概率论选讲期末作业

正则条件概率的存在唯一性

Liyve

2025-06-23

摘要

本作业探讨了正则条件概率的概念, 重点关注其存在性与唯一性. [1] 并未给出存在性与唯一性的证明, 因此, 严谨地补全这些证明成为本次作业的核心内容.

## 1 前言

在上学期的 *概率论（双语）* 学习过程中, **求是书院**的同学们使用教材 [2] 学习概率论. 该教材并未采用测度论的语言引入概率论, 也没有涉及条件期望的概念. 然而, 在本学期第二周的 *数理统计* 课程证明中, 教材 [3] 中出现了以条件概率积分形式给出的条件期望. 这让我猜测, 教材 [3] 中提到的条件期望, 应该与我们上学期在 [1] 中学习到的内容是一致的. 经过与同学们讨论, 大家始终未能得出令人满意的结论. 直到第四周的 *概率论选讲* 课程中, 正则条件概率的概念被简要介绍, 但 [1] 认为该主题与后续课程内容关联不大, 因而未作深入讨论. 因此, 我决定将这一主题作为本次期末作业的研究重点.

## 2 正则条件概率

在课上的讨论中, 我们注意到条件概率

在几乎处处意义下具有以下性质:

对于两两无交的 ,

然而, 这里的零测集依赖于每一个可测集 , 并不存在一个对所有 都适用的”通用”零测集, 使得条件概率 对 成为一个概率测度. 这促使我们寻求一种更精细的方式, 以更强的意义刻画 .

**定义 1 (概率核)** 设 和 是一对可测空间. 若函数 满足:

* 对于任意 , 映射 是 -可测的;
* 对于任意 , 映射 是 上的概率测度.

则称 为**概率核**（Probability Kernel）.

为了获得理想的”条件概率”, 我们需要在结构更良好的空间中进行工作, 在这样的空间里上述构造才能被严格地定义.

**定义 2 (标准 Borel 空间)** 如果可测空间 上存在一个完备度量 , 使得 是可分度量空间, 并且 是由该拓扑生成的 Borel -代数, 则称 为**标准 Borel 空间**（Standard Borel Space）.

**命题 1 (正则条件概率)** 参见 [1, Proposition 5.4.3]

设 是标准 Borel 空间, 是 上的概率测度. 则对于每个子 -代数 , 存在从 到 的概率核 , 使得对所有 , 有:

其中例外集可能依赖于 .

若 也是从 到 的概率核, 并满足同样的性质, 则存在 -零测集 , 使得对每个 及每个 , 有:

被称为由 给定的正则条件概率.

## 3 正则条件概率的存在性

在给出证明之前, 我们先陈述并证明后续论证所需的一些引理和定理.

**引理 1 (Doob-Dynkin 引理)** 设 是概率空间, 是从 到可测空间 的可测函数. 如果 是 -可测的, 则存在可测函数 , 使得 几乎处处成立.

*证明* ([引理 1](#lem-doob-dynkin) 的证明). 设 是 -可测的, 其中 可测.

#### 第一步: 的结构

由 生成的 -代数为

由于 是 -可测的, 对于任意 Borel 集 , 有

因此, 存在 , 使得

这定义了一个从 的 Borel 集到 的映射 . 为保证一致性, 该映射需保持集合运算（如并、交、补）, 这由 和 都是 -同态所保证.

#### 第二步: 用有理区间构造

定义 . 对每个有理数 , 设

其中 满足 .

对 , 定义

该下确界是良定义的, 因为:

* 对任意 , 由于 , 必有某个 使 , 从而 .
* 集合 有下界.

#### 第三步: 验证 几乎处处成立

对 , 我们断言 , 除了一个 -零测集外.

* **若 , :** 
  + , 则 , 即 , 故 .
  + 反之, 若 , 则 , 即 .
* **若 , :** 
  + , 则 , 即 , 故 .

因此, 且 , 除了 的零测集外. 由于 和 都是可测的, 集合 可测且测度为零.

#### 第四步: 的可测性

要证明 是 -可测的, 对任意 , 需有 .

* **为有理数时:**
* 这由 的定义可得.
* **为任意实数时:**  用递减有理数列 逼近 , 则
* 每个 , 可数交仍在 中.

因此, 是 -可测的.

#### 第五步: 零测集上的唯一性

若 也是满足 几乎处处的可测函数, 则 对 -几乎处处 成立. 由于 可测, , 故 在 -几乎处处成立.

综上, 构造了可测函数 , 使 几乎处处成立, 证毕.

*注记*. **Doob-Dynkin 引理**说明, 任何 -可测函数 都可以表示为 , 其中 是某个可测函数. 在正则条件概率的背景下, 这意味着条件期望 作为 -可测函数, 可以表示为某个生成随机变量 （如 ）的函数. 这为构造核 提供了基础, 使其成为 的可测函数, 并满足所需的性质.

