数学分析

Mathematical Analysis

作者：Pekntt
组织：清疏大学

时间：September 1, 2024
版本：1.1
作者联系方式：QQ2499032096

或许是不知梦的缘故，流离之人追逐幻影

前言

参考书

教材

- 数学分析，梅加强
- 数学分析，刘春根　朱少红　李军　丁龙云
- 数学分析讲义，谢惠民
- 数学分析，徐森林　薛春华
- 数学分析教程, 常庚哲　史济怀
- 数学分析，楼红卫
- 数学分析中的问题和反例，汪林
- Principles of Mathematical Analysis, Walter Rudin
- 基本分析讲义: 第一卷 (单变量理论), 李逸

习题集

- 数学分析习题课讲义，谢惠民
- 数学分析习题演练，周民强
- 数学分析中的典型问题与方法，裴礼文

参考资料

- 第十一届清疏大学生数学竞赛班讲义
- 第十届清疏大学生数学竞赛班讲义
- 第九届清疏大学生数学竞赛班讲义
- 中国科学技术大学数学分析 (B1) 习题课讲义
- 中国科学技术大学数学分析 (B) 历年考试真题
- 南开大学凯淼淼 notes

目录

第一章 实数理论及预备知识 **1**
1.1 集合与映射 1
1.1.1 集合 1
1.1.2 集合的势 2
1.1.3 有限集与无限集 3
1.2 实数系 3
1.2.1 分类 3
1.2.2 稠密性 4
1.2.3 实数系定理的等价性 4
1.2.4 构造实数系的方法 6

第二章 数列极限 **7**
2.1 数列极限 7
2.1.1 数列极限的定义 7
2.1.2 数列极限的基本性质 10
2.2 单调数列的极限 18
2.3 Cauchy 准则 23
2.4 Stolz 公式 25
2.5 上极限和下极限 28
2.5.1 上极限和下极限的定义 28
2.5.2 上极限和下极限的基本性质 28
2.6 递推数列方法 31
2.6.1 单调性分析法 31
2.6.2 压缩映像方法 31
2.6.3 折线图方法 31
2.6.4 递推数列估阶的初等方法 31
2.6.5 加强归纳法 31
2.6.6 强求通项和强行裂项法 31
2.7 嵌套根号型极限的问题 32

第三章 一元函数极限 **33**
3.1 函数的极限 33
3.1.1 定义和基本性质 33
3.1.2 重要的函数极限 37
3.1.3 进一步的例子和性质 38
3.2 无穷小（大）量 40
3.3 连续函数 43
3.3.1 定义和基本性质 43
3.3.2 间断点和振幅 44
3.4 连续函数的整体性质 47
3.4.1 最值定理和介值定理 47
3.4.2 一致连续性 49

第三章 练习 51

第四章 一元函数微分学 **53**

4.1 导数和微分 53

4.1.1 导数和高阶导数 53

4.1.2 微分和全微分 55

4.2 函数的极值 59

4.3 微分中值定理 60

4.4 凸函数 61

4.5 L'Hospital 法则 64

4.6 Taylor 展开 65

第五章 其他 **67**

5.1 极限和渐进分析方法 67

5.1.1 递推数列方法 69

5.1.1.1 单调性分析法 69

第一章 实数理论及预备知识

1.1 集合与映射

内容提要

- ❑ 集合
- ❑ 有限集与无限集
- ❑ 集合的势

1.1.1 集合

集合（简称**集**）是指一些具有特定性质的对象的总体，这些对象称为集合的元素。集合论创始人 Cantor[1]（康托尔）对集合的刻画为[2]"吾人直观或思维之对象，如为相异而确定之物，其总括之全体即为集合，其组成集合之物谓之集合之元素。"

通常用大写字母 A, B, C 等表示集合，而用小写字母 a, b, c 等表示元素。

一方面，一个元素 a 是不是集合 A 的元素是确定的，另一方面，集合是由它的所有元素确定的。换言之，若两个集合的元素完全相同，则它们相等。

以上要求可抽象为如下的外延原则与概括原则。

外延原则：一个集合是由它的元素唯一确定的。

概括原则：对于描述或刻画人们直观或思维的对象 x 的任一性质或条件 $P(x)$，都存在一个集合 S, 它的元素恰好是具有性质 P 的那些对象。

表示一个集合的方式通常有两种：枚举法和描述法。例如由数字 1,2,3 组成的集合可以用枚举法表示为

$$A = \{1, 2, 3\}$$

自然数集[3]可以表示为

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$$

上面的表示事实上并没有列出集合的所有元素，但是给出了元素的变化规律，我们也把这种表示方法归为枚举法。

我们用描述法来表示具有某种性质 $P(x)$ 的元素 x 的全体组成的集合：

$$\{x \mid P(x)\text{成立}\}$$

例如，有理数集可表示为

$$\mathbb{Q} = \{\frac{q}{p} \mid p\text{为正整数，}q\text{为整数}\}$$

为简便起见，我们可采用

$$\{x \in \mathbb{Q}_+ \mid x^2 < 2\}$$

表示集合

$$\{x \mid x^2 < 2\text{且}x \in \mathbb{Q}_+\}$$

这里 $\mathbb{Q}_+$ 表示正有理数集。用 $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{R}, \mathbb{R}_+$ 和 $\mathbb{C}$ 依次表示整数集，正整数集，实数集，正实数集和复数集。

---

[1] Cantor,G F L P,1845-1918 年

[2] 肖文灿《集合论初步》

[3] 历史上，零并不是一开始就出现的数字，所以，曾经只把正整数才看作自然数。目前对于零是不是自然数也有不同的意见。在我国，1993 年颁布的《中华人民共和国国家标准》（GB 3100 3102-93）《量和单位》，将零纳入自然数。

若 a 是集合 A 的元素，称 a 属于 A 或 A 包含 a，记作 $a \in A$ 或 $A \ni a$。若 a 不是集合 A 的元素，则记作 $a \notin A$。

若集合 B 的所有元素都是集合 A 的元素，我们称 B 是 A 的**子集**，记作[4]$B \subseteq A$（读作 B 包含于 A）或 $A \supseteq B$（读作 A 包含 B）。若 $B \subseteq A$ 但 $B \neq A$，则称 B 为 A 的**真子集**，记作 $B \subset A$（读作 B 真包含于 A）或 $A \supset B$（读作 A 真包含 B）。

然而，人们发现如果把所有集合作为元素来构成一个集合 X，就会产生矛盾。首先 X 作为一个集合也是它自身的元素，于是就形成了 $X \in X$ 这样的关系式。进一步，考虑集合

$$A = \{B \mid B \notin B\}$$

那么是否成立 $A \in A$？若 $A \in A$，则按照 A 的定义，$A \notin A$。若 $A \notin A$，则可得 $A \in A$。因此，无论如何都会得到矛盾。这就是 Russell[5]（罗素）在 1901 年发现的集合论悖论。所谓悖论，是指这样一个命题 T，从 T 出发可以找到一个命题 S。若假定 S 成立，可推出 S 不成立；而假设 S 不成立，则又可以推出 S 成立。

Russell 悖论的出现引发了数学史上所谓的**第三次数学危机**。集合论需要通过建立其他的一系列原则来替代概括原则。而把外延原则和概括原则作为比集合更为广泛的概念-**类**的一种直观描述。

在此，粗略地介绍替代概括原则的六条新原则，这些原则用于确定哪些类可以被接受为集合。欲对此有更详细的了解，可以参考集合论的书籍。

原则 1-空集存在原则　存在一个空集。这里**空集**是不含任何元素的集合，记作 $\varnothing$。

原则 2-对集合存在原则　对任意的集合 x, y，存在一个集合 S，它恰有元素 x 和 y，并记作 $\{x, y\}$，当 x 与 y 相等时，就记作 $\{x\}$。

原则 3-幂集存在原则　对任意的集合 E，$2^E = \{A \mid A \subseteq E\}$ 是一个集合。

我们称 2^E 为 E 的**幂集**。

原则 4-并集存在原则　对任意的集合 S，存在一个集合 $\bigcup S$，由 S 的所有元素的元素组成，称为 S 的**并集**。

从并集的定义，以及前面今后自然数和实数的定义，我们已经可以感受到，在集合论中，我们所考虑的集合，其元素本身也都是集合。对于两个集合 E 和 F，习惯上用 $E \cup F$ 表示由 E 中所有的元素和 F 中所有的元素合在一起的集合。按照上述记号，$E \cup F$ 就是 $\bigcup\{E, F\}$。

对于任何给定的性质 $P(x)$，

$$C = \{x \mid P(x)\}$$

给出了一个类，但不一定是集合。以下的子集合分离原则是说类与集合的交是集合。

原则 5-子集合分离原则　给定性质 $P(x)$ 和集合 $S, E = \{x \mid P(x)\text{成立，且}x \in S\}$ 是一个集合。

可以看到 E 是集合 S 中由满足性质 $P(x)$ 的元素组成的子集。

原则 6-替换原则　若 F 是类函数，且 S 是集合，则 $\{y \mid \text{存在}x \in S, \text{使得}y = F(x)\}$ 是一个集合。

1.1.2 集合的势

定义 1.1

设 E, F 是两个集合。

1. 若存在 E 和 F 之间的双射，则称 E 和 F 有相同的基数。记作 $|E| = |F|$
2. 若 $E = \varnothing$ 或者存在 $n \geq 1$ 使得 $|E| = |\{1, 2, \cdots, n\}|$，则称 E 为有限集，并记 $|E|$ 依次为 0 和 n
3. 若 $|E| = |\mathbb{N}|$，则称 E 为可数集或可列集，其基数记为 $\aleph_0$
4. 若存在 E 到 F 的单射，则称 E 的基数小于等于 F 的基数，记作 $|E| \leq |F|$ 或 $|F| \geq |E|$。进一步，若 $|E| \leq |F|$ 且 $|E| \neq |F|$，则称 $|E| < |F|$ 或 $|F| > |E|$
5. 若 $|E| \leq \aleph_0$，则称 E 为至多可数集或至多可列集

♣

[4] 也有人用 $\subset$ 与 $\subsetneq$ 依次表示包含于和真包含于

[5] Russell,B A W,1872-1970 年，哲学家，逻辑学家，数学家，历史学家，社会活动家，政治活动家

易见，等势是一种等价关系。以下定理表明基数没有上界。

定理 1.1

对任何集合 E，成立 $\left|2^E\right| > |E|$

容易看到对于基数为 n 的集合 E，它的元素个数为 $k(0 \le k \le n)$ 的子集数是 C_n^k，从而 2^E 的基数为 2^n。因此，今后我们记 2^E 的基数为 $2^{|E|}$。

推论 1.1

$$2^{\aleph_0} > \aleph_0$$

1.1.3 有限集与无限集

定理 1.2 (Galileo 定理)

集合 S 是无限集的充分必要条件是 S 与自己的一个真子集一一对应。

定义 1.2 (可列集)

可列集就是能与正整数集一一对应的集合。

可列集的基本性质

1. 任何无限集都有可列子集
2. 可列集的任何无限子集为可列集
3. 一个有限集和一个可列集的并为可列集
4. 有限个可列集的并是可列集
5. 可列个有限集的并是可列集
6. 可列个可列集的并是可列集

1.2 实数系

内容提要

- 分类
- 稠密性
- 实数系定理的等价性
- 构造实数系的方法

1.2.1 分类

代数数　满足整系数代数方程 $a_0x^n + \cdots + a_n = 0$ 的实数根

超越数　非代数数的实数

命题 1.1 (希尔伯特第七问题)

Is a^b transcendental, for algebraic $a \neq 0, 1$ and irrational algebraic b?

定理 1.3 (Gelfond–Schneider theorem)

If a and b are complex algebraic numbers with $a \notin \{0, 1\}$ and b not rational, then any value of a^b is a transcendental number.

1.2.2 稠密性

定义 1.3

设 E 是 R 中的一个实数集。若任意两个实数之间必有 E 中的一个数，则称 E 在 R 中稠密。

例题 1.1 若 $\{a_n\}$ 是递增无上界列，且 $\frac{a_n}{a_{n+1}} \to 1(n\to\infty)$，则数集 $\{\frac{a_m}{a_n}: m\geq n\geq 1\}$ 在 $(1,+\infty)$ 中稠密。

证明 反证法。假定存在 $x_0>1$ 及 $\varepsilon_0>0$ 使得 $\left|\frac{a_m}{a_n}-x_0\right|\geq\varepsilon_0, 1\leq n<m$。

因为 $\frac{a_n}{a_{n+1}}\to 1(n\to\infty)$

所以对充分大的 k 的，存在 n_k

$$\frac{a_m}{a_k}<x_0(m<n_k), \frac{a_m}{a_k}>x_0(m>n_k)$$

对每个 k，有

$$\frac{a_{n_k}+1}{a_k}-\frac{a_{n_k}}{a_k}\geq 2\varepsilon_0, \frac{a_{n_k}+1}{a_{n_k}}-1\geq 2\varepsilon_0\frac{a_k}{a_{n_k}}>\frac{2\varepsilon_0}{x_0}>0$$

后式在 $k\to\infty$ 为 0，这与 $\varepsilon_0>0$ 矛盾。

1.2.3 实数系定理的等价性

1. 确界存在定理
2. 单调有界数列收敛定理
3. 闭区间套定理
4. Cauchy 收敛准则
5. Bolzano-Weierstrass 凝聚定理
6. Heine-Borel 有限开覆盖定理

定理 1.4 (确界存在定理)

在实数系中，有上界的数集一定有上确界，有下确界的数集一定有下确界。

注 对无上界的数集 A，约定 $\sup A=+\infty$；对无下界的数集 A，约定 $\inf A=-\infty$

定理 1.5

若 $\{I_n\}$ 为闭区间套，则 $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n\neq\varnothing$。如 $|I_n|\to 0$，则 $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ 为单点集。

注 看上去，闭区间套定理与单调有界数列的收敛定理差不多。但是闭区间套定理并不限于实数系，可以推广为非常一般的情况，有许多重要的应用，而单调性定理离不开数直线上的序关系。与闭区间套定理相联系，有构造闭区间套的方法，从而应用中比单调有界数列的收敛定理强得多。

定理 1.6 (凝聚定理 (Bolzano-Weierstrass 定理))

有界数列必有收敛子列。

注 凝聚定理在实数系中成立，在有理数集 Q 中不成立。

定理 1.7 (Cauchy 收敛准则)

数列 $\{x_n\}$ 是收敛数列当且仅当 $\{x_n\}$ 是基本数列。

注 Cauchy 收敛准则在有理数集 Q 中不成立。

定义 1.4

设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上定义，$f([a,b]) \subset [a,b]$，并存在一个常数 k，满足 $0 < k < 1$，使得对一切 $x,y \in [a,b]$ 成立不等式 $|f(x)-f(y)| \le k|x-y|$，则称 f 是 $[a,b]$ 上的一个压缩映射，称常数 k 为压缩常数。

命题 1.2 (压缩映射原理)

设 f 是 $[a,b]$ 上的一个压缩映射，则

1. f 在 $[a,b]$ 中存在唯一的不动点 $\xi = f(\xi)$
2. 由任何初值 $a_0 \in [a,b]$ 和递推公式 $a_{n+1} = f(a_n), n \in \mathbb{N}_+$，生成的数列一定收敛于 ξ
3. 成立估计式 $|a_n - \xi| \le \frac{k}{1-k}|a_n - a_{n-1}|$ 和 $|a_n - \xi| \le \frac{k^n}{1-k}|a_1 - a_0|$(即事后估计与先验估计)

证明 这个证明中不需要函数 f 的连续性。

由于 $f([a,b]) \subset [a,b]$，因此 $\{a_n\}$ 必在 $[a,b]$ 中。根据 Cauchy 收敛准则估计

$$\begin{aligned}\left|a_n - a_{n+p}\right| &\le k\left|a_{n-1} - a_{n+p-1}\right| \le k^2\left|a_{n-2} - a_{n+p-2}\right| \\ &\le \cdots \le k^n\left|a_0 - a_p\right| \le k^n(b-a)\end{aligned}$$

可见对 $\varepsilon > 0$，取 $N = \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right)}{\ln k}$，当 $n > N$ 和 $p \in \mathbb{N}_+$ 时，就有 $\left|a_n - a_{n+p}\right| < \varepsilon$。因此 $\{a_n\}$ 是基本数列，从而收敛。记其极限为 $\xi \in [a,b]$。从不等式 $|f(a_n) - f(\xi)| \le k|a_n - \xi|$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi$ 可见，数列 $\{f(a_n)\}$ 收敛于 $f(\xi)$。

在 $a_{n+1} = f(a_n)$ 两边令 $n \to \infty$，就得到 $\xi = f(\xi)$。因此 ξ 是 f 的不动点。

如果 f 在 $[a,b]$ 内还有不动点 η，则有 $|\xi - \eta| = |f(\xi) - f(\eta)| \le k|\xi - \eta|$。由于 $0 < k < 1$，只能有 $\xi = \eta$。因此 f 在 $[a,b]$ 内的不动点是唯一的。

命题 (3) 的前一式可从估计式

$$|a_n - \xi| = |f(a_{n-1} - f(\xi))| \le k|a_{n-1} - \xi| \le k(|a_{n-1} - a_n| + |a_n - \xi|)$$

得到：

$$|a_n - \xi| \le \frac{k}{1-k}|a_n - a_{n-1}|$$

从上式出发，得到

$$|a_n - \xi| \le \frac{k}{1-k}|a_n - a_{n-1}| \le \cdots \le \frac{k^n}{1-k}|a_1 - a_0|$$

定义 1.5 (开覆盖)

设有 $[a,b] \subset \bigcup_\alpha O_\alpha$，其中每个 O_α 是开区间，则称 $\{O_\alpha\}$ 是区间 $[a,b]$ 的一个开覆盖。

定理 1.8 (覆盖定理 (Henie-Borel 定理))

如果 $\{O_\alpha\}$ 是区间 $[a,b]$ 的一个开覆盖，则存在 $\{O_\alpha\}$ 的一个有限子集 $\{O_1, O_2, \cdots, O_n\}$，它是区间 $[a,b]$ 的一个开覆盖，也就是说 $[a,b] \subset \bigcup_{i=1}^n O_n$

注 在覆盖定理中的条件不能随意变动。如果将闭区间 $[a,b]$ 改为开区间或无界区间，或者将开覆盖中的每个开区间改为闭区间，定理的结论都不再成立。

注 数学分析中的覆盖定理是对实数系中的有界闭区间的某种拓扑性质的一种刻画。这种性质在拓扑学中称为紧性。在实数范围内，区间的紧性和有界闭等价。因此也将有界闭区间称为紧区间。

以下给出覆盖定理的一个证明。其中不仅用了确界存在定理，而且使用了一种很有特色的 **Lebesgue(勒贝格)** 方法。这种方法有明显的几何意义，可解决很多问题。(这种方法的缺点是：它给出的证明一般都是非构造性的，此外也很难推广到高维情况)

证明 设闭区间 $[a,b]$ 有一个开覆盖 $\{O_\alpha\}$。定义数集

$$A = \{x \geq a \mid \text{区间}[a,x]\text{在}\{O_\alpha\}\text{中存在有限子覆盖}\}$$

由于在开覆盖 $\{O_\alpha\}$ 中有一个开区间覆盖 a，因此 a 及其右侧充分邻近的点均在数集 A 中。这保证了数集 A 是非空的。从数集 A 的定义可见，如果 $x \in A$，则整个区间 $[a,x] \subset A$。因此如果 A 无上界，则 $b \in A$，这就是说区间 $[a,b]$ 在开覆盖 $\{O_\alpha\}$ 中存在有限子覆盖。

如果 A 有上界，用确界存在定理，得到 $\xi = \sup A$。这时可见每个满足 $x < \xi$ 的 x 都在 A 中。事实上从 $\xi = \sup A$ 和上确界为最小上界的定义，在 $x < \xi$ 时，存在 $y \in A$，使得 $x < y$。由于 $[a,y]$ 在 $\{O_\alpha\}$ 中存在有限开覆盖，所以 $[a,x] \subset [a,y]$ 存在有限开覆盖，也就是 $x \in A$。

因此只要证明 $b < \xi$，就有 $b \in A$，即 $[a,b]$ 在 $\{O_\alpha\}$ 中存在有限开覆盖。

用反证法。如果 $\xi \leq b$，则 $\xi \in [a,b]$，因此在开覆盖 $\{O_\alpha\}$ 中有一个开区间 O_{α_0} 覆盖 ξ。于是我们可以在这个开区间中找到 a_0 和 b_0，使它满足条件 $a_0 < \xi < b_0$。由上面的论证知道 $a_0 \in A$。这就是说区间 $[a,a_0]$ 在开覆盖 $\{O_\alpha\}$ 中存在有限子覆盖。向这个有限子覆盖再加上一个开区间 O_{α_0}，就成为区间 $[a,b_0]$ 的覆盖，所以得到 $b_0 \in A$。这与 $\xi = \sup A$ 矛盾。

定理 1.9 (加强形式的覆盖定理)

如果 $\{O_\alpha\}$ 是区间 $[a,b]$ 的一个开覆盖，则存在一个正数 $\delta > 0$，使得对于区间 $[a,b]$ 中的任何两个点 x',x''，只要 $|x'-x''| < \delta$，就存在开覆盖中的一个开区间，它覆盖 x',x''。(称这个数 δ 为开覆盖的 **Lebesgue** *数)*

注 这个定理是覆盖定理的加强，有了这种加强形式，覆盖定理变得更为有力。

练习 1.1 从确界存在定理出发，证明：对于 $\mathbb{R}$ 中的任何两个正数 a,b，存在正整数 n，使得 $na > b$。(这个结论常称为 Archimedes 公理或原理)

练习 1.2 设有两个非空实数集 A 和 B，满足条件:(1)$R = A \bigcup B$;(2) 在 A 中的数都小于 B 中的每一个数，证明：或者 A 有最大数而 B 无最小数，或者 B 有最小数而 A 无最大数。(这就是 Dedkind 的连续性定理或公理，它与实数系的每一个基本定理等价)

练习 1.3 证明：将实数 $\mathbb{R}$ 分成两个非空集合 A 和 B，则或者 A 中有数列收敛于 B 中的点，或者 B 中有数列收敛于 A 中的点。(这个结论称为实数的连通性，它与实数系的每一个基本定理等价)

1.2.4 构造实数系的方法

练习 1.4 请模仿局部有界函数的定义给出局部常值函数的定义，并证明: 区间中的局部常值函数必为常值函数。(提示: 先考虑闭区间)

练习 1.5 设 $A \subset \mathbb{R}$，定义函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为: 当 $x \in A$ 时 $f(x) = 1$；当 $x \notin A$ 时 $f(x) = 0$。如果 A 既是开集，又是闭集，证明:f 为局部常值函数。由此说明 $\mathbb{R}$ 中既是开集又是闭集的集合只有两个，即空集和 $\mathbb{R}$。

第二章 数列极限

2.1 数列极限

内容提要

- 数列极限的定义
- 数列极限的基本性质

2.1.1 数列极限的定义

定义 2.1 (数列)

定义在正整数集 $\mathbb{N}$ 上的函数称为数列。设 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ 为数列，记 $a_n=f(n)$，数列 f 常表示为

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$$

简记为 $\{a_n\}$，a_n 称为该数列的第 n 项，有时也称为一般项或通项。♣

注 因为可数集可以与 $\mathbb{N}$ 建立一一对应，定义在可数集上的函数也可以称为数列。比如定义在非负整数集上的函数也是数列，这种数列可以用 $a_0,a_1,\cdots$ 表示。

定义 2.2 (数列极限)

设 $\{a_n\}$ 为数列，$\alpha\in\mathbb{R}$。如果任给 $\varepsilon>0$，均存在正整数 $N=N(\varepsilon)$，使得当 $n>N$ 时，$|\,a_n-\alpha\,|<\varepsilon$ 总成立，则称 $\{a_n\}$ 收敛于 α，或称 $\{a_n\}$ 以 α 为极限，记为

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha \quad 或 \quad a_n\to\alpha(n\to\infty)$$

♣

数列可视为实数轴上的一列点。从直观上看，当 n 越来越大时，若 a_n 越来越靠近（无限靠近）某个点，这个点代表的数就是极限。为了用准确的数学语言来刻画“越来越靠近”和“当 n 越来越大”，我们要用到上述定义中的 ε和N，这里的 N 一般是依赖于给定的 ε 的。这种定义极限的方法也称为 $\varepsilon-N$ 语言法。

按照定义，我们也可以这样来描述极限：$\lim\limits_{x\to\infty}a_n=\alpha$ 当且仅当任给 $\varepsilon>0$，数列 a_n 最多只有有限项位于区间 $(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)$ 之外。因此，如果存在 $\varepsilon_0>0$，使得 a_n 中的无限项位于 $(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)$ 之外，则数列 a_n 不以 α 为极限（这时该数列的极限可能不存在，如果存在则极限也不等于 α）。

也可以用 $\varepsilon-N$ 语言给出数列 a_n 不以 α 为极限的定义：如果存在 $\varepsilon_0>0$，使得任给正数 N，均存在 $n_0>N$，使得 $\left|a_{n_0}-\alpha\right|\geq\varepsilon_0$，则 a_n 不以 α 为极限。

显然，改变数列 $\{a_n\}$ 的有限多项，或去掉有限多项，或添加有限多项，不会改变数列 $\{a_n\}$ 的收敛和发散性。

表述数列 $\{a_n\}$ 不以 a 为极限 $\quad \exists\varepsilon>0,\forall N\in\mathbb{N},\exists n>N,|a_n-a|\geq\varepsilon$

例题 2.1 如果 $\alpha>0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0$$

证明 任给 $\varepsilon>0$，取 $N>\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}$，当 $n>N$ 时

$$\left|\frac{1}{n^\alpha}-0\right|=\frac{1}{n^\alpha}<\frac{1}{N^\alpha}<\varepsilon$$

由定义，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0$$

例题 2.2 设 $0<a<1$，证明

$$\lim_{n\to\infty}[(n+1)^a-n^a]=0$$

证明 当 $n\geq 1$ 时，有

$$0<(n+1)^a-n^a=n^a[(1+\frac{1}{n})^a-1]\leq n^a[(1+\frac{1}{n})-1]=\frac{1}{n^{1-a}}$$

由夹逼定理得

$$\lim_{n\to\infty}[(n+1)^a-n^a]=0$$

例题 2.3 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$$

证明 注意到当 $1\leq k\leq n$ 时 $(k-1)(n-k)\geq 0$，从而 $k(n-k+1)\geq n$。我们就有

$$(n!)^2=(1\cdot n)(2\cdot(n-1))\cdots(k(n-k+1))\cdots(n\cdot 1)\geq n^n,\forall n\geq 1$$

因此

$$0<\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\leq\frac{1}{\sqrt{n}},\forall n\geq 1$$

