-k+1)=(k-1)(n-k)+n\geq n(1\leq k\leq n)$ 推得

$$(n!)^2=(n\cdot 1)[(n-1)\cdot 2]\cdots(1\cdot n)\geq n\cdots n=n^n$$

于是

$$
\begin{aligned}
0 &\le \sqrt{n}\cdot\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n n^{\frac{n}{2}}}\le\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n n!}\\
&=\sqrt[n]{a_1\cdot 2a_2\cdot na_n}\le\frac{a_1+2a_2+\cdots na_n}{n}\\
&=\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{\sqrt{n}}\to 0\cdot a=0(n\to\infty)
\end{aligned}
$$

2.1 练习

1. 用数列极限证明：

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n-2})=0$$

2. 利用极限定义，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\arctan n=\frac{\pi}{2}$$

3. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$。用 $\varepsilon-N$ 法，$A-N$ 法证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\frac{a}{2}(a\text{为实数},+\infty,-\infty)$$

4. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,|q|<1$。用 $\varepsilon-N$ 法证明：

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+a_{n-1}q+\cdots+a_1q^{n-1})=\frac{a}{1-q}$$

5. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$。用 $\varepsilon-N$ 法证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_1+a_nb_0}{n}=ab$$

6. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,b_n\ge 0(n\in\mathbb{N}),\lim\limits_{n\to\infty}(b_1+b_2+\cdots+b_n)=S$。证明：$\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_1+a_{n-1}b_2+\cdots+a_1b_n)=aS$
7. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\max(a_1,a_2,\cdots,a_n)}{n}=0$$

8. **(Toeplitz 定理)** 设 $n,k\in\mathbb{N},t_{nk}\ge 0$ 且 $\sum_{k=1}^{n}t_{nk}=1,\lim\limits_{n\to\infty}t_{nk}=0$。如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}t_{nk}a_k=a$。
9. 设 a,b,c 为三个给定的实数，令 $a_0=a,b_0=b,c_0=c$，并归纳定义

$$\begin{cases}a_n=\frac{b_{n-1}+c_{n-1}}{2}\\ b_n=\frac{c_{n-1}+a_{n-1}}{2},n=1,2,\cdots\\ c_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\end{cases}$$

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\frac{a+b+c}{3}$

10. 设 a_1,a_2 为实数，令

$$a_n=pa_{n-1}+qa_{n-2},n=3,4,5,\cdots$$

其中 $p>0,q>0,p+q=1$。证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{a_2+a_1q}{1+q}$。

11. 设数列 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 满足 $a_1>0,4\le b_n\le 5,4\le c_n\le 5$，

$$a_n=\frac{\sqrt{b_n^2+c_n^2}}{b_n+c_n}a_{n-1}$$

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

12. 求极限：

$$\lim_{n\to\infty}(n^2-n+2)^{\frac{1}{n}}$$

13. (a). 应用数学归纳法或 $\frac{2k-1}{2k} < \frac{2k}{2k+1}$ 证明不等式：

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

(b). 证明：$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}) = 0$

14. 证明：$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k!}{n!} = 1(1+\frac{1}{n} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n}k!}{n!} \leq 1+\frac{2}{n})$

15. 设 $\lim_{n\to\infty}a_n = a$, $\lim_{n\to\infty}b_n = b$。记

$$S_n = \max\{a_n, b_n\}, T_n = \min\{a_n, b_n\}, n = 1, 2, \cdots$$

证明：

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}S_n = \max\{a, b\}, (2)\ \lim_{n\to\infty}T_n = \min\{a, b\}$$

16. 用 $p(n)$ 表示能整除 n 的素数的个数。证明: $\lim_{n\to\infty}\frac{p(n)}{n} = 0$

17. 设

$$x_n = \sum_{k=1}^{n}(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1)$$

证明：$\lim_{n\to\infty}x_n = \frac{1}{4}$

18. 若 $\lim_{n\to\infty}a_n = a \neq 0$，求证：$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$。举例说明，当 $a = 0$ 时不能得出上述结论。

19. 如果 $a_0 + a_1 + \cdots + a_p = 0$，求证：

$$\lim_{n\to\infty}(a_0\sqrt{n} + a_1\sqrt{n+1} + \cdots + a_p\sqrt{n+p}) = 0$$

20. 设数列 $\{a_n\}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}a_{2n-1} = a, \lim_{n\to\infty}a_{2n} = b$$

证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1 + a_2 + \cdots}{n} = \frac{a+b}{2}$$

21. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim_{n\to\infty}(x_n - x_{n-2}) = 0$。求证：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0$$

22. 设 $\lim_{n\to\infty}a_n = a$。证明[1]：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a_k = a$$

23. 设 $a_0 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}(n = 1, 2, \cdots)$。证明：$\lim_{n\to\infty}a_n = +\infty$

24. 设 $\{a_n\}$ 是一个正数数列。如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1} + a_{n+2}}{a_n} = +\infty$$

那么 $\{a_n\}$ 必为无界数列。

问题与反例

回答下列问题：

1. 若 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都发散，对 $\{a_n + b_n\}$ 与 $\{a_n b_n\}$ 是否收敛能不能作出肯定的结论?
2. 若 $\{a_n\}$ 收敛而 $\{b_n\}$ 发散，这时 $\{a_n + b_n\}$ 的敛散性如何?
3. 若 $\lim_{n\to\infty}a_n = a \neq 0$ 而 $\{b_n\}$ 发散，这时 $\{a_n b_n\}$ 的敛散性如何?
4. 若 $\lim_{n\to\infty}a_n = 0$ 而 $\{bn\}$ 发散，这时 $\{a_n b_n\}$ 的敛散性如何?
5. 设 $a_n \leq b_n \leq c_n$，且 $\lim_{n\to\infty}(c_n - a_n) = 0$，问 $\{b_n\}$ 是否必收敛?

