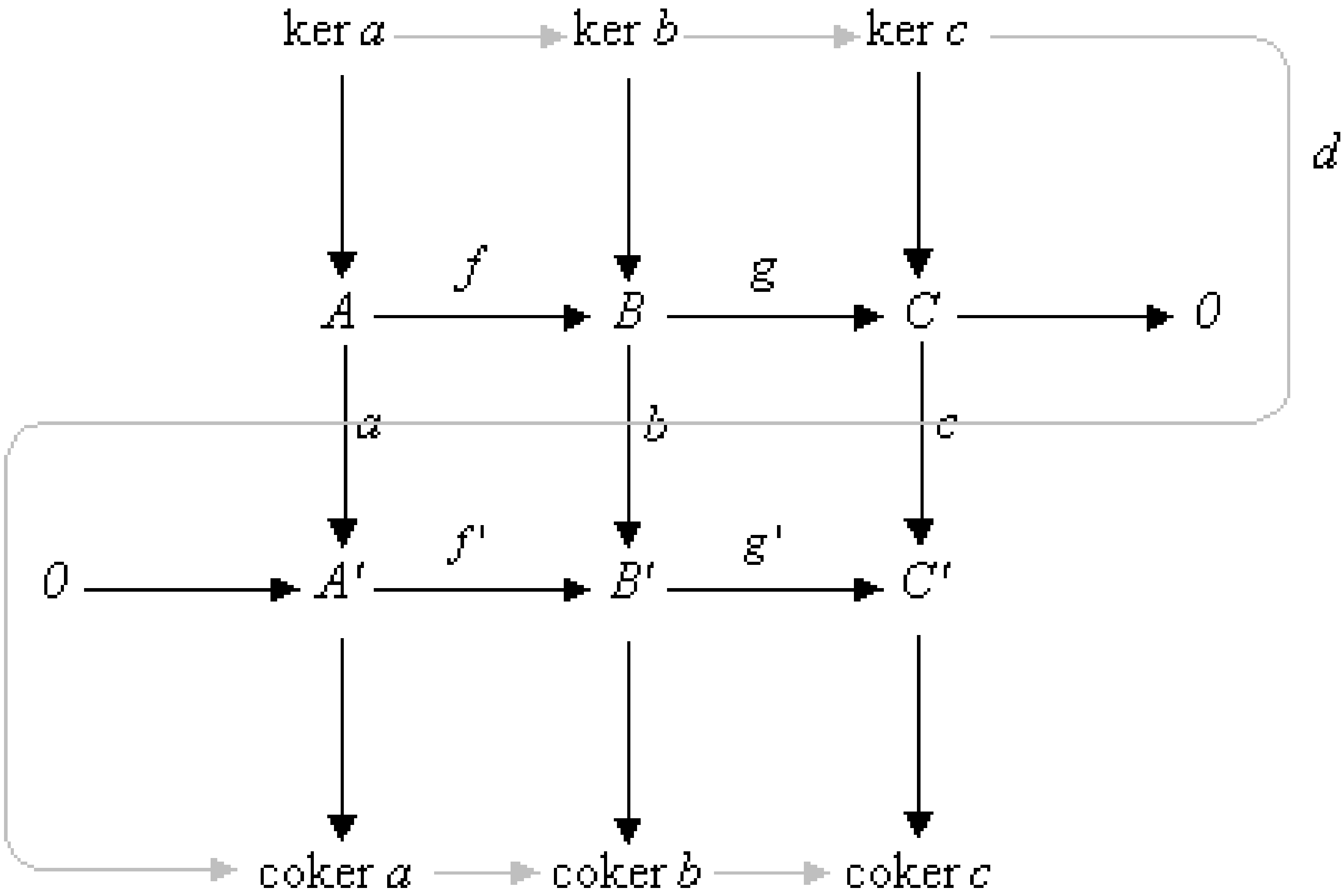

Abstract Algebra

Abstract Algebra

作者：Peknt
组织：清疏大学
时间：March 23, 2024
版本：1.1
作者联系方式：QQ2499032096

晚上不要听歌，不要在群里聊天，有时间就要学习

前言

参考书

- 近世代数引论，冯克勤，李尚志，章璞
- 近世代数 300 题，冯克勤，章璞
- 伽罗瓦理论—天才的激情，章璞
- *Abstract Algebra*,Dummit,Foote

