东南大学高等数学竞赛试题[1]

[1]This paper was made by Peknt QQ:2499032096

2005 年东南大学高等数学竞赛试题

一、设 $f(x)=(x^6+3x^5+14x^4+23x^3+11x^2-13)^{2005}$，求 $f(\frac{\sqrt{5}-1}{2})$ 的值.

二、设 $C(\alpha)$ 为 $(1+x)^\alpha$ 的麦克劳林级数中 x^{2005} 项的系数，试求积分 $I=-\int_0^1 C(-y-1)\sum_{k=1}^{2005}\frac{1}{y+k}\mathrm{d}y$.

三、证明不等式：$\int_0^{\sqrt{2\pi}} sin(x^2)\mathrm{d}x > \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}}$.

四、设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 可导，且

$$f(0)=0, f(1)=\frac{1}{2}$$

试证：$\exists\xi,\eta\in(0,1),\xi\neq\eta$，使得

$$f'(\xi)+f'(\eta)=\xi+\eta$$

五、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续导数，且 $f(a)=0$，试证：

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\leq\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b (f'(x))^2\mathrm{d}x$$

六、设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，证明：下面两个不等式不能同时成立

$$\sqrt{\int_0^\pi (f(x)-\cos x)^2\mathrm{d}x}<\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\sqrt{\int_0^\pi (f(x)-\sin x)^2\mathrm{d}x}<\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

七、考察所有的具有如下性质的正整数，它们的十进制表示中没有数字 9，证明由所有这样的正整数的倒数构成的级数收敛.

2006 年东南大学高等数学竞赛试题

一、计算极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\sin x)-\sin(\tan x)}{\tan x-\sin x}$.

二、设 $a_1=3, a_n=2a_{n-1}^2-1(n\geq 2)$，求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2^n a_1 a_2\cdots a_{n-1}}$$

三、设 $f(x)=x-[x]([x]$ 表示不超过 x 的整数)，求

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

四、设 $f\in C[a,b]$，$f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上不恒为 0，且 $a_n=\int_a^b|f(x)|^n\,\mathrm{d}x$，试求证数列 $\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\}$ 收敛.

五、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 有二阶连续导数，则对 $\forall\xi\in(0,\frac{1}{3}),\eta\in(\frac{2}{3},1)$，有

$$|f'(x)|\leq 3\,|f(\xi)-f(\eta)|+\int_0^1|f''(x)|\,\mathrm{d}x,\forall x\in[0,1]$$

六、设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$ 为 n 个不同实数，函数 $f(x)$ 在 $[a_1,a_n]$ 上有 n 阶导数，并满足

$$f(a_1)=f(a_2)=\cdots=f(a_n)=0$$

则对于 $\forall c\in[a_1,a_n]$，存在 $\xi\in(a_1,a_n)$，满足等式

$$f(c)=\frac{(c-a_1)(c-a_2)\cdots(c-a_n)}{n!}f^{(n)}(\xi)$$

七、试计算由曲线 $x^2-y^2=2, x+y=\sqrt{2}, x+y=3\sqrt{2}$ 以及 $y=x$ 围成的图形绕直线 $y=x$ 旋转而成的立体的体积.

八、A、B、C、D 四个动点开始分别位于一个边长为 $2a$ 的正方形的四个顶点，然后 A 点向着 B 点，B 点向着 C 点，C 点向着 D 点，D 点向着 A 点同时以相同的速率运动，求点 A 的运动轨迹.

九、设 $\theta\in[0,2\pi]$

(1) 求 $\left|\sin^2\theta\sin 2\theta\right|$ 的最大值

(2) 求 $\left|\sin^2\theta\sin^3(2\theta)\sin^3(2^2\theta)\sin^3(2^3\theta)\cdots\sin^3(2^{n-1}\theta)\sin(2^n\theta)\right|$ 的最大值

(3) 证明：$\sin^2\theta\sin^2(2\theta)\cdots\sin^2(2^n\theta)\leq(\frac{3}{4})^n$

2007 年东南大学高等数学竞赛试题

一、计算题或证明下列各题（每小题 10 分，共 40 分）

1、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$

2、计算不定积分 $\int\frac{\sin^2 x}{\sin x+\sqrt{3}\cos x}\mathrm{d}x$

3、计算反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^3(e^{\pi/x}-1)}$

4、设 $F(x,y)=\frac{F(y-x)}{2x},F(1,y)=\frac{y^2}{2}-y+5,x_0>0,x_1=F(x_0,2x_0),\cdots,x_{n+1}=F(x_n,2x_n),n=1,2,\cdots$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.