[1]考虑 Toeplitz 定理

2.2 单调数列的极限

一般情况下难以判断数列是否收敛，对于一种特殊情况我们可给出一种数列极限存在性的判别法，它依赖于实数的一个基本性质，即**确界原理**：非空的数集如果有上界则必有上确界，如果有下界则必有下确界。

设 $\{a_n\}$ 为数列，如果

$$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \le \cdots$$

则称 $\{a_n\}$ 是单调递增数列，当上式中的"$\le$"号换成"$<$"号时称 $\{a_n\}$ 是严格单调递增的；如果

$$a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n \ge \cdots$$

则称 $\{a_n\}$ 是单调递减数列，当上式中的"$\ge$"号换成"$>$"号时称 $\{a_n\}$ 是严格单调递减的；单调递增数列和单调递减数列统称为单调数列。

定理 2.3 (单调数列的极限)

设 $\{a_n\}$ 为单调数列

1. 如果 $\{a_n\}$ 为单调递增数列，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_k \mid k \ge 1\}$
2. 如果 $\{a_n\}$ 为单调递减数列，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_k \mid k \ge 1\}$

♡

证明

(1) 记 $M = \sup\{a_k \mid k \ge 1\}$，先考虑 M 有限的情形。任给 $\varepsilon > 0$，由上确界的刻画，存在 a_N，使得 $a_N > M-\varepsilon$。根据 $\{a_n\}$ 的单调性，当 $n > N$ 时

$$M - \varepsilon < a_N \le a_n \le M < M + \varepsilon$$

由数列极限的定义即知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = M$。

如果 $M = +\infty$，则任给 $\alpha > 0$，存在 a_N，使得 $a_N > \alpha$。根据 $\{a_n\}$ 的单调性，当 $n > N$ 时 $a_n \ge a_N > \alpha$，这说明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$。

(2) 可同 (1) 一样类似地证明，也可考虑 $\{-a_n\}$ 然后直接利用 (1)。

推论 2.2

有界单调数列必收敛。

♡

例题 2.17 设 $a_1 = \sqrt{2}, n \ge 1$ 时 $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$。研究数列 $\{a_n\}$ 的极限。

解 用数学归纳法易得 $\sqrt{2} \le a_n < 2$。因此

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} > \sqrt{2a_n} > a_n$$

这说明 $\{a_n\}$ 是单调递减的有界数列，从而收敛。记其极限为 α，则 $\alpha \ge \sqrt{2} > 0$。我们有

$$2+\alpha = \lim_{n\to\infty}(2+a_n) = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \alpha^2$$

上式的唯一正解为 $\alpha = 2$，这说明 $\{a_n\}$ 的极限为 2。

例题 2.18 设 $\{x_n\}$ 是一个非负的数列，满足

$$x_{n+1} \le x_n + \frac{1}{n^2}(n = 1, 2, \cdots)$$

证明：$\{x_n\}$ 收敛。

证明 因为 $x_{n+1} \le x_n + \frac{1}{n^2} < x_n + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$，所以 $x_{n+1} + \frac{1}{n} < x_n + \frac{1}{n-1}$，所以 $\{x_n + \frac{1}{n-1}\}$ 单调递减，又有下界 0，所以收敛。又有 $\{\frac{1}{n-1}\}$ 收敛，所以 $\{x_n\}$ 收敛。

例题 2.19 设 $a_1 > 0, n \ge 1$ 时 $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n})$。研究数列 $\{a_n\}$ 的极限。

解 由数学归纳法易见 $a_n > 0$。进一步有

$$a_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n} - 2) = \frac{1}{2}(\sqrt{a_n} - \frac{1}{\sqrt{a_n}})^2 \ge 0$$

因此当 $n \geq 2$ 时，有

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n}) \leq \frac{1}{2}(a_n + a_n) = a_n$$

即 $\{a_n\}$ 从 $n \geq 2$ 开始单调递减且有下界，因此收敛。其极限记为 α，则 $\alpha \geq 1$。另一方面，

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n}) = \frac{1}{2}(\alpha + \frac{1}{\alpha})$$

上式的唯一正解为 $\alpha = 1$，这说明 $\{a_n\}$ 的极限为 1。

例题 2.20 设 $a_1 = 1, n \geq 1$ 时 $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$。研究数列 $\{a_n\}$ 的极限。

解 利用数学归纳法易见 $\frac{1}{2} \leq a_n \leq 1$，并且 $\{a_{2k-1}\}$ 单调递减，$\{a_{2k}\}$ 单调递增，因此它们都是收敛的，极限分别记为 α, β，则

$$\beta = \lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+a_{2k-1}} = \frac{1}{1+\alpha},$$

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+a_{2k}} = \frac{1}{1+\beta}$$

从上式解出唯一的正解 $\alpha = \beta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$，因此 $\{a_n\}$ 的极限为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$。

讨论**重要极限** $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$

考虑 $a_n = (1+\frac{1}{n})^n, b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}, \forall n \geq 1$ $\{a_n\}$ 是严格单调递增的，$\{b_n\}$ 是严格单调递减的。

$$\begin{aligned}
a_n &= (1+\frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{n^k} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}) \\
&< 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n-1}{n+1}) + \frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n}{n+1}) \\
&= a_{n+1}
\end{aligned}$$

这说明 $\{a_n\}$ 严格单调递增。另一方面，当 $n > 1$ 时，有

$$\begin{aligned}
0 < a_n &< 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \\
&\leq 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} \\
&= 2 + \sum_{k=2}^{n} (\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}) = 3 - \frac{1}{n} < 3
\end{aligned}$$

