概率论选讲期末作业

正则条件概率的存在唯一性

Liyve

2025-06-23*

摘要 本作业探讨了正则条件概率的概念, 重点关注其存在性与唯一性. [Röc16] 并未给出存在性与唯一性的证明, 因此, 严谨地补全这些证明成为本次作业的核心内容.

目录

1 前言

在上学期的 概率论（双语）学习过程中, **求是书院**的同学们使用教材 [李贤平 97] 学习概率论. 该教材并未采用测度论的语言引入概率论, 也没有涉及条件期望的概念. 然而, 在本学期第二周的 数理统计课程证明中, 教材 [韦来生 15] 中出现了以条件概率积分形式给出的条件期望. 这让我猜测, 教材 [韦来生 15] 中提到的条件期望, 应该与我们上学期在 [Röc16] 中学习到的内容是一致的. 经过与同学们讨论, 大家始终未能得出令人满意的结论. 直到第四周的 概率论选讲课程中, 正则条件概率的概念被简要介绍, 但 [Röc16] 认为该主题与后续课程内容关联不大, 因而未作深入讨论. 因此, 我决定将这一主题作为本次期末作业的研究重点.

*最后更新于 2025-07-02.

2 正则条件概率

在课上的讨论中, 我们注意到条件概率

$$P[A \mid \mathcal{A}_0] := \mathbb{E}[\mathbb{I}_A \mid \mathcal{A}_0]$$

在几乎处处意义下具有以下性质:

$$0 \leq P[A \mid \mathcal{A}_0] \leq 1$$

$$P[\emptyset \mid \mathcal{A}_0] = 0;\ P[\Omega \mid \mathcal{A}_0] = 1$$

对于两两无交的 $A_n,\ n \in \mathbb{N}$,

$$P[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \mid \mathcal{A}_0] = \sum_{n=1}^{\infty} P[A_n \mid \mathcal{A}_0]$$

然而, 这里的零测集依赖于每一个可测集 A, 并不存在一个对所有 A 都适用的" 通用" 零测集, 使得条件概率 $P[A \mid \mathcal{A}_0]$ 对 A 成为一个概率测度. 这促使我们寻求一种更精细的方式, 以更强的意义刻画 $P[A \mid \mathcal{A}_0]$.

定义 1（概率核） 设 $(\Omega, \mathcal{A})$ 和 $(\Omega', \mathcal{A}')$ 是一对可测空间. 若函数 $K : \Omega \times \mathcal{A}' \to [0, 1]$ 满足:

- 对于任意 $A' \in \mathcal{A}'$, 映射 $\omega \mapsto K(\omega, A')$ 是 $\mathcal{A}$-可测的;
- 对于任意 $\omega \in \Omega$, 映射 $A' \mapsto K(\omega, A')$ 是 $(\Omega', \mathcal{A}')$ 上的概率测度.

则称 K 为**概率核**（Probability Kernel）.

为了获得理想的" 条件概率", 我们需要在结构更良好的空间中进行工作, 在这样的空间里上述构造才能被严格地定义.

定义 2（标准 Borel 空间） 如果可测空间 $(\Omega, \mathcal{A})$ 上存在一个完备度量 d, 使得 (Ω, d) 是可分度量空间, 并且 $\mathcal{A}$ 是由该拓扑生成的 Borel σ-代数, 则称 $(\Omega, \mathcal{A})$ 为**标准 Borel 空间**（Standard Borel Space）.

命题 1（正则条件概率） 参见 [Röc16, Proposition 5.4.3]

设 $(\Omega, \mathcal{A})$ 是标准 Borel 空间, P 是 $(\Omega, \mathcal{A})$ 上的概率测度. 则对于每个子 σ-代数 $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$, 存在从 $(\Omega, \mathcal{A}_0)$ 到 $(\Omega, \mathcal{A})$ 的概率核 $K_{\mathcal{A}_0}$, 使得对所有 $A \in \mathcal{A}$, 有:

$$K_{\mathcal{A}_0}(\omega, A) = P[A \mid \mathcal{A}_0](\omega) \quad \text{对 } P\text{-几乎处处的}\omega \in \Omega.$$

其中例外集可能依赖于 A.

