УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Типовой расчет №1

Линейная алгебра

Санкт-Петербург, 25 октября 2021 г.

Содержание

Этапы работы

Задание 1

Задание 2

Условия задачи

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad AX = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

План

- Применить линейное преобразование матрицы A=3x3 к единичному кубику
- Нарисовать и найти собственные вектора вектора A и их span. Сделать контрольный вектор, чтобы можно его было перемещать, согласно выражению Av=w
- Найти методом Крамера вектор X

Начало рассуждений

Имеем A - линейное преобразование в в R^3
В базисе $\vec{e_i}$ (i $=$ 1,2,3), A имеет матричное представление:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

A действует на вектор из R^3: если подействовать A на вектор $\vec{x}$, то получим вектор $A\vec{x}$ (назовем его $\vec{y}$, т.е. $\vec{y} = A\vec{x}$)
Вектор $\vec{x}$ можно разложить по базисным векторам: $\vec{x} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}$, где x_1, x_2, x_3 - координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\vec{e_i}$ (i $=$ 1,2,3)

Представляем $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ в виде:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Путем несложных вычислений получаем, $\vec{x}$ можно представить в виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Аналогично, разложив $\vec{y}$ по базису, получаем:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Мы имеем $\vec{y} = A\vec{x}$, т.е.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = -4x_1 + 4x_2 \\ y_3 = -2x_1 + x_2 + 2x_3 \end{cases}$$

Получает, что любой вектор $\vec{x}$ из R^3 с координатами x_1, x_2, x_3 в базисе $\vec{e_i}$ (i = 1,2,3) A превратит в вектор $\vec{y}$ из R^3 с координатами y_1, y_2, y_3 в базисе $\vec{e_i}$ (i = 1,2,3), где $y_1 = x_1, y_2 = -4x_1 + 4 = x_2, y_3 = -2 = x_1 + = x_2 + 2 = x_3$
Обычно, смотрят как A действует на базис $\vec{e_i}$ (i = 1,2,3), чтоб легко понять, во что A превратит $\vec{x}$

Действие A на $\vec{e_1}$

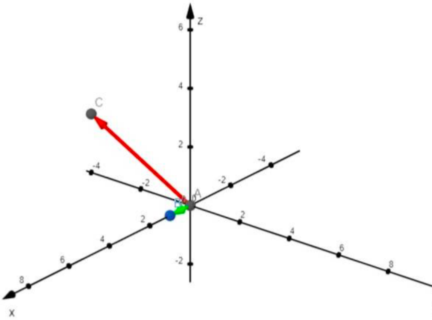
A действует на $\vec{e_1}$ подобным образом: $A\vec{e_1}$
А именно:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

То есть A берет и преобразует

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Получается, что A повернуло и растянуло по длине $\vec{e_1}$



Действие A на $\vec{e}_2$

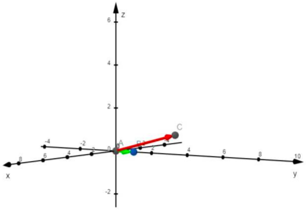
A действует на $\vec{e}_2$ подобным образом: $A\vec{e}_2$
А именно:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

То есть A берет и преобразует

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Получается, что A повернуло и растянуло по длине $\vec{e}_1$



Действие A на $\vec{e}_3$

A действует на $\vec{e}_3$ подобным образом: $A\vec{e}_3$

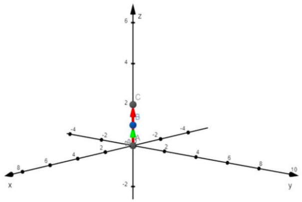
А именно:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

То есть A берет и преобразует

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Получается, что A растянуло $\vec{e}_3$ в 2 раза.



