Домашнее задание.

Задача 1.

При применении первого правила слева от S добавляется "a", а справа от S "bbbb", тогда, если мы применили это правило k раз, то добавится k символов 'a' и 4*k символов 'b'. При применении второго правила слева от S добавляется "aaa", а справа от S "bb", тогда, если мы применили это правило m раз, то добавится 3*m символов 'a' и 2*m символов 'b'. В итоге, если первое правило было применено k раз, а второе – m раз, то всего в слове будет k + 3*m символов 'a' и 4*k + 2*m символов 'b'. Тогда язык, порождаемый этой грамматикой: $L = \{a^{k+3m}cb^{4k+2m}\}$ Так как порядок применения правил не важен, то можно задать этот порядок, преобразовав грамматику:

$S \to aSbbbb \mid R$
$R \to aaaRbb \mid P$
$P \to c$

Грамматика является однозначной, если у каждого слова, принадлежащего языку, порожденному этой грамматикой, одно дерево вывода. Значит, нужно показать, что по слову можно будет восстановить какие правила и в каком порядке применялись. Предположим, что слово $w \in L$. Пусть в этом слове p символов 'a' и q символов b. Тогда запишем систему:

$$\begin{cases} k + 3m = p, \\ 4k + 2m = q, \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение: $m = (4p - q)/10, k = q - (4p - q)/5$. Значит, по слову можно будет восстановить, сколько раз какое правило применялось. А порядок применения правил однозначный и задан грамматикой. Значит, эта грамматика – однозначная.

Задача 2.

- Эта грамматика порождает язык, любое слово которого – либо пустое слово, либо состоит только из символов 'a' и 'b'.
- При применении первого правила символов не добавляется, а при применении второго правила добавляется 2 символа 'a' и 1 символ 'b', значит, в словах этого языка символов 'a' в два раза больше, чем символов 'b'.
- Если слово не пустое, то оно начинается с символа 'a' и заканчивается символом 'b'.
- Выберем какой-нибудь символ 'b' в непустом слове $w \in L$. Пусть слева от него в этом слове стоит еще m символов 'b'. Тогда окажется, что слева этого символа 'b' стоит как минимум 2*(m+1) символов 'a', так как применение 2 правила добавляет один символ 'b' и два символа 'a', причем эти два символа 'a' стоят слева от 'b'.

Задача 3.

$1) L = a^n b^m c^n d^m | n > 0, m > 0$

Рассмотрим слово $w = a^n b^n c^n d^n$, где n – константа из леммы о накачке (т. е. n = n, m = n).

$w = xyzvu$

- $yzv = a^i$

  $x = a^i, y = a^l, z = a^m, v = a^p (l + p > 0)$, тогда: $u = a^{n-i-l-m-p} b^m c^n d^n$

  $xy^k zv^k u = a^i a^{lk} a^m a^{pk} a^{n-i-l-m-p} b^m c^n d^n = a^{n+l(k-1)+p(k-1)} b^m c^n d^n$

  Если мы возьмем, например, $k = 2$, то так как $p + l > 0$, то количество символов 'a' в этом слове не будет совпадать с количеством символов 'c' в этом слове, а значит – это слово не принадлежит L.

- $yzv = a^i b^j$

  $x = a^p, y = a^m b^q, z = b^r, v = b^{j-r-q}, u = b^{n-j} c^n d^n$

  $(p \geq 0, m > 0, q \geq 0, r \geq 0, j > 0)$

  $xy^k zv^k u = a^p (a^m b^q)^k b^r b^{k(j-r-q)} b^{n-j} c^n d^n$

  1 случай: $q > 0, k = 2$: $a^p a^m b^q a^m b^q b^r b^{2(j-r-q)} b^{n-j} c^n d^n$, так как m > 0, q > 0, то это слово не принадлежит L

  2 случай: $q = 0$: $a^{n+(k-1)m} b^{n+(k-1)l} c^n d^n$, если k = 2, то: $a^{n+m} b^{n+l} c^n d^n$. Так как m > 0, то количество символов 'a' не будет совпадать с количеством символов 'c', а значит это слово не принадлежит L.

  Аналогично доказывается для границы b и c, границы c и d.

$2) L = \{ww | w \in \{a, b\}^*\}$

Рассмотрим слово $w = a^n b^n a^n b^n$, где n – константа из леммы о накачке.

$w = xyzvu$

- $yzv = a^i$

  $x = a^i, y = a^l, z = a^m, v = a^p (l + p > 0)$, тогда: $u = a^{n-i-l-m-p} b^m a^n b^n$

  $xy^k zv^k u = a^i a^{lk} a^m a^{pk} a^{n-i-l-m-p} b^m a^n b^m = a^{n+l(k-1)+p(k-1)} b^m a^n b^n$

  Если мы возьмем, например, $k = 2$, то так как $p + l > 0$, то количество символов 'a' в начале слова не будет совпадать с количеством символов 'a' в середине слова, а значит – это слово не принадлежит L.

- $yzv = a^i b^j$

  $x = a^p, y = a^m b^q, z = b^r, v = b^{j-r-q}, u = b^{n-j} a^n b^n$

  $(p \geq 0, m > 0, q \geq 0, r \geq 0, j > 0)$

  $xy^k zv^k u = a^p (a^m b^q)^k b^r b^{k(j-r-q)} b^{n-j} a^n b^n$

  1 случай: $q > 0, k = 3$: $a^p a^m b^q a^m b^q a^m b^q b^r b^{3(j-r-q)} b^{n-j} a^n b^n$, так как m > 0, q > 0, то в слове есть такой кусок: $a^m b^q a^m b^q a^m b^q$, а значит это слово не принадлежит L

  2 случай: $q = 0$: $a^{n+(k-1)m} b^{n+(k-1)l} a^n b^n$, если k = 2, то: $a^{n+m} b^{n+l} a^n b^n$. Так как m > 0, то количество символов 'a'в начале строки не будет совпадать с количеством символов 'a' в середине слова, а значит это слово не принадлежит L.

- $yzv = b^i a^j$

  $x = a^n b^{n-m}, y = b^m a^q, z = a^r, v = a^{j-r-q}, u = a^{n-j} b^n$

  $xy^k zv^k u = a^n b^{n-m} (b^m a^q)^k a^r a^{k(j-r-q)} a^{n-j} b^n$

1 случай: $q > 0, k = 3$: $a^n b^{n-m} b^m a^q b^m a^q b^m a^q a^r a^{3(j-r-q)} a^{n-j} b^n$, так как m > 0, q > 0, то в слове есть такой кусок: $a^m b^q a^m b^q a^m b^q$, а значит это слово не принадлежит L
2 случай: $q = 0$: $a^n b^{n-m(k-1)} a^{r+k(j-r)+n-j} b^n$, если k = 2, то: $a^n b^{n-m} a^{r+2(j-r)} b^n$. Так как m > 0, то количество символов 'b' в середине строки не будет совпадать с количеством символов 'b' в конце, а значит это слово не принадлежит L.

3) $L = \{a^k b^m b^{(k+l)} a^m | n \geq 0, k \geq 0, l \geq 0\}$ – это контекстно-свободный язык.
Его можно переписать так: $L = \{a^k b^k b^l b^m a^m | n \geq 0, k \geq 0, l \geq 0\}$
КС грамматика:

$S \to RQP \mid \epsilon$
$R \to aRb \mid \epsilon$
$P \to bPa \mid \epsilon$
$Q \to bQ \mid \epsilon$