因此 $\{a_n\}$ 收敛，其极限记为 e，称为自然对数的基底。计算表明

$$e = 2.7182818284590$$

另一方面，由

$$[\frac{1+\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{n}}]^n = (1+\frac{1}{n^2-1})^n > 1 + \frac{n}{n^2-1} > 1 + \frac{1}{n}$$

得

$$b_{n-1} = (1+\frac{1}{n-1})^n > (1+\frac{1}{n})^{n+1} = b_n$$

即 $\{b_n\}$ 严格单调递减，且

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n(1+\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} a_n = e$$

因此有下面的不等式

$$(1+\frac{1}{n})^n < (1+\frac{1}{n+1})^{n+1} < e < (1+\frac{1}{n+1})^{n+2} < (1+\frac{1}{n})^{n+1}, \forall n \geq 1$$

例题 2.21 证明 $\{e_n\}$ 收敛到 e，其中

$$e_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$$

证明 当 $n > 1$ 时 $a_n < e_n$。固定 $k > 1$，当 $n > k$ 时，有

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}) \\ &> 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n}) \end{aligned}$$

在上式中令 $n \to \infty$，得

$$e = \lim_{n\to\infty} a_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!}$$

由于 k 可以任意固定，我们就有

$$a_n < e_n < e, \forall n > 1$$

根据夹逼原理知 $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = e$

我们已经证明，数列 $\{a_n\}$ 与 $\{e_n\}$ 都递增地收敛于 e。从计算来看，使用极限

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}) = e$$

更为有利。由这种近似产生的误差，可以用下面的方法来作估计：由于

$$\begin{aligned} 0 &< e_{n+m} - e_n \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{(n+m)!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!}[1 + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)\cdots(n+m)}] \\ &< \frac{1}{(n+1)!}[1 + \frac{1}{n+1} + (\frac{1}{n+1})^2 + \cdots + (\frac{1}{n+1})^{m-1}] \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!n} \end{aligned}$$

例题 2.22 自然对数的底 e 是无理数。

证明 用反证法。假设 $e = \frac{p}{q}$，其中 $p, q \in \mathbb{N}$。由于 $2 < e < 3$，可见 e 不是正整数，因此 $q \geq 2$。由 $0 < e - e_q \leq \frac{1}{q!q}$ 可得

$$0 < q!(e - e_q) \leq \frac{1}{1} \leq \frac{1}{2}$$

但是

$$q!(e - e_q) = (q-1)!p - q!(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!})$$

是整数，矛盾。

例题 2.23 证明：

1. $e(n/e)^n < n! < en(n/e)^n, \forall n > 1$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$

证明 对 $k = 1, 2, \cdots, n-1$，均有

$$\frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}\frac{1}{k+1} < e < \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}\frac{1}{k}$$

将这 $n-1$ 个不等式相乘，得

$$\frac{n^n}{n!} < e^{n-1} < \frac{n^n}{(n-1)!}$$

整理后就是 (1) 中要证的不等式。(2) 可由 (1) 及夹逼原理得。

以 e 为基底的对数函数记为 $\ln x$，有

$$k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) < 1 < (k+1)\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

即

$$\frac{1}{k+1} < \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) < \frac{1}{k}, \text{或} \frac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{k}$$

对 $k = 1, 2, \cdots, n$，将上述不等式相加，得

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) < 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$

如果令

$$c_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} - \ln n$$

则 $c_n > \ln(n+1) - \ln n > 0$，且

$$c_{n+1} - c_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 0$$

这说明 $\{c_n\}$ 收敛，其极限记为 γ，称为 *Euler* 常数，计算表明

$$\gamma = 0.5772156649\cdots$$

例题 2.24 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n})$

解 利用 c_n 的收敛性，有

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}) \\
=&\lim_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}) - (1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})] \\
=&\lim_{n\to\infty}[(c_{2n}+\ln(2n)) - (c_n+\ln n)] \\
=&\gamma - \gamma + \ln 2
\end{aligned}$$

我们利用单调数列研究一般的有界数列。设 $\{a_n\}$ 为有界数列，我们要研究它的收敛性。我们不知道 a_n 是否逐渐趋于某个数，一个好的想法就是去考虑 n 很大时 $\{a_n\}$ 中“最大”的项和“最小”的项，看看它们是否相近。当然，“最大”和“最小”的项不一定存在，但我们可以用“上确界”和“下确界”分别代替它们。为此，令

$$\underline{a}_n = \inf\{a_k \mid k \geq n\}, \overline{a}_n = \sup\{a_k \mid k \geq n\}$$

单调数列 $\{\underline{a}_n\}$ 和 $\{\overline{a}_n\}$ 的极限分别称为 $\{a_n\}$ 的**下极限**和**上极限**，记为

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\underline{a}_n, \varlimsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\overline{a}_n$$

命题 2.7 (上下极限的等价定义)

假定 $\{a_n\}$ 是个实数列，则有

1. 设 A 是某个实数，则 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = A$ 的充分必要条件是对任何 $\varepsilon > 0$，存在无穷多个 n，使得 $a_n > A-\varepsilon$ 且存在 $N \in \mathbb{N}$，使得 $a_n \leq A+\varepsilon, \forall n \geq N$
2. $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ 的充分必要条件是对任何 $A > 0$，存在 n，使得 $a_n > A$
3. 设 A 是某个实数，则 $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = A$ 的充分必要条件是对任何 $\varepsilon > 0$，存在无穷多个 n，使得 $a_n < A+\varepsilon$ 且存在 $N \in \mathbb{N}$，使得 $a_n \geq A-\varepsilon, \forall n \geq N$
4. $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ 的充分必要条件是对任何 $A < 0$，存在 n，使得 $a_n < A$