Когда мы растягиваем вектор $\vec{v}$ по базису, мы говорим, что в векторе $\vec{v}$ мы продвинулись вдоль $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ на:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

и получили вектор $\vec{v}$

Посчитав $A\vec{v}$, получим: $A\vec{v} = A(v_1\vec{e_1} + v_2\vec{e_2} + v_3\vec{e_3}) = v_1 A\vec{e_1} + v_2 A\vec{e_2} + v_3 A\vec{e_3}$

Назовем вектор $A\vec{v}$ буквой $\vec{u}$

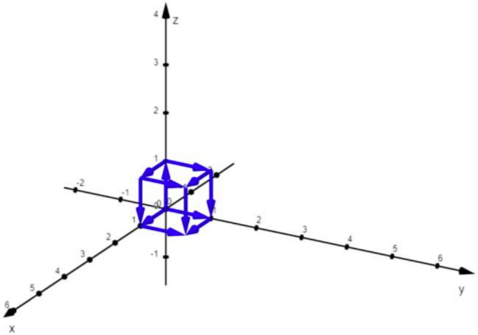
Тогда если мы продвинимся на v_1 вдоль $A\vec{e_1}$, на v_2 вдоль $A\vec{e_2}$, на v_3 вдоль $A\vec{e_3}$, получаем $\vec{u}$

Получается, что один раз вычислив $A\vec{e_1}, A\vec{e_2}, A\vec{e_3}$, то всегда сможем быстро найти $A\vec{v}$

Единичный кубик

Рассмотрим все векторы, которые лежат в единичном кубике с вершинами:

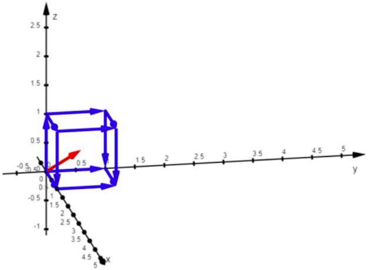
- (0,0,0);
- (0,0,1);
- (0,1,0);
- (0,1,1);
- (1,0,0);
- (1,0,1);
- (1,1,0);
- (1,1,1)



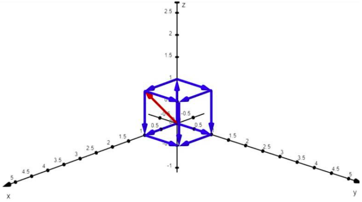
Вектор $\vec{v}$ в этом кубике записывается так:
$\vec{v} = a\vec{e_1} + b\vec{e_2} + c\vec{e_3}$, где $a, b, c \in [0, 1]$

Пример

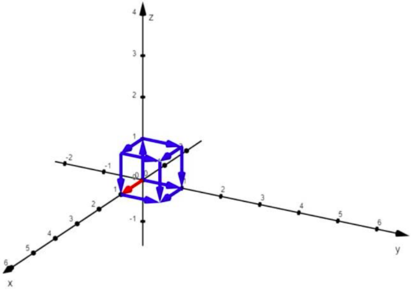
- $\vec{v} = 1, 0, 0,\ a = 1, b = 0, c = 0$
- $\vec{v} = \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2},\ a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{2}$
- $\vec{v} = 1, 0, 1,\ a = 1, b = 0, c = 1$



Номер 1



Номер 2



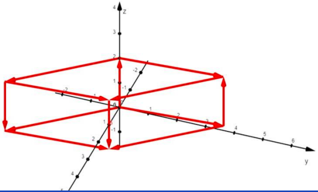
Номер 3

Получение параллелограмма

Меняя независимо a, b, c в пределах от 0 до 1 будем получать вектор с концом внутри кубика (или на границе кубика)
A изменит каждый из векторов внутри и на кубике таким образом: $A\vec{v}$
Тогда куб превратиться в: $A\vec{v} = A(a\vec{e_1} + b\vec{e_2} + c\vec{e_3}) = aA\vec{e_1} + bA\vec{e_2} + cA\vec{e_3}$
Получается, любой вектор $\vec{v}$ из кубика, где мы продвинулись на a, b , c вдоль:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Станет вектором из новой области, где мы продвинулись на a,b,c на $A\vec{e_1}, A\vec{e_2}, A\vec{e_3}$,



Получаем параллелограмм с вершинами: (0,0,2), (1,4,3), (1,4,1), (1,0,-1), (1,0,1), (0,-4,0), (0,-4,-2), (0,0,0)

Каждый вектор из исходного кубика после применения A остается внутри этого параллелограмма (каждый вектор как-то повернется и растянется)

Можно сказать, что наш кубик повернется и растянется.