二、（12 分）

计算第二型曲面积分

$$\int_{AB}(x^2-|x|\,y)\mathrm{d}x+(2x\,|y|+y^2)\mathrm{d}y+(3-x-y+e^{-z^2})\mathrm{d}z$$

其中 AB 为曲线

$$\Gamma:\begin{cases}|x|+|y|=1\\ z=\dfrac{4}{\pi}\arctan(x+y)\end{cases}$$

上由点 $A(0,1,1)$ 经过 $M(-1,0,-1),N(0,-1,-1)$ 到点 $B(1,0,1)$ 的部分。

三、（12 分）

设 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内有 n 阶导数，且

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0,f^{(n)}(x_0)\neq 0$$

当 $0<|h|<\delta$ 时，

$$f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x_0+\theta h)(0<\theta<1)$$

求 $\lim\limits_{h\to 0}\theta$

四、（12 分）

计算 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(y,z)g(z,x)\mathrm{d}z$，其中

$$f(y,z)=\begin{cases}1,(y,z)\in D_1\\0,(y,z)\notin D_1\end{cases}$$

$$D_1:0\le y\le 1,0\le z\le 1,|y-z|\le\frac{1}{4}$$

$$g(z,x)=\begin{cases}1,(z,x)\in D_2\\0,(z,x)\notin D_2\end{cases}$$

$$D_2:0\le x\le 1,0\le z\le 1,|z-x|\le\frac{1}{4}$$

五、（12 分）

求微分方程 $x^3+(y')^3-3xy'=0$ 的通解

六、（12 分）

已知当 $x>0$，有

$$(1+x^2)f'(x)+(1+x)f(x)=1,g'(x)=f(x),f(0)=g(0)=0$$

证明:$\frac{1}{4}<\sum\limits_{n=1}^{\infty}g(\frac{1}{n})<1$

2008 年东南大学高等数学竞赛试题

一、填空题

1. 当 $x \to 0$ 时，$3x - 4\sin x + \sin x\cos x$ 与 x^n 为同阶无穷小，则 $n =$____

2. 设 $P(x) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(1-x^m)^n$,$m, n$ 为正整数，则 $P(1) =$____

3.
$$\int \frac{x+\sin x\cos x}{(\cos x - x\sin x)^2}\mathrm{d}x$$

4.
$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$$

5. 设 $f(x) = x, g(x) = \begin{cases} \sin x, 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0, x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ ，则 $\int_0^x f(t)g(x-t)\mathrm{d}t =$____

二、设函数 $f(x)$ 连续且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，$f(0)=0, f'(0)\neq 0$, 计算

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t}{x^2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$$

三、设 $f(x) = (x^6+3x^5+14x^4+23x^3+11x^2-13)^{2007}$，求 $f(\frac{\sqrt{5}-1}{2})$ 的值

四、设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导，

$$f(a)=f(b)=0, \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$$

证明：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f''(\xi) = f(\xi)$

五、证明不等式

$$\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin(x^2)\mathrm{d}x > \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}}$$

六、设有界函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有连续导数，$|f(x)-f'(x)|\le 1$, 求证：

$$|f(x)| \le 1, x\in(-\infty,+\infty)$$

七、设 $f\in C[a,b]$，不恒为 0，满足 $0\le f(x)\le M$，则

$$(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x)^2 \le (\int_a^b f(x)\sin x\mathrm{d}x)^2 + (\int_a^b f(x)\cos x\mathrm{d}x)^2 + \frac{M^2(b-a)^4}{12}$$

八、设函数 $f\in C[a,b]$，且

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0, \int_0^1 xf(x) = 0, \cdots, \int_0^1 x^{n-1}f(x)\mathrm{d}x = 0, \int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = c > 0$$

证明：至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得

$$|f(\xi)| \ge \frac{2^n(n+1)c}{(b-a)^{n+1}}$$

2009 年东南大学高等数学竞赛试题

一、（12 分）求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\frac{x^3}{6}-\int_0^x e^{t^2}\cos t\mathrm{d}t}{(x-\tan x)(\sqrt{1+x^2}-1)}$$

二、（12 分）求函数 $z=\sqrt{x^2+y^2+6x-2y+14}+\sqrt{x^2+y^2-2x+4y+6}$ 的最小值

三、（17 分）计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)\mathrm{d}V$，其中 Ω 为圆锥体，该圆锥体的顶点在原点，底是平面 $x+y+z=3$ 上以点 $(1,1,1)$ 为圆心且以 1 为半径的圆

四、（16 分）求极限

$$\lim_{n\to\infty} n(\ln 2-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i})$$

五、（18 分）

证明不等式:

$$\frac{5}{2}\pi<\int_0^{2\pi}e^{\sin x}\mathrm{d}x<2\pi e^{\frac{1}{4}}$$

六、（25 分）设椭圆 $C:\begin{cases}\frac{x^2}{l^2}+\frac{y^2}{m^2}+\frac{z^2}{n^2}=1\\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\end{cases}$，(其中 l,m,n,a,b,c 均为正常数,$h=(\frac{l}{a})^2+(\frac{m}{b})^2+(\frac{n}{c})^2>1$)，求它的中心坐标，并求该椭圆的面积

