Функция нескольких переменных и её интеграл

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Университет ИТМО

25 ottobre 2021

Содержание

ITsMOre than a UNIVERSITY

Наибольшее и наименьшее значение функции нескольких переменных в области

Формулировка задания

Через точку $D\left(a, b, c\right)$ проведите плоскость так, чтобы объём тетраэдра, отсекаемого ею от координатного трёхгранника, был бы наименьшим. Изобразите на графике для конкретной точки .

План:

- Изобразим на рисунке условие задачи
- Решим задачу аналитически
- Проиллюстрируем ответ

Выведение формулы объема

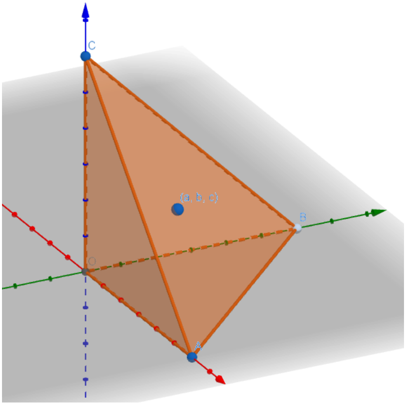


Figura 1: Отсеченная пирамида

Уравнение искомой плоскости: $\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1$, где A, B и C являются отрезками, отсекаемыми плоскостью на координатных осях. Поскольку точка $D\left(a, b, c\right)$ принадлежит плоскости, то тогда:

$$\frac{a}{A} + \frac{b}{B} + \frac{c}{C} = 1 \Rightarrow C = \frac{c}{1 - \frac{a}{A} - \frac{b}{B}}$$

Объем тетраэдра:

$$V = \frac{1}{6}ABC = \frac{1}{6}AB\frac{c}{1 - \frac{a}{A} - \frac{b}{B}}$$

Выведени уравнения плоскости

$$\frac{\partial V}{\partial A} = \frac{Bc}{6}\frac{1-\frac{2a}{A}-\frac{b}{B}}{\left(1-\frac{a}{A}-\frac{b}{B}\right)^2}; \quad \frac{\partial V}{\partial B} = \frac{Ac}{6}\frac{1-\frac{a}{A}-\frac{2b}{B}}{\left(1-\frac{a}{A}-\frac{b}{B}\right)^2}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial A} = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial B} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-\frac{2a}{A}-\frac{b}{B} = 0, \\ 1-\frac{a}{A}-\frac{2b}{B} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 3a \\ B = 3b \\ C = 3c \end{cases}$$

Таким образом, получаем уравнение плоскости:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c} = 3.$$

Пример для точки E(3,2,1)

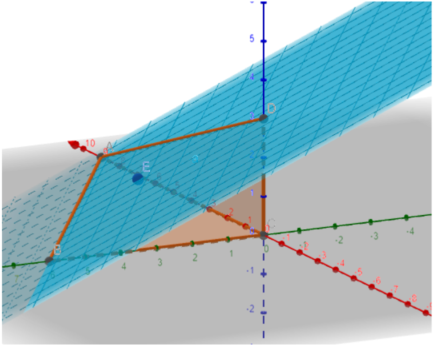


Figura 2: Отсеченная пирамида

Получаем уравнение плоскости:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 3$$

Интегралы Пуассона и Френеля

Формулировка задания

Вычислите интеграл:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(4t - \pi/2)}{\sqrt{t}} dt$$

План:

- Вычислим Гауссов интеграл и его квадрат
- Вычислим интеграл $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = J$
- С помощью предыдущего интеграла вычислим интеграл K и интегралы $\int_0^{\infty} \sin x^2 dx$ и $\int_0^{\infty} \sin\left(\pi x^2/2\right) dx$
- Проиллюстрируем графики функции ошибок, интегралов Френеля и их подынтегральных функций

Вычислим Гауссов интеграл

Заметим, что $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^\infty e^{-y^2} dy$.

Тогда $I^2 = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \int_0^\infty e^{-y^2} dy -$ двукратный интеграл.

$$I^2 = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy$$

Вычислим Гауссов интеграл

Сделаем переход в полярную систему координат:

$$\begin{aligned} dS &= dxdy = rd\varphi \cdot dr \\ x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned} \quad \Big| \to x^2\cos^2\varphi + y^2\sin^2\varphi = r^2 \to x^2 + y^2 = r^2$$

$$I^2 = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} e^{-r^2} rd\varphi dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-r^2} rdr =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-r^2}\frac{1}{2}d\left(r^2\right) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(- e^{-r^2}\Big|_0^{\infty}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(-e^{-\infty} - \left(-e^0\right)\right) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(- e^{-r^2}\Big|_0^{\infty}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(-e^{-\infty} - \left(-e^0\right)\right) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{1}{2}\left(\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Доказательство полезного тождества