若 $\tilde{K}_{\mathcal{A}_0}$ 也是从 $(\Omega, \mathcal{A}_0)$ 到 $(\Omega, \mathcal{A})$ 的概率核, 并满足同样的性质, 则存在 P-零测集 $N \in \mathcal{A}$, 使得对每个 $\omega \in \Omega \setminus N$ 及每个 $A \in \mathcal{A}$, 有:

$$K_{\mathcal{A}_0}(\omega, A) = \tilde{K}_{\mathcal{A}_0}(\omega, A) \quad \text{对所有} A \in \mathcal{A}.$$

$K_{\mathcal{A}_0}(\omega, A)$ 被称为由 $\mathcal{A}_0$ 给定的正则条件概率.

3 正则条件概率的存在性

在给出证明之前, 我们先陈述并证明后续论证所需的一些引理和定理.

引理 1（Doob-Dynkin 引理） 设 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ 是概率空间, $X : \Omega \to S$ 是从 Ω 到可测空间 $(S, \mathcal{S})$ 的可测函数. 如果 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ 是 $\sigma(X)$-可测的, 则存在可测函数 $g : S \to \mathbb{R}$, 使得 $f = g \circ X$ 几乎处处成立.

引理 1 的证明 设 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ 是 $\sigma(X)$-可测的, 其中 $X : \Omega \to S$ 可测.

第一步: $\sigma(X)$ 的结构

由 X 生成的 σ-代数为

$$\sigma(X) = \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{S}\}.$$

由于 f 是 $\sigma(X)$-可测的, 对于任意 Borel 集 $B \subseteq \mathbb{R}$, 有

$$f^{-1}(B) \in \sigma(X).$$

因此, 存在 $A_B \in \mathcal{S}$, 使得

$$f^{-1}(B) = X^{-1}(A_B).$$

这定义了一个从 $\mathbb{R}$ 的 Borel 集到 $\mathcal{S}$ 的映射 $B \mapsto A_B$. 为保证一致性, 该映射需保持集合运算（如并、交、补）, 这由 f^{-1} 和 X^{-1} 都是 σ-同态所保证.

第二步: 用有理区间构造 g

定义 $g : S \to \mathbb{R}$. 对每个有理数 $r \in \mathbb{Q}$, 设

$$A_r = A_{(-\infty, r]} \in \mathcal{S},$$

其中 $A_{(-\infty,r]}$ 满足 $f^{-1}((-\infty, r]) = X^{-1}(A_r)$.

对 $s \in S$, 定义

$$g(s) = \inf\{r \in \mathbb{Q} : s \in A_r\}.$$

该下确界是良定义的, 因为:

- 对任意 $s \in S$, 由于 $f(\omega) \in \mathbb{R}$, 必有某个 $r \in \mathbb{Q}$ 使 $f(\omega) \leq r$, 从而 $X(\omega) \in A_r$.
- 集合 $\{r \in \mathbb{Q} : s \in A_r\}$ 有下界.

第三步: 验证 $f = g \circ X$ 几乎处处成立

对 $\omega \in \Omega$, 我们断言 $f(\omega) = g(X(\omega))$, 除了一个 P-零测集外.

- **若 $f(\omega) \leq r$, $r \in \mathbb{Q}$:**
  - $f(\omega) \leq r$, 则 $\omega \in f^{-1}((-\infty, r]) = X^{-1}(A_r)$, 即 $X(\omega) \in A_r$, 故 $g(X(\omega)) \leq r$.
  - 反之, 若 $X(\omega) \in A_r$, 则 $g(X(\omega)) \leq r$, 即 $f(\omega) \leq r$.
- **若 $f(\omega) > r$, $r \in \mathbb{Q}$:**
  - $f(\omega) > r$, 则 $\omega \notin f^{-1}((-\infty, r]) = X^{-1}(A_r)$, 即 $X(\omega) \notin A_r$, 故 $g(X(\omega)) > r$.

