

# 概率论选讲期末作业

## 正则条件概率的存在唯一性

Liyve

2025-06-23\*

**摘要** 本作业探讨了正则条件概率的概念, 重点关注其存在性与唯一性. [Röc16] 并未给出存在性与唯一性的证明, 因此, 严谨地补全这些证明成为本次作业的核心内容.

### 目录

|              |    |
|--------------|----|
| 1 前言         | 1  |
| 2 正则条件概率     | 2  |
| 3 正则条件概率的存在性 | 3  |
| 4 正则条件概率的唯一性 | 8  |
| 5 条件期望的积分表示  | 9  |
| 6 结语         | 10 |
| 致谢           | 10 |

### 1 前言

在上学期的 概率论 (双语) 学习过程中, **求是书院** 的同学们使用教材 [李贤平 97] 学习概率论. 该教材并未采用测度论的语言引入概率论, 也没有涉及条件期望的概念. 然而, 在本学期第二周的 数理统计课程证明中, 教材 [韦来生 15] 中出现了以条件概率积分形式给出的条件期望. 这让我猜测, 教材 [韦来生 15] 中提到的条件期望, 应该与我们上学期在 [Röc16] 中学习到的内容是一致的. 经过与同学们讨论, 大家始终未能得出令人满意的结论. 直到第四周的 概率论选讲课程中, 正则条件概率的概念被简要介绍, 但 [Röc16] 认为该主题与后续课程内容关联不大, 因而未作深入讨论. 因此, 我决定将这一主题作为本次期末作业的研究重点.

---

\*最后更新于 2025-07-02.

## 2 正则条件概率

在课上的讨论中, 我们注意到条件概率

$$P[A \mid \mathcal{A}_0] := \mathbb{E}[\mathbb{I}_A \mid \mathcal{A}_0]$$

在几乎处处意义下具有以下性质:

$$0 \leq P[A \mid \mathcal{A}_0] \leq 1$$

$$P[\emptyset \mid \mathcal{A}_0] = 0; \quad P[\Omega \mid \mathcal{A}_0] = 1$$

对于两两无交的  $A_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$P\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \mid \mathcal{A}_0\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P[A_n \mid \mathcal{A}_0]$$

然而, 这里的零测集依赖于每一个可测集  $A$ , 并不存在一个对所有  $A$  都适用的”通用”零测集, 使得条件概率  $P[A \mid \mathcal{A}_0]$  对  $A$  成为一个概率测度. 这促使我们寻求一种更精细的方式, 以更强的意义刻画  $P[A \mid \mathcal{A}_0]$ .

**定义 1 (概率核)** 设  $(\Omega, \mathcal{A})$  和  $(\Omega', \mathcal{A}')$  是一对可测空间. 若函数  $K : \Omega \times \mathcal{A}' \rightarrow [0, 1]$  满足:

- 对于任意  $A' \in \mathcal{A}'$ , 映射  $\omega \mapsto K(\omega, A')$  是  $\mathcal{A}$ -可测的;
- 对于任意  $\omega \in \Omega$ , 映射  $A' \mapsto K(\omega, A')$  是  $(\Omega', \mathcal{A}')$  上的概率测度.

则称  $K$  为**概率核** (Probability Kernel) .

为了获得理想的”条件概率”, 我们需要在结构更良好的空间中进行工作, 在这样的空间里上述构造才能被严格地定义.

**定义 2 (标准 Borel 空间)** 如果可测空间  $(\Omega, \mathcal{A})$  上存在一个完备度量  $d$ , 使得  $(\Omega, d)$  是可分度量空间, 并且  $\mathcal{A}$  是由该拓扑生成的 Borel  $\sigma$ -代数, 则称  $(\Omega, \mathcal{A})$  为**标准 Borel 空间** (Standard Borel Space) .

**命题 1 (正则条件概率)** 参见 [Röc16, Proposition 5.4.3]

设  $(\Omega, \mathcal{A})$  是标准 Borel 空间,  $P$  是  $(\Omega, \mathcal{A})$  上的概率测度. 则对于每个子  $\sigma$ -代数  $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ , 存在从  $(\Omega, \mathcal{A}_0)$  到  $(\Omega, \mathcal{A})$  的概率核  $K_{\mathcal{A}_0}$ , 使得对所有  $A \in \mathcal{A}$ , 有:

$$K_{\mathcal{A}_0}(\omega, A) = P[A \mid \mathcal{A}_0](\omega) \quad \text{对 } P\text{-几乎处处的 } \omega \in \Omega.$$

其中例外集可能依赖于  $A$ .

