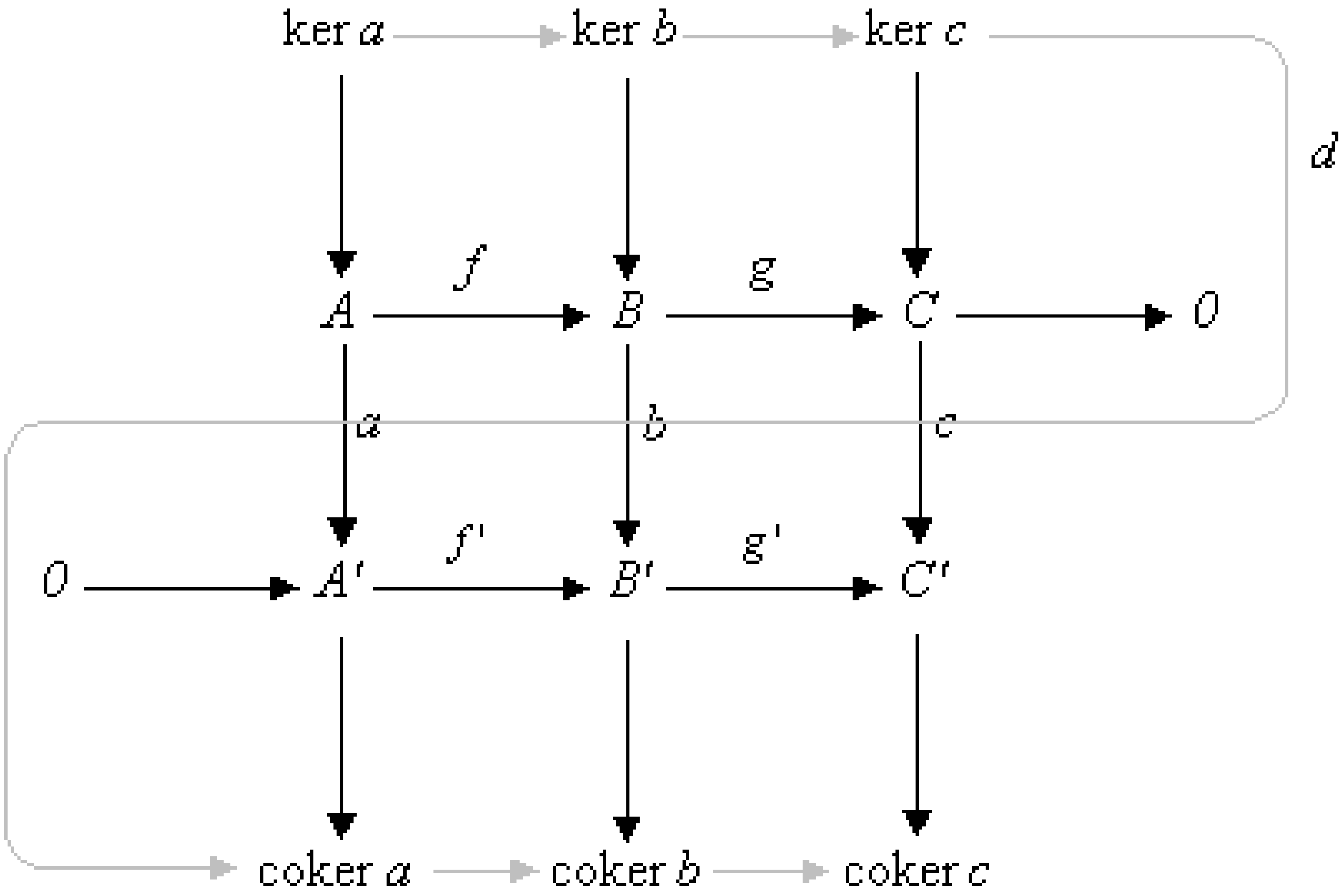

Abstract Algebra

Abstract Algebra

作者：Peknt
组织：清疏大学
时间：March 23, 2024
版本：1.1
作者联系方式：QQ2499032096

晚上不要听歌，不要在群里聊天，有时间就要学习

前言

参考书

- 近世代数引论，冯克勤，李尚志，章璞
- 近世代数 300 题，冯克勤，章璞
- 伽罗瓦理论—天才的激情，章璞
- *Abstract Algebra*,Dummit,Foote

参考资料

- 南开大学徐彬斌抽象代数讲义
- 上海交通大学章璞课程 PPT
- 南开大学凯淼淼抽象代数 note

目录

第 1 章 群论

1.1 群的概念

定义 1.1 (群)

设 G 是带有二元运算 $\cdot$ 的非空集合。如果 $(G,\cdot)$ 具有下述三条性质：

(G1) 结合律：$(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c), \forall a,b,c\in G$

(G2) 存在单位元：存在 $e\in G$，使得 $e\cdot a = a\cdot e = a, \forall a\in G$

(G3) 每个元均有逆元：对任意 $a\in G$，存在 $b\in G$，使得 $a\cdot b = b\cdot a = e$

则称 $(G,\cdot)$ 是一个群 (Group)