因此, $g(X(\omega)) \leq f(\omega)$ 且 $g(X(\omega)) \geq f(\omega)$, 除了 $f(\omega) \neq g(X(\omega))$ 的零测集外. 由于 f 和 $g \circ X$ 都是可测的, 集合 $\{\omega : f(\omega) \neq g(X(\omega))\}$ 可测且测度为零.

第四步: g 的可测性

要证明 g 是 $\mathcal{S}$-可测的, 对任意 $a \in \mathbb{R}$, 需有 $\{s \in S : g(s) \le a\} \in \mathcal{S}$.

- a **为有理数时:**
$$\{s \in S : g(s) \le a\} = \bigcap_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ r < a}} A_r^c \cup A_a.$$
这由 g 的定义可得.

- a **为任意实数时:** 用递减有理数列 $\{r_n\}$ 逼近 a, 则
$$\{s \in S : g(s) \le a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{r_n}.$$
每个 $A_{r_n} \in \mathcal{S}$, 可数交仍在 $\mathcal{S}$ 中.

因此, g 是 $\mathcal{S}$-可测的.

第五步: 零测集上的唯一性

若 g' 也是满足 $f = g' \circ X$ 几乎处处的可测函数, 则 $g(X(\omega)) = g'(X(\omega))$ 对 P-几乎处处 ω 成立. 由于 X 可测, $P_X = P \circ X^{-1}$, 故 $g = g'$ 在 P_X-几乎处处成立.

综上, 构造了可测函数 $g : S \to \mathbb{R}$, 使 $f = g \circ X$ 几乎处处成立, 证毕. □

注记 Doob-Dynkin 引理说明, 任何 $\sigma(X)$-可测函数 f 都可以表示为 $f = g \circ X$, 其中 g 是某个可测函数. 在正则条件概率的背景下, 这意味着条件期望 $\mathbb{E}[1_A \mid \mathcal{A}_0]$ 作为 $\mathcal{A}_0$-可测函数, 可以表示为某个生成随机变量 η（如 $\eta(\omega) = \omega$）的函数. 这为构造核 $K_{\mathcal{A}_0}(\omega, A)$ 提供了基础, 使其成为 ω 的可测函数, 并满足所需的性质.

定理 1（Carathéodory 扩张定理） 设 $\mathcal{C}$ 是集合 Ω 上的一个代数, $\mu_0 : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ 是一个可数可加的前测度（pre-measure）. 则存在一个测度 μ, 定义在由 $\mathcal{C}$ 生成的 σ-代数 $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$ 上, 并且 $\mu|_{\mathcal{C}} = \mu_0$. 此外, 若 μ_0 是 σ-有限的, 则该扩张是唯一的.

定理 1 的证明 设 $\mathcal{C}$ 是 Ω 上的一个集合代数, $\mu_0 : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ 是可数可加的前测度.

第一步: 外测度的构造

对任意 $E \subseteq \Omega$, 定义外测度 μ^*:
$$\mu^*(E) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(C_n) : E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n,\, C_n \in \mathcal{C}\right\}.$$
可验证 μ^* 满足外测度的三条性质:

- **单调性**: 若 $A \subseteq B$, 则 B 的任意覆盖也是 A 的覆盖, 故 $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$.
- **可列次可加性**: 对任意 $\{A_n\}$, 分别取 $\{C_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ 覆盖 A_n 且 $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(C_{n,k}) \le \mu^*(A_n) + \epsilon/2^n$. 则 $\bigcup_{n,k} C_{n,k}$ 覆盖 $\bigcup_n A_n$, 且 $\sum_{n,k} \mu_0(C_{n,k}) \le \sum_n \mu^*(A_n) + \epsilon$. 令 $\epsilon \to 0$ 得 $\mu^*(\bigcup_n A_n) \le \sum_n \mu^*(A_n)$.
- **空集**: $\mu^*(\emptyset) = 0$, 因 $\emptyset \subseteq \emptyset$ 且 $\mu_0(\emptyset) = 0$.