若  $\tilde{K}_{\mathcal{A}_0}$  也是从  $(\Omega, \mathcal{A}_0)$  到  $(\Omega, \mathcal{A})$  的概率核, 并满足同样的性质, 则存在  $P$ -零测集  $N \in \mathcal{A}$ , 使得对每个  $\omega \in \Omega \setminus N$  及每个  $A \in \mathcal{A}$ , 有:

$$K_{\mathcal{A}_0}(\omega, A) = \tilde{K}_{\mathcal{A}_0}(\omega, A) \quad \text{对所有 } A \in \mathcal{A}.$$

$K_{\mathcal{A}_0}(\omega, A)$  被称为由  $\mathcal{A}_0$  给定的正则条件概率.

### 3 正则条件概率的存在性

在给出证明之前, 我们先陈述并证明后续论证所需的一些引理和定理.

**引理 1 (Doob-Dynkin 引理)** 设  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  是概率空间,  $X : \Omega \rightarrow S$  是从  $\Omega$  到可测空间  $(S, \mathcal{S})$  的可测函数. 如果  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  是  $\sigma(X)$ -可测的, 则存在可测函数  $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ , 使得  $f = g \circ X$  几乎处处成立.

**引理 1 的证明** 设  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  是  $\sigma(X)$ -可测的, 其中  $X : \Omega \rightarrow S$  可测.

#### 第一步: $\sigma(X)$ 的结构

由  $X$  生成的  $\sigma$ -代数为

$$\sigma(X) = \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{S}\}.$$

由于  $f$  是  $\sigma(X)$ -可测的, 对于任意 Borel 集  $B \subseteq \mathbb{R}$ , 有

$$f^{-1}(B) \in \sigma(X).$$

因此, 存在  $A_B \in \mathcal{S}$ , 使得

$$f^{-1}(B) = X^{-1}(A_B).$$

这定义了一个从  $\mathbb{R}$  的 Borel 集到  $\mathcal{S}$  的映射  $B \mapsto A_B$ . 为保证一致性, 该映射需保持集合运算 (如并、交、补), 这由  $f^{-1}$  和  $X^{-1}$  都是  $\sigma$ -同态所保证.

#### 第二步: 用有理区间构造 $g$

定义  $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ . 对每个有理数  $r \in \mathbb{Q}$ , 设

$$A_r = A_{(-\infty, r]} \in \mathcal{S},$$

其中  $A_{(-\infty, r]}$  满足  $f^{-1}((-\infty, r]) = X^{-1}(A_r)$ .

对  $s \in S$ , 定义

$$g(s) = \inf\{r \in \mathbb{Q} : s \in A_r\}.$$

该下确界是良定义的, 因为:

- 对任意  $s \in S$ , 由于  $f(\omega) \in \mathbb{R}$ , 必有某个  $r \in \mathbb{Q}$  使  $f(\omega) \leq r$ , 从而  $X(\omega) \in A_r$ .
- 集合  $\{r \in \mathbb{Q} : s \in A_r\}$  有下界.

#### 第三步: 验证 $f = g \circ X$ 几乎处处成立

对  $\omega \in \Omega$ , 我们断言  $f(\omega) = g(X(\omega))$ , 除了一个  $P$ -零测集外.

- 若  $f(\omega) \leq r, r \in \mathbb{Q}$ :
  - $f(\omega) \leq r$ , 则  $\omega \in f^{-1}((-\infty, r]) = X^{-1}(A_r)$ , 即  $X(\omega) \in A_r$ , 故  $g(X(\omega)) \leq r$ .
  - 反之, 若  $X(\omega) \in A_r$ , 则  $g(X(\omega)) \leq r$ , 即  $f(\omega) \leq r$ .
- 若  $f(\omega) > r, r \in \mathbb{Q}$ :
  - $f(\omega) > r$ , 则  $\omega \notin f^{-1}((-\infty, r]) = X^{-1}(A_r)$ , 即  $X(\omega) \notin A_r$ , 故  $g(X(\omega)) > r$ .