由夹逼定理知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$$

例题 2.4 设 $a>0$，证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$$

证明 当 $a\geq 1$ 时，记 $a_n=\sqrt[n]{a}-1$，则 $a_n\geq 0$，利用二项式展开得

$$a=(1+a_n)^n=1+na_n+\cdots+a_n^n>na_n$$

这说明

$$1\leq\sqrt[n]{a}=1+a_n<1+\frac{a}{n}$$

由夹逼原理知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$$

当 $0<a<1$ 时，根据刚才的估计有，

$$1<\sqrt[n]{\frac{1}{a}}<1+\frac{1}{na}$$

即

$$1-\frac{1}{1+na}<\sqrt[n]{a}<1$$

由夹逼原理知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$$

例题 2.5 证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

证明

证法 1

记 $a_n=\sqrt[n]{n}-1$，当 $n>1$ 时，

$$n=(1+a_n)^n=1+na_n+\frac{1}{2}n(n-1)a_n^2+\cdots+a_n^n>\frac{1}{2}n(n-1)a_n^2$$

这说明

$$0<a_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

即

$$1 < \sqrt[n]{n} = 1 + a_n < 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

由夹逼原理知

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

证法 2

应用几何-算术平均不等式得到

$$1 \le \sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = (1 \cdots 1\sqrt{n}\sqrt{n})^{\frac{1}{n}} \le \frac{(n-2)+2\sqrt{n}}{n}$$
$$= 1 + \frac{2(\sqrt{n}-1)}{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$$

于是，$\forall \varepsilon > 0$，取 $N \in \mathbb{N}$，使得 $N > \frac{4}{\varepsilon^2}$，当 $n > N$ 时，有

$$\left|\sqrt[n]{n} - 1\right| < \frac{2}{\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{N}} < \varepsilon$$

所以，$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$。

例题 2.6 设 $a, b > 0$，证明

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = max\{a, b\}$$

证明 不妨设 $a \ge b$，则

$$a = \sqrt[n]{a^n} \le \sqrt[n]{a^n + b^n} \le \sqrt[n]{2a^n} = \sqrt[n]{2}a$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$ 及夹逼原理知

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = a$$

例题 2.7 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$，证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \alpha$$

证明 先设 $\alpha = 0$，对任意 $\varepsilon > 0$，存在 N_0，使得当 $n > N_0$ 时，$|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$。令

$$N > max\{N_0, 2\varepsilon^{-1}\left|a_1 + a_2 + \cdots + a_N\right|\}$$

当 $n > N$ 时，有

$$\left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right| \le \frac{\left|a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_0}\right|}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=N_0+1}^{n} |a_k|$$
$$< \frac{\left|a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_0}\right|}{N} + \frac{1}{n}(n - N_0)\frac{\varepsilon}{2}$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

这说明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = 0$$

一般地，如果有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - \alpha) = 0$

则有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k - \alpha) = 0$$

又有

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k - \alpha) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - \alpha$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\alpha$$

例题 2.8 任何实数都是某个有理数列的极限。

证明 设 α 为实数。当 α 为有理数时，令 $a_n=\alpha(n\geq 1)$ 即可。当 α 为无理数时，令 $a_n=[n\alpha]/n$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数。此时 a_n 是有理数。由 α 为无理数可知

$$n\alpha-1<[n\alpha]<n\alpha,\forall n\geq 1$$

这说明

$$\alpha-\frac{1}{n}<a_n=\frac{[n\alpha]}{n}<\alpha,\forall n\geq 1$$

由夹逼原理知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$

例题 2.9

1. 设 $a_n\geq 0(n\in\mathbb{N}), \lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=0$
2. 设 $a_n>0(n\in\mathbb{N}, \lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$

证明

1. 由 $0\leq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\to 0(n\to\infty)$，及夹逼定理，立即可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=0$
2. 当 $a>0,a_n>0(n\in\mathbb{N})$ 时，有

$$\frac{1}{(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n})/n}=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

再由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n})/n}=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}=\frac{1}{\frac{1}{a}}=a=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ 和夹逼定理，可得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$$

2.1.2 数列极限的基本性质

定理 2.1

如果数列 a_n 收敛，则其极限是唯一的。

证明 设数列 a_n 既收敛于 α，又收敛于 α'。按照定义，任给 $\varepsilon>0$，存在 N_1,N_2，使得当 $n>N_1$ 时 $|a_n-\alpha|<\varepsilon$；当 $n>N_2$ 时 $|a_n-\alpha'|<\varepsilon$。因此，当 $n>max\{N_1,N_2\}$ 时，有

$$|\alpha-\alpha'|\leq|a_n-\alpha|+|a_n-\alpha'|<2\varepsilon$$

由 ε 的任意性可知 $\alpha=\alpha'$。

注 $\alpha\neq\alpha'$ 时，代入 $\varepsilon=|\alpha-\alpha'|/2$ 即可导出矛盾。

设数列 a_n 为数列。如果 $\{a_n\mid n=1,2,\cdots\}$ 为有界集合，则称 a_n 是有界数列，此时存在 M，使得 $|a_n|\leq M$ 对每一个正整数 n 均成立。

定理 2.2

设数列 $\{a_n\}$ 收敛，则 $\{a_n\}$ 是有界数列。

证明 设 $\{a_n\}$ 收敛到 α。取 $\varepsilon=1$，由数列极限定义，存在 N，当 $n>N$ 时 $|a_n-\alpha|\leq 1$。因此

$$|a_n|\leq|\alpha|+1,\forall n>N$$

令

$$M=max\{|\alpha|+1,|a_1|,\cdots,|a_N|\}$$

则 $|a_n|\leq M$ 总成立。

由此命题立知，无界数列必定发散。对于无界数列，我们有时也可以考察其变化趋势。设 $\{a_n\}$ 为数列，如

果任给 $\alpha > 0$，均存在 N，使得当 $n > N$ 时，$a_n > \alpha$，则称 $\{a_n\}$ 发散到 $+\infty$（正无穷大），或称 $\{a_n\}$ 的极限为 $+\infty$，记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty, \text{或} a_n \to +\infty (n \to \infty)$$

类似地，如果任给 $\beta < 0$，均存在 N，使得当 $n > N$ 时，$a_n < \beta$，则称 $\{a_n\}$ 发散到 $-\infty$（负无穷大），或称 $\{a_n\}$ 的极限为 $-\infty$，记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty, \text{或} a_n \to -\infty (n \to \infty)$$

如果 $\{|a_n|\}$ 发散到 $+\infty$，则称 $\{a_n\}$ 发散到 ∞（无穷大），记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty, \text{或} a_n \to \infty (n \to \infty)$$

例题 2.10 设 $q > 1$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \log_q n = +\infty$

证明 任给 $\alpha > 0$，取 $N > q^\alpha$，则当 $n > N$ 时 $\log_q n > \alpha$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty} \log_q n = +\infty$

例题 2.11 设 $a > 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n^a = +\infty$

证明 任给 $\alpha > 0$，取 $N > \alpha^{\frac{1}{a}}$，则当 $n > N$ 时 $n^a > \alpha$，这说明 $\lim\limits_{n\to\infty} n^a = +\infty$

例题 2.12 设 $|q| > 1$，研究数列 $\{q^n\}$ 的敛散性。

解 当 $q > 1$ 时，记 $\delta = q - 1 > 0$。任给 $\alpha > 0$，取 $N > \frac{\alpha}{\delta}$，当 $n > N$ 时，有

$$q^n = (1+\delta)^n = 1 + n\delta + \cdots + \delta^n > n\delta > \alpha$$

因此 $q^n \to +\infty (n \to \infty)$

当 $q < -1$ 时，$|q|^n \to +\infty$，因此 $q^n \to \infty (n \to \infty)$

两个发散到无穷的数列有时可以相互比较。

例题 2.13 设 $a > 0, b > 1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^a}{b^n} = 0$

证明 记 $\beta = b^{\frac{1}{a}} - 1 > 0$，当 $n > 1$ 时

$$(1+\beta)^n = 1 + n\beta + \frac{1}{2}n(n-1)\beta^2 + \cdots + \beta^n > \frac{1}{2}n(n-1)\beta^2$$

因此

$$0 < \frac{n^a}{b^n} = \left[\frac{n}{(1+\beta)^n}\right]^a < \left[\frac{2}{(n-1)\beta^2}\right]^a$$

由夹逼原理知 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^a}{b^n} = 0$

例题 2.14 设 $a > 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

证明 取正整数 $N_0 > |a|$，则当 $n > N_0$ 时，有

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^{N_0}}{N_0!}\frac{|a|}{N_0+1}\cdots\frac{|a|}{n-1}\frac{|a|}{n} \le \frac{|a|^{N_0}}{N_0!}\frac{|a|}{n}$$

由夹逼原理知 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

定理 2.3 (夹逼定理)

设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为数列，且

$$a_n \le b_n \le c_n, \forall n \ge N_0$$

其中 N_0 为正整数。如果

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha (\alpha \text{为实数或}, +\infty, -\infty)$$

则

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$$

证明

任给 $\varepsilon > 0$，存在 N_1, N_2，当 $n > N_1$ 时

$$\alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon$$

当 $n > N_2$ 时

$$\alpha - \varepsilon < c_n < \alpha + \varepsilon$$

取 $N = max\{N_0, N_1, N_2\}$，则当 $n > N$ 时，由 $a_n \le b_n \le c_n$ 可得

$$\alpha - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < \alpha + \varepsilon$$

这说明 $\{b_n\}$ 收敛到 α。

注 在应用夹逼原理时，常常用到的事实有：

1. a_n 收敛于 0 当且仅当 $\{|a_n|\}$ 收敛于 0；如果 $\{a_n\}$，C 为常数，则 $\{Ca_n\}$ 也收敛于 0.
2. 如果 $|a_n| \le b_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$。这可由定义或 $-b_n \le a_n \le b_n$ 推出。
3. 如果条件改为 $\lim\limits_{n\to\infty}(c_n - a_n) = 0$，不能推出，结论不对，收敛性也不确定。

命题 2.1 (绝对值性质)

设数列 $\{a_n\}$ 收敛到 α，则 $\{|a_n|\}$ 收敛到 $|\alpha|$

证明 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$，则任给 $\varepsilon > 0$，存在 N，当 $n > N$ 时 $|a_n - \alpha| < \varepsilon$，此时

$$||a_n| - |\alpha|| \le |a_n - \alpha| < \varepsilon, \forall n > N$$

这说明 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |\alpha|$

命题 2.2 (保序性质)

设数列 $\{a_n\}$ 收敛到 α，$\{b_n\}$ 收敛到 β，则有

1. 如果存在 N_0，当 $n > N_0$ 时 $a_n \ge b_n$，则 $\alpha \ge \beta$
2. 反之，如果 $\alpha > \beta$，则存在 N，使得当 $n > N$ 时 $a_n > b_n$

证明 (1) 任给 $\varepsilon > 0$，存在 N_1, N_2，使得

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon, \forall n > N_1; |b_n - \beta| < \varepsilon, \forall n > N_2$$

令 $N = max\{N_0, N_1, N_2\}$，则 $n > N$ 时，有

$$\alpha - \beta = (\alpha - a_n) + (a_n - b_n) + (b_n - \beta) \ge (\alpha - a_n) + (b_n - \beta) \ge -2\varepsilon$$

由 ε 的任意性可知 $\alpha - \beta \ge 0$，即 $\alpha \ge \beta$

(2) 设 $\alpha > \beta$，取 $\varepsilon = (\alpha - \beta)/2$，则存在 N_1, N_2，使得 $|a_n - \alpha| < \varepsilon, \forall n > N_1; |b_n - \beta| < \varepsilon, \forall n > N_2$ 成立。令 $N = max\{N_1, N_2\}$，则 $n > N$ 时，有

$$a_n - b_n = (a_n - \alpha) + (\alpha - \beta) + (\beta - b_n) > -\varepsilon + (\alpha - \beta) - \varepsilon = 0$$

推论 2.1

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$，如果 $\alpha \ne 0$，则存在 N，使得当 $n > N$ 时，有

$$\frac{1}{2}|\alpha| < |a_n| < \frac{3}{2}|\alpha|$$

证明 由极限的绝对值性质，有

$$\frac{1}{2}|\alpha| < \lim_{n\to\infty} |a_n| = |\alpha| < \frac{3}{2}|\alpha|$$

再由极限的保序性质即得欲证结论。

例题 2.15 设 $q > 1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_q n}{n} = 0$

证明 任给 $\varepsilon > 0$，因为 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 < q^{\varepsilon}$。由极限的保序性质，存在 N，当 $n > N$ 时，$\sqrt[n]{n} < q^{\varepsilon}$。这说明

$$0 < \frac{\log_q n}{n} < \varepsilon, \forall n > N$$

即 $\lim_{n\to\infty} \frac{\log_q n}{n} = 0$

命题 2.3 (极限的四则运算)

设数列 $\{a_n\}$ 收敛到 α，$\{b_n\}$ 收敛到 β，则有

1. $\{\lambda a_n + \mu b_n\}$ 收敛到 $\lambda\alpha + \mu\beta$，其中 λ, μ 为常数；
2. $\{a_n b_n\}$ 收敛到 $\alpha\beta$；
3. 当 $\beta \neq 0$ 时，$\{a_n / b_n\}$ 收敛到 α/β

证明 (1) 任给 $\varepsilon > 0$，存在 N_1, N_2，使得

$$|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2|\lambda| + 1}, \forall n > N_1; |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2|\mu| + 1}, \forall n > N_2$$

令 $N = max\{N_1, N_2\}$，则 $n > N$ 时，有

$$\begin{aligned}(\lambda a_n + \mu b_n) - (\lambda\alpha + \mu\beta)| &\leq |\lambda| |a_n - \alpha| + |\mu| |b_n - \beta| \\ &\leq |\lambda| \frac{\varepsilon}{2|\lambda| + 1} + |\mu| \frac{\varepsilon}{2|\mu| + 1} \\ &< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon\end{aligned}$$

这说明 $\lim_{n\to\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda\alpha + \mu\beta$

(2) 由有界性可知，存在 M，使得 $|b_n| \leq M$ 总成立。因此

$$0 \leq |a_n b_n - \alpha\beta| = |(a_n - \alpha)b_n + \alpha(b_n - \beta)| \leq M |a_n - \alpha| + |\alpha| |b_n - \beta|$$

利用 (1) 和夹逼原理知 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$

(3) 根据 (2)，我们只须证明 $\lim_{n\to\infty} 1/b_n = 1/\beta$。由保序性质的推论，存在 N，当 $n > N$ 时，$|b_n| > |\beta|/2$。此时

$$0 \leq \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{\beta}\right| = \frac{|b_n - \beta|}{|b_n| |\beta|} \leq \frac{2}{|\beta|^2} |b_n - \beta|$$

由夹逼原理知 $\lim_{n\to\infty} 1/b_n = 1/\beta$

例题 2.16 求数列极限 $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{4n^2-3n+1}$

解

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - n}{4n^2 - 3n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{4 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1 - 0}{4 - 0 - 0} = \frac{1}{4}$$

命题 2.4

1. 设 $\{a_n\}$ 收敛到 α，则它的任何子列 $\{a_{nk}\}$ 也收敛到 α
2. 如果 $\{a_n\}$ 的偶子列与奇子列均收敛到 α，则 $\{a_n\}$ 也收敛到 α
3. 数列 $\{a_n\}$ 有极限（实数 a 或 $+\infty$ 或 $-\infty$）的充要条件为 $\{a_n\}$ 的非平凡子列（$\{a_n\}$ 本身以及 $\{a_n\}$ 去掉有限项后得到的子列称为 $\{a_n\}$ 的平凡子列；不是平凡子列的子列称为 $\{a_n\}$ 的非平凡子列）都有极限（实数 a 或 $+\infty$ 或 $-\infty$）。

证明

1. 必要性：

   对 a 的任何开邻域 U，因 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，故 $\exists N \in \mathbb{N}$，当 $n > N$ 时，$a_n \in U$。当 $a_{nk} \geq k > K = N$ 时，有 $a_{nk} \in U$，所以 $\lim_{k\to\infty} a_{nk} = \alpha$。

   充分性：

令 $n_k = k$，则 $\{a_n\} = \{a_k\} = \{a_{nk}\}$ 为 $\{a_n\}$ 的一个子列，所以

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} a_{nk} = \alpha$$

2. 必要性：

对 a 的任何开邻域 U，因 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$，故 $\exists N \in \mathbb{N}$，当 $n > N$ 时，有 $a_n \in U$。取 $K = N$，当 $k > K$ 时，有 $2k > 2K = 2N > N$，$2k-1 > 2K-1 = 2N-1 \geq N$，故

$$a_{2k} \in U, a_{2k-1} \in U$$

从而 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = \alpha, \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1} = \alpha$。

充分性：

对 a 的任何开邻域 U，因 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = \alpha$，故 $\exists K_1 \in \mathbb{N}$，当 $k > K_1$ 时，有 $a_{2k} \in U$。又因为 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1} = \alpha$，故 $\exists K2 \in \mathbb{N}$，当 $k > K_2$ 时，有 $a_{2k-1} \in U$。于是，当 $n > N = \max\{2K_1, 2K_2 - 1\}$ 时，必有

$$a_n \in U$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

3. 必要性：

即 2 中的必要性。

充分性：

由右边条件，$\{a_n\}$ 的非平凡子列 $\{a_{2k}\}, \{a_{2k-1}\}, \{a_{3k}\}$ 均有极限。由于 $\{a_{6k}\}$ 既是 $\{a_{2k}\}$，又是 $\{a_{3k}\}$ 的子列，故有上述必要性，可知

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} a_{6k} = \lim_{k\to\infty} a_{3k}$$

此外，$\{a_{6k-3}\}$ 既是 $\{a_{2k-1}\}$ 又是 $\{a_{3k}\}$ 的子列，同样可得

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} a_{6k-3} = \lim_{k\to\infty} a_{3k}$$

于是 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k}$，即 $\{a_n\}$ 的奇子列 $\{a_{2k-1}\}$ 和偶子列 $\{a_{2k}\}$ 有相同的极限 a。由定理知 $\{a_n\}$ 有极限。

例题 2.17 研究数列 $\{a_n = \frac{1}{2}[1 + (-1)^n]\}$ 的敛散性

解 因为 $a_{2k} = 1, a_{2k-1} = 0$，故 $\{a_n\}$ 的偶子列和奇子列均收敛但极限不同，这说明 $\{a_n\}$ 发散。

例题 2.18 研究数列 $\{\sin n\}$ 的敛散性

解 这个数列是发散的（反证法）设 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n = \alpha$，则

$$2\sin 1 \cos n = \sin(n+1) - \sin(n-1) \to \alpha - \alpha = 0 (n \to \infty)$$

因为 $\sin 1 \neq 0$，上式表明 $\cos n \to 0 (n \to \infty)$，从而

$$\sin 2n = 2\sin n \cos n \to 2\alpha \cdot 0 = 0 (n \to \infty)$$

这说明 $\alpha = 0$，此时

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \to 0 + 0 = 0 (n \to \infty)$$

这和恒等式 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 相矛盾。

例题 2.19 数列 $\{a_n\}$ 无上界 $\Longleftrightarrow$ $\{a_n\}$ 必有子列 $\{a_{n_k}\} \to +\infty (k \to \infty)$

证明 必要性：

设 $\{a_n\}$ 无上界，则 1 不是数列 $\{a_n\}$ 的上界，故 $\exists a_{n_1} > 1$。又因 $\max\{2, a_1, \cdots, a_{n_1}\}$ 不是数列 $\{a_n\}$ 的上界，故 $\exists a_{n_2} > \max\{2, a_1, \cdots, a_{n_1}\}$，显然，$n_1 < n_2$。以此类推就得到 $a_{n_k} > \max\{k, a_1, \cdots, a_{n_{k-1}}\}$，显然，$n_{k-1} < n_k$。所以 $\{a_{n_k}$ 为 $\{a_n\}$ 的一个子列，且 $a_{n_k} > k$。由极限定义知，$\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = +\infty$。

充分性：

设 $\{a_n\}$ 有子列 $\{a_{nk} \to +\infty (k \to \infty)$，则 $\forall A > 0$，$\exists K = K(A) \in \mathbb{N}$，使得，当 $k > K$ 时，$a_{n_k} > A$，所以 A 不

为数列 $\{a_n\}$ 的上界。从 A 任取知，数列 $\{a_n\}$ 无上界。

例题 2.20 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=r>1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$

证明

证法 1

取 $\varepsilon_0>0$，使得 $r-\varepsilon_0=1+\alpha>1$。因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=r>1$，故 $\exists N_1\in\mathbb{N}$，当 $n>N_1$ 时，有

$$1+\alpha=r-\varepsilon_0<\sqrt[n]{|a_n|},|a_n|>(1+\alpha)^n>n\alpha$$

$\forall A>0$，取 $N\in\mathbb{N}$，使得 $N>\max\{N_1,\frac{A}{\alpha}\}$，当 $n>N$ 时，有

$$|a_n|>n\alpha>N\alpha\geq A$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$

证法 2

由上述，当 $n>N_1$ 时，有

$$\begin{aligned}1+\alpha=r-\varepsilon_0<\sqrt[n]{|a_n|}&<r+\varepsilon_0\\&=(r-\varepsilon_0)+2\varepsilon_0=1+\alpha+2\varepsilon_0,(1+\alpha)^n<|a_n|<(1+\alpha+2\varepsilon_0)^n\end{aligned}$$

从 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\alpha)^n=+\infty=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\alpha+2\varepsilon_0)^n$ 与夹逼定理可知，

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|=+\infty\Longleftrightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$$

例题 2.21 设 $a_n\geq 0(n\in\mathbb{N})$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{\sqrt{n}}=a$，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=0$$

证明

证法 1

因为

$$\begin{aligned}0\leq\sqrt{n}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}&=\sqrt{n}\frac{\sqrt[n]{a\cdot 2a\cdots na}}{\sqrt[n]{n!}}\\&\leq\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[n]{n!}}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}\\&=\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{\sqrt{n}}\to 0\cdot a=0(n\to\infty)\end{aligned}$$

所以，根据夹逼定理，得到

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=0$$

证法 2

由 $k(n-k+1)=(k-1)(n-k)+n\geq n(1\leq k\leq n)$ 推得

$$(n!)^2=(n\cdot 1)[(n-1)\cdot 2]\cdots(1\cdot n)\geq n\cdots n=n^n$$

于是

$$\begin{aligned}0\leq\sqrt{n}\cdot\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}&=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_nn^{\frac{n}{2}}}\leq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_nn!}\\&=\sqrt[n]{a_1\cdot 2a_2\cdot na_n}\leq\frac{a_1+2a_2+\cdots na_n}{n}\\&=\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{\sqrt{n}}\to 0\cdot a=0(n\to\infty)\end{aligned}$$

✍ **练习 2.1** 用数列极限证明：

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n-2})=0$$

✍ **练习 2.2** 利用极限定义，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\arctan n=\frac{\pi}{2}$$

✍ **练习 2.3** 设已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，问：是否有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1a_2\cdots a_n) = 0$? 又问：反之如何?

✍ **练习 2.4** 若数列 $\{a_n\}$ 收敛，则在此数列中一定有最大数或最小数，但不一定同时有最大数和最小数。

✍ **练习 2.5** 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$。用 $\varepsilon - N$ 法，$A - N$ 法证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2} = \frac{a}{2}(a\text{为实数},+\infty,-\infty)$$

✍ **练习 2.6** 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, |q| < 1$。用 $\varepsilon - N$ 法证明：

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + a_{n-1}q + \cdots + a_1q^{n-1}) = \frac{a}{1-q}$$

✍ **练习 2.7** 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$。用 $\varepsilon - N$ 法证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0}{n} = ab$$

✍ **练习 2.8** 设 $\{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\}$ 收敛，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = 0$

✍ **练习 2.9** 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, b_n \geq 0(n\in\mathbb{N})$, $\lim\limits_{n\to\infty}(b_1+b_2+\cdots+b_n) = S$。证明：$\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_1 + a_{n-1}b_2 + \cdots + a_1b_n) = aS$

✍ **练习 2.10** 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = 0$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\max(a_1,a_2,\cdots,a_n)}{n} = 0$$

✍ **练习 2.11** **(Toeplitz 定理)** 设 $n,k\in\mathbb{N}, t_{nk}\geq 0$ 且 $\sum_{k=1}^n t_{nk} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} t_{nk} = 0$。如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n t_{nk}a_k = a$。

注 几种变形:

1. 讲条件 $\sum\limits_{k=1}^n t_{nk} = 1$ 改为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^n t_{nk} = 1$
2. 不要求 $t_{nk}\geq 0$，将 (1) 中条件改为存在 $M>0$，使得对每个 n，成立不等式 $|t_{n1}|+|t_{n2}|+\cdots+|t_{nn}|\leq M$。

则结论对 $a=0$ 仍成立。

✍ **练习 2.12** 设 a,b,c 为三个给定的实数，令 $a_0=a, b_0=b, c_0=c$，并归纳定义

$$\begin{cases} a_n = \frac{b_{n-1}+c_{n-1}}{2} \\ b_n = \frac{c_{n-1}+a_{n-1}}{2}, n = 1,2,\cdots \\ c_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} \end{cases}$$

证明：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \frac{a+b+c}{3}$

✍ **练习 2.13** 设 a_1,a_2 为实数，令

$$a_n = pa_{n-1} + qa_{n-2}, n = 3,4,5,\cdots$$

其中 $p>0, q>0, p+q=1$。证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{a_2+a_1q}{1+q}$。

✍ **练习 2.14** 设数列 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 满足 $a_1>0, 4\leq b_n\leq 5, 4\leq c_n\leq 5$，

$$a_n = \frac{\sqrt{b_n^2+c_n^2}}{b_n+c_n}a_{n-1}$$

证明：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

✍ **练习 2.15**

求极限：

$$\lim_{n\to\infty}(n^2-n+2)^{\frac{1}{n}}$$

✍ **练习 2.16**

1. 应用数学归纳法或 $\frac{2k-1}{2k} < \frac{2k}{2k+1}$ 证明不等式：

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

2. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}) = 0$

✍ **练习 2.17** 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^n k!}{n!} = 1(1+\frac{1}{n}\leq\frac{\sum_{k=1}^n k!}{n!}\leq 1+\frac{2}{n})$

✍ **练习 2.18** 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$。记

$$S_n = \max\{a_n, b_n\}, T_n = \min\{a_n, b_n\}, n = 1, 2, \cdots$$

证明：

$$(1) \lim_{n\to\infty} S_n = \max\{a, b\}, (2) \lim_{n\to\infty} T_n = \min\{a, b\}$$

✍ **练习 2.19** 用 $p(n)$ 表示能整除 n 的素数的个数。证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n} = 0$

✍ **练习 2.20** 设

$$x_n = \sum_{k=1}^{n}(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}} - 1)$$

证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{4}$

✍ **练习 2.21** 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$，求证：$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$。举例说明，当 $a = 0$ 时不能得出上述结论。

✍ **练习 2.22** 如果 $a_0 + a_1 + \cdots + a_p = 0$，求证：

$$\lim_{n\to\infty} (a_0\sqrt{n} + a_1\sqrt{n+1} + \cdots + a_p\sqrt{n+p}) = 0$$

✍ **练习 2.23** 设数列 $\{a_n\}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = a, \lim_{n\to\infty} a_{2n} = b$$

证明：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{a+b}{2}$$

✍ **练习 2.24** 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - x_{n-2}) = 0$。求证：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0$$

✍ **练习 2.25** 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$。证明[1]：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a_k = a$$

✍ **练习 2.26** 设 $a_0 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n} (n = 1, 2, \cdots)$。证明：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

✍ **练习 2.27** 设 $\{a_n\}$ 是一个正数数列。如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} + a_{n+2}}{a_n} = +\infty$$

那么 $\{a_n\}$ 必为无界数列。

✍ **练习 2.28** 设 $\{x_n\}$ 是有界发散数列，证明：该数列一定存在收敛于不同极限值的子列。

✍ **练习 2.29** 设数列 $\{x_n\}$ 有界，且对所有正整数 n 成立 $x_n \le x_{n+2}, x_n \le x_{n+3}$，证明 $\{x_n\}$ 收敛。

✍ **练习 2.30** 给定两个正数 a 和 b，且有 $0 < b < a$。令 $a_0 = a, b_0 = b$，并按照递推公式

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, b_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}, n \in \mathbb{N}_+$$

定义数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$。证明这两个数列收敛于同一个极限。

注 一般称上述极限为数 a 和 b 的算术几何平均值，记为 $AG(a, b)$。利用积分换元计算可以得到 $AG(a, b)$ 的解析表达式

$$AG(a, b) = \frac{\pi}{2G}, G = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}}$$

算术平均不等式和上述解析表达式是大数学家 Gauss 在 14 岁时发现的，在他的早期研究工作中起了重要的作用。但这个结果长期以来没有引起足够重视，直到 1976 年才由 Salamin 和 Brent 等人以此为基础发展出一种算术几何平均值快速算法，成为目前在计算机上计算圆周率 π 和初等函数最有效方法之一。

[1]考虑 Toeplitz 定理

练习 2.31 设 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$，并且存在常数 K，使得 $|y_1| + |y_2| + \cdots + |y_n| \le K$ 对每个 n 成立。令 $z_n = x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1, n \in \mathbb{N}_+$，证明: $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$

注 从本题的条件已可推出 $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$。但是可以举出例子说明仅仅有条件 $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$ 不等得到

$$\lim_{n\to\infty} (x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1) = 0$$

练习 2.32 设 $0 \le p \le k-1$，求: $\lim_{n\to\infty} \frac{C_{kn}^{p} + C_{kn}^{p+k} + \cdots + C_{kn}^{p+(n-1)k}}{2^{kn}}$

问题与反例

回答下列问题:

1. 若 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都发散，对 $\{a_n + b_n\}$ 与 $\{a_n b_n\}$ 是否收敛能不能作出肯定的结论?
2. 若 $\{a_n\}$ 收敛而 $\{b_n\}$ 发散，这时 $\{a_n + b_n\}$ 的敛散性如何?
3. 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = a \ne 0$ 而 $\{b_n\}$ 发散，这时 $\{a_n b_n\}$ 的敛散性如何?
4. 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 而 $\{bn\}$ 发散，这时 $\{a_n b_n\}$ 的敛散性如何?
5. 设 $a_n \le b_n \le c_n$，且 $\lim_{n\to\infty} (c_n - a_n) = 0$，问 $\{b_n\}$ 是否必收敛?