参考资料

- 南开大学徐彬斌抽象代数讲义
- 上海交通大学章璞课程 PPT
- 南开大学凯淼淼抽象代数 note

目录

第 1 章 群论

1.1 群的概念

定义 1.1 (群)

设 G 是带有二元运算 $\cdot$ 的非空集合。如果 $(G,\cdot)$ 具有下述三条性质：

(G1) 结合律：$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c),\forall a,b,c\in G$

(G2) 存在单位元：存在 $e\in G$，使得 $e\cdot a=a\cdot e=a,\forall a\in G$

(G3) 每个元均有逆元：对任意 $a\in G$，存在 $b\in G$，使得 $a\cdot b=b\cdot a=e$

则称 $(G,\cdot)$ 是一个群 (Group)

♣

注 开始时，我们用 $(G,\cdot)$ 表示一个群，以后当二元运算不言自明时，我们就简单地称 G 是群。如果不引起混乱，今后我们常将运算符号 $\cdot$ 省略不写。例如将 $a\cdot b$ 简写成 ab

例题 1.1 我们称集合 A 到自身的一个双射为 A 上的一个置换，集合 A 上的所有置换记为 $S(A)$，可知 $S(A)$ 关于映射的复合构成群。

定义 1.2 (半群和含幺半群)

如果 $(G,\cdot)$ 满足 $(G1)$，则称 G 是半群 (semigroup)。

如果 $(G,\cdot)$ 满足 $(G1)$ 和 $(G2)$，则称 G 是含幺半群 (monoid)。

♣

定义 1.3 (阿贝尔群)

设 $(G,\cdot)$ 是群。若 $ab=ba,\forall a,b\in G$，则称 $(G,\cdot)$ 为交换群，又称为阿贝尔群，或 Abel 群。

♣

命题 1.1

(1) 存在半群 S，S 中有左幺元，但没有右幺元。

(2) 若一个半群 S 中既有左幺元，又有右幺元，S 是否一定为含幺半群?

♠

解 (1) 考虑 $S=\{\begin{pmatrix}a&b\\0&0\end{pmatrix}\mid a,b\in R\}$ 关于矩阵乘法构成的半群，则易见其有无穷多左幺元 $\begin{pmatrix}1&c\\0&0\end{pmatrix}$ 其中 $c\in R$，而容易验证其没有右幺元。

(2) 设 S 有左幺元 e_1，右幺元 e_2，则有 $e_1=e_1\cdot e_2=e_2$，从而左右幺元相等，故有唯一元素为左幺元和右幺元，从而为含幺半群。

命题 1.2

(1) 存在含幺半群 S 及 $a\in S$，a 存在左逆元，但不存在右逆元。

(2) 若含幺半群 S 中元素既有左逆元，又有右逆元，则 a 一定是可逆元。

♠

解 (1) 记 $M(N)$ 为 N 的所有变换组成的含幺半群，其中元素 f 定义为

$$f(n)=n+1,\forall n\in N$$

考虑 $g_k(n)=\begin{cases}n-1,n\geq 1\\k,n=0\end{cases}$ 从而对任意 $k\in N$ 有 $g_kf(n)=n$，从而 g_k 为左逆元，故有无穷多左逆元。但是若存在右逆元 h，则 $f(h(0))=0$，即 $h(0)+1=0$，即 $h(0)=-1$，矛盾，所以不存在。(2) 设 $ba=ac=e$，则有 $b=be=b(ac)=(ba)c=ec=c$，得证

性质 [群的简单性质]

(1)G 的单位元是唯一的（用 e 表示 G 的单位元）

证　设 e 和 $e^{'}$ 都是 G 的单位元，则 $e = ee^{'} = e$

(2)G 中任意元 a 的逆元是唯一的（今后用 a^{-1} 表示 a 的逆元）

证　设 b 和 c 都是 a 的逆元，则 $c = ec = (ba)c = b(ac) = be = b$

(3) 穿脱原理：$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}, \forall a, b \in G$，以及 $(a^{-1})^{-1} = a, \forall a \in G$

证　由 $(b^{-1}a^{-1})(ab) = b^{-1}(a^{-1}a)b = b^{-1}eb = b^{-1}b = e$ 以及

$(ab)(b^{-1}a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1} = aea^{-1} = aa^{-1} = e$