С помощью формулы:

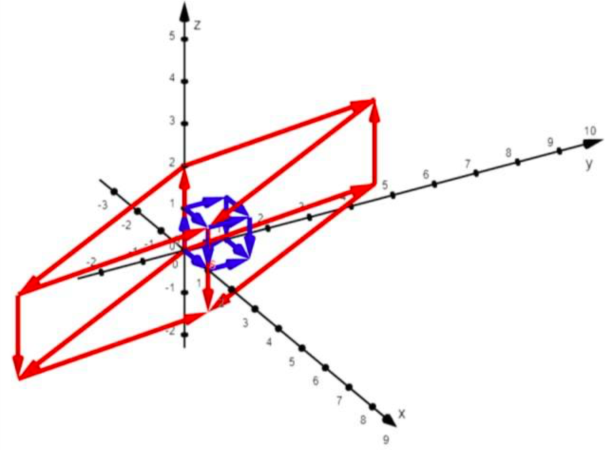
$$A \cdot \vec{v} : \vec{v_1} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + \vec{v_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \vec{v_3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} +$$

можно сказать какие вершины куда переместились.

Вершины параллелограмма

Перенос вершин:

- $(0,0,0) \Rightarrow (0,0,0)$;
- $(0,0,1) \Rightarrow (0,0,2)$
- $(0,1,0) \Rightarrow (1,4,1)$;
- $(0,1,1) \Rightarrow (1,4,3)$;
- $(1,0,0) \Rightarrow (0,-4,-2)$;
- $(1,0,1) \Rightarrow (0,-4,0)$;
- $(1,1,0) \Rightarrow (1,0,-1)$;
- $(1,1,1) \Rightarrow (1,0,1)$;



Понятие собственного вектора и числа

Собственный вектор матрицы A - это вектор, который после применения этой матрицы не поворачивается, а только растягивается (или сжимается) на число λ (собственное число)
Берем вектор $\vec{v}$ и применяем к нему A: $A\vec{v}$, в результате получааем растянутый (или сжатый) на λ исходный вектор (То есть $\lambda\vec{v}$). Таким образом: $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$

Единичная матрица

Единичная матрица не меняет вектор: $E\vec{v} = \vec{v}$

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \Rightarrow A\vec{v} = \lambda E\vec{v} \Rightarrow A\vec{v} - \lambda E\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow (A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

Нахождение собственного числа

Посчитаем определитеь для $A - \lambda E$:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda(\lambda - 4) - 4)(\lambda - 2)$$

Решим уравнение: $\det(A - \lambda E) = 0$
$(-\lambda(\lambda - 4) - 4)(\lambda - 2) = 0$
$(\lambda - 2)^3 = 0$
Получаем: $\lambda = 2$ - собственное число (вырождено, трекратно)

Получение $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$

Собственному числу λ соответствует собственный вектор $\vec{v}$: $A\vec{v} = 2\vec{v}$
Найдем $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v_1} \\ \vec{v_2} \\ \vec{v_3} \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} \vec{v_1} \\ \vec{v_2} \\ \vec{v_3} \end{pmatrix}$$

Получаем:

$$\begin{cases} \vec{v_2} = \vec{v_1} \\ -2\vec{v_1} + \vec{v_2} = 0 \\ -2\vec{v_1} + \vec{v_2} = 0 \end{cases}$$

Отсюда видно, что из вектора $\vec{v}$ может быть любое значение $\vec{v_3}$, а $\vec{v_1}$ и $\vec{v_2}$ связаны $2\vec{v_1} = \vec{v_2}$

Вычисление первого собственного вектора $\vec{v}$

Предположим, что $\vec{v_3} = 1$, а $\vec{v_1} = 0$, тогда $\vec{v_2} = 0$, и получаем:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

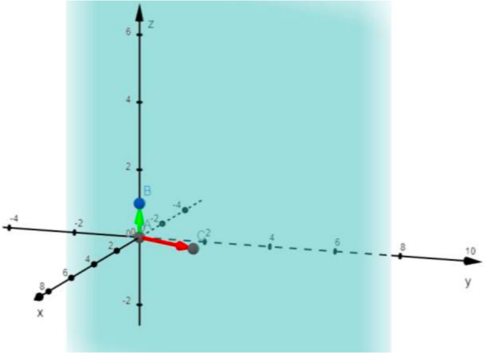
Так как уже наблюдалось, что:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Значит $\vec{v}$ - собственный вектор A с собственным числом 2.