2.2 单调数列的极限

内容提要

- 单调数列的极限

一般情况下难以判断数列是否收敛，对于一种特殊情况我们可给出一种数列极限存在性的判别法，它依赖于实数的一个基本性质，即**确界原理**：非空的数集如果有上界则必有上确界，如果有下界则必有下确界。

设 $\{a_n\}$ 为数列，如果

$$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \le \cdots$$

则称 $\{a_n\}$ 是单调递增数列，当上式中的“$\le$”号换成“$<$”号时称 $\{a_n\}$ 是严格单调递增的；如果

$$a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n \ge \cdots$$

则称 $\{a_n\}$ 是单调递减数列，当上式中的“$\ge$”号换成“$>$”号时称 $\{a_n\}$ 是严格单调递减的；单调递增数列和单调递减数列统称为单调数列。

定理 2.4 (单调数列的极限)

设 $\{a_n\}$ 为单调数列

1. 如果 $\{a_n\}$ 为单调递增数列，则 $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_k \mid k \ge 1\}$
2. 如果 $\{a_n\}$ 为单调递减数列，则 $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_k \mid k \ge 1\}$

证明

(1) 记 $M = \sup\{a_k \mid k \ge 1\}$，先考虑 M 有限的情形。任给 $\varepsilon > 0$，由上确界的刻画，存在 a_N，使得 $a_N > M - \varepsilon$。根据 $\{a_n\}$ 的单调性，当 $n > N$ 时

$$M - \varepsilon < a_N \le a_n \le M < M + \varepsilon$$

由数列极限的定义即知 $\lim_{n\to\infty} a_n = M$。

如果 $M = +\infty$，则任给 $\alpha > 0$，存在 a_N，使得 $a_N > \alpha$。根据 $\{a_n\}$ 的单调性，当 $n > N$ 时 $a_n \ge a_N > \alpha$，这说明 $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$。

(2) 可同 (1) 一样类似地证明，也可考虑 $\{-a_n\}$ 然后直接利用 (1)。

推论 2.2

有界单调数列必收敛。

例题 2.22 设 $a_1=\sqrt{2}, n\ge 1$ 时 $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$。研究数列 $\{a_n\}$ 的极限。

解 用数学归纳法易得 $\sqrt{2}\le a_n<2$。因此

$$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}>\sqrt{2a_n}>a_n$$

这说明 $\{a_n\}$ 是单调递减的有界数列，从而收敛。记其极限为 α，则 $\alpha\ge\sqrt{2}>0$。我们有

$$2+\alpha=\lim_{n\to\infty}(2+a_n)=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}^2=\alpha^2$$

上式的唯一正解为 $\alpha=2$，这说明 $\{a_n\}$ 的极限为 2。

例题 2.23 设 $\{x_n\}$ 是一个非负的数列，满足

$$x_{n+1}\le x_n+\frac{1}{n^2}(n=1,2,\cdots)$$

证明：$\{x_n\}$ 收敛。

证明 因为 $x_{n+1}\le x_n+\frac{1}{n^2}<x_n+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$，所以 $x_{n+1}+\frac{1}{n}<x_n+\frac{1}{n-1}$，所以 $\{x_n+\frac{1}{n-1}\}$ 单调递减，又有下界 0，所以收敛。又有 $\{\frac{1}{n-1}\}$ 收敛，所以 $\{x_n\}$ 收敛。

例题 2.24 设 $a_1>0, n\ge 1$ 时 $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})$。研究数列 $\{a_n\}$ 的极限。

解 由数学归纳法易见 $a_n>0$。进一步有

$$a_{n+1}-1=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n}-2)=\frac{1}{2}(\sqrt{a_n}-\frac{1}{\sqrt{a_n}})^2\ge 0$$

因此当 $n\ge 2$ 时，有

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})\le\frac{1}{2}(a_n+a_n)=a_n$$

即 $\{a_n\}$ 从 $n\ge 2$ 开始单调递减且有下界，因此收敛。其极限记为 α，则 $\alpha\ge 1$。另一方面，

$$\alpha=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})=\frac{1}{2}(\alpha+\frac{1}{\alpha})$$

上式的唯一正解为 $\alpha=1$，这说明 $\{a_n\}$ 的极限为 1。

例题 2.25 设 $a_1=1, n\ge 1$ 时 $a_{n+1}=\frac{1}{1+a_n}$。研究数列 $\{a_n\}$ 的极限。

解 利用数学归纳法易见 $\frac{1}{2}\le a_n\le 1$，并且 $\{a_{2k-1}\}$ 单调递减，$\{a_{2k}\}$ 单调递增，因此它们都是收敛的，极限分别记为 α,β，则

$$\beta=\lim_{k\to\infty}a_{2k}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{1+a_{2k-1}}=\frac{1}{1+\alpha},$$

$$\alpha=\lim_{k\to\infty}a_{2k+1}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{1+a_{2k}}=\frac{1}{1+\beta}$$

从上式解出唯一的正解 $\alpha=\beta=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，因此 $\{a_n\}$ 的极限为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$。

讨论**重要极限** $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$

考虑 $a_n=(1+\frac{1}{n})^n, b_n=(1+\frac{1}{n})^{n+1}, \forall n\ge 1$ $\{a_n\}$ 是严格单调递增的，$\{b_n\}$ 是严格单调递减的。

$$\begin{aligned}
a_n=(1+\frac{1}{n})^n&=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{1}{n^k}\\
&=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k}\\
&=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})\\
&<1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n-1}{n+1})+\frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n}{n+1})\\
&=a_{n+1}
\end{aligned}$$

这说明 $\{a_n\}$ 严格单调递增。另一方面，当 $n>1$ 时，有

$$\begin{aligned} 0 < a_n &< 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!} \\ &\le 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)k} \\ &= 2+\sum_{k=2}^{n}(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}) = 3-\frac{1}{n} < 3 \end{aligned}$$

因此 $\{a_n\}$ 收敛，其极限记为 e，称为自然对数的基底。计算表明

$$e = 2.7182818284590$$

另一方面，由

$$[\frac{1+\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{n}}]^n = (1+\frac{1}{n^2-1})^n > 1+\frac{n}{n^2-1} > 1+\frac{1}{n}$$

得

$$b_{n-1} = (1+\frac{1}{n-1})^n > (1+\frac{1}{n})^{n+1} = b_n$$

即 $\{b_n\}$ 严格单调递减，且

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n(1+\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} a_n = e$$

因此有下面的不等式

$$(1+\frac{1}{n})^n < (1+\frac{1}{n+1})^{n+1} < e < (1+\frac{1}{n+1})^{n+2} < (1+\frac{1}{n})^{n+1}, \forall n \ge 1$$

例题 2.26 设 $k\in\mathbb{N}_+$，证明：$\frac{k}{n+k} < \ln\left(1+\frac{k}{n}\right) < \frac{k}{n}$

证明 考虑不等式 $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x(x>0)$

例题 2.27 证明 $\{e_n\}$ 收敛到 e，其中

$$e_n = 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$$

证明 当 $n>1$ 时 $a_n<e_n$。固定 $k>1$，当 $n>k$ 时，有

$$\begin{aligned} a_n &= 1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}) \\ &> 1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\cdots+\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n}) \end{aligned}$$

在上式中令 $n\to\infty$，得

$$e = \lim_{n\to\infty} a_n \ge 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}$$

由于 k 可以任意固定，我们就有

$$a_n < e_n < e, \forall n > 1$$

根据夹逼原理知 $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = e$

我们已经证明，数列 $\{a_n\}$ 与 $\{e_n\}$ 都递增地收敛于 e。从计算来看，使用极限

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}) = e$$

更为有利。由这种近似产生的误差，可以用下面的方法来作估计：由于

$$\begin{aligned}0 &< e_{n+m} - e_n \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{(n+m)!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!}[1 + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)\cdots(n+m)}] \\ &< \frac{1}{(n+1)!}[1 + \frac{1}{n+1} + (\frac{1}{n+1})^2 + \cdots + (\frac{1}{n+1})^{m-1}] \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!n}\end{aligned}$$

例题 2.28 自然对数的底 e 是无理数。

证明 用反证法。假设 $e = \frac{p}{q}$，其中 $p, q \in \mathbb{N}$。由于 $2 < e < 3$，可见 e 不是正整数，因此 $q \geq 2$。由 $0 < e - e_q \leq \frac{1}{q!q}$ 可得

$$0 < q!(e - e_q) \leq \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2}$$

但是

$$q!(e - e_q) = (q-1)!p - q!(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!})$$

是整数，矛盾。

例题 2.29 证明：

1. $e(n/e)^n < n! < en(n/e)^n, \forall n > 1$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$

证明 对 $k = 1, 2, \cdots, n-1$，均有

$$\frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}\frac{1}{k+1} < e < \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}\frac{1}{k}$$

将这 $n-1$ 个不等式相乘，得

$$\frac{n^n}{n!} < e^{n-1} < \frac{n^n}{(n-1)!}$$

整理后就是 (1) 中要证的不等式。(2) 可由 (1) 及夹逼原理得。

以 e 为基底的对数函数记为 $\ln x$，有

$$k\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) < 1 < (k+1)\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

即

$$\frac{1}{k+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) < \frac{1}{k}, \text{或} \frac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{k}$$

对 $k = 1, 2, \cdots, n$，将上述不等式相加，得

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1} < \ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

如果令

$$c_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

则 $c_n > \ln(n+1) - \ln n > 0$，且

$$c_{n+1} - c_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0$$

这说明 $\{c_n\}$ 收敛，其极限记为 γ，称为 *Euler* 常数，计算表明

$$\gamma = 0.5772156649\cdots$$

例题 2.30 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n})$

解 利用 c_n 的收敛性，有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n})\\=&\lim_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n})-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})]\\=&\lim_{n\to\infty}[(c_{2n}+\ln(2n))-(c_n+\ln n)]\\=&\gamma-\gamma+\ln 2\end{aligned}$$

练习 2.33 设 $\{x_n\}$ 是一个非负的数列，满足

$$x_{n+1}\le x_n+\frac{1}{n^2}(n=1,2,\cdots)$$

证明：$\{x_n\}$ 收敛。

练习 2.34 设 $c>0, a_1=\frac{c}{2}+\frac{a_n^2}{2}(n=1,2,\cdots)$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\begin{cases}1-\sqrt{1-c},0<c\le 1\\+\infty,c>1\end{cases}$$

练习 2.35 设数列 $\{u_n\}$ 定义如下：

$$\begin{aligned}&u_1=b\\&u_{n+1}=u_n^2+(1-2a)u_n+a^2(n=1,2,\cdots)\end{aligned}$$

问 a,b 为何值时 $\{u_n\}$ 收敛？极限值是什么？

练习 2.36 设 $A>0, 0<y_0<A^{-1}$，且

$$y_{n+1}=y_n(2-Ay_n)(n=0,1,\cdots)$$

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A^{-1}$

练习 2.37 设数列 $\{a_n\}$ 由下式定义：

$$a_n=2^{n-1}-3a_{n-1}(n=1,2,\cdots)$$

求 a_0 所有可能的值，使得 $\{a_n\}$ 是严格递增的。

练习 2.38 求证：

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!n}$$

其中 $\theta_n\in(\frac{n}{n+1},1)$。

练习 2.39 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!e-[n!e])$。

练习 2.40 证明：对每个正整数 n，成立不等式 $(1+\frac{1}{n})^n>\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-\frac{e}{2n}$

练习 2.41 求证：当 $n\ge 3$ 时，有不等式

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}-\frac{3}{2n}<(1+\frac{1}{n})^n<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$$

考虑如下引理: 设 $n\ge 2$，实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都大于-1，并且它们有着相同的符号。

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)>1+a_1+a_2+\cdots+a_n$$

练习 2.42 求证等式：

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}=\ln 2\sqrt{n}+\frac{\gamma}{2}+\varepsilon_n$$

其中 γ 是 *Euler* 常数，$\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$

练习 2.43 求极限

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})\cdots(1+\frac{n}{n^2})$$

✍ **练习 2.44** 记 $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}(n = 1, 2, \cdots)$，用 k_n 表示使得 $H_k \geq n$ 的最小下标。证明：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_{n+1}}{k_n} = e$$

✍ **练习 2.45** 设 $s_n = 1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n$。求证：当 $n \geq 3$ 时，有

$$n^n(1 + \frac{1}{4(n-1)} < s_n) < n^n(1 + \frac{2}{e(n-1)})$$

✍ **练习 2.46** 设 $f : [a, b] \to [a, b]$ 满足对任意 $x, y \in [a, b]$，当 $x \neq y$ 时有 $|f(x) - f(y)| < |x - y|$。任取 $x_1 \in [a, b]$，令 $x_{n+1} = \frac{x_n + f(x_n)}{2}, n = 1, 2, \cdots$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛。

2.3 Cauchy 准则

内容提要

❑ Cauchy 准则

一般的有界数列可以用上下极限来处理，其基本想法就是去观察某些项之后的“最大”项和“最小”项，看看二者之间的差异是否趋于零。因为上下极限并不好算，我们不妨换一种思路，即可以比较某些项之后一般项之间的差异，看看这些差异是否趋于零：如果 a_n 逐渐趋于某个数，则当 n 很大时 a_n 之间的差别应该很小。

定义 2.3 (Cauchy 数列)

设 a_n 为数列，如果任给 $\varepsilon > 0$，均存在 $N = N(\varepsilon)$，当 $m, n > N$ 时，有

$$|a_m - a_n| < \varepsilon$$

则称 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 数列或基本列。 ♣

例题 2.31 对于 $n \geq 1$，定义

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

则 $\{a_n\}$ 不是 Cauchy 数列。

证明 对于 $n \geq 1$，我们有

$$\begin{aligned} a_{2n} - a_n &= \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &\geq \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

由定义即知 $\{a_n\}$ 不是 Cauchy 数列。

例题 2.32 设 $\{a_n\}$ 为数列，如果存在常数 $C \geq 0, 0 \leq q < 1$，以及 N_0，使得当 $n > N_0$ 时，有

$$|a_{n+1} - a_n| \leq Cq^n$$

则 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 数列。

证明 当 $m > n > N_0$ 时，有

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &\leq |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + \cdots + |a_{n+1} - an| \\ &\leq Cq^{m-1} + Cq^{m-2} + \cdots + Cq^n \\ &= Cq^n(q^{m-n-1} + q^{m-n-2} + \cdots + q + 1) \\ &= Cq^n\frac{1 - q^{m-n}}{1 - q} \leq \frac{C}{1-q}q^n \end{aligned}$$

上式对 $m = n$ 当然也成立。由于 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$，故任给 $\varepsilon > 0$，存在 N_1，使得当 $n > N_1$ 时 $\frac{C}{1-q}q^n < \varepsilon$。于是，当 $m, n > N = max\{N_0, N_1\}$ 时（不妨设 $m \geq n$），有

$$|a_m - a_n| \leq \frac{C}{1-q}q^n < \varepsilon$$

这说明 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 数列。

命题 2.5

Cauchy 数列必为有界数列。

证明 按定义，取 $\varepsilon=1$，则存在 N，当 $m,n>N$ 时 $|a_m-a_n|<1$。特别地，当 $n>N$ 时

$$|a_n|\leq|a_n-a_{N+1}|+|a_{N+1}|<1+|a_{N+1}|$$

令 $M=max\{1+|a_1|,\cdots,1+|a_{N+1}|\}$，则 $|a_n|\leq M$ 总成立。

定理 2.5 (Cauchy 准则)

数列 $\{a_n\}$ 收敛当且仅当它是 Cauchy 数列。

证明 必要性：设 $\{a_n\}$ 收敛到 α。任给 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n>N$ 时 $|a_n-\alpha|<\varepsilon/2$。因此，当 $m,n>N$ 时，有

$$|a_m-a_n|\leq|a_m-\alpha|+|\alpha-a_n|<\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon=\varepsilon$$

这说明 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 数列。

充分性：设 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 数列，则 $\{a_n\}$ 是有界数列。于是可以研究其上下极限。根据 Cauchy 数列的定义，任给 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $m,n>N$ 时

$$-\varepsilon<a_m-a_n<\varepsilon$$

在上式子中暂时固定 $n>N$，对 $\{a_n\}$ 取上极限，利用上极限的保序性可得

$$-\varepsilon\leq\varlimsup_{m\to\infty}a_m-a_n\leq\varepsilon$$

由数列极限的定义即可看出 $\{a_n\}$ 收敛。

还可以证明一个引理和一个定理来证明充分性

Lemma 从任一数列中必可取出一个单调子列。

$\mathcal{P}roof$

$case1.$ 在数列中有无穷多项大于它们之后的所有数，那么依次取这些数，则可以得到一个严格递减的数列。

$case2.$ 在数列中只存在有限项大于它们之后的所有数，那么取这些数最后一项的后一项，记作 a_{i_1}。那么在 a_{i_1} 后必有一项 $a_{i_2}(i_2>i_1)$ 满足 $a_{i_1}<a_{i_2}$；如此进行，得到子列 $\{a_{i_n}$，它显然是一个递增的子列。

Theorem: 从任何有界数列中必可选出一个收敛的子列。此定理也称作 $Bolzano-Weierstrass$ 定理。

$\mathcal{P}roof$

设 $\{a_n\}$ 是一个有界的数列。根据引理，从中可以取出一个单调子列 $\{a_{i_n}\}$，这个子列有界，所以 $\{a_{i_n}\}$ 是一个收敛数列。

下面我们利用 $Bolzano-Weierstrass$ 定理来证明充分性。

设 $\{a_n\}$ 是一个基本列，则 $\{a_n\}$ 有界，由 $Bolzano-Weierstrass$ 定理，从有界数列 $\{a_n\}$ 中可选出一个收敛子列 $\{a_{i_n}\}$，设 $a_{i_n}\to a(n\to\infty)$。我们来证明 a 也是数列 $\{a_n\}$ 的极限。由于 $\{a_n\}$ 是基本列，对任给的 $\varepsilon>0$，存在一个 $N_1\in\mathbb{N}$，使得当 $m,n>N_1$ 时，都有 $|a_m-a_n|<\varepsilon/2$。又因 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{i_n}=a$，所以对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N_2\in\mathbb{N}$，当 $k>N_2$ 时，$\left|a_{i_n}-a\right|<\varepsilon/2$。现取 $N=\max(N_1,N_2)$，当 $n>N$ 时，有

$$|a_n-a|\leq\left|a_n-a_{i_n}\right|+\left|a_{i_n}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

这说明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$。

例题 2.33 设 $a_0>0,n\geq0$ 时 $a_{n+1}=\frac{1}{1+a_n}$。研究 $\{a_n\}$ 的敛散性。

解 利用归纳法易见 $a_n>0$ 总成立。于是，当 $n\geq0$ 时 $0<a_{n+1}=\frac{1}{1+a_n}<1$；进一步，当 $n\geq1$ 时 $1>a_{n+1}=\frac{1}{1+a_n}>\frac{1}{2}$。

这说明，当 $n \geq 3$ 时

$$|a_{n+1}-a_n| = \left|\frac{1}{1+a_n} - \frac{1}{1+a_{n-1}}\right| = \frac{|a_n - a_{n-1}|}{(1+a_n)(1+a_{n-1})} \leq \frac{4}{9}|a_n - a_{n-1}|$$

不难看出 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 数列。

练习 2.47

1. 数列 $\{a_n\}$ 满足

$$\left|a_{n+p} - a_n\right| \leq \frac{p}{n}$$

且对一切 $n, p \in \mathbb{N}^*$ 成立。问 $\{a_n\}$ 是不是基本列?

2. 当 $\left|a_{n+p} - a_n\right| \leq \frac{p}{n^2}$ 时，上述结论又如何?

练习 2.48 设 $a_n \in [a,b] (n \in \mathbb{N}^*)$。证明：如果 $\{a_n\}$ 发散，则 $\{a_n\}$ 必有两个子列收敛于不同的数。

2.4 Stolz 公式

内容提要

- Stolz 公式

引理 2.1

当 $1 \leq k \leq n$ 时设 $b_k > 0$ 且 $m \leq \frac{a_k}{b_k} \leq M$，则

$$m \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \leq M$$

证明 由已知条件可知，当 $1 \leq k \leq n$ 时 $mb_k \leq a_k \leq Mb_k$，关于 k 从 1 到 n 求和可得

$$m(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \leq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \leq M(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$

此即欲证不等式。

定理 2.6 (Stolz 公式之一)

设 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 为数列，且 $\{y_n\}$ 严格单调地趋于 $+\infty$。如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \alpha$$

其中 α 为实数或 $\pm\infty$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \alpha$ 也成立，常记为 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$

证明 分情况讨论。

(1)$\alpha \in \mathbb{R}$。先设 $\alpha = 0$。此时，任给 ε，存在 N，当 $n > N$ 时

$$-\varepsilon < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < \varepsilon$$

利用 $\{y_n\}$ 的单调性和上面的引理，当 $n > N$ 时，得到

$$-\varepsilon < \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} = \frac{(x_n - x_{n-1}) + \cdots + (x_{N+1} - x_N)}{(x_n - x_{n-1}) + \cdots + (y_{N+1} - y_N)} < \varepsilon$$

整理以后可得

$$\frac{x_N + \varepsilon y_N}{y_n} - \varepsilon < \frac{x_n}{y_n} < \varepsilon + \frac{x_N - \varepsilon y_N}{y_n}$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ 以及上式可知，当 n 充分大时，$-2\varepsilon < \frac{x_n}{y_n} < 2\varepsilon$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$。

一般地，记 $\tilde{x}_n = x_n - \alpha y_n$，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{x}_n - \tilde{x}_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - \alpha = 0$$

这说明 $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{x}_n/y_n = 0$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n/y_n = \alpha$

(2)$\alpha = +\infty$。此时，存在 N，当 $n > N$ 时 $\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} > 1$。于是，当 $n > N$ 时

$$x_n - x_{n-1} > y_n - y_{n-1} > 0$$

即 $n > N$ 时 $\{x_n\}$ 也是严格单调递增的，且

$$\begin{aligned} x_n - x_N &= (x_n - x_{n-1}) + \cdots + (x_{N+1} - x_N) \\ &> (y_n - y_{n-1}) + \cdots + (y_{N+1} - y_N) = y_n - y_N \end{aligned}$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ 可知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$。可得 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = 0$。应用 (1) 的结论可得 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n/x_n = 0$，于是 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n/y_n = +\infty$

(3)$\alpha = -\infty$。这时只要将 x_n 换成 $-x_n$，然后应用 (2) 的结论即可。

注 若 $\alpha = \infty$，定理不成立，考虑反例：$a_n = (-1)^{n-1} n$，显然 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$，而

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2k}}{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(1-2) + \cdots + (2k-1-2k)}{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{-k}{2k} = -\frac{1}{2} \neq \infty$$

例题 2.34 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}(a_1 + 2a_2 + \cdots + n a_n) = \frac{1}{2}\alpha$$

证明 n^2 关于 n 单调递增趋于 $+\infty$，由 Stolz 公式，得

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}(a_1 + 2a_2 + \cdots + n a_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + n a_n}{n^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n a_n}{n^2 - (n-1)^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} a_n = \frac{1}{2}\alpha \end{aligned}$$

例题 2.35 设 k 为正整数，则

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2}$$

证明 用 Stolz 公式有

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} - \frac{1}{k+1}\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{(k+1)(1^k + 2^k + \cdots + n^k) - n^{k+1}}{(k+1)n^k} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(k+1)n^k - [n^{k+1} - (n-1)^{k+1}]}{(k+1)[n^k - (n-1)^k]} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}k(k+1)n^{k-1} + \cdots}{(k+1)k n^{k-1} + \cdots} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

定理 2.7 (Stolz 公式之二)

设数列 $\{y_n\}$ 严格单调递减趋于 0，数列 $\{x_n\}$ 也收敛到 0. 如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \alpha$$

其中 α 为实数或 $\pm\infty$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \alpha$ 也成立。

证明 分情况讨论。

(1)$\alpha \in \mathbb{R}$。不妨设 $\alpha = 0$。任给 $\varepsilon > 0$，存在 N，当 $n > N$ 时，

$$-\varepsilon < \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}} = \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} < \varepsilon$$