第二步: Carathéodory 可测集

称 $A \subseteq \Omega$ 是 μ^*-可测的, 若对任意 $E \subseteq \Omega$,

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A).$$

记所有 μ^*-可测集为 $\mathcal{A}$. 可证明 $\mathcal{A}$ 是 σ-代数:

- **对补封闭**: 若 $A \in \mathcal{A}$, 则 A^c 也满足同样条件.
- **对可列并封闭**: 先对有限并用归纳法证明, 再对可列并用极限逼近.

第三步: 限制在 $\mathcal{A}$ 上是测度

将 $\mu = \mu^*|_{\mathcal{A}}$, 可验证其为测度:

- 对任意两两不交的 $\{A_n\} \subseteq \mathcal{A}$, 由可列次可加性有 $\mu^*(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n \mu^*(A_n)$.
- 反向不等式: 对有限并用 Carathéodory 条件递归证明 $\mu^*(\bigcup_{n=1}^N A_n) = \sum_{n=1}^N \mu^*(A_n)$, 再令 $N \to \infty$ 得可列可加性.

第四步: 扩张性质

对 $C \in \mathcal{C}$, 需证 C 是 μ^*-可测集且 $\mu^*(C) = \mu_0(C)$:

- **可测性**: 对任意 $E \subseteq \Omega$, 设 $\{C_n\}$ 覆盖 E, 则 $C_n \cap C, C_n \setminus C \in \mathcal{C}$, 且 $\mu_0(C_n) = \mu_0(C_n \cap C) + \mu_0(C_n \setminus C)$. 两边求和得 $\sum_n \mu_0(C_n) \geq \mu^*(E \cap C) + \mu^*(E \setminus C)$, 对所有覆盖取下确界得 $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap C) + \mu^*(E \setminus C)$.
- **等式**: 由定义 $\mu^*(C) \leq \mu_0(C)$. 反向不等式: 若 $C \subseteq \bigcup_n C_n$, 则 $\mu_0(C) \leq \sum_n \mu_0(C_n \cap C) \leq \sum_n \mu_0(C_n)$, 取下确界得 $\mu^*(C) \geq \mu_0(C)$.

第五步: 唯一性

若 μ_0 是 σ-有限的, 则扩张唯一. 设 ν 也是 $\mathcal{A}$ 上的测度且 $\nu|_{\mathcal{C}} = \mu_0$:

- 用 **π-λ 定理**:

  $\mathcal{C}$ 是 π-系统（对有限交封闭）.

  - 集合 $\{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = \nu(A)\}$ 是 λ-系统.
  - μ 与 ν 在 $\mathcal{C}$ 上一致, 故在 $\sigma(\mathcal{C})$ 上一致.

- **σ-有限性**: $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$, $\mu_0(\Omega_n) < \infty$. 对任意 $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A \cap \Omega_n) = \nu(A \cap \Omega_n)$, 故 $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap \Omega_n) = \nu(A)$.

□

注记 Carathéodory 扩张定理保证: 只要前测度在代数上是 σ-有限的, 就能唯一地将其扩张为生成的 σ-代数上的测度. 在正则条件概率存在性的证明中, 这一结论确保了定义在可数生成集 $\mathcal{C}$ 上的有限可加映射 $f_A(\omega) = \mathbb{E}[1_A \mid \mathcal{A}_0](\omega)$ 能唯一扩张为 $\mathcal{A}$ 上的概率测度 $K_{\mathcal{A}_0}(\omega, \cdot)$. 这一步骤对于严谨构造正则条件概率核至关重要.

定理 2 [KK02, Theorem 6.3]

对于任意 Borel 空间 S 和可测空间 T, 设 ξ 和 η 分别为 S 和 T 中的随机元. 则存在从 T 到 S 的概率核 μ, 使得

$$\mathbb{P}[\xi \in \cdot \mid \eta] = \mu(\eta, \cdot) \quad \text{a.e. } \mathcal{L}(\eta),$$

且 μ 在 $\mathcal{L}(\eta)$ 几乎处处唯一.