上极限和下极限一般不容易计算，其用处主要体现在下面的定理中。

定理 2.4

设 $\{a_n\}$ 为有界数列，则下列命题等价：

1. $\{a_n\}$ 收敛；
2. $\{a_n\}$ 的上极限和下极限相等；
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(\overline{a}_n - \underline{a}_n) = 0$

证明 (1) $\Longrightarrow$ (2) : 设 $\{a_n\}$ 收敛到 α。任给 $\varepsilon > 0$，存在 N，当 $n > N$ 时，有

$$\alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon$$

由确界的定义可知，当 $n > N$ 时

$$\alpha - \varepsilon \le \underline{a}_n \le \overline{a}_n \le \alpha + \varepsilon$$

这说明 $\{\underline{a}_n\}$ 和 $\{\overline{a}_n\}$ 均收敛到 α

(2) $\Longrightarrow$ (1) : 利用 $\underline{a}_n \le a_n \le \overline{a}_n$ 和夹逼原理即可。(2) 和 (3) 的等价是显然的。

一般来说，上极限和下极限不再满足四则运算的等式，不过保序性任然成立。

命题 2.8

设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 为有界数列。

1. 如果存在 N_0，当 $n > N_0$ 时 $a_n \ge b_n$，则

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \ge \underline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n,\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \ge \overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n$$

2. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(a_n + b_n) \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, b_n$

证明 (1) 当 $n > N_0$ 时

$$\underline{b}_n \le b_k \le a_k, \forall k \ge n$$

关于 k 取下确界，得

$$\underline{b}_n \le \underline{a}_n, \forall n > N_0$$

由极限的保序性即得

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n \le \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$$

上极限的情形可类似证明。

(2) 利用不等式 $a_n + b_n \le \overline{a}_n + \overline{b}_n$ 以及极限的保序性即可。

考虑从另一角度引入上下极限，并证明等价。

考察任意给定的数列 $\{a_n\}$。如果它收敛于一个有穷的数列，那么它的任一子列都收敛于这个极限。如果它不收敛于一个有穷的极限，但是有界，按照 $Bolzano - Weierstrass$ 定理，从中可以找出一个收敛的子列。如果 $\{a_n\}$ 无界，那么总可以找到一个子列趋向于 $+\infty$ 或 $-\infty$。

我们把数列 $\{a_n\}$ 的收敛子列 $\{a_{k_n}\}$ 的极限称为 $\{a_n\}$ 的一个极限点。对收敛数列而言，极限点只有一个，即它的极限。对发散数列而言，如果它有界，则它可以有若干个甚至无穷多个极限点；如果它无界，则除了有限的极限点外，他还可以以 $+\infty$ 或 $-\infty$ 为其极限点。

定义 2.3

设 $\{a_n\}$ 是一个数列，E 是由 $\{a_n\}$ 的全部极限点构成的集合。记

$$a^* = \sup E, a_* = \inf E$$

则 a^* 和 a_* 分别称为数列 $\{a_n\}$ 的上极限和下极限，记为

$$a^* = \lim_{n\to\infty} \sup a_n, a_* = \lim_{n\to\infty} \inf a_n$$

♣

定理 2.5

设 $\{a_n\}$ 为一数列，E 与 a^* 的意义已在定义 2.3 中描述。那么：

1. $a^* \in E$
2. 若 $x > a^*$，则存在 $N \in \mathbb{N}^*$，使得当 $n \geq N$ 时，有 $a_n < x$
3. a^* 是满足前两条性质的唯一的数

♡

定理 2.6

$$\lim_{n\to\infty} \underline{a}_n = a_*, \lim_{n\to\infty} \overline{a}_n = a^*$$

♡

证明 我们只证明 $\lim_{n\to\infty} \overline{a}_n = a^*$，$\lim_{n\to\infty} \underline{a}_n = a_*$ 的证明是类似的。

(1)a^* 是一个有限数。

任取 $l \in E$，则有 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{i_k}\}$，使得 $\lim_{k\to\infty} a_{i_k} = l$。对任意给定的 n，选取 $k \geq n$，于是 $i_k \geq k \geq n$，因而

$$a_{i_k} \leq \sup\{a_n, a_{n+1}, \cdots\} = \overline{a}_n$$

令 $k \to \infty$，即得 $l \leq \overline{a}_n$。由于 l 是 E 中的任意数，则有 $a^* \leq \overline{a}_n$。这样 $\{\overline{a}_n\}$ 是一个递减的有下界的数列，因而有极限，故得

$$a^* \leq \lim_{n\to\infty} \overline{a}_n$$

对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $n_0 \in \mathbb{N}^*$，当 $n \geq n_0$ 时，$a_n \leq a^* + \varepsilon$，因此 $\overline{a}_n \leq a^* + \varepsilon$，从而得 $\lim_{n\to\infty} \overline{a}_n \leq a^* + \varepsilon$。再令 $\varepsilon \to 0$，得

$$\lim_{n\to\infty} \overline{a}_n \leq a^*$$

综上，$\lim_{n\to\infty} \overline{a}_n = a^*$

(2) 设 $a^* = +\infty$，则有一个子列以 $+\infty$ 为极限，于是

$$\overline{a}_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \cdots\} = +\infty$$