则当 $m > n > N$ 时可得

$$-\varepsilon < \frac{(x_n - x_{n+1}) + \cdots + (x_{m-1} - x_m)}{(y_n - y_{n+1}) + \cdots + (y_{m-1} - y_m)} = \frac{x_n - x_m}{y_n - ym} < \varepsilon$$

即

$$-\varepsilon(y_n - y_m) < (x_n - x_m) < \varepsilon(y_n - y_m)$$

令 $m \to \infty$ 可得 $-\varepsilon y_n \le x_n \le \varepsilon y_n$，这说明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n/y_n = 0$

一般地，记 $\tilde{x}_n = x_n - \alpha y_n$，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{x}_n - \tilde{x}_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - \alpha = 0$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{x}_n/y_n = 0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n/y_n = \alpha$

(2)$\alpha = +\infty$。任给 $M > 0$，存在 N，当 $n > N$ 时 $\frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}} > M$。当 $m > n > N$ 时，有

$$x_n - x_m > M(y_n - y_m)$$

令 $m \to \infty$，得 $x_n \ge My_n$，这说明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n/y_n = +\infty$

(3)$\alpha = -\infty$。将 (2) 中的 x_n 换成 $-x_n$ 即可。

注 Stolz 公式反过来不一定对，$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a$ 不能推出 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，考虑 $a_n = (-1)^n$
我们可以考虑下面这个例子。

例题 2.36 如果 $a_n \le a_{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n) = a$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

证明

例题 2.37 设 $x_1 \in (0,1)$, $n \ge 1$ 时 $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$。证明 $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = 1$

证明 由归纳法易见当 $n \ge 1$ 时 $x_n \in (0,1)$，因此

$$x_{n+1} = x_n(1 - x_n) < x_n$$

即 $\{x_n\}$ 是单调递减有界数列，从而收敛。设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$，在上式中令 $n \to \infty$，得

$$\alpha = \alpha(1 - \alpha)$$

由此解出 $\alpha = 0$。进而有

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}) = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{x_n} + \frac{1}{1 - x_n}) - \frac{1}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - x_n} = 1$$

由 Stolz 公式，有

$$\lim_{n\to\infty} nx_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{x_n^{-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n - (n-1)}{x_n^{-1} - x_{n-1}^{-1}} = 1$$

练习 2.49 设 $0 < x_1 < \frac{1}{q}(0 < q \le 1)$，并且 $x_{n+1} = x_n(1 - qx_n)(n \in \mathbb{N}^* a)$。求证：$\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = \frac{1}{q}$

练习 2.50 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$。求证：$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{3n} a_n = 1$

练习 2.51 令

$$x_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \ln \binom{n}{k} (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

练习 2.52 试利用 $Toeplitz$ 定理证明 $Stolz$ 定理。

练习 2.53 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} n(a_n - a_{n-1}) = 0$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

注 本题有一个更一般的形式，若将 $\lim\limits_{n\to\infty} n(a_n - a_{n-1}) = 0$ 弱化为 $|n(a_n - a_{n-1})|$ 有界，则命题依然成立。

练习 2.54 设 $\{s_n\}$ 是数列，令 $a_n = s_n - s_{n-1}, \sigma_n = \frac{s_0+s_1+\cdots+s_n}{n+1}$，证明：若

$$\lim_{n\to\infty} na_n = 0$$

且 $\{\sigma_n\}$ 收敛，则 $\{s_n\}$ 也收敛，且

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sigma_n$$

练习 2.55 设 $A_n=\sum_{k=1}^{n}a_k, n\in\mathbb{N}_+$，数列 $\{A_n\}$ 收敛。又有一个单调增加的正数数列 $\{p_n\}$，且为正无穷大量。证明: $\lim_{n\to\infty}\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_n}=0$

2.5 上极限和下极限

内容提要

- 上极限和下极限的定义
- 上极限和下极限的基本性质

2.5.1 上极限和下极限的定义

一个数列不一定收敛，即不一定有极限，但是一定有上极限和下极限。

若数列 $\{x_n\}$ 发散，则一定存在子列 $\{x_{n_k}\}$，使得 $\lim_{k\to\infty}x_{n_k}$ 有意义。实际上，若 $\{x_n\}$ 有界，则可用凝聚定理知道存在收敛的子列。若 $\{x_n\}$ 无上界，则存在发散于 $+\infty$ 的子列，若 $\{x_n\}$ 无下界，则存在发散于 $-\infty$ 的子列。称所有这些情况的 $\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=a$ 为数列的极限点，其中 a 可以是有限数，也可以是 $+\infty$ 和 $-\infty$。

定义 2.4

数列 $\{x_n\}$ 的上极限与下极限是该数列的最大极限点与最小极限点，并分别记为 $\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n$ 与 $\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n$

2.5.2 上极限和下极限的基本性质

定理 2.8

设以下的 β 和 α 都是有限实数。

1. β 为数列上极限的充分必要条件是：对于每一个给定的 $\varepsilon>0$
   (a). 数列 $\{x_n\}$ 中至多只有有限多项 $\geq\beta+\varepsilon$
   (b). 数列 $\{x_n\}$ 中有无限多项落在 $(\beta-\varepsilon,\beta+\varepsilon)$
2. α 为数列 $\{x_n\}$ 的下极限的充分必要条件是：对于每一个给定的 $\varepsilon>0$
   (a). 数列 $\{x_n\}$ 中至多只有有限多项 $\leq\alpha-\varepsilon$
   (b). 数列 $\{x_n\}$ 中有无限多项落在 $(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)$ 中

定理 2.9

数列 $\{x_n\}$ 的上极限和下极限有如下表达式：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n=\lim_{n\to\infty}\sup\{x_n,x_{n+1},\cdots\}$$
$$\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n=\lim_{n\to\infty}\inf\{x_n,x_{n+1},\cdots\}$$

定理 2.10

数列 $\{x_n\}$ 有极限的充分必要条件是其上极限和下极限相等，且在相等时成立

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n$$

例题 2.38 设数列 $\{b_n\}$ 由 $b_1=1$ 和 $b_{n+1}=1+\frac{1}{b_n}$ 生成。讨论数列 $\{b_n\}$ 的敛散性，若收敛则求出其极限。

解 可证明数列 $\{b_n\}$ 自第二项起不越出区间 $[1.5,2]$。因此有 $1.5\leq\alpha=\underline{\lim_{n\to\infty}}b_n\leq\beta=\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n\leq2$。在递推公式两

边取上极限和下极限，得到

$$\alpha = 1 + \varliminf_{n\to\infty}(\frac{1}{b_n}) = 1 + \frac{1}{\varlimsup_{n\to\infty} b_n} = 1 + \frac{1}{\beta}$$

和对称的

$$\beta = 1 + \varlimsup_{n\to\infty}(\frac{1}{b_n}) = 1 + \frac{1}{\varliminf_{n\to\infty} b_n} = 1 + \frac{1}{\alpha}$$

联立得到

$$(\alpha - \beta)(1 - \frac{1}{\alpha\beta}) = 0$$

由于 $\beta \geq \alpha \geq 1.5$，即可得到 $\alpha = \beta$，即数列收敛。

例题 2.39 设 $y_n = x_n + 2x_{n+1}, n \in \mathbb{N}_+$。证明：若 $\{y_n\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛。

证明 由于 $\{y_n\}$ 收敛，因此有界。取正数 $M > 0$ 使同时成立 $|x_1| \leq M$ 和 $|y_n| \leq M, n \in \mathbb{N}_+$。将递推公式改写为 $x_{n+1} = \frac{1}{2}y_n - \frac{1}{2}x_n$，则有

$$|x_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|y_n| + \frac{1}{2}|x_n|$$

因此，用数学归纳法可知 $|x_n| \leq M$ 对每个 n 成立。即数列 $\{x_n\}$ 有界。

记 $\varlimsup_{n\to\infty} x_n = A$, $\varliminf_{n\to\infty} x_n = B$ 和 $\lim_{n\to\infty} y_n = C$，则它们都是有限数。只要证明 $A = B$。在 $x_n = y_n - 2x_{n+1}$ 两边分别取上极限和下极限，由于 $\{y_n\}$ 收敛，可以得到 $A = C - 2B, B = C - 2A$，由此推出 $A = B$。

注 有了上下极限的工具，不必知道数列收敛就可以进行上下极限运算。

例题 2.40 设正数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $a_{n+m} \leq a_n a_m, \forall n, m \in \mathbb{N}$，则有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{n} = \inf_{n\geq 1} \frac{\ln a_n}{n}$$

证明 将等式右边记为 α，则 $\alpha \leq \varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{n}$ 又有 α 为下确界，则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$，使得

$$\frac{\ln a_N}{N} < \alpha + \varepsilon$$

固定这个 N，将每个 n 可以表示为 $n = mN + k$，其中 $0 \leq k < N$，从题设不等式有

$$a_n = a_{mN+k} \leq a_N^m a_k$$

取对数后有

$$\frac{\ln a_n}{n} \leq \frac{m}{n}\ln a_N + \frac{1}{n}\ln a_k \leq \frac{mN}{n}(\alpha + \varepsilon) + \frac{1}{n}\ln a_k$$

在不等式两边令 $n \to \infty$，得

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{n} \leq \alpha + \varepsilon$$

由 ε 任意性，知

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{n} \leq \alpha$$

则

$$\alpha \leq \varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{n} \leq \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{n} \leq \alpha$$

则 $\{\frac{\ln a_n}{n}\}$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{n} = \inf_{n\geq 1} \frac{\ln a_n}{n}$

注 上述结论的意思是：当 α 为有限数时数列 $\{\frac{\ln a_n}{n}\}$ 一定收敛，以 α 为极限，而当 $\alpha = -\infty$ 时，这个数列是负无穷大量。

注 与此等价的命题是：设 $\{a_n\}$ 满足条件 $a_{n+m} \leq a_n + a_m, \forall n, m \in \mathbb{N}_+$，则有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n\geq 1}\{\frac{a_n}{n}\}$$

✍ **练习 2.56** 设 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 均有界，且 $x_n \leq y_n, \forall n$，证明：

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \leq \varliminf_{n\to\infty} y_n, \varlimsup_{n\to\infty} x_n \leq \varlimsup_{n\to\infty} y_n$$

✍ **练习 2.57 夹逼定理的推广** 设 $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$ 均有界，满足 $y_n \le x_n \le z_n, \forall n$，且有 $\varliminf\limits_{n\to\infty} y_n \ge \varlimsup\limits_{n\to\infty} z_n$，证明这三个数列收敛，且有相同极限：

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n$$

✍ **练习 2.58** 对于有界数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 证明：

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n \le \varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n) &\le \varliminf_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n \\ \le \varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n) &\le \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n\end{aligned}$$

✍ **练习 2.59** 设 $\{x_n\},\{y_n\}$ 是非负数列。在以下乘积均有意义时证明：

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to\infty} x_n \varliminf_{n\to\infty} y_n \le \varliminf_{n\to\infty}(x_ny_n) &\le \varliminf_{n\to\infty} x_n \varlimsup_{n\to\infty} y_n \\ \le \varlimsup_{n\to\infty}(x_ny_n) &\le \varlimsup_{n\to\infty} x_n \varlimsup_{n\to\infty} y_n\end{aligned}$$

✍ **练习 2.60** 设 $\{x_n\}$ 为有界数列，且对于任何其他有界数列 $\{y_n\}$ 成立

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n) = \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n$$

证明:$\{x_n\}$ 收敛。

✍ **练习 2.61** 设 $\{x_n\}$ 收敛于正极限，$\{y_n\}$ 有界，证明：

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_ny_n = \lim_{n\to\infty} x_n \varlimsup_{n\to\infty} y_n$$

✍ **练习 2.62** 对于 $\{x_n\}$，令 $S_n = \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}, \forall n$ 定义数列 $\{S_n\}$，证明

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \le \varliminf_{n\to\infty} S_n \le \varlimsup_{n\to\infty} S_n \le \varlimsup_{n\to\infty} x_n$$

注 可以看出本题结论蕴含 Cauchy 命题。

✍ **练习 2.63** 设 $\{x_n\}$ 为正数列。用上、下极限证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l$

✍ **练习 2.64** 若对于数列 $\{x_n\}$ 的每一个子列 $\{x_{n_k}\}$ 都成立 $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{x_{n_1}+\cdots+x_{n_k}}{k} = a$，证明：$\{x_n\}$ 收敛且以 a 为极限。

✍ **练习 2.65** 设 $\{x_n\}$ 为正数列，证明 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} n(\frac{1+x_{n+1}}{x_n} - 1) \ge 1$，且右边的 1 为最佳值。

✍ **练习 2.66** 设 $\{x_n\}$ 为正数列，证明 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} (\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n})^n \ge e$，且右边的 e 为最佳值。(还可以证明右边为最佳常数)

✍ **练习 2.67** 设 $y_n = px_n + qx_{n+1}, n \in \mathbb{N}_+$，其中 $|p| \le |q|$。证明：若 $\{y_n\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 也一定收敛。

✍ **练习 2.68** 设 $\{x_n\}$ 有界，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{2n}+2x_n) = A$。证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限。

✍ **练习 2.69** 设 $x_n = \sin n, n \in \mathbb{N}_+$，证明数列 $\{x_n\}$ 的极限点集合为 $[-1,1]$。

✍ **练习 2.70** 设数列 $\{x_n\}$ 有界，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n) = 0$，分别记 $\{x_n\}$ 的上下极限为 L 和 l。证明：$\{x_n\}$ 的极限点充满区间 $[l, L]$。

注 本题的条件与基本数列的条件相差甚远，一般来说不能证明 $\{x_n\}$ 收敛。但是 1976 年有人发现，如果 $\{x_n\}$ 是迭代生成数列，则从 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n) = 0$，差不多就可以推出 $\{x_n\}$ 收敛，从而 $l = L$。

✍ **练习 2.71** 设 $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, 0 < \alpha < 2\pi, a_n = \cos(\alpha s_n), b_n = \sin(\alpha s_n)$。证明数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的聚点全体都是闭区间 $[-1,1]$。

✍ **练习 2.72** 设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 是递增的无界数列，且

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n) = 0$$

证明：$\{a_n - b_m : n, m \in N\}$ 在实数集中稠密。

✍ **练习 2.73** 设 a_n 为正数列，证明：$\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le 1$ 的充分必要条件是，对任意的 $l > 1$，有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{l^n} = 0$$

2.6 递推数列方法

内容提要

- 单调性分析法
- 压缩映像方法
- 折线图方法
- 递推数列估阶的初等方法
- 加强归纳法
- 强求通项和强行裂项法

2.6.1 单调性分析法

2.6.2 压缩映像方法

2.6.3 折线图方法

2.6.4 递推数列估阶的初等方法

2.6.5 加强归纳法

2.6.6 强求通项和强行裂项法

练习 2.74 设 $x_0 = a, x_n = 1 + bx_{n-1}, n \in \mathbb{N}_+$。试求出使该数列收敛的 a, b 的所有值。(本题为线性迭代)

练习 2.75 对于线性迭代的全面讨论 设给定初始值 x_1，然后用线性函数 $f(x) = ax + b$ 迭代生成数列 $\{x_n\}$，即 $x_{n+1} = ax_n + b$。试回答以下问题:

1. 是否存在线性函数，使对于任何初始值 x_1，$\{x_n\}$ 总是收敛的?
2. 是否存在线性函数，使对于任何初始值 x_1，$\{x_n\}$ 总是发散的?
3. 是否存在线性函数，使对于不同的初始值 x_1，$\{x_n\}$ 收敛到不同的极限?
4. 是否存在线性函数，使对于某些初始值 x_1，$\{x_n\}$ 收敛，而对于其他初始值 x_1，$\{x_n\}$ 发散?

练习 2.76 设 $x_1 = c, x_{n+1} = a^{x_n}(a > 0, a \neq 1), n \in \mathbb{N}_+$。根据下面提供的函数 $f(x) = a^x$ 和 $f(f(x))$ 的单调性和不动点的知识，讨论数列 $\{x_n\}$ 的敛散性。

1. 在 $a > 1$ 时函数 $f(x) = a^x$ 单调增加。
   (a). 如 $a > e^{\frac{1}{e}}$，则 f 无不动点。证明：不论 c 如何，数列 $\{x_n\}$ 总是单调增加的无穷大量。
   (b). 在 $a = e^{\frac{1}{e}}$ 时 f 恰有一个不动点。证明：当 $c \leq e$ 时，数列 $\{x_n\}$ 单调增加收敛于 e，而当 $c > e$ 时，$\{x_n\}$ 是单调增加的正无穷大量。
   (c). 如 $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$，则 f 有两个不动点，根据 $x_1 = c$ 的大小，讨论数列 $\{x_n\}$ 的敛散性。
2. 在 $0 < a < 1$ 时函数 $f(x) = a^x$ 单调减少，存在唯一不动点。
   (a). 如 $e^{-e} \leq a < 1$，则复合函数 $f(f(x)) = a^{a^x}$ 只有一个不动点。证明：数列 $\{x_n\}$ 收敛，它的子列 $\{x_{2k-1}\}$ 和 $\{x_{2k}\}$ 是具有不同单调性的单调数列。
   (b). 如 $0 < a < e^{-e}$，则复合函数 $f(f(x)) = a^{a^x}$ 有三个不动点。证明：除非 $x_1 = c$ 恰好是 f 的不动点，否则子列 $\{x_{2k-1}\}$ 和 $\{x_{2k}\}$ 分别单调收敛于不同的极限，数列 $\{x_n\}$ 发散。

注 这是关于迭代生成数列的一道名题，从 Euler 开始就有许多人对它作过研究(不限于在实数范围内)，在《美国数学月刊》(1981) 第 88 卷 235-252 页有详细介绍，并附有丰富的文献。但是从混沌学的角度来看，至少在实数范围内进行讨论时，问题在本质上是简单的，只不过依赖于对函数 $f(x) = a^x$ 和 $f(f(x)) = a^{a^x}$ 的单调性和不动点个数的讨论。

练习 2.77CMC15 初赛数 A 压轴题 设 $a = \sqrt[3]{3}, x_1 = a, x_{n+1} = a^{x_n}(n = 1, 2, \cdots)$。证明：数列 $\{x_n\}$ 极限存在，但不是 3。

练习 2.78 设参数 $b > 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = bx_n(1 - x_n), n \in \mathbb{N}_+$。证明以下结论:

1. 当 $0 < b \leq 1$ 时，$\{x_n\}$ 单调减少收敛于 0

2. 当 $1 < b \le 2$ 时，$\{x_n\}$ 单调减少收敛于 $1 - \frac{1}{b}$
3. 当 $2 < b \le 3$ 时，子列 $\{x_{2k-1}\}$ 和 $\{x_{2k}\}$ 具有相反的单调性，并收敛于同一极限 $1 - \frac{1}{b}$
4. 当 $3 < b \le 1 + \sqrt{5}$ 时，子列 $\{x_{2k-1}\}$ 和 $\{x_{2k}\}$ 具有相反的单调性，但收敛于不同的极限。

注 这就是 20 世纪 70 年代中期以来在混沌学中研究得最多的范例之一。映射 $f(x) = bx(1-x)$ 的名称有 logistic 映射、抛物线映射等。用这个映射通过迭代可以得到非常丰富而复杂的结果，对其中的许多问题的研究一直持续到现在。用时间离散的动力系统的术语来说，前三种情况中从 $x_1 = \frac{1}{2}$ 出发的轨道（即数列 $\{x_n\}$ 收敛到不动点上。而最后一种情况就是说从 $x_1 = \frac{1}{2}$ 出发的轨道收敛到一个周期为 2 的周期轨上。特别当 $b = 1 + \sqrt{5}$ 时，有

$$x_{2k-1} = \frac{1}{2}, x_{2k} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}, k \in \mathbb{N}_+$$

✍ **练习 2.79** 设 $f : [a,b] \to [a,b]$ 满足对任意 $x, y \in [a,b]$，当 $x \ne y$ 时有 $|f(x) - f(y)| < |x - y|$。任取 $x_1 \in [a,b]$，令 $x_{n+1} = \frac{x_n + f(x_n)}{2}, n = 1, 2, \cdots$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛。

✍ **练习 2.80** 令 $y_0 \ge 2, y_n = y_{n-1}^2 - 2, n \in \mathbb{N}_+$。设 $S_n = \frac{1}{y_0} + \frac{1}{y_0 y_1} + \cdots + \frac{1}{y_0 y_1 \cdots y_n}$。证明：$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{y_0 - \sqrt[2]{y_0^2 - 4}}{2}$

2.7 嵌套根号型极限的问题

第三章 一元函数极限

3.1 函数的极限

内容提要

- ❑ 定义和基本性质
- ❑ 重要的函数极限
- ❑ 进一步的例子和性质

3.1.1 定义和基本性质

设 $x_0 \in \mathbb{R}, \delta > 0$。我们记 $V(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$，称为 x_0 的一个去心开邻域或空心开邻域。

定义 3.1

设函数 f 在 x_0 的一个空心开邻域 $V(x_0, \delta_0)$ 中有定义。如果存在 $\alpha \in \mathbb{R}$，使得任给 $\varepsilon > 0$，均存在 $\delta \in (0, \delta_0)$，当 $x \in V(x_0, \delta)$ 时 $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$，则称函数 f 在 x_0 处有极限 α，记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha \quad 或 \quad f(x) \to \alpha (x \to x_0)$$

♣

注 f 在 x_0 处的极限与 f 在 x_0 处的值没有直接关系，f 甚至可以在 x_0 处没有定义。

例题 3.1 当 $x \neq 0$ 时定义 $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$，研究 f 在 $x_0 = 0$ 处的极限。

解 任给 $\varepsilon > 0$，取 $\delta = \varepsilon$，当 $x \in V(x_0, \delta)$ 时，

$$|f(x)| \le |x| < \delta = \varepsilon$$

这说明 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

类似地，我们也可以定义函数在 x_0 处的单侧极限：如果存在 $\alpha \in \mathbb{R}$，使得任给 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta \in (0, \delta_0)$，当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时 $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处（当 x 趋于 x_0^- 时）有**左极限** α，记为

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \alpha \quad 或 \quad f(x) \to \alpha (x \to x_0^-)$$

$f(x)$ 在 x_0 处的左极限也记为 $f(x_0^-)$ 或 $f(x_0 - 0)$。如果存在 $\beta \in \mathbb{R}$，使得任给 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta \in (0, \delta_0)$，当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时 $|f(x) - \beta| < \varepsilon$，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处（当 x 趋于 x_0^+ 时）有**右极限** β，记为

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \beta \quad 或 \quad f(x) \to \beta (x \to x_0^+)$$

$f(x)$ 在 x_0 处的右极限也记为 $f(x_0^+)$ 或 $f(x_0 + 0)$。显然，如果 f 在 x_0 处极限存在，则其左右极限也存在且等于此极限。

例题 3.2 考虑函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases}$$

研究 f 在 $x_0 = 0$ 处的极限。

解 f 在 0 的左边为常数 0，右边为常数 1，故 f 在 0 处的左极限为 0，右极限为 1. 因为左右极限不相等，故 f 在 0 处的极限不存在。

命题 3.1

f 在 x_0 处有极限当且仅当 f 在 x_0 处的左极限和右极限都存在且相等。

♠

证明 必要性显然，只要证明充分性即可。设 f 在 x_0 处的左极限和右极限均为 α。由定义，任给 $\varepsilon > 0$，存在

$\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$，使得

$$|f(x) - \alpha| < \varepsilon, \forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0); |f(x) - \alpha| < \varepsilon, \forall x \in (x_0, x_0 + \delta_2)$$

记 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$，则当 $x \in V(x_0, \delta)$ 时 $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$，这说明 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \alpha$。

命题 3.2 (极限的唯一性)

设 α, β 均为函数 f 在 x_0 处的极限，则 $\alpha = \beta$。

证明 任给 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$，使得

$$|f(x) - \alpha| < \varepsilon, \forall x \in V(x_0, \delta_1); |f(x) - \beta| < \varepsilon, \forall x \in V(x_0, \delta_2)$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$，则

$$|\alpha - \beta| \leq |f(x) - \alpha| + |f(x) - \beta| < 2\varepsilon, \forall x \in V(x_0, \delta)$$

由 ε 的任意性知 $\alpha - \beta = 0$，即 $\alpha = \beta$。

命题 3.3 (夹逼原理)

设在 x_0 的一个空心开邻域中有

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$$

如果函数 f_1, f_2 在 x_0 处的极限存在且等于 α，则 f 在 x_0 处的极限也等于 α。

证明 由定义，任给 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$，使得

$$|f_1(x) - \alpha| < \varepsilon, \forall x \in V(x_0, \delta_1); |f_2(x) - \alpha| < \varepsilon, \forall x \in V(x_0, \delta_2)$$

即

$$f_1(x) > \alpha - \varepsilon, \forall x \in V(x_0, \delta_1); f_2(x) < \alpha + \varepsilon, \forall x \in V(x_0, \delta_2)$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$，则当 $x \in V(x_0, \delta)$ 时有

$$\alpha - \varepsilon < f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x) < \alpha + \varepsilon, \forall x \in V(x_0, \delta)$$

即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \alpha$。

命题 3.4 (绝对值性质)

设函数 f 在 x_0 处的极限为 α，则 $|f|$ 在 x_0 处的极限为 $|\alpha|$。

证明 因为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \alpha$，所以任给 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta \in (0, \delta_0)$，当 $x \in V(x_0, \delta)$ 时有 $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$。则当 $x \in V(x_0, \delta)$ 时，有

$$||f(x)| - |\alpha|| \leq |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

则 $|f|$ 在 x_0 处的极限为 $|\alpha|$

命题 3.5

(1)(局部有界性) 如果函数 f 在 x_0 处有极限，则它在 x_0 的一个空心开邻域中有界。

(2)(保序性) 设函数 f, g 在 x_0 处的极限分别为 α, β。如果 $f(x) \geq g(x)$ 在 x_0 的一个空心开邻域中成立，则 $\alpha \geq \beta$；反之，如果 $\alpha > \beta$，则在 x_0 的一个空心开邻域中 $f(x) > g(x)$；特别地，如果 $\alpha > 0$，则在 x_0 的一个空心开邻域中 $f(x) > 0$。

(3)(四则运算) 设函数 f, g 在 x_0 处的极限分别为 α, β，则

1. $\lim\limits_{x \to x_0} [\lambda f(x) + \mu g(x)] = \lambda\alpha + \mu\beta$，其中 λ, μ 为常数；
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = \alpha\beta$；当 $\beta \neq 0$ 时 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)/g(x) = \alpha/\beta$

证明

(1) 因为函数 f 在 x_0 处有极限，不妨设为 α，则假设 $\varepsilon = 1$，存在 $\delta \in (0, \delta_0)$，对 $x \in V(x_0, \delta)$，有

$$|f(x) - \alpha| < 1$$

即

$$\alpha - 1 < f(x) < \alpha + 1$$

取 $M = \max\{|\alpha - 1|, |\alpha + 1|\}$，则对 $\forall x \in V(x_0, \delta)$, 有 $|f(x)| \leq M$。则 f 在 x_0 的一个空心邻域中有界。