2010 年东南大学高等数学竞赛试题

1、（10 分）设 $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x$, 求 $y^{(n)}(0)$

2、（10 分）设函数 $f\in C[0,\frac{\pi}{2}]$，且严格单调递减，试着比较积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin x\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos x\mathrm{d}x$ 的大小

3、（10 分）设函数 $f(x)\in C[-\pi,\pi]$，且

$$f(x)=\frac{x}{1+\cos^2 x}+\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin x\mathrm{d}x$$

求 $f(x)$

4、（10 分）设 $x_0>-\frac{3}{2},x_{n+1}=\sqrt{2x_n+3}(n=0,1,2,\cdots)$，试证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

5、（15 分）设 $f\in C[a,b]$，f 在 (a,b) 内二阶可导，证明：对每个 $c\in(a,b)$，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{1}{2}f''(\xi)=\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(b)}{(b-a)(b-c)}+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}$$

6、（15 分）计算积分

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{4\sqrt{2}-8x^3-4\sqrt{2}x^4-8x^5}{1-x^8}\mathrm{d}x$$

7、（15 分）求由抛物线 $y=(4-x)x$ 与直线 $y=x$ 所围成的平面区域绕直线 $y=x$ 旋转一周所得的旋转体体积

8、（15 分）是否存在定义于 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数 f，使对于任何的 $c\in\mathrm{R}$：

(1) 方程 $f(x)=c$ 都恰好有两个解?

(2) 方程 $f(x)=c$ 都恰好有三个解?

2011 年东南大学高等数学竞赛试题

一、（8 分）求

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}(1+\frac{1}{x})^{x^2}$$

二、（8 分）设 $\phi(x)=\int_0^x \cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t$，求 $\varphi'(0)$

三、（10 分）求 $\max\limits_{0\le s\le 1}\int_0^1 |\ln|s-t||\,\mathrm{d}t$

四、（10 分）求直线 $l_1:\begin{cases} x-y=0 \\ z=0 \end{cases}$ 与直线 $l_2:\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{-1}$ 的距离

五、（10 分）证明不等式：

$$\rho\cos\theta<\cos(\rho\theta)(0\le\theta\le\frac{\pi}{2},0<\rho<1)$$

六、（10 分）求

$$\iint_D \frac{(x+y)\ln(1+\frac{y}{x})}{\sqrt{1-x-y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 D 是由直线 $x+y=1$ 与两坐标轴所围成的三角形区域

七、（10 分）计算二重积分

$$\iint_D \frac{1}{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $D=\{(x,y)\mid \frac{1}{4}x\le x^2+y^2\le\frac{1}{2}x,\frac{1}{4}y\le x^2+y^2\le\frac{1}{2}y\}$

八、(10 分) 已知 l 是过原点，方向为 (α,β,γ)(其中 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$) 的直线，均匀椭球 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$(其中 $0<c<b<a$，密度为 1) 绕 l 旋转

(1) 求其转动惯量 J_l

(2) 求 J_l 关于方向 (α,β,γ) 的最大值和最小值

九、（12 分）计算

$$F(t)=\iint_{x+y+z=t} f(x,y,z)\mathrm{d}S$$

其中 $f(x,y,z)=\begin{cases} 1-x^2-y^2-z^2, x^2+y^2+z^2\le 1 \\ 0, x^2+y^2+z^2>1 \end{cases}$

十、（12 分）设 $f(x),p(x)\in C[a,b],p(x)\ge 0,\int_a^b p(x)\mathrm{d}x>0$ 且 $m\le f(x)\le M$,$\varphi(x)$ 在 $[m,M]$ 上有定义，并且二阶导数 $\varphi''(x)>0$, 试证：

$$\varphi(\frac{\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x})<\frac{\int_a^b p(x)\varphi(f(x))\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}$$

2012 年东南大学高等数学竞赛试题

一、（8 分）设 $y=\frac{x^4}{x-1}$，求 $y^{(2012)}(x)$

二、（8 分）计算不定积分

$$\int \frac{1}{\sqrt[4]{(1+x^4)^5}}\mathrm{d}x$$

三、（10 分）计算定积分

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$$

四、（10 分）计算极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{17}{16}\cdots\frac{2^{2^n}+1}{2^{2^n}}$$

五、（10 分）设 $f(x)=(1+\sqrt{x})^{2n+2}$，其中 n 为正整数，求 $f^{(n)}(1)$

六、（10 分）设 $\varphi(x)=\int_0^x \sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t$，求 $\varphi'(0)$