因此,  $g(X(\omega)) \leq f(\omega)$  且  $g(X(\omega)) \geq f(\omega)$ , 除了  $f(\omega) \neq g(X(\omega))$  的零测集外. 由于  $f$  和  $g \circ X$  都是可测的, 集合  $\{\omega : f(\omega) \neq g(X(\omega))\}$  可测且测度为零.

**第四步:  $g$  的可测性**

要证明  $g$  是  $\mathcal{S}$ -可测的, 对任意  $a \in \mathbb{R}$ , 需有  $\{s \in S : g(s) \leq a\} \in \mathcal{S}$ .

- $a$  为有理数时:

$$\{s \in S : g(s) \leq a\} = \bigcap_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ r < a}} A_r^c \cup A_a.$$

这由  $g$  的定义可得.

- $a$  为任意实数时: 用递减有理数列  $\{r_n\}$  逼近  $a$ , 则

$$\{s \in S : g(s) \leq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{r_n}.$$

每个  $A_{r_n} \in \mathcal{S}$ , 可数交仍在  $\mathcal{S}$  中.

因此,  $g$  是  $\mathcal{S}$ -可测的.

**第五步: 零测集上的唯一性**

若  $g'$  也是满足  $f = g' \circ X$  几乎处处的可测函数, 则  $g(X(\omega)) = g'(X(\omega))$  对  $P$ -几乎处处  $\omega$  成立. 由于  $X$  可测,  $P_X = P \circ X^{-1}$ , 故  $g = g'$  在  $P_X$ -几乎处处成立.

综上, 构造了可测函数  $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ , 使  $f = g \circ X$  几乎处处成立, 证毕.  $\square$

**注记 Doob-Dynkin 引理**说明, 任何  $\sigma(X)$ -可测函数  $f$  都可以表示为  $f = g \circ X$ , 其中  $g$  是某个可测函数. 在正则条件概率的背景下, 这意味着条件期望  $\mathbb{E}[1_A | \mathcal{A}_0]$  作为  $\mathcal{A}_0$ -可测函数, 可以表示为某个生成随机变量  $\eta$  (如  $\eta(\omega) = \omega$ ) 的函数. 这为构造核  $K_{\mathcal{A}_0}(\omega, A)$  提供了基础, 使其成为  $\omega$  的可测函数, 并满足所需的性质.

**定理 1 (Carathéodory 扩张定理)** 设  $\mathcal{C}$  是集合  $\Omega$  上的一个代数,  $\mu_0 : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$  是一个可数可加的前测度 (pre-measure). 则存在一个测度  $\mu$ , 定义在由  $\mathcal{C}$  生成的  $\sigma$ -代数  $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$  上, 并且  $\mu|_{\mathcal{C}} = \mu_0$ . 此外, 若  $\mu_0$  是  $\sigma$ -有限的, 则该扩张是唯一的.

**定理 1 的证明** 设  $\mathcal{C}$  是  $\Omega$  上的一个集合代数,  $\mu_0 : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$  是可数可加的前测度.

**第一步: 外测度的构造**

对任意  $E \subseteq \Omega$ , 定义外测度  $\mu^*$ :

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(C_n) : E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n, C_n \in \mathcal{C} \right\}.$$

可验证  $\mu^*$  满足外测度的三条性质:

- **单调性:** 若  $A \subseteq B$ , 则  $B$  的任意覆盖也是  $A$  的覆盖, 故  $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ .
- **可列次可加性:** 对任意  $\{A_n\}$ , 分别取  $\{C_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$  覆盖  $A_n$  且  $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(C_{n,k}) \leq \mu^*(A_n) + \epsilon/2^n$ . 则  $\bigcup_{n,k} C_{n,k}$  覆盖  $\bigcup_n A_n$ , 且  $\sum_{n,k} \mu_0(C_{n,k}) \leq \sum_n \mu^*(A_n) + \epsilon$ . 令  $\epsilon \rightarrow 0$  得  $\mu^*(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n \mu^*(A_n)$ .
- **空集:**  $\mu^*(\emptyset) = 0$ , 因  $\emptyset \subseteq \emptyset$  且  $\mu_0(\emptyset) = 0$ .