(2) 如果 $f(x) \geq g(x)$ 在 x_0 的一个空心开邻域中成立，不妨设存在 $\delta \in (0, \delta_0)$，对于 $x \in V(x_0, \delta)$，有 $f(x) \geq g(x)$, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$, 对 $\forall x \in V(x_0, \delta_1)$, 有 $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$。对 $\forall x \in V(x_0, \delta_2)$, 有 $|g(x) - \beta| < \varepsilon$。取 $\delta_3 = \min\{\delta, \delta_1, \delta_2\}$，当 $x \in V(x_0, \delta_3)$ 时有

$$\alpha - \beta = (\alpha - f(x)) + (f(x) - g(x)) + (g(x) - \beta) \geq -\varepsilon - \varepsilon = -2\varepsilon$$

由 ε 的任意性知 $\alpha \geq \beta$。

如果 $\alpha > \beta$，取 $\varepsilon = \frac{\alpha - \beta}{2}$，存在 $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$，有

$$|f(x) - \alpha| < \varepsilon, \forall x \in V(x_0, \delta_1); |g(x) - \beta| < \varepsilon, \forall x \in V(x_0, \delta_2)$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$，当 $x \in V(x_0, \delta)$ 时有

$$f(x) - g(x) = (f(x) - \alpha) + (\alpha - \beta) + (\beta - g(x)) > -\varepsilon + \alpha - \beta - \varepsilon = 0$$

即 $f(x) > g(x)$。

特别地，取 $\beta = 0, g(x) = 0$ 即得 $\alpha > 0$ 时，存在 x_0 的一个空心邻域中 $f(x) > 0$。

(3)

1. 因为函数 f, g 在 x_0 处的极限分别为 α, β，则对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$，有

$$|f(x) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|}, \forall x \in V(x_0, \delta_1); |g(x) - \beta| < \frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|}, \forall x \in V(x_0, \delta_2)$$

则取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$，对 $x \in V(x_0, \delta)$ 有

$$\begin{aligned} |\lambda f(x) + \mu g(x) - \lambda\alpha - \mu\beta| &= |\lambda(f(x) - \alpha) + \mu(g(x) - \beta)| \\ &\leq |\lambda| |f(x) - \alpha| + |\mu| |g(x) - \beta| \\ &< |\lambda| \frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|} + |\mu| \frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|} = \varepsilon \end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{x \to x_0} [\lambda f(x) + \mu g(x)] = \lambda\alpha + \mu\beta$

2. 因为函数 f, g 在 x_0 处的极限分别为 α, β，则对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$，有

$$|f(x) - \alpha| < \varepsilon, \forall x \in V(x_0, \delta_1); |g(x) - \beta| < \varepsilon, \forall x \in V(x_0, \delta_2)$$

设存在 $\delta_3 > 0, M > 0$，对 $\forall x \in V(x_0, \delta_3)$，有

$$|f(x)| \leq M, |g(x)| \leq M$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$，当 $x \in V(x_0, \delta)$ 时，有

$$\begin{aligned}|f(x)g(x) - \alpha\beta| &= |f(x)(g(x) - \beta) + \beta(f(x) - \alpha)| \\ &\le |f(x)|\,|g(x) - \beta| + |\beta|\,|f(x) - \alpha| \\ &\le M\varepsilon + |\beta|\,\varepsilon \\ &= (M + |\beta|)\varepsilon\end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = \alpha\beta$。

要证当 $\beta \ne 0$ 时有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)/g(x) = \alpha/\beta$，即证当 $\beta \ne 0$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0} 1/g(x) = 1/\beta$。

由函数极限的绝对值性质，因为 $\lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = |\beta| > \frac{1}{2}|\beta|$，所以由函数极限的局部保序性质，存在 $\delta_1 > 0$，当 $x \in V(x_0, \delta_1)$ 时，有 $|g(x)| > \frac{1}{2}|\beta|$。对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta_2 > 0$，当 $x \in V(x_0, \delta_2)$ 时，有 $|g(x) - \beta| < \varepsilon$。

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$，当 $x \in V(x_0, \delta)$ 时，有

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{\beta}\right| = \frac{|g(x) - \beta|}{|g(x)|\,|\beta|} \le \frac{2\,|g(x) - \beta|}{|\beta|^2} < \frac{2\varepsilon}{|\beta|^2}$$

所以 $\lim\limits_{x\to x_0} 1/g(x) = 1/\beta$，即证。

例题 3.3 设 $\alpha \ne 0$。研究幂函数 $f(x) = x^a$ 的函数极限。

解 分情况讨论。

(1)$a = k$ 为整数。当 $k > 0$ 时，f 的定义域为 $\mathbb{R}$。当 $k < 0$ 时 f 的定义域为 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$。利用函数极限的四则运算性质容易看出，在定义域内均有 $\lim\limits_{x\to x_0} x^a = x_0^a$。

(2)$a > 0$ 且不是整数。此时 f 的定义域为 $[0, \infty)$。当 $x_0 = 0$ 时，任给 $\varepsilon > 0$，取 $\delta = \varepsilon^{\frac{1}{a}}$，当 $x_0 = 0$ 时，任给 $\varepsilon > 0$，取 $\delta = \varepsilon^{\frac{1}{a}}$，当 $0 < x < \delta$ 时 $0 < x^a < \varepsilon$，这说明 $\lim\limits_{x\to x_0^+} x^a = 0$。当 $x_0 > 0$ 时，任给 $\varepsilon > 0$，不妨设 $\varepsilon < x_0^a$，取

$$\delta = \min\{x_0 - (x_0^a - \varepsilon)^{\frac{1}{a}}, (x_0 + \varepsilon)^{\frac{1}{a}} - x_0\}$$

当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$0 < x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$，从而有

$$-\varepsilon \le (x_0 - \delta)^a - x_0^a < x^a - x_0^a < (x_0 + \delta)^a - x_0^a \le \varepsilon$$

这说明 $\lim\limits_{x\to x_0} x^a = x_0^a$。

(3)$a < 0$ 且不是整数。此时 f 的定义域为 $(0, \infty)$。利用 (2)，由 $x^a = (x^{-a})^{-1}$ 以及函数极限的四则运算性质容易看出，在定义域内仍有 $\lim\limits_{x\to x_0} x^a = x_0^a$。

例题 3.4 设 $a > 0$。研究指数函数 $f(x) = a^x$ 的函数极限。

解 当 $a = 1$ 时 $a^x \equiv 1$，因此 a^x 的极限处处为 1；当 $a > 1$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$。任给 ε，存在 N，当 $n > N$ 时 $0 < a^{\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon$。取 $\delta = \frac{1}{N}$，当 $0 < x < \delta$ 时，

$$0 < a^x - 1 < a^{\frac{1}{N}} - 1 < \varepsilon$$

当 $-\delta < x < 0$ 时，上式表明 $1 < a^{-x} < 1 + \varepsilon$，即 $(1 + \varepsilon)^{-1} < a^x < 1$，从而有

$$-\varepsilon < (1 + \varepsilon)^{-1} - 1 < a^x - 1 < 0$$

总之 $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$。利用 $a^x = a^{x_0}a^{x - x_0}$ 不难得出 $\lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$。

当 $0 < a < 1$ 时，利用 $a^x = 1/(a^{-1})^x$ 仍可得出 $\lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$。

例题 3.5 设 $q > 0, q \ne 1$。研究对数函数 $f(x) = \log_q x$ 的函数极限。

解 对数函数的定义域为 $(0, \infty)$。不妨设 $q > 1, x_0 > 0$。任给 $\varepsilon > 0$，取

$$\delta = \min\{x_0(1 - q^{-\varepsilon}), x_0(q^{\varepsilon} - 1)\}$$

当 $0 < |x - x_0|$ 时

$$x_0(q^{-\varepsilon} - 1) < x - x_0 < x_0(q^{\varepsilon} - 1)$$

即

$$x_0q^{-\varepsilon} < x < x_0q^{\varepsilon}, \log_q x_0 - \varepsilon < \log_q x < \log_q x_0 + \varepsilon$$

这说明 $\lim\limits_{x\to x_0} \log_q x = \log_q x_0$。

若 $0 < q < 1, x_0 > 0$, 由

$$\log_q x = \frac{\log_{q^{-1}} x}{\log_{q^{-1}} q} = -\log_{q^{-1}} x = \log_{q^{-1}} x^{-1}$$

所以

$$\lim_{x\to x_0} \log_q x = \log_{q^{-1}} x_0^{-1} = \frac{\log_q x_0^{-1}}{\log_q q^{-1}} = -\log_q x_0^{-1} = \log_q x_0$$

即 $\lim\limits_{x\to x_0} \log_q x = \log_q x_0$。

3.1.2 重要的函数极限

例题 3.6 研究函数 $\frac{\sin x}{x}$ 在 $x_0 = 0$ 处的极限。

解 先考虑 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，有 $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$，即

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

由于 $\cos x$ 和 $\frac{\sin x}{x}$ 为偶函数，故上式对 $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ 也成立。因此当 $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ 时有

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < 1 - \cos x = 2\sin^2(x/2) < 2(x/2)^2 = \frac{1}{2}x^2$$

由夹逼原理知

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

注 当 $|x| \geq \frac{1}{2}\pi$ 时

$$|\sin x| \leq 1 < \frac{1}{2}\pi \leq |x|$$

因此我们得到下面的不等式：

$$|\sin x| \leq |x|, \forall x \in \mathbb{R}$$

等号仅在 $x = 0$ 处成立。

例题 3.7 当 $x_0 \in \mathbb{R}$ 时，有

$$\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0, \lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$$

证明 任给 $\varepsilon > 0$，取 $\delta = \varepsilon$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有

$$\begin{aligned}|\sin x - \sin x_0| &= 2\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right|\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \\ &\leq 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon\end{aligned}$$

任给 $\varepsilon > 0$，取 $\delta = \varepsilon$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有

$$\begin{aligned}|\cos x - \cos x_0| &= 2\left|\sin\frac{x+x_0}{2}\right|\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \\ &\leq 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon\end{aligned}$$

例题 3.8 研究函数 $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{|x|}}$ 在 $x_0 = 0$ 处的极限。

解 当 $x \neq 0$ 时，有

$$\left|\frac{|\sin x|}{\sqrt{|x|}}\right| \leq \frac{|x|}{\sqrt{|x|}} = \sqrt{|x|}$$

于是，任给 $\varepsilon > 0$，当 $0 < |x| < \varepsilon^2$ 时 $|f(x)| < \varepsilon$，这说明 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$。

下面我们讨论函数在变量趋于无穷远时的极限，数列极限其实就是变量趋于无穷远时的一种极限。

设函数 f 在 $(a,+\infty)$ 中有定义。如果存在 $\alpha \in \mathbb{R}$，使得对于任给的 $\varepsilon > 0$，均存在 $A > a$，当 $x > A$ 时 $|f(x)-\alpha| < \varepsilon$，则称 f 在 $+\infty$ 处有极限 α，记为

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \alpha \quad \text{或} \quad f(x) \to \alpha (x \to +\infty)$$

类似地，设 f 在 $(-\infty,a)$ 中有定义。如果存在 $\beta \in \mathbb{R}$，使得对于任给的 $\varepsilon > 0$，均存在 $B < a$，当 $x < B$ 时 $|f(x)-\beta| < \varepsilon$，则称 f 在 $-\infty$ 处有极限 β，记为

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \beta \quad \text{或} \quad f(x) \to \beta (x \to -\infty)$$

如果 f 在 $-\infty$ 以及 $+\infty$ 处的极限均为 γ，则称 f 在 ∞（无穷远）处有极限 γ，记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \gamma \quad \text{或} \quad f(x) \to \gamma (x \to \infty)$$

例题 3.9 研究函数 $f(x) = (1+\frac{1}{x})^x$ 在无穷远处的极限。

解 当 $x \geq 1$ 时，

$$(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]} < (1+\frac{1}{x})^x < (1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1}$$

其中 $[x]$ 是不超过 x 的最大整数。因此

$$(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]+1}(1+\frac{1}{[x]+1})^{-1} < (1+\frac{1}{x})^x < (1+\frac{1}{[x]})^{[x]}(1+\frac{1}{[x]})$$

利用数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$ 以及夹逼原理可得 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$。

当 $x \leq -2$ 时，令 $y = -x-1$，则

$$\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{y\to+\infty}(1-\frac{1}{y+1})^{-y-1} = \lim_{y\to+\infty}(\frac{y+1}{y})^{y+1} = \lim_{y\to+\infty}(1+\frac{1}{y})^y(1+\frac{1}{y}) = e$$

这说明 $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$。

3.1.3 进一步的例子和性质

定理 3.1 (复合函数的极限)

设函数 $f(y)$ 在 y_0 处的极限为 α，函数 $g(x)$ 在 x_0 处的极限为 y_0。如果存在 x_0 的一个空心开邻域，在此开邻域中 $g(x) \neq y_0$，则复合函数 $f(g(x))$ 在 x_0 处的极限为 α。

证明 任给 $\varepsilon > 0$，由 $\lim\limits_{y\to y_0} = \alpha$ 可知，存在 $\delta > 0$，当 $0 < |y-y_0| < \delta$ 时 $|f(y)-\alpha| < \varepsilon$。因为 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = y_0$，对于这个 δ，存在 $\eta > 0$，使得当 $0 < |x-x_0| < \eta$ 时 $0 < |g(x)-y_0| < \delta$。此时 $|f(g(x))-\alpha| < \varepsilon$，这说明 $f(g(x))$ 在 x_0 处的极限为 α。

注

1. 定理中的条件 $g(x) \neq y_0$ 一般不能去掉，反例如下：令

$$f(y) = \begin{cases} 1, y \neq 0 \\ 0, y = 0 \end{cases}$$

$g(x) \equiv 0$，则 $\lim\limits_{y\to0} f(y) = 1$，但 $f(g(x)) = 0$。不过，当 $f(y_0) = \alpha$ 时条件 $g(x) \neq y_0$ 可以去掉。[1]

2. 对于无穷远处的极限也有完全类似的结果。

例题 3.10 研究函数 $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 在 $x_0 = 0$ 处的极限。

解 作变量替换 $y = \frac{1}{x}$，则当 $x \to 0$ 时 $y \to \infty$，由复合函数的极限及例题 3.9 可得

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to\infty}(1+\frac{1}{y})^y = e$$

[1] 函数极限是对一点处函数值的逼近，与该点函数值无关。若 $f(y_0) \neq \alpha$ 时没有条件 $g(x) \neq y_0$，对 x 逼近 x_0 时，若映到 y_0，则会使得 $f(g(x))$ 超出范围，所以需要补充条件。若 $f(y_0) = \alpha$，则不需要补充条件。

等价地，我们有如下很有用的极限等式：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

例题 3.11 设 $a>0$，研究函数 $\frac{a^x-1}{x}$ 在 $x_0=0$ 处的极限。

解 不妨设 $a\neq 1$。作变量替换 $y=a^x-1$，则 $x\to 0$ 时 $y\to 0$。于是

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}&=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}\\&=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}\ln a=\ln a\end{aligned}$$

例题 3.12 设 $a\in\mathbb{R}$，研究函数 $\frac{(1+x)^a-1}{x}$ 在 $x_0=0$ 处的极限。

解 不妨设 $a\neq 0$。当 $x\to 0$ 时 $a\ln(1+x)\to 0$，于是

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{e^{a\ln(1+x)}-1}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{e^{a\ln(1+x)}-1}{a\ln(1+x)}\frac{a\ln(1+x)}{x}\\&=\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}a=a\end{aligned}$$

定理 3.2 (单调函数的极限)

设函数 f 在 (a,b) 中有定义，如果 f 单调递增且有上界，或单调递减且有下界，则 f 在 b 处有左极限。对于右极限有类似的结论。

证明 以 f 单调递增为例。记 $\beta=\sup\{f(x)\mid x\in(a,b)\}$。根据确界的刻画，任给 $\varepsilon>0$，存在 $c\in(a,b)$，使得 $f(c)>\beta-\varepsilon$。记 $\delta=b-c$，当 $x\in(b-\delta,b)=(c,b)$ 时，由 f 单调递增可得

$$\beta-\varepsilon<f(c)\leq f(x)\leq\beta$$

于是 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=\beta$。

定理 3.3 (Heine 定理)

设 $a,A\in\mathbb{R}$。存在极限 $\lim_{x\to a}f(x)=A$ 的充分必要条件是：对满足条件 $x_n\neq a,\forall n\in\mathbb{N}_+,\lim_{n\to\infty}x_n=a$ 的每个数列 $\{x_n\}$，都有 $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A$

证明 必要性：由函数极限的定义，任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $x\in V(x_0,\delta)$ 时 $|f(x)-\alpha|<\varepsilon$。设 $\{x_n\}$ 是空心开邻域中收敛于 x_0 的数列，由数列极限的定义，对于上述 δ，存在 N，使得当 $n>N$ 时 $|x_n-x_0|<\delta$。这说明当 $n>N$ 时 $|f(x_n)-\alpha|<\varepsilon$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\alpha$。

充分性：（反证法）此时，根据函数极限的定义，存在 $\varepsilon_0>0$，使得任给 $n\geq 1$，均存在 $x_n\in V(x_0,\frac{1}{n})$，使得 $|f(x_n)-\alpha|\geq\varepsilon_0$。这说明 $\{x_n\}$ 是空心开邻域中收敛于 x_0 的数列，但 $\{f(x_n)\}$ 不收敛到 α。

注

1. Heine 定理可以改述为应用起来较为方便的形式：$f(x)$ 在 x_0 处有极限 $\Longleftrightarrow$ 对空心开邻域中任何收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\},\{f(x_n)\}$ 均收敛。这时充分性的证明是这样的：只要说明如果 $\{f(x_n)\}$ 均收敛，则它们的极限必定都相同。设 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 是收敛于 x_0 的两个数列，使得 $\{f(x_n)\}$ 收敛于 α，$\{f(y_n)\}$ 收敛于 β。定义数列 $\{z_n\}$，使得 $z_{2k}=x_{2k},z_{2k-1}=y_{2k-1}(k\geq 1)$，则 $\{z_n\}$ 收敛于 x_0，从而 $\{f(z_n)\}$ 收敛，此时必有 $\alpha=\beta$。
2. 对于单侧极限，无穷远处的极限，有完全类似的 Heine 型定理。

定理 3.4 (Cauchy 准则)

设 f 在 x_0 的空心开邻域中有定义，则 f 在 x_0 处有极限当且仅当任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $x,y\in V(x_0,\delta)$ 时 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$。

证明 必要性：设 f 在 x_0 处的极限为 α，则任给 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当 $x \in V(x_0, \delta)$ 时，$|f(x) - \alpha| < \varepsilon/2$。因此，当 $x, y \in V(x_0, \delta)$ 时

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - \alpha| + |f(y) - \alpha| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

充分性：我们用 Heine 定理来证。设 $\{x_n\}$ 为 x_0 的空心开邻域中收敛于 x_0 的数列，由题设可知 $\{f(x_n)\}$ 是 Cauchy 数列，根据数列极限的 Cauchy 准则，$\{f(x_n)\}$ 收敛。由 Heine 定理即知 f 在 x_0 处有极限。

注

1. 对于无穷远处极限，Cauchy 准则仍然成立。
2. 从证明过程可以看出，f 在 x_0 处不存在极限当且仅当存在 $\varepsilon_0 > 0$，使得任给 $\delta > 0$，总存在 $x, y \in V(x_0, \delta)$，使得 $|f(x) - f(y)| \ge \varepsilon_0$。

例题 3.13 研究 Dirichlet 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

的极限。

解 在任何一点 x_0 附近都有点取值为 0 或 1，取 $\varepsilon = 1$，由 Cauchy 准则知 D 在 x_0 处极限不存在。

练习 3.1 求极限 $\lim\limits_{x \to x_0} R(x)$，其中 $R(x)$ 为 Riemann 函数

练习 3.2 设 f 为周期函数，如果 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = C$，证明 $f \equiv C$

练习 3.3 设 f, g 为两个周期函数，如果 $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - g(x)] = 0$，证明 $f = g$

练习 3.4 设 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$，$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}[f(2x) - f(x)] = 0$，证明 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$

练习 3.5 函数 Stolz

设 T 为正常数，若函数 f, g 在 $[a, +\infty)$ 上满足条件：

1. $g(x + T) > g(x), x \in [a, +\infty)$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty, f(x), g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 的每个有界子区间上有界
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x+T) - f(x)}{g(x+T) - g(x)} = l$

则 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

3.2 无穷小（大）量

内容提要

- 无穷小(大)量

研究函数的变化趋势时，有两种情形特别值得注意。一种是趋于零的情形，另一种是趋于无穷大的情形。

无穷小量：设 x_0 为实数或 $\pm\infty$。如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$，则称函数 f 在 $x \to x_0$ 时为无穷小量，记为 $f(x) = o(1)(x \to x_0)$。

无穷大量：如果 $1/f$ 在 $x \to x_0$ 时为无穷小量，则称 f 在 $x \to x_0$ 时为无穷大亮。

注 无穷小（大）量不是固定不变的数，而是变化的量（函数）。

对于数列，也有无穷小量和无穷大量的概念：如果数列 $\{a_n\}$ 收敛于 0，则称 $n \to \infty$ 时它是无穷小量，记为 $a_n = o(1)(n \to \infty)$；如果 $\{a_n\}$ 发散到无穷大，则称 $n \to \infty$ 时它是无穷大量。对于函数，无穷大亮也可以用趋于无穷的极限来描述。我们只介绍 x_0 为实数的情形，设 f 在 x_0 的一个空心开邻域中有定义。如果任给 $\alpha > 0$，均存在 $\delta > 0$，当 $x \in V(x_0, \delta)$ 时 $f(x) > \alpha$，则称 f 在 x_0 处的极限为 $+\infty$，记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad 或 \quad f(x) \to +\infty(x \to x_0)$$

容易看出，f 在 $x \to x_0$ 时为无穷大量是指 $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$。

如果任给 $\beta<0$，均存在 $\delta>0$，当 $x\in V(x_0,\delta)$ 时 $f(x)<\beta$，则称 f 在 x_0 处的极限为 $-\infty$，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty \quad 或 \quad f(x)\to-\infty(x\to x_0)$$

我们也可以完全类似地给出 f 在 x_0 处的左极限或右极限为无穷大的定义。

例题 3.14 证明 $\sqrt{x+1}-1=o(1)(x\to 0)$。

证明 因为

$$\sqrt{x+1}-1=\frac{x}{\sqrt{x+1}+1}\to 0(x\to 0)$$

故由定义可知 $\sqrt{x+1}-1$ 在 $x\to 0$ 时为无穷小量。

我们来考察常见的初等函数。根据前一节的结果，当 $x\to 0$ 时 $\sin x$ 为无穷小量。如果 k 为负整数，则 $x\to 0$ 时幂函数 x^k 为无穷大量。当 $a>0$ 时，幂函数 x^a 在 $x\to+\infty$ 时为无穷大量。当 $a<0$ 时，x^a 在 $x\to+\infty$ 时为无穷小量。当 $a>1$ 时，指数函数 a^x 在 $x\to-\infty$ 时为无穷小量，在 $x\to+\infty$ 时为无穷大量。当 $q>1$ 时，对数函数 $\log_q x$ 在 $x\to 1$ 时为无穷小量，$x\to+\infty$ 时为无穷大量。

我们经常需要比较两个变化量的大小，了解它们之间的量级关系。可以利用相对无穷小量和无穷大量来比较函数。

1. 如果 $f/g=o(1)(x\to x_0)$，则称当 $x\to x_0$ 时 f 关于 g 为高（低）阶无穷小（大）量，记为
$$f(x)=o(g(x))(x\to x_0)$$
2. 如果 f/g 在 x_0 的一个空心邻域中有界（我们约定：当 $g(x)=0$ 时 $f(x)=0$），则记
$$f(x)=O(g(x))(x\to x_0)$$
3. 对于数列也可以定义相对无穷小（大）量：设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 为两个数列，如果 $a_n/b_n=o(1)(n\to\infty)$，则称 $\{a_n\}$ 关于 $\{b_n\}$ 为无穷小量，记为 $a_n=o(b_n)$；无穷大量可类似定义。
4. 如果 f/g 在 x_0 处的极限为非零实数，则称当 $x\to x_0$ 时 f 和 g 是同阶量，记为
$$f(x)=O^*(g(x))(x\to x_0)$$
特别地，如果 f/g 在 x_0 处的极限等于 1，则称当 $x\to x_0$ 时 f 和 g 是等价量，记为
$$f\sim g(x\to x_0)$$
5. 设 $\alpha>0$。如果 $|f(x)|=O^*(|x-x_0|^\alpha)(x\to x_0)$，则称当 $x\to x_0$ 时 f 是 α 阶无穷小量；如果 $|f(x)|=O^*(|x-x_0|^{-\alpha})(x\to x_0)$，则称当 $x\to x_0$ 时 f 是 α 阶无穷大量。α 为正整数时也可以将定义中的绝对值去掉。

注 这些量级的比较也可在无穷远处进行。

两个用等价记号刻画的重要渐近公式

1. 关于阶乘的 **Stirling 公式**:
$$n!\sim\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$$
2. 如果将不超过 x 的素数个数记为 $\pi(x)$，则有**素数定理**:
$$\pi(x)\sim\frac{x}{\ln x}(x\to+\infty)$$
素数定理是数论中的重要定理。Legendre 和 Gauss 通过实验提出了猜测。Hadamard 和 de la Vall*é*e-Poussin 于 1896 年分别独立地给出了素数定理的第一个证明。1949 年,Selberg 和 Erd*ö*s 又给出了它的初等证明。

注 当 $x\to+\infty$ 时，有

$$\ln x\ll x^\varepsilon\ll a^x\ll x^x(a>1,\varepsilon>0)$$

例题 3.15 证明 $1-\cos x\sim x^2/2(x\to 0)$。

证明

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(x/2)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

例题 3.16 设 $\alpha \in \mathbb{R}, b > 1$，则 $x^a = o(b^x)(x \to +\infty)$。

证明 不妨设 $\alpha \geq 0$。当 $x > 1$ 时

$$0 < \frac{x^a}{b^x} \leq \frac{([x]+1)^a}{b^{[x]}} = b\frac{([x]+1)^a}{b^{[x]+1}}$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^a}{b^n} = 0$ 和夹逼原理知 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^a}{b^x} = 0$

例题 3.17 设 $a > 0$，则 $\ln x = o(x^a)(x \to +\infty)$。

证明 作变量替换 $y = \ln x$，则 $x \to +\infty$ 时 $y \to +\infty$，此时有

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^a} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^{ay}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{a}\frac{ay}{e^{ay}}$$

即 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$。

例题 3.18 设 $P(x), Q(x)$ 是次数相同的多项式，则 $P(x) = O^*(Q(x))(x \to \infty)$。

证明 设 $P(x), Q(x)$ 次数为 n。记

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n, Q(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n$$

其中，$a_0, b_0 \neq 0$。由

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1x^{-1} + \cdots + a_nx^{-n}}{b_0 + b_1x^{-1} + \cdots + b_nx^{-n}}$$

以及极限的四则运算性质可得 $\lim\limits_{x\to\infty} P(x)/Q(x) = a_0/b_0$。

定理 3.5 (等价代换)