Путем несложных вычислений, получаем второй собственный вектор A с собственным числом 2

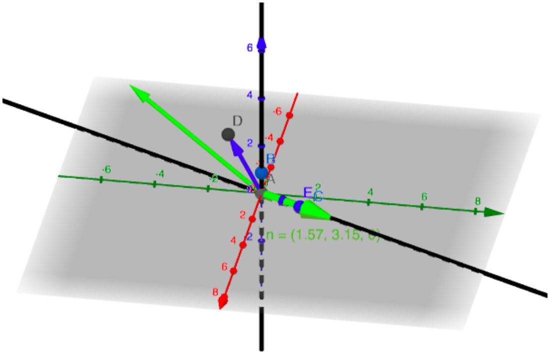
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Третий собственный вектор линейно независимый от этих двух, найти его не удастся.

Span этих двух векторов - плоскость, образованная этими двумя векторами, т.е. все векторы, которые описываются $\vec{v} = a \cdot \vec{v_1} + b \cdot \vec{v_2} a, b \in R$

Переход вектора после преобразования матрицы



Метод Крамера

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}} = \frac{(-1)^{1+1}\cdot(4\cdot 2 - 1\cdot 0) - (1\cdot 2 - 1\cdot 0) + (1\cdot 0 - 4\cdot 0)}{0\cdot(4\cdot 2 - 1\cdot 0) - (-4)\cdot(1\cdot 2 - 1\cdot 0) - 2\cdot(1\cdot 0 - 4\cdot 0)} =$$

$$= \frac{10}{8} = 1.25$$

Метод Крамера

$$y = \frac{\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}} = \frac{0\cdot(-1\cdot 2 - 1\cdot 0) - 4\cdot(1\cdot 2 - 1\cdot 0) - 2\cdot(1\cdot 0 + 0)}{0\cdot(4\cdot 2 - 1\cdot 0) - (-4)\cdot(1\cdot 2 - 1\cdot 0) - 2\cdot(1\cdot 0 - 4\cdot 0)} =$$

$$= \frac{8}{8} = 1$$

Метод Крамера

$$z = \frac{\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}} = \frac{0\cdot(4\cdot 1 + 1\cdot 1) - 4\cdot(1\cdot 1 - 1\cdot 1) - 2\cdot(1\cdot(-1) - 4\cdot 1)}{0\cdot(4\cdot 2 - 1\cdot 0) - (-4)\cdot(1\cdot 2 - 1\cdot 0) - 2\cdot(1\cdot 0 - 4\cdot 0)} =$$

$$= \frac{10}{8} = 1.25$$

Этапы работы

Задание 1

Задание 2

$$Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz - 6z + 1 = 0$$

План

- Привести уравнение к канонической форме методом ортогональных преобразований
- Нарисовать исходную поверхность и три ортонормированных вектора, которые образуют ее канонический базис
- Добавить линии span для удобства

Определение

Квадратичную форму с действительными коэффициентами

$$Q\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

можно привести к каноническому виду:

$$Q\left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right) = \lambda_1 x_1^{*2} + \lambda_2 x_2^{*2} + \ldots + \lambda_n x_n^{*2}$$

Матрица A и T

$$Q(x,y,z) = x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz - 6z + 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix}$$

T - ортогональная матрица перехода.

A - матрица квадратичной формы.

Нахождение собственных чисел

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ - собственные числа матрицы. Столбцы матрицы T являются координатами ортонормированного базиса (e_1^*, e_2^*, e_3^*), в котором матрица имеет диагональный вид.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 = -(\lambda - 6)\lambda^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_3 = 6$$