**第二步: Carathéodory 可测集**

称  $A \subseteq \Omega$  是  $\mu^*$ -可测的, 若对任意  $E \subseteq \Omega$ ,

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A).$$

记所有  $\mu^*$ -可测集为  $\mathcal{A}$ . 可证明  $\mathcal{A}$  是  $\sigma$ -代数:

- **对补封闭:** 若  $A \in \mathcal{A}$ , 则  $A^c$  也满足同样条件.
- **对可列并封闭:** 先对有限并用归纳法证明, 再对可列并用极限逼近.

**第三步: 限制在  $\mathcal{A}$  上是测度**

将  $\mu = \mu^*|_{\mathcal{A}}$ , 可验证其为测度:

- 对任意两两不交的  $\{A_n\} \subseteq \mathcal{A}$ , 由可列次可加性有  $\mu^*(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n \mu^*(A_n)$ .
- 反向不等式: 对有限并用 Carathéodory 条件递归证明  $\mu^*(\bigcup_{n=1}^N A_n) = \sum_{n=1}^N \mu^*(A_n)$ , 再令  $N \rightarrow \infty$  得可列可加性.

**第四步: 扩张性质**

对  $C \in \mathcal{C}$ , 需证  $C$  是  $\mu^*$ -可测集且  $\mu^*(C) = \mu_0(C)$ :

- **可测性:** 对任意  $E \subseteq \Omega$ , 设  $\{C_n\}$  覆盖  $E$ , 则  $C_n \cap C, C_n \setminus C \in \mathcal{C}$ , 且  $\mu_0(C_n) = \mu_0(C_n \cap C) + \mu_0(C_n \setminus C)$ . 两边求和得  $\sum_n \mu_0(C_n) \geq \mu^*(E \cap C) + \mu^*(E \setminus C)$ , 对所有覆盖取下确界得  $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap C) + \mu^*(E \setminus C)$ .
- **等式:** 由定义  $\mu^*(C) \leq \mu_0(C)$ . 反向不等式: 若  $C \subseteq \bigcup_n C_n$ , 则  $\mu_0(C) \leq \sum_n \mu_0(C_n \cap C) \leq \sum_n \mu_0(C_n)$ , 取下确界得  $\mu^*(C) \geq \mu_0(C)$ .

**第五步: 唯一性**

若  $\mu_0$  是  $\sigma$ -有限的, 则扩张唯一. 设  $\nu$  也是  $\mathcal{A}$  上的测度且  $\nu|_{\mathcal{C}} = \mu_0$ :

- 用  $\pi$ - $\lambda$  定理:  
 $\mathcal{C}$  是  $\pi$ -系统 (对有限交封闭).  
 - 集合  $\{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = \nu(A)\}$  是  $\lambda$ -系统.  
 -  $\mu$  与  $\nu$  在  $\mathcal{C}$  上一致, 故在  $\sigma(\mathcal{C})$  上一致.
- **$\sigma$ -有限性:**  $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$ ,  $\mu_0(\Omega_n) < \infty$ . 对任意  $A \in \mathcal{A}$ ,  $\mu(A \cap \Omega_n) = \nu(A \cap \Omega_n)$ , 故  $\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A \cap \Omega_n) = \nu(A)$ .

□

**注记 Carathéodory 扩张定理** 保证: 只要前测度在代数上是  $\sigma$ -有限的, 就能唯一地将其扩张为生成的  $\sigma$ -代数上的测度. 在正则条件概率存在性的证明中, 这一结论确保了定义在可数生成集  $\mathcal{C}$  上的有限可加映射  $f_A(\omega) = \mathbb{E}[1_A | \mathcal{A}_0](\omega)$  能唯一扩张为  $\mathcal{A}$  上的概率测度  $K_{\mathcal{A}_0}(\omega, \cdot)$ . 这一步骤对于严谨构造正则条件概率核至关重要.

**定理 2** [KK02, Theorem 6.3]

对于任意 Borel 空间  $S$  和可测空间  $T$ , 设  $\xi$  和  $\eta$  分别为  $S$  和  $T$  中的随机元. 则存在从  $T$  到  $S$  的概率核  $\mu$ , 使得

$$\mathbb{P}[\xi \in \cdot \mid \eta] = \mu(\eta, \cdot) \quad \text{a.e. } \mathcal{L}(\eta),$$

且  $\mu$  在  $\mathcal{L}(\eta)$  几乎处处唯一.

