

Домашнее задание.

Задача 1.

При применении первого правила слева от S добавляется "a", а справа от S "bbbb", тогда, если мы применили это правило k раз, то добавится k символов 'a' и $4 \cdot k$ символов 'b'. При применении второго правила слева от S добавляется "aaa", а справа от S "bb", тогда, если мы применили это правило m раз, то добавится $3 \cdot m$ символов 'a' и $2 \cdot m$ символов 'b'. В итоге, если первое правило было применено k раз, а второе – m раз, то всего в слове будет $k + 3 \cdot m$ символов 'a' и $4 \cdot k + 2 \cdot m$ символов 'b'. Тогда язык, порождаемый этой грамматикой: $L = \{a^{k+3m}cb^{4k+2m}\}$. Так как порядок применения правил не важен, то можно задать этот порядок, преобразовав грамматику:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aSbbbb \mid R \\ R &\rightarrow aaaRbb \mid P \\ P &\rightarrow c \end{aligned}$$

Грамматика является однозначной, если у каждого слова, принадлежащего языку, порожденному этой грамматикой, одно дерево вывода. Значит, нужно показать, что по слову можно будет восстановить какие правила и в каком порядке применялись. Предположим, что слово $w \in L$. Пусть в этом слове p символов 'a' и q символов 'b'. Тогда запишем систему:

$$\begin{cases} k + 3m = p, \\ 4k + 2m = q, \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение: $m = (4p - q)/10, k = q - (4p - q)/5$. Значит, по слову можно будет восстановить, сколько раз какое правило применялось. А порядок применения правил однозначный и задан грамматикой. Значит, эта грамматика – однозначная.

Задача 2.

- Эта грамматика порождает язык, любое слово которого – либо пустое слово, либо состоит только из символов 'a' и 'b'.
- При применении первого правила символов не добавляется, а при применении второго правила добавляется 2 символа 'a' и 1 символ 'b', значит, в словах этого языка символов 'a' в два раза больше, чем символов 'b'.

- Если слово не пустое, то оно начинается с символа 'a' и заканчивается символом 'b'.
- Выберем какой-нибудь символ 'b' в непустом слове $w \in L$. Пусть слева от него в этом слове стоит еще m символов 'b'. Тогда окажется, что слева этого символа 'b' стоит как минимум $2^*(m+1)$ символов 'a', так как применение 2 правила добавляет один символ 'b' и два символа 'a', причем эти два символа 'a' стоят слева от 'b'.

Задача 3.

3) $L = \{a^k b^m b^{(k+l)} a^m \mid n \geq 0, k \geq 0, l \geq 0\}$ – это контекстно-свободный язык.

Его можно переписать так: $L = \{a^k b^k b^l b^m a^m \mid n \geq 0, k \geq 0, l \geq 0\}$

КС грамматика:

$$S \rightarrow RQP \mid \epsilon$$

$$R \rightarrow aRb \mid \epsilon$$

$$P \rightarrow bPa \mid \epsilon$$

$$Q \rightarrow bQ \mid \epsilon$$