

Домашнее задание.

Задача 1.

При применении первого правила слева от S добавляется "a", а справа от S "bbbb", тогда, если мы применили это правило k раз, то добавится k символов 'a' и $4 \cdot k$ символов 'b'. При применении второго правила слева от S добавляется "aaa", а справа от S "bb", тогда, если мы применили это правило m раз, то добавится $3 \cdot m$ символов 'a' и $2 \cdot m$ символов 'b'. В итоге, если первое правило было применено k раз, а второе – m раз, то всего в слове будет $k + 3 \cdot m$ символов 'a' и $4 \cdot k + 2 \cdot m$ символов 'b'. Тогда язык, порождаемый этой грамматикой: $L = \{a^{k+3m}cb^{4k+2m}\}$. Так как порядок применения правил не важен, то можно задать этот порядок, преобразовав грамматику:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aSbbbb \mid R \\ R &\rightarrow aaaRbb \mid P \\ P &\rightarrow c \end{aligned}$$

Грамматика является однозначной, если у каждого слова, принадлежащего языку, порожденному этой грамматикой, одно дерево вывода. Значит, нужно показать, что по слову можно будет восстановить какие правила и в каком порядке применялись. Предположим, что слово $w \in L$. Пусть в этом слове p символов 'a' и q символов 'b'. Тогда запишем систему:

$$\begin{cases} k + 3m = p, \\ 4k + 2m = q, \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение: $m = (4p - q)/10, k = q - (4p - q)/5$. Значит, по слову можно будет восстановить, сколько раз какое правило применялось. А порядок применения правил однозначный и задан грамматикой. Значит, эта грамматика – однозначная.

Задача 2.

- Эта грамматика порождает язык, любое слово которого – либо пустое слово, либо состоит только из символов 'a' и 'b'.
- При применении первого правила символов не добавляется, а при применении второго правила добавляется 2 символа 'a' и 1 символ 'b', значит, в словах этого языка символов 'a' в два раза больше, чем символов 'b'.

- Если слово не пустое, то оно начинается с символа 'а' и заканчивается символом 'б'.
- Выберем какой-нибудь символ 'b' в непустом слове $w \in L$. Пусть слева от него в этом слове стоит еще m символов 'b'. Тогда окажется, что слева этого символа 'b' стоит как минимум $2^*(m+1)$ символов 'а', так как применение 2 правила добавляет один символ 'b' и два символа 'а', причем эти два символа 'а' стоят слева от 'b'.

Задача 3.

$$1) L = a^n b^m c^n d^m \mid n > 0, m > 0$$

Рассмотрим слово $w = a^n b^n c^n d^n$, где n – константа из леммы о накачке (т. е. $n = n, m = n$).

$$w = xyzvu$$

- $yzv = a^i$

$$x = a^i, y = a^l, z = a^m, v = a^p (l + p > 0), \text{ тогда: } u = a^{n-i-l-m-p} b^m c^n d^m$$

$$xy^k x v^k u = a^i a^{lk} a^m a^{pk} a^{n-i-l-m-p} b^m c^n d^m = a^{n+l(k-1)+p(k-1)} b^m c^n d^m$$

Если мы возьмем, например, $k = 2$, то так как $p+l > 0$, то количество символов 'а' в этом слове не будет совпадать с количеством символов 'с' в этом слове, а значит – это слово не принадлежит L .

- $yzv = a^i b^j$

$$x = a^p, y = a^i b^q, z = b^r, v = b^{j-r-q}, u = b^{n-j} c^n d^n$$

$$(p \geq 0, m > 0, q \geq 0, r \geq 0, j > 0)$$

$$xy^k x v^k u = a^p a^{ki} b^{kq} b^r b^{k(j-r-q)} b^{n-j} c^n d^n$$

$$3) L = \{a^k b^m b^{(k+l)} a^m \mid n \geq 0, k \geq 0, l \geq 0\} - \text{это контекстно-свободный язык.}$$

$$\text{Его можно переписать так: } L = \{a^k b^k b^l b^m a^m \mid n \geq 0, k \geq 0, l \geq 0\}$$

КС грамматика:

$$S \rightarrow RQP \mid \epsilon$$

$$R \rightarrow aRb \mid \epsilon$$

$$P \rightarrow bPa \mid \epsilon$$

$$Q \rightarrow bQ \mid \epsilon$$