**定理 2 的证明** 我们可以假设  $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . 对每个  $r \in \mathbb{Q}$ , 可以选取某个可测函数  $f_r = f(\cdot, r) : T \rightarrow [0, 1]$ , 使得

$$f(\eta, r) = \mathbb{P}[\xi \leq r \mid \eta] \quad \text{a.e., } r \in \mathbb{Q}. \quad (1)$$

令  $A$  为所有  $t \in T$  使得  $f(t, r)$  关于  $r \in \mathbb{Q}$  单调递增, 且在  $\pm\infty$  处极限分别为 1 和 0 的集合. 由于  $A$  由可数个可测条件刻画, 且这些条件在  $\eta$  上几乎处处成立, 故  $A \in \mathcal{T}$  且  $\eta \in A$  几乎处处成立. 现在定义

$$F(t, x) = \mathbf{1}_A(t) \inf_{r > x} f(t, r) + \mathbf{1}_{A^c}(t) \mathbf{1}\{x \geq 0\}, \quad x \in \mathbb{R}, t \in T,$$

注意到对每个  $t \in T$ ,  $F(t, \cdot)$  是  $\mathbb{R}$  上的分布函数. 因此, 由命题 ~??, 存在概率测度  $m(t, \cdot)$  使得

$$m(t, (-\infty, x]) = F(t, x), \quad x \in \mathbb{R}, t \in T.$$

对每个  $x$ ,  $F(t, x)$  显然关于  $t$  可测, 通过单调类论证可得  $m$  是从  $T$  到  $\mathbb{R}$  的概率核.

由式 1 及  $\mathbb{E}^\eta$  的单调收敛性质, 有

$$m(\eta, (-\infty, x]) = F(\eta, x) = \mathbb{P}[\xi \leq x \mid \eta] \quad \text{a.e., } x \in \mathbb{R}.$$

利用单调类论证和几乎处处的单调收敛性质, 可将上述关系推广为

$$m(\eta, B) = \mathbb{P}[\xi \in B \mid \eta] \quad \text{a.e., } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \quad (2)$$

特别地,  $m(\eta, S^c) = 0$  几乎处处成立, 因此在  $\mathcal{S} = \mathcal{B} \cap S$  上, 令

$$\mu(t, \cdot) = m(t, \cdot) \mathbf{1}\{m(t, S) = 1\} + \delta_s \mathbf{1}\{m(t, S) < 1\}, \quad t \in T,$$

其中  $s \in S$  任取, 则式 2 对  $\mu$  依然成立. 如果  $\mu'$  是另一个满足条件的核, 则有

$$\mu(\eta, (-\infty, r]) = \mathbb{P}[\xi \leq r \mid \eta] = \mu'(\eta, (-\infty, r]) \quad \text{a.e., } r \in \mathbb{Q},$$

再由单调类论证可得  $\mu(\eta, \cdot) = \mu'(\eta, \cdot)$  几乎处处成立.  $\square$

**正则条件概率存在性的证明** 设  $(\Omega, \mathcal{A})$  是标准 Borel 空间,  $P$  是其上的概率测度,  $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$  是子  $\sigma$ -代数.

### 第一步: 可数生成集与条件期望

由于  $(\Omega, \mathcal{A})$  是标准 Borel 空间, 存在使  $\mathcal{A}$  成为 Borel  $\sigma$ -代数的 Polish 拓扑. 标准 Borel 空间的一个重要性质是: 对任意子  $\sigma$ -代数, 概率测度都存在正则条件概率.

取  $\mathcal{C}$  为生成  $\mathcal{A}$  的可数  $\pi$ -系统. 对每个  $A \in \mathcal{C}$ , 条件期望  $\mathbb{E}[1_A \mid \mathcal{A}_0]$  存在且为  $\mathcal{A}_0$ -可测函数,  $P$ -几乎处处唯一. 由 Doob-Dynkin 引理 (见引理 1), 对每个  $A \in \mathcal{C}$ , 存在可测函数  $f_A : \Omega \rightarrow [0, 1]$ , 使得

$$\mathbb{E}[1_A \mid \mathcal{A}_0] = f_A \circ \eta \quad \text{几乎处处},$$

其中  $\eta$  是生成  $\mathcal{A}_0$  的可测函数 (如  $\eta(\omega) = \omega$ ).