七、（10 分）设 $a_n=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n}}}}$，其中 n 为正整数，证明；数列 $\{a_n\}$ 收敛

八、（10 分）计算

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2(1-\ln(1+x))}{x^2}$$

九、（12 分）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有连续三阶导数且 $f(-1)=0, f(1)=1, f'(0)=0$，求证：在开区间 $(-1,1)$ 至少存在一点 x_0，使得 $f'''(x_0)=3$

十、（12 分）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在连续的二阶导数，记

$$B_n=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a+(2i-1)\frac{b-a}{2n})$$

试证：$\lim\limits_{n\to\infty} n^2 B_n=\frac{(b-a)^2}{24}(f'(b)-f'(a))$

2013 年东南大学高等数学竞赛试题

一、(8 分) 求通过直线 $L:\begin{cases}2x+y-3z+2=0\\5x+5y-4z+3=0\end{cases}$ 的两个相互垂直的平面 Π_1 和 Π_2，使其中一个平面过点 $(4,-3,1)$

二、(8 分) 已知 $z=u(x,y)e^{ax+by}$ 且 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$，试确定常数 a 和 b，使函数 $z=z(x,y)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=0$$

三、(8 分) 计算极限

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}t$$

四、(8 分) 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$，计算

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x$$

五、(8 分) 求

$$\int_0^1\sin(\ln\frac{1}{x})\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x(0<a<b)$$

六、(10 分) 求方程 $x^2\sin\frac{1}{x}=2x-501$ 的近似解，要求误差不超过 10^{-3}

七、(10 分) 设四边形各边长一定，分别为 a,b,c,d，问何时该四边形的面积最大?

八、(10 分) 设 $y=f(x)$ 二阶可导，求

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3 f(u)}{f(x)\sin^3 u}$$

其中 u 是曲线 $y=f(x)$ 上点 $P(x,f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距

九、(10 分) 计算

$$\int_0^{+\infty}e^{-2x}\left|\sin x\right|\mathrm{d}x$$

十、(10 分) 设 $f(x)$ 为连续函数，区域 Ω 是由旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 和上半球面 $z=\sqrt{t^2-x^2-y^2}(t>0)$ 所围起来的部分，定义三重积分

$$F(t)=\iiint_{\Omega}f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$$

求 $F(t)$ 的导数 $F'(t)$

十一、(10 分) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 为正项级数

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}})>0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}})<0$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散

2014 年东南大学高等数学竞赛试题

一、(8 分) 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(e^x+x^n)}{\sqrt{n}}$，求 $f(x)$ 的定义域

二、(8 分) 计算定积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2nx}{\sin x}\mathrm{d}x$$

其中 n 为正整数

三、(8 分) 设 $f(x)$ 连续，且当 $x>-1$ 时，

$$f(x)(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+1)=\frac{xe^x}{2(1+x)^2}$$

求 $f(x)$

四、(8 分) 设 $f\in C[a,b]$，由积分中值定理知，存在 $\xi\in(a,x)\subset[a,b]$，使得 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(\xi)(x-a)$，若 $f'(a)$ 存在且非零，求

$$\lim_{x\to a^+}\frac{\xi-a}{x-a}$$

五、(8 分) 计算极限

$$\lim_{n\to\infty}n\int_0^1\frac{x^n}{1+x^n}\mathrm{d}x$$

六、(10 分) 设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，在 $(-1,1)$ 内具有二阶导数，且 $f(1)=1$，证明：

(1) 存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$

(2) 存在 $\eta\in(-1,1)$，使得 $f'(\eta)-f''(\eta)=1$

七、(10 分) 证明不等式：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+a\sin^2 x}\mathrm{d}x\geq\frac{\pi}{4}(1+\sqrt{1+a})(a\geq 0)$$

八、(10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上二阶可导，且

$$f(0)=1,f'(0)>1,f''(x)>f(x)(x>0)$$

求证：$f(x)>e^x,x>0$

九、(10 分) 设 $x_n=(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n),(0<a<1$ 且 $n=1,2,\cdots)$，证明：数列 $\{x_n\}$ 收敛

十、(10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可微，且 $|f'(x)|<mf(x)(0<m<1)$，任取实数 a_0，定义 $a_n=\ln f(a_{n-1})(n=1,2,\cdots)$，证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛

十一、(10 分) 设 $F(x)=\int_0^x e^{-t}(1+t+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!})\mathrm{d}t$，其中 n 为大于 1 的正整数，方程 $F(x)=\frac{n}{2}$ 在 $(\frac{n}{2},n)$ 内有且仅有一个实数根