故 $\lim_{n\to\infty} \overline{a}_n = a^*$

(3) 设 $a^* = -\infty$，则对任意的 $A > 0$，存在 $n_0 \in \mathbb{N}$，当 $n \geq n_0$ 时，$a_n < -A$，因而

$$\overline{a}_n \leq -A$$

，这正是 $\lim_{n\to\infty} \overline{a}_n = -\infty$

例题 2.25 证明下列不等式：

$$\lim_{n\to\infty} \inf a_n + \lim_{n\to\infty} \inf b_n \leq \lim_{n\to\infty} \inf(a_n + b_n) \leq \lim_{n\to\infty} \inf a_n + \lim_{n\to\infty} \sup b_n$$
$$\lim_{n\to\infty} \inf a_n + \lim_{n\to\infty} \sup b_n \leq \lim_{n\to\infty} \sup(a_n + b_n) \leq \lim_{n\to\infty} \sup a_n + \lim_{n\to\infty} \sup b_n$$

证明

我们只证明第一个不等式，第二个类似。

我们只需证明

$$\inf_{k\geq n} a_k + \inf_{k\geq n} b_k \leq \inf_{k\geq n}(a_k+b_k) \leq \inf_{k\geq n} a_k + \sup_{k\geq n} b_k$$

当 $k \geq n$ 时

$$\inf_{k\geq n} a_k \leq a_k, \inf_{k\geq n} b_k \leq b_k$$

当 n 固定时，$\inf_{k\geq n} a_k + \inf_{k\geq n} b_k$ 是 $\{a_k+b_k\}$ 的一个下界，因而

$$\inf_{k\geq n} a_k + \inf_{k\geq n} b_k \leq \inf_{k\geq n}(a_k+b_k)$$

记 $c_k = a_k + b_k$，则 $a_k = c_k - b_k$，于是

$$\inf_{k\geq n} a_k = \inf_{k\geq n}(c_k - b_k) \geq \inf_{k\geq n} c_k + \inf_{k\geq n}(-b_k) = \inf_{k\geq n} c_k - \sup_{k\geq n} b_k$$

由此即得

$$\inf_{k\geq n}(a_k+b_k) \leq \inf_{k\geq n} a_k + \sup_{k\geq n} b_k$$

例题 2.26 设 $a_n > 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$。记 $b_n = (a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha$

证明 由题设，任取 $\varepsilon > 0$，存在 N，当 $n > N$ 时 $0 < a_n < \alpha + \varepsilon$。此时有

$$b_n \leq (a_1a_2\cdots a_N)^{\frac{1}{n}}(\alpha+\varepsilon)^{\frac{n-N}{n}}$$

令 $n \to \infty$，得 $\overline{\lim}_{n\to\infty} b_n \leq \alpha + \varepsilon$。同理可证 $\underline{\lim}_{n\to\infty} b_n \geq \alpha - \varepsilon$。由 ε 的任意性可知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n = \alpha = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n$$

这说明 $\{b_n\}$ 收敛到 α。

例题 2.27 设 $b_n > 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \alpha$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n^{\frac{1}{n}} = \alpha$

证明 令 $a_1 = b_1, n \geq 1$ 时 $a_{n+1} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$。由题设，$\{a_n\}$ 收敛到 α。由上例可得

$$\lim_{n\to\infty} b_n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}} = \alpha$$

例题 2.28 设数列 $\{a_n\}$ 满足以下条件：

$$a_n \geq 0, a_{m+n} \leq a_m + a_n, \forall m,n \geq 1$$

证明数列 $\{a_n/n\}$ 收敛。

证明 由归纳法易见 $0 \leq a_n \leq na_1$，因此 $\{a_n/n\}$ 为有界数列。设 k 是固定的正整数，当 $n \geq k$ 时，n 可以表示为

$$n = mk + l, 0 \leq l \leq k-1$$

因此

$$a_n \leq a_{mk} + a_l \leq ma_k + la_1 \leq \frac{n}{k}a_k + (k-1)a_1$$

即

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{a_k}{k} + \frac{k-1}{n}a_1, \forall n \geq k$$

令 $n \to \infty$，得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_n}{n} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_k}{k} + \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{k-1}{n}a_1 = \frac{a_k}{k}$$

再在上式中令 $k \to \infty$，得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_n}{n} \leq \underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{a_k}{k}$$

这说明 $\{a_n/n\}$ 的上下极限一定是相等的，从而收敛。

定义 2.4 (一致收敛)

设 A 是任意一个非空集合，我们称函数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 关于 $x \in A$ 一致收敛到函数 $f(x)$，如果对任何 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall n \geq N, x \in A$$

函数列 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ 是一致收敛的可记做 $f_n \rightrightarrows f$

注 因为对每个 x 来说，$f_n(x)$ 都是一个序列，给定 ε 之后，需要的 N 也会不同，而所谓的一致收敛就是需要 N 相同

定理 2.7 (函数列一致收敛的充要条件)

函数列 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ 一致收敛的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty} \sup_x |f_n(x) - f(x)| = 0$$

例题 2.29

1. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x^n, x \in [0, \frac{1}{2}]$ 是一致收敛的
2. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x^n, x \in [0, 1)$ 不是一致收敛的

证明 由 $\lim\limits_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\frac{1}{2}]} |x^n - 0| = \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{2})^n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1)} |x^n - 0| \neq 0$

2.2 练习

1. 设 $\{x_n\}$ 是一个非负的数列，满足

$$x_{n+1} \leq x_n + \frac{1}{n^2}(n = 1, 2, \cdots)$$

证明：$\{x_n\}$ 收敛。

2. 设 $c > 0, a_1 = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2}(n = 1, 2, \cdots)$，证明：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 1 - \sqrt{1-c}, 0 < c \leq 1 \\ +\infty, c > 1 \end{cases}$$