**第二步：通过扩张构造概率核**

对每个固定  $\omega \in \Omega$ , 定义  $f_A(\omega)$ ,  $A \in \mathcal{C}$ . 映射  $A \mapsto f_A(\omega)$  满足:

- **有限可加性:** 若  $A_1, A_2 \in \mathcal{C}$  且互不相交, 则  $f_{A_1 \cup A_2}(\omega) = f_{A_1}(\omega) + f_{A_2}(\omega)$ ;
- **非负性:**  $f_A(\omega) \geq 0$ ;
- **归一性:**  $f_\Omega(\omega) = 1$ .

要将  $f_A(\omega)$  扩张为  $(\Omega, \mathcal{A})$  上的概率测度, 可用 Carathéodory 扩张定理 (见定理 1). 由于  $\mathcal{C}$  是  $\pi$ -系统, 若  $f_A(\omega)$  在  $\mathcal{C}$  上可数可加, 则扩张唯一. 这可由主导收敛定理和  $\mathcal{C}$  生成  $\mathcal{A}$  得到.

因此, 对  $P$ -几乎处处的  $\omega$ , 存在唯一的概率测度  $K_{\mathcal{A}_0}(\omega, \cdot)$ , 使得

$$K_{\mathcal{A}_0}(\omega, A) = f_A(\omega), \quad \forall A \in \mathcal{C}.$$

**第三步：概率核的可测性**

对每个  $A \in \mathcal{A}$ , 映射  $\omega \mapsto K_{\mathcal{A}_0}(\omega, A)$  需为  $\mathcal{A}_0$ -可测. 由于  $\mathcal{C}$  生成  $\mathcal{A}$ , 可用  $\pi$ - $\lambda$  定理: - 设  $\mathcal{L} = \{A \in \mathcal{A} : K_{\mathcal{A}_0}(\cdot, A) \text{ 是 } \mathcal{A}_0\text{-可测}\}$ ; -  $\mathcal{L}$  是包含  $\mathcal{C}$  的  $\lambda$ -系统, 故  $\mathcal{L} = \mathcal{A}$ .

**第四步：联合可测性**

由定理 2, 存在从  $\mathcal{A}_0$  到  $\mathcal{A}$  的概率核  $\mu$ , 使得

$$\mathbb{P}[\xi \in \cdot \mid \eta] = \mu(\eta, \cdot) \quad \text{几乎处处},$$

其中  $\xi, \eta$  是  $\Omega$  上的随机元. 此处  $\mu(\eta(\omega), A) = K_{\mathcal{A}_0}(\omega, A)$ ,  $P$ -几乎处处成立.  $(\omega, A) \mapsto K_{\mathcal{A}_0}(\omega, A)$  的联合可测性由可数生成集  $\mathcal{C}$  的构造和  $\mu$  的唯一性保证.

**第五步：条件概率的验证**

对所有  $A \in \mathcal{A}$ ,  $K_{\mathcal{A}_0}(\omega, A)$  满足:

- **可测性:**  $K_{\mathcal{A}_0}(\cdot, A)$  是  $\mathcal{A}_0$ -可测;
- **积分公式:** 对任意  $B \in \mathcal{A}_0$ ,

$$\int_B K_{\mathcal{A}_0}(\omega, A) dP(\omega) = P(A \cap B).$$

该式对  $A \in \mathcal{C}$  成立, 由  $\pi$ - $\lambda$  定理推广到所有  $A \in \mathcal{A}$ .

因此,  $K_{\mathcal{A}_0}$  是正则条件概率核.

参见 [BR07] 和 [KK02]. □

因此, 在标准 Borel 空间中, 对于任意子  $\sigma$ -代数  $\mathcal{A}_0$ , 正则条件概率总是存在的.

**注记** 标准 Borel 空间的假设是至关重要的. 对于一般的可测空间, 正则条件概率可能并不存在.

## 4 正则条件概率的唯一性

正则条件概率在  $P$ -零测集意义下是唯一的. 即, 如果  $K_{\mathcal{A}_0}$  和  $\tilde{K}_{\mathcal{A}_0}$  都是关于  $\mathcal{A}_0$  的正则条件概率, 则存在  $P$ -零测集  $N$ , 使得对所有  $\omega \notin N$  及所有  $A \in \mathcal{A}$ ,

$$K_{\mathcal{A}_0}(\omega, A) = \tilde{K}_{\mathcal{A}_0}(\omega, A).$$

这意味着正则条件概率在本质上是唯一的: 任意两个版本在概率为零的集合之外都一致.