2015 年东南大学高等数学竞赛试题

一、(10 分) 设 n 为正整数，计算

$$I=\int_{e^{-2n\pi}}^{1}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(\ln\frac{1}{x})\right|\mathrm{d}x$$

二、(10 分) 设 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-\sin x}{x}=a(a$ 为常数)，又 $F(x)=\int_0^1 f(xy)\mathrm{d}y$，求 $F'(x)$，并讨论 $F'(x)$ 的连续性

三、(10 分) 设曲线 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 与平面 $x+y+z=1$ 的交线，试求

$$\oint_L (xy+yz+zx)\mathrm{d}s$$

四、(10 分) 设 Ω 是由曲面 $z=1-x^2, z=1-\frac{1}{4}y^2$ 与 xOy 平面所围的立体，且质量均匀分布，求 Ω 质心坐标

五、(10 分) 设 a,b 为常数，且 $ab\neq 0$，计算二重积分

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1}|ax+by|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

六、(10 分) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}\frac{1}{(2n-1)!!}x^{2n-1}$ 和函数 $S(x)$，并确定收敛域，其中 $(2n-1)!!=1\cdot3\cdot5\cdots(2n-3)\cdot(2n-1)$

七、(10 分) 设函数 $\varphi(x),p(x)\in C[a,b], m\leq\varphi(x)\leq M, p(x)$ 非负，且 $\int_a^b p(x)\mathrm{d}x=1$，函数 $f(u)$ 在 $[m,M]$ 上具有二阶连续导数，且 $f''(u)\leq 0$，证明：

$$f(\int_a^b p(x)\varphi(x)\mathrm{d}x)\geq\int_a^b p(x)f(\varphi(x))\mathrm{d}x$$

八、(10 分) 设 $C: x^2+y^2=1$，取逆时针方向，计算

$$I=\oint\frac{e^y}{x^2+y^2}((x\sin x+y\cos x)\mathrm{d}x+(y\sin x-x\cos x)\mathrm{d}y)$$

九、(10 分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶可导，$f(x),f'(x),f''(x)$ 都大于零，假设存在正数 a,b，使得

$$f''(x)\leq af(x)+bf'(x),\forall x\in(-\infty,+\infty)$$

(1) 求证：$\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=0$

(2) 求证：存在常数 c，使得 $f'(x)\leq cf(x)$

(3) 求使上面不等式成立的最小常数 c

十、(10 分) 定义在区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 非负且严格单增，存在 $x_n\in[a,b]$，使得

$$(f(x_n))^n=\frac{1}{b-a}\int_a^b (f(x))^n\mathrm{d}x$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

2016 年东南大学高等数学竞赛试题

一、填空题（本题 32 分，共 8 小题，每小题 4 分）1、若曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\sin x$ 在原点相切，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{nf(\frac{2}{n})}=$____

2、已知函数 $f(x)=\frac{e^x-b}{(x-a)(x-b)}$ 在 $x=e$ 处为无穷间断点，在 $x=1$ 处为可去间断点，则 $b=$____

3、已知有正整数 $n(n>4)$ 使得极限

$$\lim_{x\to+\infty}[(x^n+7x^4+2)^a-x]=c(c\neq 0)$$

则 $a=$____

4、

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}\mathrm{d}x$$

5、

$$\int\frac{e^x(1+x)}{(1-xe^x)^2}\mathrm{d}x=\_\_\_\_$$

6、设函数 $f(x)=(x-1)^{10}e^{2x}$，则 $f^{(20)}(1)=$____

7、设严格单调函数 $y=f(x)$ 有二阶连续导数，其反函数为 $x=\varphi(y)$，且 $f(1)=1,f'(1)=2,f''(1)=3$，则 $\varphi''(1)=$____

8、

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{n+\frac{1}{n}}+\frac{\ln(1+\frac{2}{n})}{n+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{\ln 2}{n+1}=\_\_\_\_$$

二、（8 分）求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}{e^n}$$

三、（10 分）证明：方程 $1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}=0$ 当 n 为奇数时有且仅有一个实根

四、（10 分）已知函数二阶可导，且满足 $f(x)>0,f''(x)f(x)-(f'(x))^2\geq 0,x\in R$

证明：

(1)$f(x_1)f(x_2)\geq f^2(\frac{x_1+x_2}{2}),\forall x_1,x_2\in R$

(2) 若 $f(0)=1,f'(0)=2$，则 $f(x)\geq e^{2x},x\in R$

五、（10 分）设 $I_n=\int_1^{1+\frac{1}{n}}\sqrt{1+x^n}\mathrm{d}x$

(1) 求证：$\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$

(2) 求：$\lim\limits_{n\to\infty}nI_n$

六（10 分）设 $D:x^2+y^2\leq 4x,y\leq -x$，在 D 的边界 $y=-x$ 任取点 P，设 P 到原点的距离为 t，作 PQ 垂直于 $y=-x$ 交 D 的边界 $x^2+y^2=4x$ 于 Q