**定理 1 (Carathéodory 扩张定理)** 设 是集合 上的一个代数, 是一个可数可加的前测度（pre-measure）. 则存在一个测度 , 定义在由 生成的 -代数 上, 并且 . 此外, 若 是 -有限的, 则该扩张是唯一的.

*证明* ([定理 1](#thm-Caratheodory-extension-theorem) 的证明). 设 是 上的一个集合代数, 是可数可加的前测度.

#### 第一步: 外测度的构造

对任意 , 定义外测度 :

可验证 满足外测度的三条性质:

* **单调性**: 若 , 则 的任意覆盖也是 的覆盖, 故 .
* **可列次可加性**: 对任意 , 分别取 覆盖 且 . 则 覆盖 , 且 . 令 得 .
* **空集**: , 因 且 .

#### 第二步: Carathéodory 可测集

称 是 -可测的, 若对任意 ,

记所有 -可测集为 . 可证明 是 -代数:

* **对补封闭**: 若 , 则 也满足同样条件.
* **对可列并封闭**: 先对有限并用归纳法证明, 再对可列并用极限逼近.

#### 第三步: 限制在 上是测度

将 , 可验证其为测度:

* 对任意两两不交的 , 由可列次可加性有 .
* 反向不等式: 对有限并用 Carathéodory 条件递归证明 , 再令 得可列可加性.

#### 第四步: 扩张性质

对 , 需证 是 -可测集且 :

* **可测性**: 对任意 , 设 覆盖 , 则 , 且 . 两边求和得 , 对所有覆盖取下确界得 .
* **等式**: 由定义 . 反向不等式: 若 , 则 , 取下确界得 .

#### 第五步: 唯一性

若 是 -有限的, 则扩张唯一. 设 也是 上的测度且 :

* 用 **- 定理**:
* 是 -系统（对有限交封闭）.
  + 集合 是 -系统.
  + 与 在 上一致, 故在 上一致.
* **-有限性**: , . 对任意 , , 故 .

*注记*. **Carathéodory 扩张定理**保证: 只要前测度在代数上是 -有限的, 就能唯一地将其扩张为生成的 -代数上的测度. 在正则条件概率存在性的证明中, 这一结论确保了定义在可数生成集 上的有限可加映射 能唯一扩张为 上的概率测度 . 这一步骤对于严谨构造正则条件概率核至关重要.

**定理 2** [4, Theorem 6.3]

对于任意 Borel 空间 和可测空间 , 设 和 分别为 和 中的随机元. 则存在从 到 的概率核 , 使得

且 在 几乎处处唯一.

*证明* ([定理 2](#thm-k) 的证明). 我们可以假设 . 对每个 , 可以选取某个可测函数 , 使得

令 为所有 使得 关于 单调递增, 且在 处极限分别为 1 和 0 的集合. 由于 由可数个可测条件刻画, 且这些条件在 上几乎处处成立, 故 且 几乎处处成立. 现在定义

注意到对每个 , 是 上的分布函数. 因此, 由命题~, 存在概率测度 使得

对每个 , 显然关于 可测, 通过单调类论证可得 是从 到 的概率核.

由 [式 1](#eq-1) 及 的单调收敛性质, 有

利用单调类论证和几乎处处的单调收敛性质, 可将上述关系推广为

特别地, 几乎处处成立, 因此在 上, 令

其中 任取, 则 [式 2](#eq-2) 对 依然成立. 如果 是另一个满足条件的核, 则有

再由单调类论证可得 几乎处处成立.

*证明* (正则条件概率存在性的证明). 设 是标准 Borel 空间, 是其上的概率测度, 是子 -代数.

#### 第一步: 可数生成集与条件期望

由于 是标准 Borel 空间, 存在使 成为 Borel -代数的 Polish 拓扑. 标准 Borel 空间的一个重要性质是: 对任意子 -代数, 概率测度都存在正则条件概率.

取 为生成 的可数 -系统. 对每个 , 条件期望 存在且为 -可测函数, -几乎处处唯一. 由 Doob-Dynkin 引理（见 [引理 1](#lem-doob-dynkin)）, 对每个 , 存在可测函数 , 使得

其中 是生成 的可测函数（如 ）.

#### 第二步: 通过扩张构造概率核

对每个固定 , 定义 , . 映射 满足:

* **有限可加性**: 若 且互不相交, 则 ;
* **非负性**: ;
* **归一性**: .

要将 扩张为 上的概率测度, 可用 Carathéodory 扩张定理（见 [定理 1](#thm-Caratheodory-extension-theorem)）. 由于 是 -系统, 若 在 上可数可加, 则扩张唯一. 这可由主导收敛定理和 生成 得到.

因此, 对 -几乎处处的 , 存在唯一的概率测度 , 使得

#### 第三步: 概率核的可测性

对每个 , 映射 需为 -可测. 由于 生成 , 可用 - 定理: - 设 ; - 是包含 的 -系统, 故 .