3. 设数列 $\{u_n\}$ 定义如下：

$$u_1 = b$$
$$u_{n+1} = u_n^2 + (1 - 2a)u_n + a^2(n = 1, 2, \cdots)$$

问 a, b 为何值时 $\{u_n\}$ 收敛？极限值是什么？

4. 设 $A > 0, 0 < y_0 < A^{-1}$，且

$$y_{n+1} = y_n(2 - Ay_n)(n = 0, 1, \cdots)$$

证明：$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A^{-1}$

5. 设数列 $\{a_n\}$ 由下式定义：

$$a_n = 2^{n-1} - 3a_{n-1}(n = 1, 2, \cdots)$$

求 a_0 所有可能的值，使得 $\{a_n\}$ 是严格递增的。

6. 求证：

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n}$$

其中 $\theta_n \in (\frac{n}{n+1}, 1)$。

7. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} (n!e - [n!e])$。

8. 求证：当 $n \geq 3$ 时，有不等式

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{3}{2n} < (1+\frac{1}{n})^n < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$$

考虑如下引理：设 $n \geq 2$，实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都大于-1，并且它们有着相同的符号。

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) > 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

9. 求证等式：

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} = \ln 2\sqrt{n} + \frac{\gamma}{2} + \varepsilon_n$$

其中 γ 是 *Euler* 常数，$\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$

10. 求极限

$$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})\cdots(1+\frac{n}{n^2})$$

11. 记 $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} (n = 1, 2, \cdots)$，用 k_n 表示使得 $H_k \geq n$ 的最小下标。证明：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_{n+1}}{k_n} = e$$

12. 设 $s_n = 1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n$。求证：当 $n \geq 3$ 时，有

$$n^n(1 + \frac{1}{4(n-1)} < s_n < n^n(1 + \frac{2}{e(n-1)})$$

13. 设 $a_n \geq 0 (n \in \mathbb{N}^*)$。求证：$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{a_n} \leq 1$ 的充分必要条件是，对任意的 $l > 1$，有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{l^n} = 0$$

14. 设数列 $\{x_n\}$ 有界，且 $\lim\limits_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$，分别记 $\{x_n\}$ 的上下极限为 L 和 l。证明：$\{x_n\}$ 的极限点充满区间 $[l, L]$。

15. 设 $a_n > 0$。求证：

$$\lim_{n\to\infty} \sup n(\frac{1+a_{n+1}}{a_n} - 1) \geq 1$$

2.3 Cauchy 准则

一般的有界数列可以用上下极限来处理，其基本想法就是去观察某些项之后的“最大”项和“最小”项，看看二者之间的差异是否趋于零。因为上下极限并不好算，我们不妨换一种思路，即可以比较某些项之后一般项之间的差异，看看这些差异是否趋于零：如果 a_n 逐渐趋于某个数，则当 n 很大时 a_n 之间的差别应该很小。

定义 2.5 (Cauchy 数列)

设 a_n 为数列，如果任给 $\varepsilon > 0$，均存在 $N = N(\varepsilon)$，当 $m, n > N$ 时，有

$$|a_m - a_n| < \varepsilon$$

则称 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 数列或基本列。 ♣

例题 2.30 对于 $n \geq 1$，定义

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

则 $\{a_n\}$ 不是 Cauchy 数列。

证明 对于 $n \geq 1$，我们有

$$\begin{aligned} a_{2n} - a_n &= \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &\geq \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

由定义即知 $\{a_n\}$ 不是 Cauchy 数列。

例题 2.31 设 $\{a_n\}$ 为数列，如果存在常数 $C \geq 0, 0 \leq q < 1$，以及 N_0，使得当 $n > N_0$ 时，有

$$|a_{n+1} - a_n| \leq Cq^n$$

则 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 数列。

证明 当 $m > n > N_0$ 时，有

$$\begin{aligned}|a_m - a_n| &\leq |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + \cdots + |a_{n+1} - an| \\ &\leq Cq^{m-1} + Cq^{m-2} + \cdots + Cq^n \\ &= Cq^n(q^{m-n-1} + q^{m-n-2} + \cdots + q + 1) \\ &= Cq^n \frac{1 - q^{m-n}}{1 - q} \leq \frac{C}{1 - q} q^n\end{aligned}$$

上式对 $m = n$ 当然也成立。由于 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$，故任给 $\varepsilon > 0$，存在 N_1，使得当 $n > N_1$ 时 $\frac{C}{1-q}q^n < \varepsilon$。于是，当 $m, n > N = max\{N_0, N_1\}$ 时（不妨设 $m \geq n$），有

$$|a_m - a_n| \leq \frac{C}{1 - q} q^n < \varepsilon$$

这说明 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 数列。

命题 2.9

Cauchy 数列必为有界数列。

证明 按定义，取 $\varepsilon = 1$，则存在 N，当 $m, n > N$ 时 $|a_m - a_n| < 1$。特别地，当 $n > N$ 时

$$|a_n| \leq |a_n - a_{N+1}| + |a_{N+1}| < 1 + |a_{N+1}|$$

令 $M = max\{1 + |a_1|, \cdots, 1 + |a_{N+1}|\}$，则 $|a_n| \leq M$ 总成立。

定理 2.8 (Cauchy 准则)

数列 $\{a_n\}$ 收敛当且仅当它是 Cauchy 数列。

证明 必要性：设 $\{a_n\}$ 收敛到 α。任给 $\varepsilon > 0$，存在 N，当 $n > N$ 时 $|a_n - \alpha| < \varepsilon/2$。因此，当 $m, n > N$ 时，有

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - \alpha| + |\alpha - a_n| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