(1) 试将 PQ 的距离 $|PQ|$ 表示为 t 的函数

(2) 求 D 绕 $y=-x$ 旋转一周所得旋转体的体积

七、（10 分）设 n 是正整数，证明：

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{2^{n+1}}(2+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\cdots+\frac{2^n}{n})$$

八、（10 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数，证明：

$$\int_0^1|f(x)|\,\mathrm{d}x\leq\max\{\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|,\int_0^1|f'(x)|\,\mathrm{d}x\}$$

2017 年东南大学高等数学竞赛试题

一、填空题

1、设 $a,b>0$，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2})^n=$_____

2、当 $x\to 0$ 时，$3x-4\sin x+\sin x\cos x$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 $n=$_____

3、设 $f(x)$ 连续且在 $x=1$ 处可导，且 $f(1)=0,f'(1)=1$，则 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\int_1^x(t\int_t^1 f(u)\mathrm{d}u)\mathrm{d}t}{(x-1)^3}=$_____

4、设函数 $f(x)=\frac{x^{2015}}{1-x^2}$，则 $f^{(2017)}(0)=$_____

5、设 $x=\arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},y=\pi-\arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$，其中 $t>0$，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$_____

6、$\int_0^{2\pi}x(\int_x^{2\pi}\frac{\sin^2 t}{t^2}\mathrm{d}t)\mathrm{d}x=$_____

7、$\int_{e^{-2n\pi}}^1\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(\ln\frac{1}{x})\right|\mathrm{d}x=$_____，$n$ 为正整数

8、极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}=$_____

二、

求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)-\tan(\tan(\tan x))}{\tan x\cdot\tan(\tan x)\cdot\tan(\tan(\tan x))}$$

三、

设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^3+3x^2y-2y^3=2$ 所确定，求 $y(x)$ 的极值

四、

依次求解下列问题

(1)

证明 $e^x+x^{2n+1}=0$ 有唯一的实根 $x_n(n=0,1,2,\cdots)$

(2)

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求其值 A

(3)

证明当 $n\to\infty$ 时,x_n-A 与 $\frac{1}{n}$ 是同阶无穷小

五、

设 $f(x)$ 定义为在 R 上二次连续可微函数，且对所有的 x 满足 $|f(x)|\le 1$ 及 $f^2(0)+f'^2(0)=4$。证明：存在一点 ξ，使得 $f(\xi)+f''(\xi)=0$

六、

设直线 $l:x+y=1$，曲线 $C:\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$，求由 l 与 C 所围平面图形绕 l 旋转一周所得旋转体的体积

七、

已知 $f(x),g(x)$ 连续，$g(x)$ 以 1 为周期，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)g(nx)\mathrm{d}x=(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x)(\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x)$$

八、

设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的可微函数，且满足

$$|f(x)|\le\pi,f'(x)\ge m>0(a\le x\le b)$$

证明：$\left|\int_a^b\sin f(x)\mathrm{d}x\right|\le\frac{2}{m}$

2018 年东南大学高等数学竞赛试题

一、填空题（本题 32 分，共 8 小题，每小题 4 分）

1、设 $f(x)$ 连续且在 $x=1$ 处可导，且满足

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+o(x)(x\to 0)$$

则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 ____

2、设 $x\to 0$ 时，$x-\sqrt[3]{\sin(x^3)}\sim Ax^k$，则 $A=$ ____$,k=$ ____

3、设 $f(x)=\frac{1}{1+2x+4x^2}$，则 $f^{(100)}(0)=$ ____

4、已知 $f'(\sin x)=\cos x+\tan x+x,-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$，且 $f(0)=1$，则当 $x\in(-1,1)$ 时，$f(x)=$ ____

5、设非负连续函数 $f(x)$ 满足

$$f(x)f(-x)=1(-\infty<x<\infty)$$

则 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{1+f(x)}\mathrm{d}x=$ ____

6、曲线 $\rho=3\cos\varphi$ 和 $\rho=1+\cos\varphi$ 所围成图形公共部分的面积 $=$____

7、满足 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=u(t)+\int_0^1 u(t)\mathrm{d}t$ 及 $u(0)=1$ 的可微函数 $u(t)=$ ____

8、极限 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{\sqrt{1^2+2^2+\cdots+n^2}}$

二、（本题 10 分）

设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内可导，且在 $x=0$ 处存在二阶导数，又 $f(0)=f'(0)=0,f''(0)\neq 0$，求极限