定理 2 的证明 我们可以假设 $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. 对每个 $r \in \mathbb{Q}$, 可以选取某个可测函数 $f_r = f(\cdot, r) : T \to [0,1]$, 使得

$$f(\eta, r) = \mathbb{P}[\xi \leq r \mid \eta] \quad \text{a.e.}, \quad r \in \mathbb{Q}. \tag{1}$$

令 A 为所有 $t \in T$ 使得 $f(t,r)$ 关于 $r \in \mathbb{Q}$ 单调递增, 且在 $\pm\infty$ 处极限分别为 1 和 0 的集合. 由于 A 由可数个可测条件刻画, 且这些条件在 η 上几乎处处成立, 故 $A \in \mathcal{T}$ 且 $\eta \in A$ 几乎处处成立. 现在定义

$$F(t,x) = \mathbf{1}_A(t) \inf_{r>x} f(t,r) + \mathbf{1}_{A^c}(t)\mathbf{1}\{x \geq 0\}, \quad x \in \mathbb{R},\ t \in T,$$

注意到对每个 $t \in T$, $F(t, \cdot)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的分布函数. 因此, 由命题 ~**??**, 存在概率测度 $m(t, \cdot)$ 使得

$$m(t, (-\infty, x]) = F(t,x), \quad x \in \mathbb{R},\ t \in T.$$

对每个 x, $F(t,x)$ 显然关于 t 可测, 通过单调类论证可得 m 是从 T 到 $\mathbb{R}$ 的概率核.

由式 1 及 $\mathbb{E}^\eta$ 的单调收敛性质, 有

$$m(\eta, (-\infty, x]) = F(\eta, x) = \mathbb{P}[\xi \leq x \mid \eta] \quad \text{a.e.}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

利用单调类论证和几乎处处的单调收敛性质, 可将上述关系推广为

$$m(\eta, B) = \mathbb{P}[\xi \in B \mid \eta] \quad \text{a.e.}, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \tag{2}$$

特别地, $m(\eta, S^c) = 0$ 几乎处处成立, 因此在 $\mathcal{S} = \mathcal{B} \cap S$ 上, 令

$$\mu(t, \cdot) = m(t, \cdot)\mathbf{1}\{m(t,S) = 1\} + \delta_s \mathbf{1}\{m(t,S) < 1\}, \quad t \in T,$$

其中 $s \in S$ 任取, 则式 2 对 μ 依然成立. 如果 μ' 是另一个满足条件的核, 则有

$$\mu(\eta, (-\infty, r]) = \mathbb{P}[\xi \leq r \mid \eta] = \mu'(\eta, (-\infty, r]) \quad \text{a.e.}, \quad r \in \mathbb{Q},$$

再由单调类论证可得 $\mu(\eta, \cdot) = \mu'(\eta, \cdot)$ 几乎处处成立. □

正则条件概率存在性的证明 设 $(\Omega, \mathcal{A})$ 是标准 Borel 空间, P 是其上的概率测度, $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ 是子 σ-代数.

第一步: 可数生成集与条件期望

由于 $(\Omega, \mathcal{A})$ 是标准 Borel 空间, 存在使 $\mathcal{A}$ 成为 Borel σ-代数的 Polish 拓扑. 标准 Borel 空间的一个重要性质是: 对任意子 σ-代数, 概率测度都存在正则条件概率.

取 $\mathcal{C}$ 为生成 $\mathcal{A}$ 的可数 π-系统. 对每个 $A \in \mathcal{C}$, 条件期望 $\mathbb{E}[1_A \mid \mathcal{A}_0]$ 存在且为 $\mathcal{A}_0$-可测函数, P-几乎处处唯一. 由 Doob-Dynkin 引理（见引理 1）, 对每个 $A \in \mathcal{C}$, 存在可测函数 $f_A : \Omega \to [0,1]$, 使得

$$\mathbb{E}[1_A \mid \mathcal{A}_0] = f_A \circ \eta \quad \text{几乎处处},$$

其中 η 是生成 $\mathcal{A}_0$ 的可测函数（如 $\eta(\omega) = \omega$）.