这说明 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 数列。

充分性：设 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 数列，则 $\{a_n\}$ 是有界数列。于是可以研究其上下极限。根据 Cauchy 数列的定义，任给 $\varepsilon > 0$，存在 N，当 $m, n > N$ 时

$$-\varepsilon < a_m - a_n < \varepsilon$$

在上式子中暂时固定 $n > N$，对 $\{a_n\}$ 取上极限，利用上极限的保序性可得

$$-\varepsilon \leq \overline{\lim_{m\to\infty}}\, a_m - a_n \leq \varepsilon$$

由数列极限的定义即可看出 $\{a_n\}$ 收敛。

还可以证明一个引理和一个定理来证明充分性

Lemma 从任一数列中必可取出一个单调子列。

$\mathcal{P}roof$

$case1$. 在数列中有无穷多项大于它们之后的所有数，那么依次取这些数，则可以得到一个严格递减的数列。

$case2$. 在数列中只存在有限项大于它们之后的所有数，那么取这些数最后一项的后一项，记作 a_{i_1}。那么在 a_{i_1} 后必有一项 $a_{i_2}(i_2 > i_1)$ 满足 $a_{i_1} < a_{i_2}$；如此进行，得到子列 $\{a_{i_n}$，它显然是一个递增的子列。

Theorem: 从任何有界数列中必可选出一个收敛的子列。此定理也称作 $Bolzano - Weierstrass$ 定理。

$\mathcal{P}roof$

设 $\{a_n\}$ 是一个有界的数列。根据引理，从中可以取出一个单调子列 $\{a_{i_n}\}$，这个子列有界，所以 $\{a_{i_n}\}$ 是一个收敛数列。

下面我们利用 $Bolzano-Weierstrass$ 定理来证明充分性。

设 $\{a_n\}$ 是一个基本列，则 $\{a_n\}$ 有界，由 $Bolzano-Weierstrass$ 定理，从有界数列 $\{a_n\}$ 中可选出一个收敛子列 $\{a_{i_n}\}$，设 $a_{i_n} \to a(n \to \infty)$。我们来证明 a 也是数列 $\{a_n\}$ 的极限。由于 $\{a_n\}$ 是基本列，对任给的 $\varepsilon > 0$，存在一个 $N_1 \in \mathbb{N}$，使得当 $m, n > N_1$ 时，都有 $|a_m - a_n| < \varepsilon/2$。又因 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{i_n} = a$，所以对任给的 $\varepsilon > 0$，存在 $N_2 \in \mathbb{N}$，当 $k > N_2$ 时，$\left|a_{i_n} - a\right| < \varepsilon/2$。现取 $N = \max(N_1, N_2)$，当 $n > N$ 时，有

$$|a_n - a| \le \left|a_n - a_{i_n}\right| + \left|a_{i_n} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

这说明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$。

例题 2.32 设 $a_0 > 0, n \ge 0$ 时 $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$。研究 $\{a_n\}$ 的敛散性。

解 利用归纳法易见 $a_n > 0$ 总成立。于是，当 $n \ge 0$ 时 $0 < a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n} < 1$；进一步，当 $n \ge 1$ 时 $1 > a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n} > \frac{1}{2}$。这说明，当 $n \ge 3$ 时

$$\begin{aligned}|a_{n+1} - a_n| &= \left|\frac{1}{1+a_n} - \frac{1}{1+a_{n-1}}\right| = \frac{|a_n - a_{n-1}|}{(1+a_n)(1+a_{n-1})} \\ &\le \frac{4}{9}|a_n - a_{n-1}|\end{aligned}$$

不难看出 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 数列。

2.3 练习

1. (a). 数列 $\{a_n\}$ 满足

$$\left|a_{n+p} - a_n\right| \le \frac{p}{n}$$

且对一切 $n, p \in \mathbb{N}^*$ 成立。问 $\{a_n\}$ 是不是基本列?

(b). 当 $\left|a_{n+p} - a_n\right| \le \frac{p}{n^2}$ 时，上述结论又如何?

2. 设 $a_n \in [a, b](n \in \mathbb{N}^*)$。证明：如果 $\{a_n\}$ 发散，则 $\{a_n\}$ 必有两个子列收敛于不同的数。

2.4 Stolz 公式

引理 2.1

当 $1 \le k \le n$ 时设 $b_k > 0$ 且 $m \le \frac{a_k}{b_k} \le M$，则

$$m \le \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \le M$$

证明 由已知条件可知，当 $1 \le k \le n$ 时 $mb_k \le a_k \le Mb_k$，关于 k 从 1 到 n 求和可得

$$m(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \le (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \le M(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$

此即欲证不等式。

定理 2.9 (Stolz 公式之一)

设 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 为数列，且 $\{y_n\}$ 严格单调地趋于 $+\infty$。如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \alpha$$

其中 α 为实数或 $\pm\infty$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \alpha$ 也成立，常记为 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$

证明 分情况讨论。

(1)$\alpha \in \mathbb{R}$。先设 $\alpha = 0$。此时，任给 ε，存在 N，当 $n > N$ 时

$$-\varepsilon < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < \varepsilon$$

利用 $\{y_n\}$ 的单调性和上面的引理，当 $n > N$ 时，得到

$$-\varepsilon < \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} = \frac{(x_n - x_{n-1}) + \cdots + (x_{N+1} - x_N)}{(x_n - x_{n-1}) + \cdots + (y_{N+1} - y_N)} < \varepsilon$$

整理以后可得

$$\frac{x_N + \varepsilon y_N}{y_n} - \varepsilon < \frac{x_n}{y_n} < \varepsilon + \frac{x_N - \varepsilon y_N}{y_n}$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ 以及上式可知，当 n 充分大时，$-2\varepsilon < \frac{x_n}{y_n} < 2\varepsilon$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$。