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}$$

三、（本题 10 分）

设 $f(x)$ 在 $[0,a](a>0)$ 上可导，$f(0)=1,f(a)=0$，证明：在 $(0,a)$ 内存在 $\xi<\eta$，使得

$$f'(\xi)f'(\eta)=\frac{1}{a^2}$$

四、（本题 12 分）

对于所有的整数 $n>1$，证明：

$$\frac{1}{2ne}<\frac{1}{e}-(1-\frac{1}{n})^n<\frac{1}{ne}$$

五、（本题 12 分）

设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 nt}{\sin t}\mathrm{d}t$，其中 n 为正整数，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}(2I_n-\ln n)$ 存在

六、（本题 12 分）

求出所有的可微函数

$$f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$$

满足

$$f'(\frac{1}{x})=\frac{x}{f(x)}(x>0)$$

七、（本题 12 分）

设 $f:[0,1]\to R$ 有连续的导数，且满足 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$，证明：对 $\forall\alpha\in[0,1]$，有

$$\left|\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x\right|\le\frac{1}{8}\max_{0\le x\le 1}|f'(x)|$$

2019 年东南大学高等数学竞赛试题

一、填空题（本题 32 分，共 8 小题，每小题 4 分）

1、设 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax+2|\sin x|}{bx-|\sin x|}\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$，则 $a=$_____

2、极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{e^{\tan x}-e^x}=$_____

3、设 $f(x)=(x-1)(x-2)^3(x-3)^5(x-4)^7$，则 $f'''(2)=$_____

4、曲线 $y=x+\sqrt{x^2-x+1}$ 的渐近线方程为 _____

5、计算积分 $\int_3^9\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}+\sqrt{9-x}}\mathrm{d}x=$_____

6、计算积分 $\int\frac{x^9}{(x^5+1)^4}\mathrm{d}x=$_____

7、设 $f(x)$ 是连续函数，且满足

$$f(x)=4x^2-\int_0^1 f(e^x)\mathrm{d}x$$

则 $f(x)=$_____

8、设函数 $f(x)$ 满足 $f'(x)=\arctan x^2$，且 $f(1)=0$，则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$_____

二、（本题 8 分）

在极坐标系中，求曲线 $\rho=1+\cos\theta(0\le\theta\le\frac{\pi}{2})$ 与射线 $\theta=0,\theta=\frac{\pi}{2}$ 所围成的平面区域绕极轴 $(\theta=0)$ 旋转一周所得旋转体的体积

三、（本题 10 分）

设函数 $f(x)$ 无穷阶可导，证明恒等式

$$(x^{n-1}f(\frac{1}{x}))^{(n)}=\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}(\frac{1}{x})(n=1,2,\cdots)$$

四、（本题 10 分）

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上二阶可导，$f(0)=0,f(1)=1$，求证：存在 $\xi\in(0,1)$，使得

$$\xi f''(\xi)+(1+\xi)f'(\xi)=1+\xi$$

五、（本题 10 分）

设 $0<x<1$，试比较 $\sin x$ 与 $\ln(1+x)$ 的大小，并证明结论

六、（本题 10 分）

证明：如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，并且两函数或同时单调增加，或同时单调减少，那么

$$\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x\ge\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$$

七、（本题 10 分）

设 $f(x)$ 二阶可导，且满足

$$x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t-x)\mathrm{d}t$$

求 $f(x)$ 的表达式

八、（本题 10 分）

(1) 求解微分方程 $y'-xy=xe^{x^2},y(0)=1$

(2) 如 $y=f(x)$ 为 (1) 中的解，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{n}{1+n^2x^2}f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

2021 年东南大学高等数学竞赛试题

一、填空题（本题 32 分，共 8 小题，每小题 4 分）

1、设 n 为正整数，则极限

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^n}{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}\right]^{2x}=\underline{\qquad}$$

2、设 $f(x)=(xe^{x^2}+e^x)\sin x$，则 $f^{(2021)}(0)=\underline{\qquad}$

3、若方程 $kx+\frac{1}{x^2}=1$ 在 $(0,+\infty)$ 上有且仅有一个实根，则 k 的取值范围为 $\underline{\qquad}$

4、积分 $\int\frac{1-x}{x^2}e^x\mathrm{d}x$

5、定积分 $\int_0^\pi\frac{x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=\underline{\qquad}$

6、极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$

7、设 $f(a)=\int_0^{+\infty}e^{-|x-a|-x}\mathrm{d}x$，则 $f(a)$ 的最大值 $\underline{\qquad}$

8、已知函数 $f(x)$ 满足

$$xf(x)=2+2\int_0^x t^2f(t)\mathrm{d}t(x\neq0)$$

则 $f(x)=\underline{\qquad}$

二、（本题 8 分）设曲线 C 的极坐标方程为

$$\rho=\rho(\theta),0\le\theta\le\pi$$

其中 $\rho(\theta)$ 是 $[0,\pi]$ 上的连续函数。已知 C 上任意两点之间的距离不超过 1，证明：由曲线 C 与射线 $\theta=0,\theta=\pi$ 围成的扇形面积 $S\le\frac{\pi}{4}$