设 $x \to x_0$ 时，$f \sim f_1, g \sim g_1$。如果 f_1/g_1 在 x_0 处有极限，则 f/g 在 x_0 处有极限，且两个极限相等。

证明 只要注意到

$$\frac{f}{g} = \frac{f}{f_1}\frac{f_1}{g_1}\frac{g_1}{g}$$

以及当 $x \to x_0$ 时 $f/f_1 \to 1, g/g_1 \to 1$ 即可。

注 等价代换在无穷远处也可进行。

例题 3.19 设 $\beta \neq 0$，求极限 $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$。

解 因为当 $x \to 0$ 时 $\sin \alpha x \sim \alpha x, \sin \beta x \sim \beta x$，故由等价代换可得

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} = \lim_{x\to0} \frac{\alpha x}{\beta x} = \frac{\alpha}{\beta}$$

例题 3.20 求极限 $\lim\limits_{x\to0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$。

解 当 $x \to 0$ 时

$$\tan x - \sin x = \frac{\sin x}{\cos x}(1 - \cos x) \sim x(x^2/2) = x^3/2$$

故由等价代换可得 $\lim\limits_{x\to0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = 1/2$。

注 等价代换一般不能用于加法和减法运算。例如，当 $x \to 0$ 时，我们知道 $\tan x \sim \sin x \sim x$，但在上例中 $\tan x - \sin x$ 不能代换为零。

例题 3.21 求极限 $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln \cos x}{\tan^2 x}$。

解 有

$$\ln(1 + x) \sim x(x \to 0)$$

于是，当 $x \to 0$ 时，有

$$\ln \cos x = \ln[1 - (1 - \cos x)] \sim -(1 - \cos x) \sim -x^2/2$$

另一方面

$$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \sim x^2(x \to 0)$$

利用等价代换可得 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\tan^2 x}=-1/2$。

命题 3.6

设 f,g 分别在 y_0,x_0 的空心开邻域中有定义，且

$$f(y)=o(y-y_0)(y\to y_0),g(x)-y_0=O(x-x_0)(x\to x_0)$$

在以下两种情况下均有 $f\circ g(x)=o(x-x_0)(x\to x_0)$：

1. $x\neq x_0$ 时 $g(x)\neq y_0$
2. f 在 y_0 处有定义且 $f(y_0)=0$

证明 由题设，存在常数 M，使得 $|g(x)-y_0|\le M|x-x_0|$。特别地，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=y_0$。若条件 (1) 成立，则当 $x\neq x_0$ 时

$$\left|\frac{f\circ g(x)}{x-x_0}\right|=\left|\frac{f\circ g(x)}{g(x)-y_0}\frac{g(x)-y_0}{x-x_0}\right|\le M\left|\frac{f\circ g(x)}{g(x)-y_0}\right|$$

当条件 (2) 成立时，定义函数 $\tilde f(y)$ 如下：$\tilde f(y_0)=0$；$y\neq y_0$ 时 $\tilde f(y)=\frac{f(y)}{y-y_0}$。此时 $\tilde f(y)=o(1)(y\to y_0)$，且 $f(y)=\tilde f(y)\cdot(y-y_0)$ 在 y_0 附近均成立。于是有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f\circ g(x)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\tilde f(g(x))\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-y_0}{x-x_0}=0$$

3.3 连续函数

内容提要

- 定义和基本性质
- 间断点和振幅

我们可以用函数极限来刻画连续变化的量。

3.3.1 定义和基本性质

定义 3.2 (连续函数)

设 f 在区间 I 中有定义，$x_0\in I$。如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称 f 在 x_0 处连续；如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称 f 在 x_0 处左连续；如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称 f 在 x_0 处右连续。如果 f 在 I 的内部每一点处都连续，且在可能的左端点处右连续以及右端点处左连续，则称 f 为 I 中的连续函数，记为 $f\in C^0(I)$。

注

1. 可以用 $\varepsilon-\delta$ 的语言来描述连续性：f 在 x_0 处连续是指任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$。注意：这里的 δ 一般依赖于给定的 x_0 和 ε。左连续和右连续可以类似地描述。
2. 上半连续和下半连续：如果任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时 $f(x)>f(x_0)-\varepsilon$，则称 f 在 x_0 处下半连续；如果任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时 $f(x)<f(x_0+\varepsilon$，则称 f 在 x_0 处上半连续。

根据前面的计算，我们知道正弦函数和余弦函数，幂函数，指数函数和对数函数在各自的定义域中均为连续函数。利用函数之间的四则运算和复合运算可以从已有的连续函数出发得到新的连续函数。

命题 3.7 (连续函数的保序性质)

设函数 f 在 x_0 处连续，如果 $f(x_0)\neq 0$，则在 x_0 附近 $f(x)$ 介于 $\frac12 f(x_0)$ 和 $\frac32 f(x_0)$ 之间。特别地，f 在 x_0 附近处处不为零且保持符号不变。

证明 不妨设 $f(x_0)>0$。在连续性的 $\varepsilon-\delta$ 语言描述中取 $\varepsilon=\frac12 f(x_0)$ 即得欲证结论。

命题 3.8 (连续函数的四则运算)

设 $f(x), g(x)$ 都在 x_0 处连续，则

1. $\lambda f(x)+\mu g(x)$ 在 x_0 处连续，其中 λ,μ 为常数；
2. $f(x)g(x)$ 在 x_0 处连续；
3. 当 $g(x_0\neq 0$ 时，$f(x)/g(x)$ 在 x_0 处连续。

命题 3.9 (复合函数的连续性)

设函数 $f(y)$ 在 y_0 处连续，函数 $g(x)$ 在 x_0 处的极限为 y_0，则 $f(g(x))$ 在 x_0 处的极限为 $f(y_0)$。特别地，当 g 在 x_0 处连续时，复合函数 $f(g(x))$ 在 x_0 处也连续。

命题 3.10 (绝对值与连续性)

设函数 f 在 x_0 处连续，则 $|f|$ 在 x_0 处也连续。

利用四则运算可知三角函数在其定义域中都是连续函数。将幂函数写成指数函数和对数函数的复合。例如，当 $x>0$ 时 $x^a=e^{a\ln x}$，这说明利用指数函数和对数函数的连续性可以导出幂函数的连续性。

例题 3.22 如果 f,g 为连续函数，则 $\max\{f,g\}$ 和 $\min\{f,g\}$ 均为连续函数。

解 有

$$\max\{f,g\}=\frac{1}{2}\{(f+g)+|f-g|\},\min\{f,g\}=\frac{1}{2}\{(f+g)-|f-g|\}$$

由四则运算和绝对值性质知 $\max\{f,g\}$ 和 $\min\{f,g\}$ 均为连续函数。

命题 3.11 (连续函数的有界性质)

设函数 f 在 x_0 处连续，则 f 在 x_0 附近局部有界。特别地，闭区间中的连续函数必为有界函数。

证明 f 的局部有界性质可由函数极限的局部有界性质直接得出。设 f 是 $[a,b]$ 中的局部有界函数，则任给 $x\in[a,b]$，均存在 $\delta(x)>0$ 以及 $M(x)$，使得

$$|f(y)|\leq M(x),\forall y\in(x-\delta(x),x+\delta(x))\cap[a,b]$$

显然，$[a,b]$ 包含于集合族 $\{(x-\delta(x),x+\delta(x))\}_{x\in[a,b]}$ 之并。由 Heine-Borel 定理，存在 $x_1,\cdots,x_k\in[a,b]$，使得

$$[a,b]\subset\bigcup_{i=1}^{k}(x_i-\delta(x_i),x_i+\delta(x_i))$$

记 $M=\max\{M(x_i)\mid i=1,2\cdots,k\}$，则 $|f|\leq M$ 在 $[a,b]$ 中总成立。

推论 3.1

设 f 为闭区间中的连续函数。如果 f 处处为正，则 f 必有正下界；如果 f 处处为负，则 f 必有负上界。

证明 不妨设 f 处处为正，此时 $1/f$ 也是连续函数，从而是有界函数。特别地，存在常数 $M>0$，使得 $0<1/f\leq M$ 处处成立。这说明 $f\geq 1/M$ 处处成立。

3.3.2 间断点和振幅

如果函数 f 不在 x_0 处连续，则称 x_0 是 f 的一个**间断点**。可以将间断点分类：如果 $f(x)$ 在间断点 x_0 处的左极限 $f(x_0^-)$ 和右极限 $f(x_0^+)$ 都存在（且有极限），则称 x_0 为第一类间断点；其它的间断点都称为第二类间断点。左极限和右极限不相等的第一类间断点称为跳跃间断点，左极限和右极限相等的第一类间断点称为可去间断点。

例题 3.23 研究 *Riemann* 函数 $R(x)$ 的连续性，其中

$$R(x)=\begin{cases}1/q, x=p/q, p, q\text{为互素正整数}, p<q\\1, x=0,1\\0,(0,1)\text{中的无理数}\end{cases}$$

解 设 $x_0\in[0,1]$，我们来说明 $R(x)$ 在 x_0 处的极限为 0，因而 $R(x)$ 的间断点为有理点，它们都是可去间断点。

任给 $\varepsilon>0$，因为满足条件 $1/q\geq\varepsilon$（即 $q\leq 1\varepsilon$）的正整数只有有限多个，相应的既约分数 $p/q(p\leq q)$ 也只有有限多个，记为 $\{x_i\}_{i=1}^{k}$。令

$$\delta=\min\{|x_i-x_0|\mid x_i\neq x_0, i=1,2,\cdots,k\}$$

当 $x\in V(x_0,\delta)\cap[0,1]$ 时，如果 x 为无理数，则 $R(x)=0$；如果 $x=p/q$ 为有理数，则 $R(x)=1/q<\varepsilon$。总之，均有

$$|R(x)-0|=R(x)<\varepsilon$$

这说明 $R(x)$ 在 x_0 处的极限为 0。

例题 3.24 研究 Gauss 函数 $G(x)=[x]$ 的连续性，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数。

解 任给整数 k，当 $k\leq x<k+1$ 时，$[x]=k$。因此，当 x 不是整数时，$G(x)$ 在 x 处连续。当 $x=k$ 为整数时，$G(x)$ 在 k 处的左极限为 $k-1$，右极限为 k。这说明 $G(x)$ 的间断点恰为所有的整数点。根据定义，Gauss 函数 $G(x)=[x]$ 的间断点都是跳跃间断点。

命题 3.12

设 f 是区间 (a,b) 中的单调函数，$x_0\in(a,b)$。如果 x_0 为 f 的间断点，则 x_0 是跳跃间断点。

证明 不妨设 f 单调递增。由单调性知 f 在 x_0 处的左极限和右极限都存在，且

$$f(x_0^-)\leq f(x_0)\leq f(x_0^+)$$

这说明，若 x_0 为 f 的间断点，则它必为跳跃间断点。

推论 3.2

设 f 是定义在区间 I 中的单调函数，则 f 的间断点全体组成至多可数集。

证明 不妨设 f 单调递增，且 I 为开区间。假设 $x_1<x_2$ 为间断点，则

$$f(x_1^-)\leq f(x_1)\leq f(x_1^+)\leq f(x_2^-)\leq f(x_2)\leq f(x_2^+)$$

因此，区间 $(f(x_1^-),f(x_1^+))$ 和 $(f(x_2^-),f(x_2^+))$ 不相交。如果我们把每一个间断点 x 均对应到开区间 $(f(x^-),f(x^+))$ 中的一个有理数，则这个对应是单射。这说明 f 的间断点全体组成至多可数集。

对于一般的函数 f，判断 f 在某一点 x_0 处是否连续的方法有：

1. (Heine 定理) f 在 x_0 处连续当且仅当任给收敛到 x_0 的数列 $\{x_n\}$，$\{f(x_n)\}$ 均收敛到 $f(x_0)$；
2. (Cauchy 准则)f 在 x_0 处连续当且仅当任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$ 时 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$。

我们研究有界数列极限的时候，在证明 Cauchy 准则之前先引入了上下极限的概念。研究函数极限和连续性也可以这么做。为此，我们引入函数振幅的概念。某个变化量的振幅，是指其“最大”值和“最小”值之差。如果这个变化量的值趋于一个定数，则其振幅应趋于零。

定义 3.3 (振幅)

设 f 为区间 I 中的有界函数，记

$$\omega(f,I)=\sup\{|f(x)-f(y)|\mid x,y\in I\}$$

称为 f 在 I 中的振幅。设 $x_0 \in I$，当 n 为正整数时，记

$$\omega_n(f,x_0) = \omega(f,(x_0 - 1/n, x_0 + 1/n) \cap I)$$

显然，数列 $\{\omega_n(f,x_0)\}$ 单调递减且有界，其极限记为 $\omega(f,x_0)$，称为 f 在 x_0 处的振幅。♣

引理 3.1

设 f 为区间 I 中的有界函数，则

$$\omega(f,I) = \sup\{f(x) \mid x \in I\} - \inf\{f(x) \mid x \in I\}$$

♡

证明 f 在 I 中的上确界和下确界分别记为 M, m。任给 $x, y \in I, f(x), f(y)$ 均属于区间 $[m, M]$。这说明 $|f(x) - f(y)| \le M - m$。另一方面，由确界的刻画，任给 $\varepsilon > 0$，存在 $x, y \in I$，使得

$$f(x) > M - \varepsilon/2, f(y) < m + \varepsilon/2$$

此时

$$|f(x) - f(y)| \ge f(x) - f(y) > M - m - \varepsilon$$

再一次由确界的刻画即得 $\omega(f,I) = M - m$。

记 $M_n(f,x_0), m_n(f,x_0)$ 分别为 f 在 $(x_0 - 1/n, x_0 + 1/n) \cap I$ 中的上确界和下确界，由此引理可得

$$\omega_n(f,x_0) = M_n(f,x_0) - m_n(f,x_0)$$

注意到数列 $\{M_n(f,x_0)\}$ 单调递减，$\{m_n(f,x_0)\}$ 单调递增，其极限分别记为 $\overline{f}(x_0), \underline{f}(x_0)$，称为 f 在 x_0 处的上极限和下极限。此时有 $\omega(f,x_0) = \overline{f}(x_0) - \underline{f}(x_0)$。

定理 3.6

设 f 为区间 I 中的有界函数，$x_0 \in I$，则以下结论等价：

1. f 在 x_0 处连续
2. $\overline{f}(x_0) = \underline{f}(x_0) = f(x_0)$
3. $\omega(f,x_0) = 0$

♡

✍ **练习 3.6** 证明：如果一个连续函数在有理数上取值均为零，则它恒为零；两个连续函数如果在有理点上取值相同，则它们是相等的函数。(提示：无理数可以用有理数逼近，用 Heine 定理。)

✍ **练习 3.7** 设函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足条件

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

证明：当 f 连续时，必存在常数 c，使得 $f(x) = cx$。

✍ **练习 3.8** 函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足条件

$$f(x+y) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

证明：当 f 连续时，要么 f 恒为零，要么存在常数 $a > 0$，使得 $f(x) = a^x$。

✍ **练习 3.9** 设 $f(x)$ 在 (a,b) 有定义且没有第二类间断点，对于任意 $x, y \in (a,b)$，都有

$$f(\frac{x+y}{2}) \le \frac{1}{2}[f(x) + f(y)]$$

证明 $f(x)$ 在 (a,b) 连续。

✍ **练习 3.10** 设 $[a,b]$ 上的单调函数 $f(x)$ 可以取到 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的所有值，证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续。

✍ **练习 3.11** 是否存在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数 $f(x)$，使对任何 $c \in \mathbb{R}$,

1. 方程 $f(x) = c$ 都恰有两个解?
2. 方程 $f(x) = c$ 都恰有三个解?

✍ **练习 3.12** 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，$f(0) = 0, f(1) = 1$，对每个 $x \in [0,1]$，都有 $f(f(x)) = x$。证明对每个 $x \in [0,1]$，

都有 $f(x) = x$。

练习 3.13 设 $f(x)$ 在区间 I 上的间断点都是可去间断点，令 $g(x) = \lim_{t\to x} f(t), x \in I$。证明 $g(x)$ 在区间 I 上连续。

练习 3.14 设 $f \in C(-\infty, +\infty)$，且对任意 $x, y \in \mathbb{R}$ 有 $f(\frac{x+y}{2}) = \frac{1}{2}[f(x) + f(y)]$。证明:$f(x) = [f(1) - f(0)]x + f(0)$

3.4 连续函数的整体性质

内容提要

- 最值定理和介值定理
- 一致连续性

连续函数的性质密切依赖于实数系的基本性质。

3.4.1 最值定理和介值定理

连续函数的性质实际上是实数系的基本性质的某种反应。

定理 3.7 (最值定理)

设 $f \in C^0[a,b]$，则 f 在 $[a,b]$ 中必定取到最大值和最小值，即存在 $x_*, x^* \in [a,b]$，使得

$$f(x_*) \le f(x) \le f(x^*), \forall x \in [a,b]$$

证明

证法一

因为 $f \in C[a,b]$，所以 f 有界，因此 f 必有上确界和下确界。记上确界为 M。根据确界的刻画，存在 $[a,b]$ 中的数列 $\{x_n\}$，使得

$$M - \frac{1}{n} \le f(x_n) \le M$$

根据 *Bolzano* 定理，$\{x_n\}$ 有收敛子列 $\{x_{n_i}$，其极限记为 x^*。由极限的保序性质可知 $x^* \in [a,b]$。因为 f 在 x^* 处连续，故 $\{f(x_{n_i}$ 收敛于 $f(x^*\}$。因为 f 在 x^* 处连续，故 $\{f(x_{n_i}\}$ 收敛于 $f(x^*)$。这说明，$f(x^*) = M$，M 即为 f 的最大值。同理可证 f 可以取到最小值 (或考虑 $-f$ 的最大值)。

证法二(反证法)

设 M 为 f 的上确界，但 f 处处不等于 M。此时，$M - f$ 是 $[a,b]$ 中处处为正的连续函数。则存在正数 C，使得 $M - f \ge C$。这说明 $f \le M - C$ 处处成立，但这与 M 为 f 的上确界相矛盾。

注 闭区间的条件一般不能减弱，如 $f(x) = x$ 在 $(0,1)$ 中取不到最小（大）值。

定理 3.8 (零值定理，Bolzano)

设 $f \in C^0[a,b]$，如果 $f(a)f(b) \le 0$，则存在 $\xi \in [a,b]$，使得 $f(\xi) = 0$。

证明

证法一

不妨设 $f(a) < 0, f(b) \ge 0$。将 $[a,b]$ 二等分，如果 $f(\frac{a+b}{2}) \ge 0$，则取 $a_1 = a, b_1 = \frac{a+b}{2}$；如果 $f(\frac{a+b}{2}) < 0$，则取 $a_1 = \frac{a+b}{2}, b_1 = b$。再将 $[a_1,b_1]$ 二等分，用 $[a_2,b_2]$ 表示满足 $f(a_2) < 0, f(b_2) \ge 0$ 的那一半小区间。如此继续，可得闭区间套 $\{[a_n,b_n]\}$，使得 $f(a_n) < 0, f(b_n) \ge 0$ 总成立。注意到 $b_n - a_n = 2^{-n}(b-a)$ 趋于零，由闭区间套原理，存在 $\xi \in [a,b]$，使得 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均收敛于 ξ。由 f 连续可得

$$0 \ge \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \ge 0$$

这说明 $f(\xi) = 0$。

证法二(反证法)

不妨设 $f(a)<0, f(b)>0$。若 f 处处非零，考虑 $[a,b]$ 中的函数 $g(x)=\frac{f(x)}{|f(x)|}$，则 g 仍为连续函数。显然，当 $f(x)>0$ 时 $g(x)=1$；当 $f(x)<0$ 时 $g(x)=-1$。记

$$A=\{x\in[a,b]\mid g(x)=-1\}$$

则 $a\in A$。A 的上确界记为 ξ，则 $\xi\in[a,b]$。若 $g(\xi)=-1$，则 $\xi<b$。根据连续函数的保序性质，在 ξ 右边附近 g 是负的，从而只能等于 -1，但这与 ξ 的定义相矛盾；若 $g(\xi)=1$，则 $\xi>a$. 根据连续函数的保序性质，在 ξ 的左边附近 g 是正的，从而只能等于 1，但这也与 ξ 的定义相矛盾。

定理 3.9 (介值定理)

区间上的连续函数的值域必是区间 (可缩为一点)。

注 介值定理的常见形式为: 若 $f\in C[a,b], a\le x_1<x_2\le b$，且 $f(x_1)\ne f(x_2)$，则 f 可取到 $f(x_1)$ 和 $f(x_2)$ 之间的每个值。我们将此称为介值性质。

注 介值定理值肯定在所说的条件下值域是区间，未说是什么区间。闭区间上的连续函数值域一定是闭区间。但若定义域是其他类型的区间，包括无限区间，则连续函数的值域可以是所有可能的各种区间。

练习 3.15 思考题 举例说明: 区间上的函数即使处处不连续，也可以具有介值性质。

证明 设 μ 是严格介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的数，则 $(f(a)-\mu)(f(b)-\mu)<0$。因此，由零点定理，连续函数 $f(x)-\mu$ 在 (a,b) 内存在零点 ξ，此时 $f(\xi)=\mu$。

推论 3.3

设 $f\in C^0[a,b]$，则 $f([a,b])=[m,M]$，其中 m,M 分别是 f 的最小值和最大值。

证明 当 $m=M$ 时，f 为常值函数，结论自然成立。设 $m<M$。显然，$f([a,b])\subset[m,M]$。另一方面，由最值定理，存在 x_*,x^*，使得 $f(x_*)=m, f(x^*)=M$。由介值定理，介于 m 和 M 之间的值也能被 f 取到，因此 $[m,M]\subset f([a,b])$。这说明 $f([a,b])=[m,M]$。

推论 3.4

设 f 为区间 I 中的非常值连续函数，则 $f(I)$ 仍为区间。

证明 任取 $y_1<y_2\in f(I)$，设 $f(x_1)=y_1, f(x_2)=y_2$，在以 x_1,x_2 为端点的闭区间上用介值定理，我们就知道 $[y_1,y_2]\subset f(I)$。由 y_1,y_2 的任意性知 $f(I)$ 为一个区间。

命题 3.13

设 f 为区间 I 中的单调函数，则 f 为非常值连续函数当且仅当 $f(I)$ 也是区间。

证明 如果 f 是连续函数，由前一推轮可知 $f(I)$ 是区间。反之，若 $f(I)$ 为区间，则由前一界讨论可知 f 没有间断点，从而连续。

推论 3.5

设 f 为区间 I 中的连续函数，则 f 可逆当且仅当它是严格单调函数，此时反函数也连续。

例题 3.25 设 $f:[a,b]\to[a,b]$ 为连续函数，则存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=\xi$。

证明 考虑 $[a,b]$ 中的函数 $F(x)=f(x)-x$。F 仍为连续函数，且

$$F(a)F(b)=(f(a)-a)(f(b)-b)\le 0$$

由零值定理，存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\xi$。

例题 3.26 证明奇数次的实系数多项式必有实根。

证明 设 $P(x)=a_0x^{2n-1}+a_1x^{2n-2}+\cdots+a_{2n-2}x+a_{2n-1}$ 是次数为 $2n-1(n\ge 1)$ 的多项式，系数 a_i 都是实数，且

$a_0 \neq 0$。不妨设 $a_0 > 0$，则

$$\lim_{x\to\infty} x^{1-2n}P(x) = \lim_{x\to\infty}(a_0 + a_1x^{-1} + \cdots + a_{2n-1}x^{1-2n} = a_0 > 0$$

从而存在 $x < 0, y > 0$，使得 $x^{1-2n}P(x) > 0, y^{1-2n}P(y) > 0$。此时 $P(x) < 0, P(y) > 0$。因为多项式是连续函数，由零值定理，存在 $\xi \in (x, y)$，使得 $P(\xi) = 0$。

3.4.2 一致连续性

闭区间上的连续函数的另一条重要性质就是所谓的一致连续性。

定义 3.4 (一致连续)

设 f 是区间 I 中的函数。如果任给 $\varepsilon > 0$，均存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$，使得当 $x, y \in I$ 且 $|x - y| < \delta$ 时，$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$，则称 f 在 I 中一致连续。

注

1. 显然，一致连续函数一定是连续函数，一致连续性和连续性的区别就是，用 $\varepsilon - \delta$ 语言定义 x_0 处的连续性时，定义中出现的 δ 一般会依赖于 x_0 以及 ε，而一致连续性定义中出现的 δ 是不依赖于某个点的，即对所有的点都能取到一个公共的 δ，一致性就体现在这儿。
2. 可以用振幅来刻画一致连续性：f 在 I 中一致连续当且仅当任给 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当区间 $J \subset I$ 且 J 的长度小于 δ 时，$\omega(f, J) < \varepsilon$
3. f 在 I 中不一致连续当且仅当存在 $\varepsilon_0 > 0$，以及 I 中数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$，使得

$$|a_n - b_n| < \frac{1}{n}, |f(a_n) - f(b_n)| \geq \varepsilon_0, \forall n \geq 1$$

定理 3.10 (一致连续的等价刻画)

设 I 是一个区间，则 $f: I \to \mathbb{R}$ 是一致连续的的充分必要条件是对任何 $\{x_n\}, \{y_n\} \subset I$ 且 $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$。都有

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n) - f(y_n)] = 0$$

例题 3.27 研究函数 $f(x) = \sin\frac{1}{x}, x \in (0, +\infty)$ 的一致连续性。

解 取 $a_n = \frac{1}{2n\pi}, b_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$，则

$$a_n - b_n = \frac{1}{2n\pi} - \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2n(4n+1)\pi} \to 0 (n \to \infty)$$

且当 $n \geq 0$ 时，$|f(a_n) - f(b_n)| = 1$。这说明 f 在 $(0, +\infty)$ 中不一致连续。

例题 3.28 研究三角函数 $\sin x, \cos x$ 的一致连续性。

解 任给 $x, y \in \mathbb{R}$，有

$$|\sin x - \sin y| = \left|2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\right| \leq 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right| \leq |x - y|$$

任给 $\varepsilon > 0$，取 $\delta = \varepsilon$。当 $x, y \in \mathbb{R}$，且 $|x - y| < \delta$ 时

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y| < \delta = \varepsilon$$

这说明 $\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 中一致连续。同理，$\cos x$ 也一致连续。

$\sin x, \cos x$ 是所谓 Lipschitz 函数的特殊情形。

设 f 是 I 中的函数。如果存在 $o < \alpha < 1$，以及常数 M，使得

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^{\alpha}, \forall x, y \in I$$

则称 f 是 I 中的 α 阶 Hölder 函数，记为 $f \in C^{\alpha}(I)$；如果存在常数 L，使得

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \forall x, y \in I$$

则称 f 为 I 中的 Lipschitz 函数，记为 $f \in Lip(I)$

Hölder 函数和 Lipschitz 函数都是一致连续的，在微分方程的研究中很有用。

命题 3.14

设 f, g 为区间 I 中的一致连续函数，$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$。则

1. $\lambda f + \mu g$ 在 I 中也是一致连续的
2. 如果 f, g 为有界函数，则 fg 也是一致连续的
3. 如果 f 有界，且 g 有正下界，则 $\frac{f}{g}$ 也是一致连续的
4. 一致连续函数的复合函数仍为一致连续函数