#### 第四步: 联合可测性

由 [定理 2](#thm-k), 存在从 到 的概率核 , 使得

其中 是 上的随机元. 此处 , -几乎处处成立. 的联合可测性由可数生成集 的构造和 的唯一性保证.

#### 第五步: 条件概率的验证

对所有 , 满足:

* **可测性**: 是 -可测;
* **积分公式**: 对任意 ,
* 该式对 成立, 由 - 定理推广到所有 .

因此, 是正则条件概率核.

参见 [5] 和 [4].

因此, 在标准 Borel 空间中, 对于任意子 -代数 , 正则条件概率总是存在的.

*注记*. 标准 Borel 空间的假设是至关重要的. 对于一般的可测空间, 正则条件概率可能并不存在.

## 4 正则条件概率的唯一性

正则条件概率在 -零测集意义下是唯一的. 即, 如果 和 都是关于 的正则条件概率, 则存在 -零测集 , 使得对所有 及所有 ,

这意味着正则条件概率在本质上是唯一的: 任意两个版本在概率为零的集合之外都一致.

*证明* (正则条件概率唯一性的证明). 设 和 是关于 的两个正则条件概率. 对每个 , 定义

#### 第一步: 可数生成集上的零测集

由正则条件概率的定义, 和 都是 的版本, 因此 -几乎处处相等, 即 .

由于 是标准 Borel, 存在可数 -系统 生成 . 定义

可数, 是可数个 -零测集的并, 故 .

#### 第二步: - 定理推广到整个 -代数

对任意 , 定义

是包含 的 -系统:

* **包含全集**: , 故 .
* **对可列不交并封闭**: 若 两两不交, 则
* **对补集封闭**: 若 , 则

由于 且 是 -系统, - 定理得 . 因此对所有 及 , 有 .

是 -零测集, 故正则条件概率在 -几乎处处唯一.

*注记*. 这一唯一性性质确保, 尽管正则条件概率在每一点上未必唯一, 但任意两个版本在 -几乎处处都一致.

## 5 条件期望的积分表示

至此, 我们已经证明了条件概率可以提升为更精细的版本（即正则条件概率）, 它本身是一个概率测度. 这使得我们可以以它为测度定义积分.

接下来, 我们将证明: 以正则条件概率为测度的积分运算, 恰好与条件期望一致.

**定理 3 (条件期望的积分表示)** 设 是一个概率空间, 是一个 子-代数, 是一个概率核, 满足 即是说, 对于所有 . 那么对于所有可积随机变量 , 它的条件期望满足:

*证明* ([定理 3](#thm-cond-exp-as-integral)的证明).

#### 第一步: 示性函数

设 关于 . 由正则条件概率的定义有:

#### 第二步: 简单函数

设 关于 , . 由条件期望与积分的线性性有:

#### 第三步: 非负可积函数

设 是可测函数. 取简单函数单调列 . 由Levi单调收敛定理:

* a.e.
* .

因此:

#### 第四步: 一般可积函数

对于任意可积函数 , 可分解为 其中 . 由第三步:

#### Step 5: 可测性与唯一性

* **可测性**: 根据概率核 的构造, 积分 是 -可测的.
* **唯一性**: 正则条件概率是一致的在 -几乎处处的意义下, 确保了积分表示也是几乎处处一致的.

## 6 结语

通过本次作业的研究, 我们系统梳理了Regular Conditional Probability的构造逻辑, 并严格证明了其在标准 Borel 空间下的存在性与唯一性. 这一结果表明, 在满足良好拓扑结构的测度空间中, 条件概率可以被提升为一个关于样本点 的概率测度核 , 从而避免了传统条件概率定义中因依赖于事件 A 而导致的”零测集选取问题”. 这一结论为条件期望的积分表示提供了严格的数学基础.

然而, 正则条件概率的构造对空间的结构性质具有强依赖性. 若放宽至一般可测空间, 此类核的存在性可能失效.

## 致谢

衷心感谢朱蓉禅老师在本学期《概率论选讲》课程中的指导. 感谢刘晨浩同学与宋柯师姐在课外学习提供的帮助. 同时也感谢大三强基计划的钟星宇学长与我共同探究”不同版本的教材中条件概率与条件期望是否一致”, 促使我深入思考正则化条件概率的必要性. 此外, 感谢钟星宇学长的开源排版工具[SunQuarTex](https://github.com/sun123zxy/sunquartex), 使本文档的排版得以高效完成.

[1] M. Röckner, 《Probability Theory I and II》, 2016年.

[2] 李贤平, *概率论基础*. 高等教育出版社, 1997.

[3] 韦来生, *数理统计*. 科学出版社, 2015.

[4] O. Kallenberg 和 O. Kallenberg, *Foundations of modern probability*, 卷 2. Springer, 2002.

[5] V. I. Bogachev 和 M. A. S. Ruas, *Measure theory*, 卷 1. Springer, 2007.