三、（本题 10 分）

设 $x>0$，证明：存在 $\theta\in(0,1)$，使得 $\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t=xe^{(\theta x)^2}$，并求 $\lim\limits_{x\to0^+}\theta$

四、（本题 10 分）

求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n\pi}{2}-\sum_{k=1}^{n}\arctan(n+k)\right]$$

五、（本题 10 分）

设 $0<x_0<y_0\le\frac{\pi}{2}$，用递推公式

$$x_{n+1}=\sin x_n(n=0,1,2,\cdots)$$

$$y_{n+1}=\sin y_n(n=0,1,2,\cdots)$$

生成两个数列 $\{x_n\},\{y_n\}$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=1$

六、（本题 12 分）

(1) 证明：$0<x<1$ 时，有 $x-\frac{1}{x}<2\ln x$

(2) 设函数 $f(x)$ 是在 $(0,+\infty)$ 上单调下降的可导函数，且当 $x\in(0,+\infty)$ 时有 $0<f(x)<|f'(x)|$ 成立，证明：当 $0<x<1$ 时，必有 $xf(x)>\frac{1}{x}f(\frac{1}{x})$

七、（本题 10 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上可导，在 $(0,2)$ 内三阶可导，并且

$$f(0)=f'(0)=0,\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=8\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

证明：存在 $\xi \in (0,2)$，使得 $f'''(\xi)=0$

八、（本题 8 分）

设 $f:[0,1]\to[0,+\infty)$ 上连续可微，证明：

$$\left|\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x - f^2(0)\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| \le \max_{0\le x\le 1}|f'(x)|\,[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x]^2$$

2023 年东南大学高等数学竞赛试题

一、填空题（本题 32 分，共 8 小题，每小题 4 分）

1、设 n 为正整数，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\frac{\pi}{\ln(2n+1)-\ln(2n)})=$ _____

2、设曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=2\sin x+x^2$ 在原点相切且有相同的曲率圆，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(nf(\frac{1}{2n}))^n=$ _____

3、参数方程表示的曲线 $\begin{cases}x=t\ln t\\ y=\frac{\ln t}{t}\end{cases}$ 的渐近线为 _____

4、函数 $f(x)=|\sin x+\cos x+\tan x+\cot x+\sec x+\csc x|$ 的最小值为 _____

5、积分 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 x}{x(\frac{\pi}{2}-x)}\mathrm{d}x=$ _____

6、曲线 $\rho=3\cos\theta$ 与 $\rho=1+\cos\theta$ 围成的图形面积为 _____

7、直线 $y=3z,x=1$ 绕 z 轴旋转一周所得的曲面方程为 _____

8、设函数 $y=f(x)$ 有连续导数，且 $f(1)=2$。记 $z=f(e^{2x}y^2)$，若 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=z$，则当 $x>0$ 时，$f(x)=$ _____

二、（本题 8 分）

函数 $y=f(x,y)$ 在 R^2 上有连续二阶偏导数，

$$f_x(0,0)=f_y(0,0)=f(0,0)=0$$

证明：

$$f(x,y)=\int_0^1(1-t)(x^2f_{xx}(tx,ty)+2xyf_{xy}(tx,ty)+y^2f_{yy}(tx,ty))\mathrm{d}t$$

三、（本题 10 分）

求极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x\frac{|\sin t|}{1+\sqrt{t}}\mathrm{d}t}{\sqrt{x}}$$

四、（本题 10 分）

若 $f(\alpha)=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1^\alpha}+\frac{1}{n+2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n+n^\alpha})(\alpha>0)$，写出 $f(\alpha)$ 的显式表达式

五、（本题 10 分）

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续且在 (a,b) 可导，并在 (a,b) 上有极值点。证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)-f(\xi)+f(a)=0$

六、（本题 12 分）

设 $f(x)$ 定义在 $[1,+\infty)$ 上，满足

$$f(1)=1,f'(x)=\frac{x}{x-1+f^2(x)}(\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{\ln\frac{x+1}{x}})$$

记 $a_n=f(n)$，证明：

(1)$\{a_n\}$ 收敛 (2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\le 2\sqrt{2}-2$

七、（本题 8 分）

求微分方程通解：

$$(x^2\ln x)y''-xy'+y=0$$

八、（本题 10 分）

函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的二阶导数，证明：

$$\max_{0\le x\le 1}\{|f'(x)|\} \le 4\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_0^1 |f''(x)|\,\mathrm{d}x$$

并说明不等式右边的系数 4 不能替换为更小的数