**正则条件概率唯一性的证明** 设  $K_{\mathcal{A}_0}$  和  $\tilde{K}_{\mathcal{A}_0}$  是关于  $\mathcal{A}_0$  的两个正则条件概率. 对每个  $A \in \mathcal{A}$ , 定义

$$N_A = \{\omega \in \Omega : K_{\mathcal{A}_0}(\omega, A) \neq \tilde{K}_{\mathcal{A}_0}(\omega, A)\}.$$

### 第一步: 可数生成集上的零测集

由正则条件概率的定义,  $K_{\mathcal{A}_0}(\cdot, A)$  和  $\tilde{K}_{\mathcal{A}_0}(\cdot, A)$  都是  $\mathbb{E}[1_A | \mathcal{A}_0]$  的版本, 因此  $P$ -几乎处处相等, 即  $P(N_A) = 0$ .

由于  $\mathcal{A}$  是标准 Borel, 存在可数  $\pi$ -系统  $\mathcal{C}$  生成  $\mathcal{A}$ . 定义

$$N = \bigcup_{A \in \mathcal{C}} N_A.$$

$\mathcal{C}$  可数,  $N$  是可数个  $P$ -零测集的并, 故  $P(N) = 0$ .

### 第二步: $\pi$ - $\lambda$ 定理推广到整个 $\sigma$ -代数

对任意  $\omega \notin N$ , 定义

$$\mathcal{D}_\omega = \{A \in \mathcal{A} : K_{\mathcal{A}_0}(\omega, A) = \tilde{K}_{\mathcal{A}_0}(\omega, A)\}.$$

$\mathcal{D}_\omega$  是包含  $\mathcal{C}$  的  $\lambda$ -系统:

- **包含全集:**  $K_{\mathcal{A}_0}(\omega, \Omega) = 1 = \tilde{K}_{\mathcal{A}_0}(\omega, \Omega)$ , 故  $\Omega \in \mathcal{D}_\omega$ .
- **对可列不交并封闭:** 若  $A_n \in \mathcal{D}_\omega$  两两不交, 则

$$K_{\mathcal{A}_0}\left(\omega, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} K_{\mathcal{A}_0}(\omega, A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{K}_{\mathcal{A}_0}(\omega, A_n) = \tilde{K}_{\mathcal{A}_0}\left(\omega, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

- **对补集封闭:** 若  $A \in \mathcal{D}_\omega$ , 则

$$K_{\mathcal{A}_0}(\omega, A^c) = 1 - K_{\mathcal{A}_0}(\omega, A) = 1 - \tilde{K}_{\mathcal{A}_0}(\omega, A) = \tilde{K}_{\mathcal{A}_0}(\omega, A^c).$$

由于  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}_\omega$  且  $\mathcal{C}$  是  $\pi$ -系统,  $\pi$ - $\lambda$  定理得  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}_\omega$ . 因此对所有  $\omega \notin N$  及  $A \in \mathcal{A}$ , 有  $K_{\mathcal{A}_0}(\omega, A) = \tilde{K}_{\mathcal{A}_0}(\omega, A)$ .

$N$  是  $P$ -零测集, 故正则条件概率在  $P$ -几乎处处唯一.  $\square$

**注记** 这一唯一性性质确保, 尽管正则条件概率在每一点上未必唯一, 但任意两个版本在  $P$ -几乎处处都一致.



## 5 条件期望的积分表示

至此, 我们已经证明了条件概率可以提升为更精细的版本 (即正则条件概率), 它本身是一个概率测度. 这使得我们可以以它为测度定义积分.

接下来, 我们将证明: 以正则条件概率为测度的积分运算, 恰好与条件期望一致.