知 $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$，类似可证 $(a^{-1})^{-1} = a$

(4) 左消去律：即，由 $ab = ac$ 可推出 $b = c$。右消去律：即，由 $ba = ca$ 可推出 $b = c$

证 由 $ab = ac$ 知 $a^{-1}(ab) = a^{-1}(ac)$，由此即得 $(a^{-1}a)b = (a^{-1}a)c$，即 $eb = ec$，即 $b = c$。同理，可证右消去律。

定义 1.4 (有限群的群表)

考虑一个有限群 $G = \{a_1, \cdots, a_n\}$ 我们将 G 中元素两两相乘的结果列出 ((i, j) 位置上为 a_ia_j)

a_1a_1	a_1a_2	$\cdots$	a_1a_n
a_2a_1	a_2a_2	$\cdots$	a_2a_n
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
a_na_1	a_na_2	$\cdots$	a_na_n

♣

命题 1.3

一个有限群 G 交换当切仅当相应的群表对称

♠

在一个半群 G 中，一个元 $e_l \in G$ 称为 G 的左幺元，如果 $e_lg = g, \forall g \in G$

设半群 G 有左幺元 e_l，称元 $a \in G$(相对于 e_l) 有左逆元，如果存在 $a_l^{-1} \in G$ 使得 $a_l^{-1}a = e_l$，将 a_l^{-1} 称为 a 的左逆元

命题 1.4 (群的单边定义)

设 G 是半群，则 G 是群当且仅当 G 有左幺元，且任一元均有左逆元

♠

证明 必要性显然，只需证明充分性。

先证 g 的左逆元有性质 $gg_l^{-1} = e_l$, 有

$$\begin{aligned}
gg_l^{-1} &= e_l(gg_l^{-1}) \\
&= ((g_l^{-1})_l^{-1}g_l^{-1})gg_l^{-1} \\
&= (g_l^{-1})_l^{-1}(g_l^{-1}g)g_l^{-1} \\
&= (g_l^{-1})_l^{-1}e_lg_l^{-1} \\
&= (g_l^{-1})_l^{-1}g_l^{-1} \\
&= e_l
\end{aligned}$$

现在证明 e_l 也是 G 的右幺元，从而 e_l 是 G 的单位元。对任一元 g，由 $gg_l^{-1} = e_l$ 知

$$ge_l = g(g_l^{-1}g) = (gg_l^{-1})g = e_lg = g$$

即，e_l 也是 G 的右幺元。

最后，由性质 $gg_l^{-1} = e_l$ 知 g 的左逆元 g_l^{-1} 也是 g 的逆元。根据定义，G 是群。

命题 1.5

(1) 上述命题改为右幺元和右逆元也成立。

(2) 若改为一左一右，则命题不再成立。

命题 1.6 (有限半群成群的充要条件)

设 $(G, \cdot)$ 是有限半群，则 $(G, \cdot)$ 是群当且仅当 $(G, \cdot)$ 满足左消去律和右消去律。

证明 必要性显然，只需证明充分性。

设 $(G, \cdot)$ 是满足左消去律和右消去律的有限半群。取 $a \in G$，考虑 G 的子集 $Ga := \{ga \mid g \in G\}$，用 $|Ga|$ 表示 Ga 中元素的个数。由右消去律知，$|Ga| = |G|$。因为 G 是有限集合，所以 $Ga = G$。于是存在 $e \in G$ 使得 $ea = a$。

下证 e 是 G 的左单位元。对任意 $x \in G$，由左消去律知 $aG = G$，故存在 $y \in G$ 使得 $x = ay$。于是

$$ex = e(ay) = (ea)y = ay = x$$

则 e 是 G 的左单位元

再证任意元 $x \in G$ 均有左逆元，由 $Gx = G$ 知存在 $y \in G$ 使得

$$yx = e$$

即，x 有左逆元 y

根据群的单边定义，$(G, \cdot)$ 是群。

命题 1.7 (含幺半群生成群)

设 S 是含幺半群，记 $U(S)$ 为 S 中可逆元全体，则 $U(S)$ 构成群。

1.2 子群与陪集

第 2 章 环论

第 3 章 模论

第 4 章 域论

第 5 章 Galois 理论