第二步：通过扩张构造概率核

对每个固定 $\omega \in \Omega$, 定义 $f_A(\omega)$, $A \in \mathcal{C}$. 映射 $A \mapsto f_A(\omega)$ 满足:

- **有限可加性**: 若 $A_1, A_2 \in \mathcal{C}$ 且互不相交, 则 $f_{A_1 \cup A_2}(\omega) = f_{A_1}(\omega) + f_{A_2}(\omega)$;
- **非负性**: $f_A(\omega) \geq 0$;
- **归一性**: $f_\Omega(\omega) = 1$.

要将 $f_A(\omega)$ 扩张为 $(\Omega, \mathcal{A})$ 上的概率测度, 可用 Carathéodory 扩张定理（见定理 1）. 由于 $\mathcal{C}$ 是 π-系统, 若 $f_A(\omega)$ 在 $\mathcal{C}$ 上可数可加, 则扩张唯一. 这可由主导收敛定理和 $\mathcal{C}$ 生成 $\mathcal{A}$ 得到.

因此, 对 P-几乎处处的 ω, 存在唯一的概率测度 $K_{\mathcal{A}_0}(\omega, \cdot)$, 使得

$$K_{\mathcal{A}_0}(\omega, A) = f_A(\omega), \quad \forall A \in \mathcal{C}.$$

第三步：概率核的可测性

对每个 $A \in \mathcal{A}$, 映射 $\omega \mapsto K_{\mathcal{A}_0}(\omega, A)$ 需为 $\mathcal{A}_0$-可测. 由于 $\mathcal{C}$ 生成 $\mathcal{A}$, 可用 π-λ 定理: - 设 $\mathcal{L} = \{A \in \mathcal{A} : K_{\mathcal{A}_0}(\cdot, A) \text{ 是} \mathcal{A}_0\text{-可测}\}$; - $\mathcal{L}$ 是包含 $\mathcal{C}$ 的 λ-系统, 故 $\mathcal{L} = \mathcal{A}$.

第四步：联合可测性

由定理 2, 存在从 $\mathcal{A}_0$ 到 $\mathcal{A}$ 的概率核 μ, 使得

$$\mathbb{P}[\xi \in \cdot \mid \eta] = \mu(\eta, \cdot) \quad \text{几乎处处},$$

其中 ξ, η 是 Ω 上的随机元. 此处 $\mu(\eta(\omega), A) = K_{\mathcal{A}_0}(\omega, A)$, P-几乎处处成立. $(\omega, A) \mapsto K_{\mathcal{A}_0}(\omega, A)$ 的联合可测性由可数生成集 $\mathcal{C}$ 的构造和 μ 的唯一性保证.

第五步：条件概率的验证

对所有 $A \in \mathcal{A}$, $K_{\mathcal{A}_0}(\omega, A)$ 满足:

- **可测性**: $K_{\mathcal{A}_0}(\cdot, A)$ 是 $\mathcal{A}_0$-可测;
- **积分公式**: 对任意 $B \in \mathcal{A}_0$,

$$\int_B K_{\mathcal{A}_0}(\omega, A) \, dP(\omega) = P(A \cap B).$$

该式对 $A \in \mathcal{C}$ 成立, 由 π-λ 定理推广到所有 $A \in \mathcal{A}$.

因此, $K_{\mathcal{A}_0}$ 是正则条件概率核.
参见 [BR07] 和 [KK02]. □

因此, 在标准 Borel 空间中, 对于任意子 σ-代数 $\mathcal{A}_0$, 正则条件概率总是存在的.

注记 标准 Borel 空间的假设是至关重要的. 对于一般的可测空间, 正则条件概率可能并不存在.

4 正则条件概率的唯一性

正则条件概率在 P-零测集意义下是唯一的. 即, 如果 $K_{\mathcal{A}_0}$ 和 $\tilde{K}_{\mathcal{A}_0}$ 都是关于 $\mathcal{A}_0$ 的正则条件概率, 则存在 P-零测集 N, 使得对所有 $\omega \notin N$ 及所有 $A \in \mathcal{A}$,

$$K_{\mathcal{A}_0}(\omega, A) = \tilde{K}_{\mathcal{A}_0}(\omega, A).$$

这意味着正则条件概率在本质上是唯一的: 任意两个版本在概率为零的集合之外都一致.