Вычисление собственных векторов

$$Ax = \lambda_{1,2}x$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$x_{com} = \begin{pmatrix} -x_2 - 2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Вычисление собственных векторов

$$\bar{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ - первый вектор фундаментальной системы;

$$\bar{f}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ - второй вектор фундаментальной системы;

$$\bar{u}_1 = \bar{f}_1 + \mu \cdot \bar{f}_2 \rightarrow \mu = -\frac{\overline{f_1} \cdot \overline{f_2}}{\overline{f_2} \cdot \overline{f_2}} = -\frac{2}{5} \rightarrow \bar{u}_1 = \begin{pmatrix} -0.2 \\ 1 \\ -0.4 \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}_2 = \bar{f}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Вычисление собственных векторов

$$Ax = \lambda_3 x$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} -5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$x_{com} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} \to \bar{u}_3 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Сделаем проверку ортогональности векторов:

$$\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 = 0.2 \cdot 2 - 0.4 = 0$$
$$\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_3 = (-0.2) \cdot 0.5 + 0.5 - 0.4 = 0$$
$$\bar{u}_2 \cdot \bar{u}_3 = -2 \cdot 0.5 + 1 = 0$$

Вектора ортогональны, теперь их нужно нормализовать:

$$e_1^* = \frac{\bar{u}_1}{|\bar{u}_1|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}, -\frac{2}{\sqrt{30}}\right)$$
$$e_2^* = \frac{\bar{u}_2}{|\bar{u}_2|} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$
$$e_3^* = \frac{\bar{u}_3}{|\bar{u}_3|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

Вывод канонического уравнения

Следовательно матрица

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{30}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{5}{\sqrt{30}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Получаем преобразование координат:

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{30}}x^* - \frac{2}{\sqrt{5}}y^* + \frac{1}{\sqrt{6}}z^* \\ y = \frac{5}{\sqrt{30}}x^* + \frac{1}{\sqrt{6}}z^* \\ z = -\frac{2}{\sqrt{30}}x^* + \frac{1}{\sqrt{5}}y^* + \frac{2}{\sqrt{6}}z^* \end{cases}$$

в базисе (e_1^*, e_2^*, e_3^*) исходная квадратичная форма принимает канонический вид:

$$6z^{*2} + \frac{12}{\sqrt{30}}x^* - \frac{6}{\sqrt{5}}y^* - \frac{12}{\sqrt{6}}z^* + 1 = 0$$

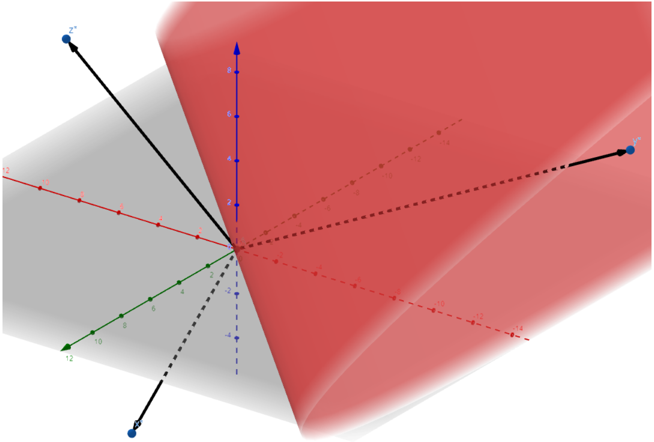


Рисунок: Исходный параболический цилиндр с линиями векторов канонического базиса

Результат

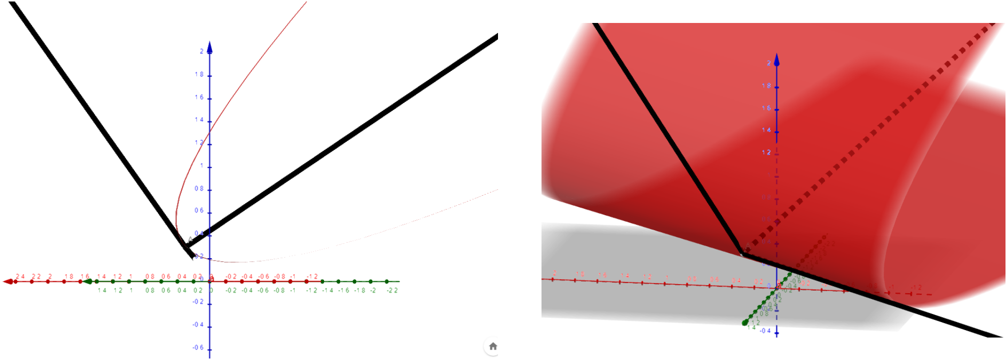


Рисунок: Каноническое изображение

Спасибо за внимание!