一般地，记 $\tilde{x}_n = x_n - \alpha y_n$，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{x}_n - \tilde{x}_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - \alpha = 0$$

这说明 $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{x}_n / y_n = 0$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n / y_n = \alpha$

(2)$\alpha = +\infty$。此时，存在 N，当 $n > N$ 时 $\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} > 1$。于是，当 $n > N$ 时

$$x_n - x_{n-1} > y_n - y_{n-1} > 0$$

即 $n > N$ 时 $\{x_n\}$ 也是严格单调递增的，且

$$\begin{aligned} x_n - x_N &= (x_n - x_{n-1}) + \cdots + (x_{N+1} - x_N) \\ &> (y_n - y_{n-1}) + \cdots + (y_{N+1} - y_N) = y_n - y_N \end{aligned}$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ 可知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$。可得 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = 0$。应用 (1) 的结论可得 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n / x_n = 0$，于是 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n / y_n = +\infty$

(3)$\alpha = -\infty$。这时只要将 x_n 换成 $-x_n$，然后应用 (2) 的结论即可。

注 若 $\alpha = \infty$，定理不成立，考虑反例：$a_n = (-1)^{n-1} n$，显然 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$，而

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2k}}{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(1-2) + \cdots + (2k-1-2k)}{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{-k}{2k} = -\frac{1}{2} \neq \infty$$

例题 2.33 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}(a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n) = \frac{1}{2}\alpha$$

证明 n^2 关于 n 单调递增趋于 $+\infty$，由 Stolz 公式，得

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}(a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{na_n}{n^2 - (n-1)^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} a_n = \frac{1}{2}\alpha \end{aligned}$$

例题 2.34 设 k 为正整数，则

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2}$$

证明 用 Stolz 公式有

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} - \frac{1}{k+1}\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{(k+1)(1^k + 2^k + \cdots + n^k) - n^{k+1}}{(k+1)n^k} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(k+1)n^k - [n^{k+1} - (n-1)^{k+1}]}{(k+1)[n^k - (n-1)^k]} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}k(k+1)n^{k-1} + \cdots}{(k+1)kn^{k-1} + \cdots} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

定理 2.10 (Stolz 公式之二)

设数列 $\{y_n\}$ 严格单调递减趋于 0，数列 $\{x_n\}$ 也收敛到 0. 如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\alpha$$

其中 α 为实数或 $\pm\infty$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\alpha$ 也成立。

证明 分情况讨论。

(1)$\alpha\in\mathbb{R}$。不妨设 $\alpha=0$。任给 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n>N$ 时，

$$-\varepsilon<\frac{x_n-x_{n+1}}{y_n-y_{n+1}}=\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}<\varepsilon$$

则当 $m>n>N$ 时可得

$$-\varepsilon<\frac{(x_n-x_{n+1})+\cdots+(x_{m-1}-x_m)}{(y_n-y_{n+1})+\cdots+(y_{m-1}-y_m)}=\frac{x_n-x_m}{y_n-ym}<\varepsilon$$

即

$$-\varepsilon(y_n-y_m)<(x_n-x_m)<\varepsilon(y_n-y_m)$$

令 $m\to\infty$ 可得 $-\varepsilon y_n\le x_n\le\varepsilon y_n$，这说明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n/y_n=0$

一般地，记 $\tilde{x}_n=x_n-\alpha y_n$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\tilde{x}_n-\tilde{x}_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}-\alpha=0$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{x}_n/y_n=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n/y_n=\alpha$

(2)$\alpha=+\infty$。任给 $M>0$，存在 N，当 $n>N$ 时 $\frac{x_n-x_{n+1}}{y_n-y_{n+1}}>M$。当 $m>n>N$ 时，有

$$x_n-x_m>M(y_n-y_m)$$

令 $m\to\infty$，得 $x_n\ge My_n$，这说明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n/y_n=+\infty$

(3)$\alpha=-\infty$。将 (2) 中的 x_n 换成 $-x_n$ 即可。

注 Stolz 公式反过来不一定对，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$ 不能推出 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，考虑 $a_n=(-1)^n$

我们可以考虑下面这个例子。

例题 2.35 如果 $a_n\le a_{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1+\cdots+a_n)=a$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$

证明

例题 2.36 设 $x_1\in(0,1)$, $n\ge1$ 时 $x_{n+1}=x_n(1-x_n)$。证明 $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=1$

证明 由归纳法易见当 $n\ge1$ 时 $x_n\in(0,1)$，因此

$$x_{n+1}=x_n(1-x_n)<x_n$$

即 $\{x_n\}$ 是单调递减有界数列，从而收敛。设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\alpha$，在上式中令 $n\to\infty$，得

$$\alpha=\alpha(1-\alpha)$$

由此解出 $\alpha=0$。进而有

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n})=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{x_n}+\frac{1}{1-x_n}-\frac{1}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-x_n}=1$$

由 Stolz 公式，有

$$\lim_{n\to\infty}nx_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{x_n^{-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-(n-1)}{x_n^{-1}-x_{n-1}^{-1}}=1$$

2.4 练习

1. 设 $0<x_1<\frac{1}{q}(0<q\le1)$，并且 $x_{n+1}=x_n(1-qx_n)(n\in\mathbb{N}^*a)$。求证：$\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=\frac{1}{q}$
2. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\sum_{i=1}^n a_i^2=1$。求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{3n}a_n=1$

3. 令
$$x_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\ln\binom{n}{k}(n = 1, 2, 3, \cdots)$$
求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$
4. 试利用 $Toeplitz$ 定理证明 $Stolz$ 定理。

第三章 一元函数极限

第四章 一元函数连续

第五章 一元函数微分学