正则条件概率唯一性的证明 设 $K_{\mathcal{A}_0}$ 和 $\tilde{K}_{\mathcal{A}_0}$ 是关于 $\mathcal{A}_0$ 的两个正则条件概率. 对每个 $A \in \mathcal{A}$, 定义

$$N_A = \{\omega \in \Omega : K_{\mathcal{A}_0}(\omega, A) \neq \tilde{K}_{\mathcal{A}_0}(\omega, A)\}.$$

第一步: 可数生成集上的零测集

由正则条件概率的定义, $K_{\mathcal{A}_0}(\cdot, A)$ 和 $\tilde{K}_{\mathcal{A}_0}(\cdot, A)$ 都是 $\mathbb{E}[1_A \mid \mathcal{A}_0]$ 的版本, 因此 P-几乎处处相等, 即 $P(N_A) = 0$.

由于 $\mathcal{A}$ 是标准 Borel, 存在可数 π-系统 $\mathcal{C}$ 生成 $\mathcal{A}$. 定义

$$N = \bigcup_{A \in \mathcal{C}} N_A.$$

$\mathcal{C}$ 可数, N 是可数个 P-零测集的并, 故 $P(N) = 0$.

第二步: π-λ 定理推广到整个 σ-代数

对任意 $\omega \notin N$, 定义

$$\mathcal{D}_\omega = \{A \in \mathcal{A} : K_{\mathcal{A}_0}(\omega, A) = \tilde{K}_{\mathcal{A}_0}(\omega, A)\}.$$

$\mathcal{D}_\omega$ 是包含 $\mathcal{C}$ 的 λ-系统:

- **包含全集**: $K_{\mathcal{A}_0}(\omega, \Omega) = 1 = \tilde{K}_{\mathcal{A}_0}(\omega, \Omega)$, 故 $\Omega \in \mathcal{D}_\omega$.
- **对可列不交并封闭**: 若 $A_n \in \mathcal{D}_\omega$ 两两不交, 则

$$K_{\mathcal{A}_0}\left(\omega, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} K_{\mathcal{A}_0}(\omega, A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{K}_{\mathcal{A}_0}(\omega, A_n) = \tilde{K}_{\mathcal{A}_0}\left(\omega, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

- **对补集封闭**: 若 $A \in \mathcal{D}_\omega$, 则

$$K_{\mathcal{A}_0}(\omega, A^c) = 1 - K_{\mathcal{A}_0}(\omega, A) = 1 - \tilde{K}_{\mathcal{A}_0}(\omega, A) = \tilde{K}_{\mathcal{A}_0}(\omega, A^c).$$

由于 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}_\omega$ 且 $\mathcal{C}$ 是 π-系统, π-λ 定理得 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}_\omega$. 因此对所有 $\omega \notin N$ 及 $A \in \mathcal{A}$, 有 $K_{\mathcal{A}_0}(\omega, A) = \tilde{K}_{\mathcal{A}_0}(\omega, A)$.

N 是 P-零测集, 故正则条件概率在 P-几乎处处唯一. □

注记 这一唯一性性质确保, 尽管正则条件概率在每一点上未必唯一, 但任意两个版本在 P-几乎处处都一致.

5 条件期望的积分表示

至此, 我们已经证明了条件概率可以提升为更精细的版本（即正则条件概率）, 它本身是一个概率测度. 这使得我们可以以它为测度定义积分.

接下来, 我们将证明: 以正则条件概率为测度的积分运算, 恰好与条件期望一致.