♣

注 开始时，我们用 $(G,\cdot)$ 表示一个群，以后当二元运算不言自明时，我们就简单地称 G 是群。如果不引起混乱，今后我们常将运算符号 $\cdot$ 省略不写。例如将 $a\cdot b$ 简写成 ab

例题 1.1 我们称集合 A 到自身的一个双射为 A 上的一个置换，集合 A 上的所有置换记为 $S(A)$，可知 $S(A)$ 关于映射的复合构成群。

定义 1.2 (半群和含幺半群)

如果 $(G,\cdot)$ 满足 $(G1)$，则称 G 是半群 (semigroup)。

如果 $(G,\cdot)$ 满足 $(G1)$ 和 $(G2)$，则称 G 是含幺半群 (monoid)。

♣

定义 1.3 (阿贝尔群)

设 $(G,\cdot)$ 是群。若 $ab = ba, \forall a,b\in G$，则称 $(G,\cdot)$ 为交换群，又称为阿贝尔群，或 Abel 群。

♣

命题 1.1

(1) 存在半群 S，S 中有左幺元，但没有右幺元。

(2) 若一个半群 S 中既有左幺元，又有右幺元，S 是否一定为含幺半群？

♠

解 (1) 考虑 $S = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a,b\in R\}$ 关于矩阵乘法构成的半群，则易见其有无穷多左幺元 $\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 其中 $c\in R$，而容易验证其没有右幺元。

(2) 设 S 有左幺元 e_1，右幺元 e_2，则有 $e_1 = e_1\cdot e_2 = e_2$，从而左右幺元相等，故有唯一元素为左幺元和右幺元，从而为含幺半群。

例题 1.2 (1) 存在含幺半群 S 及 $a\in S$，a 存在左逆元，但不存在右逆元。

(2) 若含幺半群 S 中元素既有左逆元，又有右逆元，则 a 一定是可逆元。

解

性质 [群的简单性质]

(1)G 的单位元是唯一的（用 e 表示 G 的单位元）

证 设 e 和 e' 都是 G 的单位元，则 $e = ee' = e$

(2)G 中任意元 a 的逆元是唯一的（今后用 a^{-1} 表示 a 的逆元）

证 设 b 和 c 都是 a 的逆元，则 $c = ec = (ba)c = b(ac) = be = b$

(3) 穿脱原理：$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}, \forall a,b\in G$，以及 $(a^{-1})^{-1} = a, \forall a\in G$

证 由 $(b^{-1}a^{-1})(ab) = b^{-1}(a^{-1}a)b = b^{-1}eb = b^{-1}b = e$ 以及

$(ab)(b^{-1}a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1} = aea^{-1} = aa^{-1} = e$

知 $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$，类似可证 $(a^{-1})^{-1} = a$

(4) 左消去律：即，由 $ab=ac$ 可推出 $b=c$。右消去律：即，由 $ba=ca$ 可推出 $b=c$

证 由 $ab=ac$ 知 $a^{-1}(ab)=a^{-1}(ac)$，由此即得 $(a^{-1}a)b=(a^{-1}a)c$，即 $eb=ec$，即 $b=c$。同理，可证右消去律。

在一个半群 G 中，一个元 $e_l\in G$ 称为 G 的左幺元，如果 $e_l g=g,\forall g\in G$

设半群 G 有左幺元 e_l，称元 $a\in G$(相对于 e_l) 有左逆元，如果存在 $a_l^{-1}\in G$ 使得 $a_l^{-1}a=e_l$，将 a_l^{-1} 称为 a 的左逆元

命题 1.2 (群的单边定义)

设 G 是半群，则 G 是群当且仅当 G 有左幺元，且任一元均有左逆元

证明 必要性显然，只需证明充分性。

先证 g 的左逆元有性质 $gg_l^{-1}=e_l$, 有

$$\begin{aligned}
gg_l^{-1} &= e_l(gg_l^{-1})\\
&= ((g_l^{-1})_l^{-1}g_l^{-1})gg_l^{-1}\\
&= (g_l^{-1})_l^{-1}(g_l^{-1}g)g_l^{-1}\\
&= (g_l^{-1})_l^{-1}e_lg_l^{-1}\\
&= (g_l^{-1})_l^{-1}g_l^{-1}\\
&= e_l
\end{aligned}$$

现在证明 e_l 也是 G 的右幺元，从而 e_l 是 G 的单位元。对任一元 g，由 $gg_l^{-1}=e_l$ 知

$$ge_l=g(g_l^{-1}g)=(gg_l^{-1})g=e_lg=g$$

即，e_l 也是 G 的右幺元。

最后，由性质 $gg_l^{-1}=e_l$ 知 g 的左逆元 g_l^{-1} 也是 g 的逆元。根据定义，G 是群。

命题 1.3

命题 1.4 (有限半群成群的充要条件)

证明

命题 1.5 (含幺半群生成群)

第 2 章 环论

第 3 章 模论

第 4 章 域论

第 5 章 Galois 理论