高等代数

Advanced Algebra

作者：Pekt
组织：清疏大学
时间：September 2, 2024
版本：1.1
作者联系方式：QQ2499032096

我们只会算术

前言

参考书

教材

- 高等代数学，谢启鸿、姚慕生、吴泉水

习题集

- 高等代数，谢启鸿、姚慕生

参考资料

南开大学凯淼淼习题课资料等

目录

第一章 行列式

1.1 基本概念

1.1.1 行列式的定义

定义 1.1 (行列式)

n^2 个数依次排成 n 行，n 列，并用两条竖线围起的式子:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.1}$$

称为 n 阶行列式。

♣

定义 1.2 (余子式)

设 $|A|$ 是一个 n 阶行列式，划去 $|A|$ 的第 i 及第 j 列，剩下的 $(n-1)^2$ 个元素按原来的顺序组成一个 $n-1$ 阶行列式，这个行列式称为 $|A|$ 的 (i,j) 元素的余子式，记为 M_{ij}

♣

定义 1.3 (代数余子式)

设 $|A|$ 是如(1.1)所示的 n 阶行列式，M_{ij} 是 $|A|$ 的第 (i,j) 元素的余子式，定义 $|A|$ 的第 (i,j) 元素的代数余子式为

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

♣

定义 1.4 (行列式的递归定义)

设 $|A|$ 是如(1.1)所示的行列式，若 $n=1$，即 $|A|$ 只含一个元素 a_{11}，则定义 $|A|$ 的值等于 a_{11}。假设 $n-1$ 阶行列式的值已经定义好，那么对任意的 i,j，$|A|$ 的第 (i,j) 元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 已定义好，定义 $|A|$ 的值为

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \cdots + (-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1} \tag{1.2}$$

♣

定义 1.5 (行列式的组合定义)

设 $|A|$ 是 n 阶行列式，定义 $|A|$ 的值为

$$\sum_{(k_1,\cdots,k_n)\in S_n} (-1)^{N(k_1,\cdots,k_n)} a_{k_1 1}a_{k_2 2}\cdots a_{k_n n}$$

♣

定理 1.1 (行列式按任意行列展开)

设 $|A|$ 是如(1.1)所示的行列式，则对任意的 $1 \le j \le n$，有

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + \cdots + a_{ij}A_{ij} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \tag{1.3}$$

对任意的 $1 \le i \le n$，有

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{ij}A_{ij} + \cdots + a_{in}A_{in} \tag{1.4}$$

♡

1.1.2 行列式的性质

性质 1 上 (下) 三角行列式的值等于其主对角线上元素之积

性质 2 若行列式的某一行 (或某一列) 全为零，则行列式的值等于零

性质 3 用某个常数 c 乘以行列式的某一行 (或某一列)，所得行列式的值等于原行列式值的 c 倍

性质 4 对换行列式的两行 (或两列)，行列式的值改变符号

性质 5 若行列式的某两行 (或某两列成比例)，则行列式的值等于零

性质 6 若行列式的某一行 (或某一列) 元素 $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$，则该行列式可分解为两个行列式之和，其中一个行列式的相应行 (列) 的元素为 b_{ij}，另一个行列式的相应行 (列) 的元素为 c_{ij}

性质 7 将行列式的某一行 (或某一列) 乘以常数 c 加到另一行 (或另一列) 上去，行列式的值不变

性质 8 行列式转置之后的值不变，即 $|A'| = |A|$

1.1.3 Cramer 法则

Cramer 法则适用于计算含有 n 个未知数，n 个方程式的线性方程组

线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

系数按顺序排列组成一个行列式 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定理 1.2 (Cramer 法则)

将常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 依次置换 $|A|$ 的第 i 列元素，可得行列式 $|A_i|\,(1 \le i \le n)$: 若 $|A|$ 不等于零，则该方程组有且只有一组解:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \cdots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

1.2 行列式计算

命题 1.1 (Vandermonde 行列式)

Vandermonde 行列式的值为

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

命题 1.2 (分块上 (下) 三角行列式)

$$\begin{vmatrix} A & M \\ O & B \end{vmatrix} = |A|\,|B|\,, \begin{vmatrix} A & O \\ N & B \end{vmatrix} = |A|\,|B|$$

定理 1.3 (Laplace 定理)

设 $|A|$ 是 n 阶行列式，在 $|A|$ 中任取 k 行 (列)，那么含于这 k 行 (列) 的全部 k 阶子式与它们所对应的代数余子式的乘积之和等于 $|A|$，即若取定 k 个行:$1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$，则

$$|A| = \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \widehat{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$$

同样，若取定 k 个列:$1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n$，则

$$|A| = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \widehat{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$$

第二章 矩阵

第三章 线性空间

第四章 线性映射

第五章 多项式

第六章 特征值

第七章 相似标准型

第八章 二次型

第九章 内积空间

第十章 双线性型