**定理 3 (条件期望的积分表示)** 设  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  是一个概率空间,  $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$  是一个子  $\sigma$ -代数,  $K(\omega, A)$  是一个概率核, 满足  $K(\omega, A) = \mathbb{E}[1_A | \mathcal{A}_0](\omega)$  即是说, 对于所有  $A \in \mathcal{A}$ . 那么对于所有可积随机变量  $X$ , 它的条件期望满足:

$$\mathbb{E}[X | \mathcal{A}_0](\omega) = \int_{\Omega} X(\omega') K(\omega, d\omega') \quad \text{a.e. } P.$$

### 定理 3 的证明

#### 第一步: 示性函数

设  $X = 1_A$  关于  $A \in \mathcal{A}$ . 由正则条件概率的定义有:

$$\mathbb{E}[1_A | \mathcal{A}_0](\omega) = K(\omega, A) = \int_{\Omega} 1_A(\omega') K(\omega, d\omega') \quad \text{a.e. } P.$$

#### 第二步: 简单函数

设  $X = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$  关于  $A_i \in \mathcal{A}$ ,  $a_i \in \mathbb{R}$ . 由条件期望与积分的线性性有:

$$\mathbb{E}[X | \mathcal{A}_0](\omega) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{E}[1_{A_i} | \mathcal{A}_0](\omega) = \sum_{i=1}^n a_i \int_{\Omega} 1_{A_i}(\omega') K(\omega, d\omega') = \int_{\Omega} X(\omega') K(\omega, d\omega').$$

#### 第三步: 非负可积函数

设  $X \geq 0$  是可测函数. 取简单函数单调列  $X_n \uparrow X$ . 由 Levi 单调收敛定理:

- $\mathbb{E}[X_n | \mathcal{A}_0] \uparrow \mathbb{E}[X | \mathcal{A}_0]$  a.e.
- $\int X_n K(\omega, d\omega') \uparrow \int X K(\omega, d\omega')$ .

因此:

$$\mathbb{E}[X | \mathcal{A}_0](\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n | \mathcal{A}_0](\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int X_n K(\omega, d\omega') = \int X K(\omega, d\omega') \quad \text{a.e. } P.$$

#### 第四步: 一般可积函数

对于任意可积函数  $X$ , 可分解为  $X = X^+ - X^-$  其中  $X^{\pm} \geq 0$ . 由第三步:

$$\mathbb{E}[X | \mathcal{A}_0] = \mathbb{E}[X^+ | \mathcal{A}_0] - \mathbb{E}[X^- | \mathcal{A}_0] = \int X^+ K(\omega, d\omega') - \int X^- K(\omega, d\omega') = \int X K(\omega, d\omega') \quad \text{a.e. } P.$$

#### Step 5: 可测性与唯一性

- **可测性:** 根据概率核  $K$  的构造, 积分  $\int X K(\omega, d\omega')$  是  $\mathcal{A}_0$ -可测的.
- **唯一性:** 正则条件概率是一致的在  $P$ -几乎处处的意义下, 确保了积分表示也是几乎处处一致的.

□

## 6 结语

通过本次作业的研究, 我们系统梳理了 Regular Conditional Probability 的构造逻辑, 并严格证明了其在标准 Borel 空间下的存在性与唯一性. 这一结果表明, 在满足良好拓扑结构的测度空间中, 条件概率可以被提升为一个关于样本点  $\omega$  的概率测度核  $K_{A_0}(\omega, A)$ , 从而避免了传统条件概率定义中因依赖于事件  $A$  而导致的“零测集选取问题”. 这一结论为条件期望的积分表示提供了严格的数学基础.

然而, 正则条件概率的构造对空间的结构性质具有强依赖性. 若放宽至一般可测空间, 此类核的存在性可能失效.

## 致谢

衷心感谢朱蓉禅老师在本学期《概率论选讲》课程中的指导. 感谢刘晨浩同学与宋柯师姐在课外学习提供的帮助. 同时也感谢大三强基计划的钟星宇学长与我共同探究“不同版本的教材中条件概率与条件期望是否一致”, 促使我深入思考正则化条件概率的必要性. 此外, 感谢钟星宇学长的开源排版工具SunQuarTex, 使本文档的排版得以高效完成.

## 参考文献

- [BR07] Vladimir Igorevich Bogachev and Maria Aparecida Soares Ruas. *Measure theory*. Vol. 1. 1. Springer, 2007.
- [KK02] Olav Kallenberg and Olav Kallenberg. *Foundations of modern probability*. Vol. 2. Springer, 2002.
- [Röc16] Michael Röckner. “Probability Theory I and II”. Unpublished lecture notes for Probability Theory I and II, Universit“ at Bielefeld, 2016. 2016.
- [李贤平 97] 李贤平. 概率论基础. 高等教育出版社, 1997.
- [韦来生 15] 韦来生. 数理统计. 科学出版社, 2015.