定理 3.11 (Cantor)

闭区间中的连续函数是一致连续函数的

证明

我们用两种方法证明。设 $f \in C^0[a,b]$

证法一(反证法)

若 f 不一致连续，则存在 $\varepsilon_0 > 0$，以及 $[a,b]$ 中的数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0, |f(a_n) - f(b_n)| \geq \varepsilon_0, \forall n \geq 1$$

根据 Bolzano 定理，$\{b_n\}$ 有收敛子列 $\{b_{n_i}$，设其极限为 ξ，则 $\xi \in [a,b]$。此时

$$a_{n_i} = (a_{n_i} - b_{n_i}) + b_{n_i} \to 0 + \xi = \xi (i \to \infty)$$

因为 f 在 ξ 处连续，故

$$\varepsilon_0 \leq \left|f(a_{n_i} - f(b_{n_i})\right| \to |f(\xi) - f(\xi)| = 0 (i \to \infty)$$

这就导出了矛盾。

证法二

任给 $\varepsilon > 0$，因为 f 连续，故任给 $x \in [a,b]$，存在 $\delta(x) > 0$，使得

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon, \forall y \in (x - \delta(x), x + \delta(x)) \cup [a,b]$$

显然，$[a,b]$ 包含于开集族 $\{(x - \frac{\delta(x)}{2}, x + \frac{\delta(x)}{2})\}_{x\in[a,b]}$ 之并。根据有限覆盖定理，存在 $x_1, x_2, \cdots, x_k$，使得

$$[a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{k}(x - \frac{\delta(x_i)}{2}, x_i + \frac{\delta(x_i)}{2})$$

记 $\delta = \min\{\frac{\delta(x_i)}{2} \mid i = 1, 2, \cdots, k\}$。当 $x, y \in [a,b]$ 且 $|x - y| < \delta$ 时，不妨设 $x \in (x_i - \frac{\delta(x_i)}{2}, x_i + \frac{\delta(x_i)}{2}$，则

$$|y - x_i| \leq |y - x| + |x - x_i| < \delta + \frac{\delta(x_i)}{2} \leq \delta(x_i)$$

即 $y \in (x_i - \delta(x_i), x_i + \delta(x_i))$。此时有

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

这说明 f 在 $[a,b]$ 中一致连续。

命题 3.15

有界开区间 (a,b) 上的连续函数 f 在 (a,b) 上一致连续的充分必要条件是存在两个有限的单侧极限 $f(a^+)$ 和 $f(b^-)$。

命题 3.16

设 $f \in C[a, +\infty)$，且存在有限极限 $f(+\infty) = A$，则 f 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续。

命题 3.17

若 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 一致连续，$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 连续，$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$，则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续。

练习 3.16 设 f 在 $(a,c]$ 和 $[c,b)$ 中一致连续，证明 f 在 (a,b) 中也一致连续。

练习 3.17 研究下列函数的一致连续性：

$$(1)\sqrt{x}, x\geq 0 \quad (2)x\cos\frac{1}{x}, x>0 \quad (3)\cos\left(x^2\right), x\in\mathbb{R}$$

练习 3.18 设 f 为 $[a,+\infty)$ 中的连续函数，$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\alpha\in\mathbb{R}$。证明 f 在 $[a,+\infty)$ 中一致连续。

练习 3.19 设 f 为 (a,b) 中的连续函数。证明：f 在 (a,b) 中一致连续当且仅当 f 在 a 处的右极限以及在 b 处的左极限均存在且有限。

练习 3.20 设 $f\in C^0[a,b]$，当 $x\in[a,b]$ 时，定义

$$M(x)=\max\{f(t)\mid a\leq t\leq x\}, m(x)=\min\{f(t)\mid a\leq t\leq x\}$$

证明 $M(x)$ 和 $m(x)$ 也是 $[a,b]$ 中的连续函数。

练习 3.21 设 $f\in C^0(\mathbb{R})$，且 $\lim_{x\to\infty}f(f(x))=\infty$，证明 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$

练习 3.22 是否存在 $f\in C^0(\mathbb{R})$，使得 $f(f(x))=e^{-x}$?（考虑 f 的单调性）

练习 3.23 证明：$\mathbb{R}$ 中的连续周期函数必定一致连续；利用此结论说明 $\sin(x^2)$ 不是周期函数。

练习 3.24 设 $a>0, f\in Lip[a,+\infty)$。证明 $\frac{f(x)}{x}$ 为 $[a,+\infty)$ 中的一致连续函数。

练习 3.25 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续且有界，$c>0$。证明存在数列 $\{x_n\}$ 趋向 $+\infty$，使得

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n+c)-f(x_n)]=0$$

练习 3.26 设 n 是一个自然数，$f(x)$ 在 $[0,n]$ 上连续且 $f(0)=f(n)$。证明至少有 n 对不同的 (x,y)，使得 $x-y$ 为正整数且 $f(x)=f(y)$。

练习 3.27

1. 证明: 函数 $f(x)=\frac{|\sin x|}{x}$ 在区间 $(-1,0)$ 和 $(0,1)$ 均为一致连续，但在 $(-1,0)\cup(0,1)$ 上不一致连续。
2. 若函数 f 在区间 (a,b) 和 $[b,c)$ 上分别为一致连续，问:f 在 (a,c) 上是否一致连续?

3.4 练习

1. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续，且对任何 $x\in[0,1]$，有 $\lim_{n\to\infty}f(x+n)=0(n\in\mathbb{N}^*$ 。证明 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=$。举例说明，仅由 f 在 $[0,+\infty)$ 上的连续性推不出上述结论。
2. 如果 f 在 (a,b) 上一致连续，证明：f 在 (a,b) 上有界。
3. 若函数 f 和 g 都在区间 I 上一致连续，问 fg 是否在 I 上一致连续？试就 I 为有限区间或无穷区间分别讨论之。
4. 设对任意的 $x,y\in(-\infty.+\infty)$，函数 f 满足 $|f(x)-f(y)|\leq k\,|x-y|\,(0<k<1)$ 求证：
   (a). 函数 $kx-f(x)$ 递增
   (b). 存在唯一的 $\xi\in(-\infty,+\infty)$，使得 $f(\xi)=\xi$
5. 设 $f,g\in C[a,b]$。如果存在 $x_n\in[a,b]$，使得 $g(x_n)=f(x_{n+1})(n=1,2,\cdots)$，则必存在 $x_0\in[a,b]$，使得 $f(x_0)=g(x_0)$
6. 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上连续且有界。求证：对每一个数 $\lambda>0$，存在数列 $x_n\to+\infty$，使得
   $$\lim_{n\to\infty}(f(x_n+\lambda)-f(x_n))=0$$
7. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续周期函数，证明存在 $\xi\in(-\infty,+\infty)$，使得 $f(\xi+1)=f(\xi)$
8. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续且
   $$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A<+\infty$$
   证明

(a). $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界。

(b). $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上至少存在最大值、最小值中的一个。

第四章 一元函数微分学

4.1 导数和微分

为了研究函数在某一点附近的局部变化性质，我们引入导数和微分的概念。将微分和积分这一对概念统一在一起的是重要的 Newton-Leibniz 公式。

4.1.1 导数和高阶导数

在前一章中我们研究了连续函数。函数 f 在 x_0 处连续大体上是指 f 在 x_0 附近变化不大。如果要将这种变化刻画得更精细一点，还可以考虑所谓的变化率，即研究 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 如何随 x 而变化。

定义 4.1 (导数)

设函数 f 在 x_0 附近有定义，如果极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在且有限，则称 f 在 x_0 处可导，此极限称为 f 在 x_0 处的导数，记为 $f'(x_0)$。

注

1. 如果记 $y=f(x),\Delta x=x-x_0,\Delta y=f(x)-f(x_0)$，则导数也可表示为
$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
用 f' 表示导数的是 Lagrange，Newton 常用 $\dot{y}$ 表示导数，Leibniz 则用 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ 表示导数。
2. 可以用 $\varepsilon-\delta$ 语言来描述导数：如果存在 $\alpha\in\mathbb{R}$，使得任给 $\varepsilon>0$，均存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，
$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\alpha\right|<\varepsilon$$
则 f 在 x_0 处可导，导数为 α。
如果考虑左、右极限，则有左导数和右导数的概念。左、右导数分别记为 $f'_-(x_0),f'_+(x_0)$。f 在 x_0 处可导当且仅当其左、右导数相等。

命题 4.1

设 f 在 x_0 处可导，则 f 在 x_0 处连续。

证明 设 f 在 x_0 处可导，则 $\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|$ 在 x_0 附近有界，即存在常数 C，使得
$$|f(x)-f(x_0)|\le C\,|x-x_0|\,,or\quad f(x)-f(x_0)=O(x-x_0)(x\to x_0)$$
特别地，f 在 x_0 处连续。

命题 4.2 (导数的四则运算)

设 f,g 在 x_0 处可导，$\lambda,\mu\in\mathbb{R}$，则 fg 和 $\lambda f+\mu g$ 也在 x_0 处可导，且

1. $(\lambda f+\mu g)'(x_0)=\lambda f'(x_0)+\mu g'(x_0)$
2. $(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$
3. 当 $g(x_0)\ne 0$ 时，$\frac{f}{g}$ 也在 x_0 处可导，且
$$(\frac{f}{g})'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

证明

1. 可从导数的定义和函数极限的性质直接得处
2. 设 f,g 在 x_0 处可导。利用
$$f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)=[f(x)-f(x_0)]g(x)+f(x_0)[g(x)-g(x_0)]$$
可得
$$\begin{aligned}(fg)'(x_0)&=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}\\&=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)+\lim_{x\to x_0}f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\\&=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)\end{aligned}$$
3. 由 g 在 x_0 处可导可知 g 在 x_0 处连续，再由 $g(x_0)\neq 0$ 可知 g 在 x_0 附近不为零。我们先说明 $\frac{1}{g}$ 在 x_0 处可导：
$$\lim_{x\to x_0}\frac{1/g(x)-1/g(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{-1}{g(x)g(x_0)}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=-\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0}$$
再对 $\frac{f}{g}=f\cdot(\frac{1}{g})$ 用 (2) 即得欲证等式。

例题 4.1 三角函数的导数

解 设 $x_0\in\mathbb{R}$，利用 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 可得
$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}=\cos x_0$$
即 $(\sin x)'=\cos x$。同理可得 $(\cos x)'=-\sin x$。利用导数的四则运算可得
$$(\tan x)'=\sec^2 x$$
$$(\cot x)'=-\csc^x 2$$
$$(\sec x)'=\sec x\tan x$$
$$(\csc x)'=-\csc x\cot x$$

例题 4.2 幂函数的导数

解 设 $x_0\neq 0$ 且属于幂函数 x^a 的定义域，有
$$\lim_{x\to x_0}\frac{x^a-x_0^a}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(\frac{x}{x_0})^a-1}{\frac{x}{x_0}-1}x_0^{a-1}=ax_0^{a-1}$$

例题 4.3 指数函数和对数函数的导数

解 设 $a>0,a\neq 1$。当 $x_0\in\mathbb{R}$ 时，有
$$\lim_{x\to x_0}\frac{a^x-a^{x_0}}{x-x_0}=a^{x_0}\lim_{x\to x_0}\frac{a^{x-x_0}-1}{x-x_0}=a_{x_0}\ln a$$
特别地，$(e^x)'=e^x$。定义
$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$
$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$，于是 $(\cosh t,\sinh t)$ 可以视为双曲线 $x^2-y^2=1$ 的一种参数化。$\sinh x,\cosh x$ 分别称为双曲正弦函数和双曲余弦函数。和三角函数类似，我们还有双曲正切函数 $\tanh x$ 和双曲余切函数 $\coth x$:
$$\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x},\coth x=\frac{\cosh x}{\sinh x}$$
这些都称为双曲三角函数。简单的计算表明，双曲三角函数满足如下等式:
$$\sinh(x+y)=\sinh x\cdot\cosh x+\cosh x\cdot\sinh x$$
$$\sinh(x-y)=\sinh x\cdot\cosh y-\cosh x\cdot\sinh y$$
$$\cosh(x+y)=\cosh x\cdot\cosh y+\sinh x\cdot\sinh y$$
$$\cosh(x-y)=\cosh x\cdot\cosh y-\sinh x\cdot\sinh y$$

利用导数的四则运算可得

$$(\sinh x)' = \cosh x, (\cosh x)' = \sinh x$$

$$(\tanh x)' = 1 - (\tanh x)^2, (\coth x)' = 1 - (\coth x)^2$$

我们考虑对数函数的导数。设 $x_0 > 0$，可得

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\ln(x/x_0)}{x/x_0 - 1}\frac{1}{x_0} = \frac{1}{x_0}$$

当 $q > 1, q \neq 1$ 时，利用 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ 可得 $(\log_q x)' = \frac{(\ln x)'}{\ln q} = \frac{1}{x\ln q}$

当 f 在区间 I 处处可导时，f' 称为 f 的导函数，它在 $x \in I$ 处的值等于 f 在 x 处的导数。在不引起混淆的情况下，导函数也简称导数。

高阶导数 设函数 f 在 x_0 附近处处可导，如果导函数 f' 在 x_0 处仍可导，则称 f 在 x_0 处二阶可导。记 $f''(x_0) = (f')'(x_0)$，称为 f 在 x_0 处的二阶导数。一般地，如果 f 在 x_0 附近 $n(n \geq 1)$ 阶可导，且 n 阶导函数 $f^{(n)}(x)$ 在 x_0 处可导，则称 f 在 x_0 处 $n+1$ 阶可导，记 $f^{(n+1)}(x_0) = (f^{(n)})'(x_0)$，称为 f 在 x_0 处的 $n+1$ 阶导数。

按照我们的记号，$f^{(1)} = f', f^{(2)} = f'', f^{(3)} = f'''$，等等。我们约定 $f^{(0)} = f$。有时也用如下记号表示高阶导数:

$$f'' = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}, f^{(3)} = f''' = \frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}$$

如果 f 在区间 I 的每一点处均 n 阶可导，则称 f 在 I 中 n 阶可导；如果 f 可导，且导函数 f' 连续，则称 f 为连续可导函数，记为 $f \in C^1(I)$; 一般地，如果 f 在 I 中 n 阶可导，且导函数 $f^{(n)}(x)$ 连续，则称 f 为 n 阶连续可导函数，记为 $f \in C^n(I)$。如果 f 在 I 中存在任意阶导数，则称 f 为光滑函数，记为 $f \in C^\infty(I)$

三角函数、指数函数、对数函数、多项式函数在各自的定义域中都是光滑函数。

4.1.2 微分和全微分

导数是函数的变化率。我们也可以从几何的角度解释导数。考虑函数 f 在 x_0 附近的图像，经过图像上两点 $(x_0, f(x_0))$ 和 $(x, f(x))$ 的直线（称为割线）的方程为

$$y(t) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(t - x_0) + f(x_0), t \in \mathbb{R}$$

当 $x \to x_0$ 时，考察割线如何变化。当 f 在 x_0 处可导时，割线的极限位置是一条经过 $(x_0, f(x_0)$ 且斜率为 $f'(x_0)$ 的直线，称为 f 在 x_0 处的切线，其方程为

$$y(t) = f'(x_0)(t - x_0) + f(x_0), t \in \mathbb{R}$$

方程 $(x - x_0) + f'(x_0)(y - f(x_0)) = 0$ 所代表的直线则称为 f 在 x_0 处的法线。

切线可以视为 f 的图像在 x_0 处的线性逼近。即，函数 f 在 x_0 附近可以近似地看成线性函数，这种线性逼近或线性化的方法是我们研究函数的一种基本手法。比如，在力学中，考察某个质点的运动时，其运动轨迹可能非常复杂，但在一个非常短的时间之内往往可以认为该质点在做匀速直线运动。引入下面的概念使得我们可以严格地描述这种现象。

定义 4.2 (微分)

设函数 f 在 x_0 附近有定义。如果存在 $\alpha \in \mathbb{R}$，使得

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x - x_0) + o(x - x_0)(x \to x_0)$$

则称 f 在 x_0 处可微，线性映射

$$\mathrm{d}f(x_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \alpha t$$

称为 f 在 x_0 处的微分。

♣

注 函数在某一代处的导数是一个实数，而微分则是一个线性映射。二者之间的关系体现在下面的命题中。

命题 4.3

设 f 在 x_0 附近有定义，则 f 在 x_0 处可导当且仅当 f 在 x_0 处可微，且微分的斜率就是导数 $f'(x_0)$

证明 设 f 在 x_0 处可导，记

$$R_f(x,x_0) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)$$

则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_f(x,x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) = 0$$

即 $R_f(x,x_0) = o(x-x_0)(x\to x_0)$，从而 f 在 x_0 处可微。

反之，设 f 在 x_0 处可微，$f(x) = f(x_0) + \alpha(x-x_0) + o(x-x_0)$，则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \alpha + \lim_{x\to x_0}\frac{o(x-x_0)}{x-x_0} = \alpha$$

这说明 f 在 x_0 处可导，且导数 $f'(x_0) = \alpha$

命题 4.4 (链式法则)

设 g 在 x_0 处可导，f 在 $g(x_0)$ 处可导，则复合函数 $f\circ g = f(g)$ 在 x_0 处可导，且

$$[f(g)]'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$$

证明 记 $y_0 = g(x_0)$，有 $R_f(y,y_0) = o(y-y_0)$，又有 $g(x) - y_0 = O(x-x_0)(x\to x_0)$，所以有

$$R_f(y,y_0) = o(x-x_0)(x\to x_0)$$

这说明

$$\begin{aligned}
f(g(x)) &= f(y_0) + f'(y_0)(g(x)-y_0) + R_f(y,y_0)\\
&= f(y_0) + f'(y_0)[g'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)] + o(x-x_0)\\
&= f(y_0) + f'(y_0)g'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)
\end{aligned}$$

因此 $f(g)$ 在 x_0 处可微（可导），其导数为 $f'(y_0)g'(x_0)$

注 链式法则对于任意有限个函数的复合也适用，比如

$$[f(g(h))]' = f'(g(h))g'(h)h'$$

例题 4.4 设 k 为正整数，定义

$$f(x) = \begin{cases} x^{2k+1}\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x = 0\end{cases}$$

研究 f 的高阶导函数。

解 可以算出 $f'(0) = 0$，且

$$f'(x) = \begin{cases} (2k+1)x^{2k}\sin\dfrac{1}{x} - x^{2k-1}\cos\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x = 0\end{cases}$$

同理，可以算出

$$f''(x) = \begin{cases} 2k(2k+1)x^{2k-1}\sin\dfrac{1}{x} - 4kx^{2k-2}\cos\dfrac{1}{x} - x^{2k-3}\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x = 0\end{cases}$$

继续求导可得 $f^{(k)}(0) = 0$，且当 $x\neq 0$ 时

$$f^{(k)}(x) = x^2\phi(x) \mp x\sin\frac{1}{x} \quad 或 \quad x^2\phi(x) \mp x\cos\frac{1}{x}$$

其中 $\phi(x)$ 在 $x=0$ 附近有界。于是 $f^{(k)}(x)$ 连续但在 $x=0$ 处不可导。特别地，f 是 C^k 函数，但不是 C^{k+1} 函数。

例题 4.5 定义

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ e^{-\frac{1}{x}} & x>0\end{cases}$$

研究 f 的高阶导函数。

解 如同前面的例子那样，可以计算出 $f'(0)=0$，且

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ x^{-2}e^{-\frac{1}{x}} & x>0\end{cases}$$

我们用归纳法说明

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ p_k(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}} & x>0\end{cases}$$

其中 $p_k(t)$ 是次数为 $2k$ 的多项式。$k=1$ 时，$p_1(t)=t^2$。假设 $f^{(k)}$ 如上，则显然 $f_-^{(k+1)}(0)=0$，而

$$f_+^{(k+1)}(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{p_k(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{tp_k(t)}{e^t}=0$$

因此 $f^{(k+1)}(0)=0$。当 $x>0$ 时，

$$f^{(k+1)}(x)=p_k'(\frac{1}{x})\frac{-1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}+p_k(\frac{1}{x})\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=p_{k+1}(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}$$

其中 $p_{k+1}(t)=t^2p_k(t)-t^2p_k'(t)$。这就说明 f 时任意阶可导的光滑函数。

命题 4.5 (反函数求导法则)

设 f 在 x_0 附近连续且有反函数 g。如果 f 在 x_0 处可导且导数 $f'(x_0)\neq0$，则 g 在 $y_0=f(x_0)$ 处可导，且 $g'(y_0)=[f'(x_0)]^{-1}$。

证明

$$\lim_{y\to y_0}\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}=\lim_{y\to y_0}[\frac{f(g(y))-f(g(y_0))}{g(y)-g(y_0)}]^{-1}=[f'(x_0)]^{-1}$$

注 导数 $f'(x_0)\neq0$ 的条件不能去掉。例如 $f(x)=x^3$ 是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的可逆函数，f 处处可导，但其反函数 $g(y)=y^{\frac{1}{3}}$ 在 $y=0$ 处不可导。

例题 4.6 反三角函数的导数

证明 正弦函数 $\sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 中可逆，其反函数记为 $\arcsin x$。由反函数求导公式得

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\cos\arcsin x}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\arcsin x}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

余弦函数 $\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 中可逆，其反函数记为 $\arccos x$。由反函数求导公式得

$$(\arccos x)'=\frac{1}{-\sin\arccos x}=\frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2\arccos x}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

正切函数 $\tan x$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 中可逆，其反函数记为 $\arctan x$，则有

$$(\arctan x)'=\frac{1}{\sec^2\arctan x}=\frac{1}{1+\tan^2\arctan x}=\frac{1}{1+x^2}$$

余切函数 $\operatorname{arccot} x$ 在 $(0,\pi)$ 中可逆，其反函数记为 $\operatorname{arccot} x$。同理可得

$$(\operatorname{arccot} x)'=\frac{1}{-\csc^2\operatorname{arccot} x}=-\frac{1}{1+\cot^2\operatorname{arccot} x}=-\frac{1}{1+x^2}$$

例题 4.7 求函数 $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ 的导数。

例题 4.8 设 $u(x)>0,u(x),v(x)$ 都是可导函数，求 $f(x)=u(x)^{v(x)}$ 的导数。

解 我们对 $f(x)=u(x)^{v(x)}$ 求对数再求导：

$$(\ln f(x))'=(v(x)\ln u(x))'=v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{1}{u(x)}u'(x)$$

利用复合求导得到

$$f'(x) = f(x)(\ln f(x))' = u(x)^{v(x)}(v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}$$

上面例子中求对数再求导的方法称为对数法，这是很常用的求导数技巧。

我们知道，f 在 x 处的微分是一个斜率为 $f'(x)$ 的线性映射，当 x 变化时，这些线性映射也随之变化，因此 $x \mapsto \mathrm{d}f(x)$ 是一个新的映射，记为 $\mathrm{d}f$，称为 f 的全微分或外微分。在这个意义下，函数 $f(x) = x$ 的全微分 $\mathrm{d}x$ 是这样一个映射，它把任意点 x 均映为 x 处的恒同线性映射。全微分之间可以自然地定义加法和数乘运算，比如 $\mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x$。一般地，我们把形如 $g(x)\mathrm{d}x$(g 为函数) 的表达式称为一次微分形式。根据导数的运算法则，我们有

命题 4.6

设 f,g 可导，$\lambda,\mu \in \mathbb{R}$，则

1. $\mathrm{d}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathrm{d}f + \mu \mathrm{d}g$
2. $\mathrm{d}(fg) = g\mathrm{d}f + f\mathrm{d}g$
3. $\mathrm{d}(\frac{f}{g}) = \frac{g\mathrm{d}f - f\mathrm{d}g}{g^2}$，其中 $g \neq 0$

对于可导函数来说，复合函数的链式法则则可以重新表述为全微分的形式不变性，即

命题 4.7

设 f,g 均可导，且复合函数 $f(g)$ 有定义，则 $\mathrm{d}[f(g)] = f'(g)\mathrm{d}g$

证明 根据复合求导和外微分的定义，有

$$\mathrm{d}[f(g)] = [f(g)]'\mathrm{d}x = f'(g)g'\mathrm{d}x = f'(g)\mathrm{d}g$$

有时候，函数不是通过显式表达式给出，而是隐式地给出，称为隐函数. 这时利用全微分算导数显得比较容易一些。

例题 4.9 设 $-y^2 + 2e^y = x^2$ 决定了隐函数 $y = f(x)$，求 f 的导数。

解 在等式两边微分可得

$$-2y\mathrm{d}y + 2e^y\mathrm{d}y = 2x\mathrm{d}x$$

因此

$$\mathrm{d}y = \frac{x}{e^y - y}\mathrm{d}x$$

这说明 f 的导数为 $\frac{x}{e^y - y}$

练习 4.1 设 f,g 为 n 阶可导函数，证明 Leibniz 公式 $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}$

练习 4.2 通过对 $(1+x)^n$ 求导并利用二项式定理证明：

$$(1)\sum_{k-0}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}; (2)\sum_{k=0}^{n} k^2C_n^k = n(n+1)2^{n-2}$$

练习 4.3 通过对 $(1-x)^n$ 求导并利用二项式定理证明等式：

$$f(x) = \begin{cases} 0 & m = 0, 1, \cdots, n-1 \\ (-1)^n n! & m = n \end{cases}$$

练习 4.4 设 $a_{ij}(x)$ 均为可导函数，求行列式函数 $det(a_{ij}(x))_{n\times n}$ 的导数。

练习 4.5 证明 Riemann 函数 R(x) 处处不可导。

练习 4.6 设 $f(0) = 0, f'(0)$ 存在且有限，令

$$x_n = f(\frac{1}{n^2}) + f(\frac{2}{n^2}) + \cdots + f(\frac{n}{n^2})(n \in \mathbb{N}^*)$$

试求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$，并利用以上结果，计算：

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n^2}\quad (2)\ \lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}(1+\frac{i}{n^2})$$

练习 4.7 求证：在 $\mathbb{R}$ 不存在可导函数 f，满足

$$f\circ f(x)=-x^3+x^2+1$$

练习 4.8 求证：在 $\mathbb{R}$ 不存在可导函数 f，满足

$$f\circ f(x)=x^2-3x+3$$

4.2 函数的极值

定义 4.3 (极值点)

设 f 是定义在区间 I 中的函数，$x_0\in I$。如果存在 $\delta>0$，使得

$$f(x)\geq f(x_0)(f(x)\leq f(x_0)),\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap I$$

则称 x_0 为 f 在 I 中的一个极小（大）值点，$f(x_0)$ 称为极小（大）值。

. 如果，$x_0\in I$，且

$$f(x)\geq f(x_0)(f(x)\leq f(x_0)),\forall x\in I$$

则称 x_0 为 f 在 I 中的一个最小（大）值点，$f(x_0)$ 称为最小（大）值。

我们把极小值点和极大值点统称为极值点，极小值和极大值统称为极值，最大值和最小值统称最值。当定义中的不等号在 x_0 的空心领域中严格成立时，相应的极值点称为严格极值点，相应的极值称为严格极值。当 $x_0\in I$ 且 x_0 不是 I 的端点时，称 x_0 为 I 的内点。