定理 3（条件期望的积分表示） 设 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ 是一个概率空间, $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ 是一个子 σ-代数, $K(\omega, A)$ 是一个概率核, 满足 $K(\omega, A) = \mathbb{E}[1_A \mid \mathcal{A}_0](\omega)$ 即是说, 对于所有 $A \in \mathcal{A}$. 那么对于所有可积随机变量 X, 它的条件期望满足:

$$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{A}_0](\omega) = \int_\Omega X(\omega') K(\omega, d\omega') \quad \text{a.e. } P.$$

定理 3的证明

第一步: 示性函数

设 $X = 1_A$ 关于 $A \in \mathcal{A}$. 由正则条件概率的定义有:

$$\mathbb{E}[1_A \mid \mathcal{A}_0](\omega) = K(\omega, A) = \int_\Omega 1_A(\omega') K(\omega, d\omega') \quad \text{a.e. } P.$$

第二步: 简单函数

设 $X = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$ 关于 $A_i \in \mathcal{A}$, $a_i \in \mathbb{R}$. 由条件期望与积分的线性性有:

$$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{A}_0](\omega) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{E}[1_{A_i} \mid \mathcal{A}_0](\omega) = \sum_{i=1}^n a_i \int_\Omega 1_{A_i}(\omega') K(\omega, d\omega') = \int_\Omega X(\omega') K(\omega, d\omega').$$

第三步: 非负可积函数

设 $X \geq 0$ 是可测函数. 取简单函数单调列 $X_n \uparrow X$. 由 Levi 单调收敛定理:

- $\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{A}_0] \uparrow \mathbb{E}[X \mid \mathcal{A}_0]$ a.e.
- $\int X_n K(\omega, d\omega') \uparrow \int X K(\omega, d\omega')$.

因此:

$$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{A}_0](\omega) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{A}_0](\omega) = \lim_{n\to\infty} \int X_n K(\omega, d\omega') = \int X K(\omega, d\omega') \quad \text{a.e. } P.$$

第四步: 一般可积函数

对于任意可积函数 X, 可分解为 $X = X^+ - X^-$ 其中 $X^\pm \geq 0$. 由第三步:

$$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{A}_0] = \mathbb{E}[X^+ \mid \mathcal{A}_0] - \mathbb{E}[X^- \mid \mathcal{A}_0] = \int X^+ K(\omega, d\omega') - \int X^- K(\omega, d\omega') = \int X K(\omega, d\omega') \quad \text{a.e. } P.$$

Step 5: 可测性与唯一性

- **可测性**: 根据概率核 K 的构造, 积分 $\int X K(\omega, d\omega')$ 是 $\mathcal{A}_0$-可测的.
- **唯一性**: 正则条件概率是一致的在 P-几乎处处的意义下, 确保了积分表示也是几乎处处一致的.

$\square$

6 结语

通过本次作业的研究, 我们系统梳理了 Regular Conditional Probability 的构造逻辑, 并严格证明了其在标准 Borel 空间下的存在性与唯一性. 这一结果表明, 在满足良好拓扑结构的测度空间中, 条件概率可以被提升为一个关于样本点 ω 的概率测度核 $K_{\mathcal{A}_0}(\omega, A)$, 从而避免了传统条件概率定义中因依赖于事件 A 而导致的" 零测集选取问题". 这一结论为条件期望的积分表示提供了严格的数学基础.

然而, 正则条件概率的构造对空间的结构性质具有强依赖性. 若放宽至一般可测空间, 此类核的存在性可能失效.

致谢

衷心感谢朱蓉禅老师在本学期《概率论选讲》课程中的指导. 感谢刘晨浩同学与宋柯师姐在课外学习提供的帮助. 同时也感谢大三强基计划的钟星宇学长与我共同探究" 不同版本的教材中条件概率与条件期望是否一致", 促使我深入思考正则化条件概率的必要性. 此外, 感谢钟星宇学长的开源排版工具SunQuarTex, 使本文档的排版得以高效完成.

参考文献

[BR07] Vladimir Igorevich Bogachev and Maria Aparecida Soares Ruas. *Measure theory*. Vol. 1. 1. Springer, 2007.

[KK02] Olav Kallenberg and Olav Kallenberg. *Foundations of modern probability*. Vol. 2. Springer, 2002.

[Röc16] Michael Röckner. “Probability Theory I and II”. Unpublished lecture notes for Probability Theory I and II, Universit¨ atBielefeld, 2016. 2016.

[李贤平 97] 李贤平. *概率论基础*. 高等教育出版社, 1997.

[韦来生 15] 韦来生. *数理统计*. 科学出版社, 2015.