定理 4.1 (Fermat)

设 x_0 是函数 f 在 I 中的极值点。如果 f 在 x_0 处可导，且 x_0 为 I 的内点，则 $f'(x_0)=0$

注

- 如果 x_0 为 f 在 I 中的极值点，但不是 I 的内点，则有结论：设 x_0 是 I 的左端点，如果 x_0 为 f 的极小（大）值点，则 $f'_+(x_0)\geq 0(\leq 0)$; 设 x_0 是 I 的右端点，如果 x_0 为 f 的极小（大）值点，则 $f'_-(x_0)\leq 0(\geq 0)$
- 函数可能在不可导点处取极值，例如 $f(x)=|x|,x\in[-1,1]$ 在 $x_0=0$ 处取到最小值，但 f 在 $x_0=0$ 处不可导，不过其左导数小于零，右导数大于零。
- 我们把满足 $f'(x_0)=0$ 的点称为 f 的驻点或临界点。需要注意的是，驻点不必为极值点，例如 $f(x)=x^3,x_0=0$ 为 f 的驻点，但不是极值点。

命题 4.8

设 $\delta > 0$，f 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 中连续，在 $(x_0-\delta, x_0) \cup (x_0, x_0+\delta)$ 中可导。如果

$$f'(x) \le 0, x \in (x_0-\delta, x_0), f'(x) \ge 0, x \in (x_0, x_0+\delta)$$

则 x_0 为 f 的极小值点。如果

$$f'(x) \ge 0, x \in (x_0-\delta, x_0), f'(x) \le 0, x \in (x_0, x_0+\delta)$$

则 x_0 为 f 的极大值点。

命题 4.9

设 f 在内点 x_0 处二阶可导，且 $f'(x_0) = 0$。则

- 当 $f''(x_0) > 0$ 时，x_0 为 f 的（严格）极小值点
- 当 $f''(x_0) < 0$ 时，x_0 为 f 的（严格）极大值点

推论 4.1

设 f 在内点 x_0 处二阶可导，x_0 为 f 的极小（大）值点，则 $f''(x_0) \ge 0 (\le 0)$

命题 4.10

设 $f: R \to R$ 为连续函数，且

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(-\infty)$$

则 f 在 R 中达到最小（大）值。

4.3 微分中值定理

定理 4.2 (Darboux 定理)

设 f 在 $[a,b]$ 中可导，则 f' 可以取到介于 $f'_+(a)$ 和 $f'_-(b)$ 之间的任意值。

证明 设 μ 是介于 $f'_+(a)$ 和 $f'_-(b)$ 之间的数。考虑函数 $g(x) = f(x) - \mu x$，则

$$g'_+(a)g'_-(b) = (f'_+(a) - \mu)(f'_-(b) - \mu) \le 0$$

如果上式为零，则 μ 等于 f 在 a 或 b 处的导数；否则，不妨设 $g'_+(a) > 0, g'_-(b) < 0$，根据 Fermat 定理的证明，a 和 b 都不是 g 的最大值。于是 g 在 $[a,b]$ 的内部某一点 ξ 处取到最大值。由 Fermat 定理，$g'(\xi) = 0$，即 $f'(\xi) = \mu$

推论 4.2 (反函数定理)

设 f 在区间 I 中可导，如果 f' 处处非零，则函数 $f: I \to f(I)$ 可逆，且其反函数也可导。

证明 如果 f' 处处非零，则由 Darboux 定理，f' 恒为正或负。则 f 为严格单调函数，则 f 可逆，且其反函数也可导。

定理 4.3 (Rolle)

设 $f \in C^0[a,b]$。如果 f 在 (a,b) 中可导且 $f(a) = f(b)$，则存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi) = 0$

设 f 是 n 阶可导函数，且 $f(x) = 0$ 有 n 个不同的解 $\{x_9\}_{i=1}^n$，则任给 $c \in [a,b]$，存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$f(c) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi) \prod_{i=1}^{n} (c - x_i)$$

proof

不妨设 $c \neq x_i(1 \leq i \leq n)$，令

$$g(x) = f(x) - \frac{f(c)}{\prod_{i=1}^{n}(c - x_i)} \prod_{i=1}^{n}(x - x_i), x \in [a, b]$$

此时 $g(x)$ 有 $n+1$ 个不同的零点 $c, x_i(1 \leq i \leq n)$，对 g 反复使用 Rolle 定理可知，存在 $\xi \in (a, b)$，使得 $g^{(n)}(\xi) = 0$。即证

一般地，如果 f 是 n 阶可导函数，设 $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ 为 $[a, b]$ 中 n 个不同的点，令

$$p_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n}[\prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - xj)}]f(x_i)$$

则 p_{n-1} 是次数不超过 $n-1$ 的多项式，它与函数 f 在 $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ 处取值相同，称为 f 的 Lagrange 插值多项式。对 $f - p_{n-1}$ 应用上述公式，得

$$f(x) - p_{n-1}(x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi) \prod_{i=1}^{n}(x - x_i), \xi \in (a, b)$$

上式称为插值多项式的余项公式，它可用来估计误差。

定理 4.4 (Lagrange)

设 $f \in C^0[a, b]$。如果 f 在 (a, b) 中可导，则存在 $\xi \in (a, b)$，使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

推论 4.3

设 $f \in C^0[a, b]$，如果 f 在 (a, b) 中可导且导数恒为零，则 f 为常值函数

定理 4.5 (Cauchy)

设 $f, g \in C^0[a, b]$ 且在 (a, b) 中可导。如果 g' 在 (a, b) 中处处非零，则存在 $\xi \in (a, b)$，使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

练习 4.9 证明切比雪夫多项式 $e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{=x})$ 有 n 个正的实根。

练习 4.10 设 f 在 $[a, +\infty)$ 中可导，$f(a) = 0$。如果 $|f'| \leq |f|$ 处处成立，证明 $f \equiv 0$

练习 4.11 设 $f(0) = 0, f$ 在 $(0, +\infty)$ 可导且 f' 严格单调递增，证明 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 中也严格递增。

4.4 凸函数

定义 4.4 (凸函数)

设 f 为区间 I 中定义的函数。如果任给 $a \neq b \in I$ 以及 $t \in (0, 1)$，均有

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

则称 f 为 I 中的凸函数，不等号反向时称为凹函数。不等号为严格小于号时称为严格凸函数，不等号为严格大于号时称为严格凹函数。

凸函数的几何形象非常直观，它的图像总是位于满足同样边界条件的线性函数图像的下方。事实上，满足条件 $l(a) = f(a), l(b) = f(b)$ 的线性函数可以表示为

$$l(x) = \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$$

于是可以表示为

$$f(x) \leq l(x), \forall x \in (a,b)$$

命题 4.11

设 f 为区间 I 中定义的函数，我们有

- 如果 f 二阶可导且二阶导数处处非负，则 f 为凸函数
- 反之，如果 f 为凸函数且在 I 的内点 x_0 处二阶可导，则 $f''(x_0) \geq 0$

定理 4.6 (Jensen 不等式)

设 f 是区间 I 中的凸函数。任给 $\{x_i\}_{i=1}^n \subset I$，当 $\lambda_i \geq 0$ 且 $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ 时，均有

$$f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

证明 对 n 用数学归纳法。$n=1$ 是显然的，$n=2$ 由凸函数定义直接得到。假设不等式对 $n=k$ 成立。当 $n=k+1$ 时，不妨设 $0<\lambda_{k+1}<1$，此时

$$\sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}} = 1$$

由归纳假设，有

$$\begin{aligned}
f(\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i) &= f((1-\lambda_{k+1})\sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}} x_i + \lambda_{k+1}x_{k+1}) \\
&\leq (1-\lambda_{k+1}) f(\sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}} x_i) + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}) \\
&\leq (1-\lambda_{k+1}) \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}} f(x_i) + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i f(x_i)
\end{aligned}$$

例题 4.10 考虑指数函数 $f(x)=e^x$，由 $f''(x)=e^x>0$ 可知 f 为严格凸函数。当 $a,b>0, p,q>1$ 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 时，有

$$ab = e^{\frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q} \leq \frac{1}{p}e^{\ln a^p} + \frac{1}{q}e^{\ln b^q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

此即 Young 不等式

例题 4.11 考虑函数 $f(x) = -\ln x (x>0)$。由 $f''(x) = x^{-2} > 0$ 可知 f 为严格凸函数。根据 Jensen 不等式，当 $a_1, a_2, \cdots, a_n > 0$ 时，

$$-\ln \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \leq -\frac{1}{n}(\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n)$$

即

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

此即算术-几何平均值不等式

凸函数中有割线斜率不等式，当 $x\in(a,b)$ 时，有

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

它也可以用来定义凸函数

命题 4.12

设 f 为区间 I 中的凸函数，a,b 为 I 的内点。如果 $a<b$，则 f 在 $[a,b]$ 中为 Lipschitz 函数，f 在 a,b 处存在左右导数，且

$$f'_-(a) \le f'_+(a) \le f'_-(b) \le f'_+(b)$$

注

- 凸函数在区间端点未必连续
- 连续的凸函数在区间端点处未必可导

命题 4.13

设 f 为区间 I 中的凸函数，x_0 为 I 的内点。如果 $f'_-(x_0) \le \mu \le f'_+(x_0)$，则

$$f(x) \ge \mu(x-x_0)+f(x_0), \forall x \in I$$

特别地，我们可以看到凸函数的图像总是位于其切线的上方。反过来，可以利用这一点刻画凸函数。为此，我们引进支撑线的概念。设 f 是定义在区间 I 中的函数，$x_0 \in I$。如果 L 是平面上经过 $(x_0, f(x_0))$ 的直线，且 f 的图像位于 L 的上方，则称 L 是 f 在 x_0 处的支撑线。支撑线未必存在，存在时也未必唯一。

命题 4.14

设 f 是定义在区间 I 中的函数，如果 f 在 I 的每一个内点处均存在支撑线，则 f 是 I 中的凸函数

证明 任取 $a,b \in I$，不妨设 $a<b$，任取 $t \in (0,1)$，记 $x_0 = ta+(1-t)b$，则 x_0 为 I 的内点。根据题设，f 在 x_0 处存在支撑线，其斜率记为 μ，则

$$f(x) \ge \mu(x-x_0)+f(x_0), \forall x \in I$$

有

$$\begin{aligned} tf(a)+(1-t)f(b) &\ge \mu[t(a-x_0)+(1-t)(b-x_0)]+tf(x_0)+(1-t)f(x_0) \\ &= \mu[ta+(1-t)b-x_0]+f(x_0) = f(x_0) \\ &= f(ta+(1-t)b) \end{aligned}$$

这说明 f 为凸函数

满足 $f(\frac{a+b}{2}) \le \frac{f(a)+f(b)}{2}$ 的函数称为中点凸函数，或称具有中点凸性。

命题 4.15

设 $f \in C^0(I)$，如果 f 具有中点凸性，则 f 为凸函数。

命题 4.16

设 f 为区间 I 中的凸函数，如果 f 在 I 的内部达到最大值，则 f 是常值函数。

练习 4.12 设 f 为区间 I 中的凸函数，x_0 为 I 的内点。如果 x_0 为 f 的极值点，则 f 在 x_0 的左边单调递减，在 x_0 的右边单调递增。

练习 4.13 证明：定义在整个 R 上的有界凸函数必为常值函数。

练习 4.14 设 f 为区间 I 中的可导函数。证明：f 为凸函数当且仅当 f' 单调递增。

练习 4.15 利用支撑线重新证明 Jensen 不等式。

练习 4.16 设 f 为区间 I 中的连续凸函数，$\phi:[a,b] \to I$ 为连续函数。证明积分形式的 Jensen 不等式：

$$f(\frac{1}{b-a}\int_a^b \phi(x)\mathrm{d}x) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(\phi(x))\mathrm{d}x$$

练习 4.17 设 f 为区间 I 中的连续凸函数，$\phi:[a,b]\to I$ 为连续函数。证明积分形式的 Jensen 不等式：

$$f(\frac{1}{b-a}\int_a^b \phi(x)\mathrm{d}x)\le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(\phi(x))\mathrm{d}x$$

练习 4.18 设 f 为 $[a,b]$ 中的连续凸函数，证明 Hadmard 不等式：

$$f(\frac{a+b}{2})\le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le \frac{1}{2}[f(a)+f(b)]$$

练习 4.19 设函数 f 在 x_0 处二阶可导，证明：

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=f''(x_0)$$

练习 4.20 设 $f\in C^0(R)$。如果对每一个 $x_0\in R$，均有

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=0$$

证明 f 必为线性函数。

练习 4.21 研究凸函数的渐近线，并回答问题：是否存在 $\mathbb{R}$ 中的凸函数，使得 $f(0)<0$，且

$$\lim_{|x|\to+\infty}(f(x)-|x|)=0$$

4.5 L'Hospital 法则

定理 4.7 (L'Hospital 法则之一)

设 f,g 在 (a,b) 中可导，且 g' 处处非零。如果

1. $\lim\limits_{x\to a^+}=\lim\limits_{x\to a^+}g(x)=0$
2. $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\alpha$，其中 α 为实数或 $\pm\infty$

则 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$

证明 补充定义 $f(a)=g(a)=0$，则 $f,g\in C^0[a,b)$，由 Cauchy 定理，任给 $x\in(a,b)$，存在 $\xi\in(a,x)$，使得

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

当 $x\to a^+$ 时，$\xi\to a^+$，从而

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\alpha$$

注

1. 如果仍有 $f'_+(a)=g'_+(a)=0$，则可利用二次导数继续求极限：
$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f''(x)}{g''(x)}$$
高阶导数的情形类似。注意：等式成立的前提是最后的表达式有极限。如果极限不存在，则未必成立。
2. 区间 (a,b) 换成 $(-\infty,b)$ 或 $(a,+\infty)$ 时，利用变量替换可得完全类似的结论。

定理 4.8 (L'Hospital 法则之二)

设 f,g 在 (a,b) 中可导，且 g' 处处非零。如果

1. $\lim\limits_{x\to a^+}g(x)=\infty$
2. $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\alpha$，其中 α 为实数或 $\pm\infty$

则 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$

练习 4.22 设 f 在 $(a,+\infty)$ 中可导且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=\alpha$，证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\alpha$

练习 4.23 设 $a_1\in(0,\pi), n\ge 1$ 时，$a_{n+1}=\sin a_n$。证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}a_n=\sqrt{3}$

练习 4.24 设 f 在 $(a,+\infty)$ 中可导。证明：

1. 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\ln x)f'(x)=\alpha\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty$
2. 如果 f 为有界函数，且 $xf'(x)$ 为单调函数，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\ln x)f'(x)=0$

4.6 Taylor 展开

定理 4.9 (带 Peano 余项的 Taylor 公式)

设 f 在 x_0 处 n 阶可导，则

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n),(x\to x_0)$$

其中我们约定 $f^{(0)}=f,(x-x_0)^0=1$

证明 令 $g(x)=f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$，则

$$g(x_0)=g'(x_0)=\cdots=g^{(n)}(x_0)=0$$

反复利用 L'Hospital 法则可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{(x-x_0)^n}&=\lim_{x\to x_0}\frac{g'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}=\cdots=\lim_{x\to x_0}\frac{g^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)}\\&=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{n!}\frac{g^{(n-1)}(x)-g^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{n!}g^{(n)}(x_0)=0\end{aligned}$$

推论 4.4

设 f 在 x_0 处 n 阶可导，且

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0,f^{(n)}(x_0)\neq 0$$

当 n 为偶数时，如果 $f^{(n)}(x_0)<0$，则 x_0 为极大值点；如果 $f^{(n)}(x_0)>0$，则 x_0 为极小值点；当 n 为奇数时，x_0 不是极值点。

证明 有

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)=f(x_0)+[\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)+o(1)](x-x_0)^n$$

易得出结论。

定理 4.10 (带积分余项的 Taylor 公式)

设 $f\in C^n$，即 n 阶可导且导函数均连续，则

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\int_{x_0}^{x}f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}t$$

证明 当 $n=1$ 时，由 Newton-Leibniz 定理可得。当 $n=2$ 时，利用分部积分可得

$$\begin{aligned}f(x)&=f(x_0)+\int_{x_0}^{x}f'(t)(t-x)'\mathrm{d}t\\&=f(x_0)+f'(t)(t-x)\mid_{x_0}^{x}-\int_{x_0}^{x}f''(t)(t-x)\mathrm{d}t\\&=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\int_{x_0}^{x}f''(t)(x-t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

当 $n=3$ 时将式中的 $(x-t)$ 写作 $-\frac{(x-t)^2}{2}$ 的导数再做分部积分即得欲证结论。一般地，可类似处理。

定理 4.11 (带 Lagrange 余项和 Cauchy 余项的 Taylor 公式)

设 f 为 n 阶可导函数，则

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n, \text{Lagrange 余项}$$

其中，$\xi=x_0+\theta(x-x_0),\theta\in(0,1)$。同时还有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n)}(\zeta)}{(n-1)!}(x-\zeta)^{n-1}(x-x_0), \text{Cauchy 余项}$$

其中 $\zeta=x_0+\theta'(x-x_0),\zeta'\in(0,1)$

证明 考虑以 t 为变量的函数

$$F(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$$

对 t 求导可得

$$F'(t)=\sum_{k=0}^{n-1}[\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k-\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}]=\frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}$$

我们有

$$F(x)-F(x_0)=f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

由 Lagrange 中值定理，存在 $\zeta=x_0+\theta'(x-x_0)(\theta'\in(0,1))$，使得

$$f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k=F'(\zeta)(x-x_0)=\frac{f^{(n)}(\zeta)}{(n-1)!}(x-\zeta)^{n-1}(x-x_0)$$

取 $G(t)=-(x-t)^n$，对 F,G 应用 Cauchy 中值定理可知，存在 $\xi=x_0+\theta(x-x_0),(\theta\in(0,1))$，使得

$$f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}[G(x)-G(x_0)]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$$

定理 4.12 (Taylor 公式系数的唯一性)

第五章 其他

5.1 极限和渐进分析方法

定义 5.1 (阶的比较)

1. 称 $f=o(g)$，如果 $\lim \frac{f}{g}=0$
2. 称 $f=O(g)$，如果 $|f|\leq C|g|$

注 余项只是简化书写的手段，不提供解决问题的方法，不能积分不能求导。

定理 5.1 (Taylor 公式的 peano 余项)

设 f 在 $x=a$ 是 n 阶右侧可微的，则

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+o((x-a)^n),x\to a^+$$

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)(a)}}{k!}(x-a)^k+O((x-a)^n),x\to a^+$$

常用 Taylor 公式:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\cdots+\frac{x^k}{k!}+\cdots$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+\frac{(-1)^k}{k+1}x^{k+1}+\cdots,x\in(-1,1]$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\cdots+\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}+\cdots$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\cdots+\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}+\cdots$$

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots\alpha-n+1}{n!}x^n=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+\cdots,x\in(-1,1)$$

例题 5.1 设 $a>0$，计算

$$\lim_{n\to\infty} n^2[\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{[a]}]$$

解 由拉格朗日中值定理，存在 $\theta_n\in(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})$，使得

$$a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}=\ln a\cdot a^{\theta_n}\cdot(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=\frac{\ln a\cdot a^{\theta_n}}{n(n+1)}$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} n^2(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a})=\lim_{n\to\infty} n^2\cdot\frac{\ln a\cdot a^{\theta_n}}{n(n+1)}=\ln a$$

注 看到拉中结构可以使用拉中，积累想法，中值定理可能保持阶不变。

命题 5.1 (a_n^n 型估计)

设 $a_n = 1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$，证明

$$a_n^n = e^a + \frac{e^a(b - \frac{a^2}{2})}{n} + o(\frac{1}{n})$$

注 本结果即表明 $\lim\limits_{n\to\infty} n(a_n^n - e^a) = e^a(b - \frac{a^2}{2})$

证明 利用 $a_n - 1 \sim \frac{a}{n}, \ln(1+x) \sim x$，有

$$\lim_{n\to\infty} a_n^n = \lim_{n\to\infty} e^{n\ln a_n} = \lim_{n\to\infty} e^{n\cdot\frac{a}{n}} = e^a$$

进一步，有

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n(a_n^n - e^a) &= \lim_{n\to\infty} n(e^{n\ln\left(1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}o(\frac{1}{n^2})\right)} - e^a) \\
&= \lim_{n\to\infty} e^a n(e^{n\ln\left(1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})\right)} - 1) \\
&= \lim_{n\to\infty} e^a n[n\ln\left(1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})\right) - a] \\
&= \lim_{n\to\infty} e^a[n^2[\frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o(\frac{1}{n^2}) - \frac{1}{2}[\frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})]^2 + o(\frac{1}{n^2})] - an] \\
&= \lim_{n\to\infty} e^a[b + o(1) - \frac{1}{2}a^2] = e^a(b - \frac{1}{2}a^2)
\end{aligned}$$

命题 5.2 (Abel 变换)

设 $\{a_n\}_{n=1}^N, \{b_n\}_{n=1}^N$ 是数列，则有恒等式

$$\sum_{k=1}^N a_k b_k = \sum_{j=1}^{N-1}(a_j - a_{j+1})\sum_{i=1}^j b_i + a_N \sum_{i=1}^N b_i$$

我们知道 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n a_k$ 存在推不出 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$，但有更弱的均值极限存在

命题 5.3

设 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n a_k$ 存在，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n} = 0$$

引理 5.1 (经典级数收敛性)

数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=2}^n k^\alpha \ln^\beta k$ 存在的充分必要条件是 $\alpha < -1$，或者 $\alpha = -1, \beta < -1$

注 数列 $\sum_{k=2}^n k^\alpha \ln^\beta k$ 显然递增，由单调收敛定理知这个极限存在的充分必要条件是 $\sum_{k=2}^n k^\alpha \ln^\beta k$ 有上界，证明的想法是标准的单调时积分与和式等价的思想。

证明 当 $\beta = 0, \alpha \geq 0$，由 $\sum_{k=2}^n k^\alpha \geq \sum_{k=2}^n 1 = n - 1$ 知极限发散。

当 $\beta = 0, -1 \leq \alpha < 0$ 时，我们有

$$\sum_{k=2}^n k^\alpha = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^{-\alpha}} = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^{-\alpha}}\int_k^{k+1} 1\mathrm{d}x = \sum_{k=2}^n \int_k^{k+1}\frac{1}{k^{-\alpha}}\mathrm{d}x \geq \sum_{k=2}^n \int_k^{k+1}\frac{1}{x^{-\alpha}}\mathrm{d}x = \int_2^{n+1} x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{(n+1)^{\alpha+1} - 2^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

于是原极限发散。

当 $\beta = 0, \alpha < -1$，我们有

$$\sum_{k=2}^n k^\alpha = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^{-\alpha}} = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^{-\alpha}}\int_{k-1}^k 1\mathrm{d}x = \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{k^{-\alpha}}\mathrm{d}x \leq \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{x^{-\alpha}}\mathrm{d}x = \int_1^n x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{n^{\alpha+1} - 1}{\alpha+1}$$

于是原极限收敛。

注 即证完了 p 级数的收敛性。

当 $\alpha > -1$，由于对数的阶慢于幂函数的阶，因此存在 $C > 0, N \in \mathbb{N}$ 使得 $\ln^\beta k \geq Ck^{-\frac{\alpha+1}{2}}, \forall k \geq N$。此时 $\frac{\alpha-1}{2} > -1$，因此

$$\sum_{k=N}^{n} k^\alpha \ln^\beta k \geq C\sum_{k=N}^{n}\frac{1}{k^{-\alpha+\frac{\alpha+1}{2}}} = C\sum_{k=N}^{n}\frac{1}{k^{-\frac{\alpha-1}{2}}}$$

于是原极限发散。

当 $\alpha < -1$，由于对数的阶慢于幂函数的阶，因此存在 $C > 0, N \in \mathbb{N}$ 使得 $\ln^\beta k \leq Ck^{-\frac{\alpha+1}{2}}, \forall k \geq N$。此时 $\frac{\alpha-1}{2} < -1$，因此

$$\sum_{k=N}^{n} k^\alpha \ln^\beta k \leq C\sum_{k=N}^{n}\frac{1}{k^{-\alpha+\frac{\alpha+1}{2}}} = C\sum_{k=N}^{n}\frac{1}{k^{-\frac{\alpha-1}{2}}}$$

于是原极限收敛。

当 $\alpha = -1$，有

$$\sum_{k=N}^{n}\frac{\ln^\beta k}{k} \sim \int_N^n \frac{\ln^{beta} x}{x}\mathrm{d}x = \int_{\ln N}^{\ln n} y^\beta \mathrm{d}y$$

显然上式最后积分极限存在等价于 $\beta < -1$

命题 5.4 (一些重要等价式)

我们有

1.
$$\sum_{k=2}^{n} k^\alpha \ln^\beta k = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}n^{\alpha+1}\ln^\beta n + o(n^{\alpha+1}\ln^\beta n), \alpha > -1, \beta \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{\beta+1}\ln^{\beta+1} n + o(\ln^{\beta+1} n), \alpha = -1, \beta > -1 \\ \ln\ln n + o(\ln\ln n), \alpha = -1, \beta = -1 \end{cases}$$

2.
$$\sum_{k=n}^{\infty} k^\alpha \ln^\beta k = \begin{cases} -\frac{1}{\alpha+1}n^{\alpha+1}\ln^\beta n + o(n^{\alpha+1}\ln^\beta n), \alpha < -1, \beta \in \mathbb{R} \\ -\frac{1}{\beta+1}\ln^{\beta+1} n + o(\ln^{\beta+1} n), \alpha = -1, \beta < -1 \end{cases}$$

注 利用 Stolz 和拉中证明。

我们知道 Stolz 定理不能逆用，下面给出一个可以逆用的最简单的条件。

例题 5.2 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n} = A, \lim\limits_{n\to\infty} n(a_n - a_{n-1}) = 0$ 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$

5.1.1 递推数列方法

5.1.1.1 单调性分析法

笔记 单调性分析法只适用于

$$x_{n+1} = f(x_n), n \in \mathbb{N}$$

f 是递增或递减的类型，且大多数情况只适用于 f 递增情况，其余情况不如压缩映像方便快捷。显然递推数列确定的 x_n 如果收敛于 $x \in \mathbb{R}$，则当 f 连续时有 $f(x) = x$，我们称这个点为不动点，因此 $f(x) = x$ 是 x_n 收敛于 $x \in \mathbb{R}$ 的必要条件。

结论 [递增函数递推数列] 设 f 是递增函数，则递推确定的 x_n 一定单调，且和不动点的大小关系不变。

笔记 本结论表明由递推公式 $x_{n+1} = f(x_n)$ 确定的数列的单调性和有界性，由 $x_2 - x_1$ 和 x_1 与不动点的大小关系确定。

类似的我们可以给出

结论 [递减函数递推数列] 设 f 是递减函数，则递推 $x_{n+1} = f(x_n)$ 确定的 x_n 一定不单调，且和不动点的大小关系交错。

注 注意到 $f \circ f$ 是递增函数。