С учетом небольшой замены, легко увидеть, что:

$$\int_0^{\infty} e^{-nx^2} dx = \left[\begin{array}{r} p = \sqrt{n}x \\ p^2 = nx^2 \\ \frac{dp}{\sqrt{n}} = dx \end{array} \right] = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\infty} e^{-p^2} dp = \frac{1}{\sqrt{n}} I$$

На предыдущем слайде мы получили, что $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ Тогда справедливо и равенство:

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u^2 t} du$$

Данное тождество будет полезно нам вдальнейшим.

Вычисление интеграла J

$$J = \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-u^2 t} du \Rightarrow J = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dt \int_0^\infty du e^{-tu^2} \sin t$$

Теперь возьмем интеграл по t, обозначив подынтегральную функцию как $Q\left(u^2\right)$. Тогда:

$$Q(a) = \int_0^\infty e^{-at} \sin t dt = \frac{1}{a^2 + 1}$$

Тем самым, получаем следующий интеграл:

$$J = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{1 + u^4} du$$

Сделаем замену $u = \frac{1}{t}$

Вычисление интеграла J

$$J = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \left(-\frac{dt}{t^2}\right) \frac{1}{1+1/t^4} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt =$$

$$J = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt$$

Беря полусумму двух представлений для интеграла I, получим:

$$J = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{u^2+1}{1+u^4} dt$$

Теперь можно перейти к стандарнтой переменной для интегрирования симметрических многочленов $t = x - \frac{1}{x}$; при этом $dt = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx$, получим:

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Вычисление интеграла K

$$K = \int_0^\infty \frac{\cos(4t - \pi/2)}{\sqrt{t}} dt = \int_0^\infty \frac{\sin(4t)}{\sqrt{t}} dt$$

Сделаем замену $k = 4t$, $dk = 4dt$:

$$K = \int_0^\infty \frac{\sin(k)}{\sqrt{\frac{k}{4}}} \frac{dk}{4} = \int_0^\infty \frac{2\sin(k)}{\sqrt{k}} \frac{dk}{4} = \int_0^\infty \frac{\sin(k)}{2\sqrt{k}} dk = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{1.5}}$$

Пример вычисления другого интеграла

$$\int_0^{\infty} \sin x^2 dx$$

Перейдем к переменной $t = x^2$:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt$$

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x^2 t} dx \Rightarrow I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} dx e^{-tx^2} \sin t$$

Теперь возьмем интеграл по t, обозначив подынтегральную функцию как $J\left(x^2\right)$. Тогда:

$$J(a) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \sin t dt = \frac{1}{a^2 + 1}$$

Пример вычисления другого интеграла

Тем самым, получаем следующий интеграл:

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$$

Сделаем замену $x = \frac{1}{t}$

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \left(-\frac{dt}{t^2}\right) \frac{1}{1+1/t^4} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt =$$

$$I = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt$$

Беря полусумму двух представлений для интеграла I, получим:

$$I = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{1+x^4} dt$$

Пример вычисления другого интеграла

Теперь можно перейти к стандарнтой переменной для интегрирования симметрических многочленов $t = x - \frac{1}{x}$; при этом $dt = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx$, получим:

$$I = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t^2 + 2} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{1.5}}$$

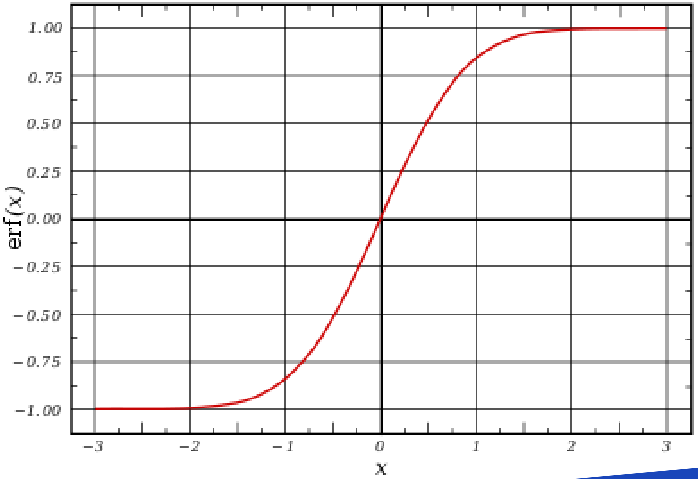
Пример вычисления другого интеграла

$$\int_0^\infty \sin\left(\pi x^2/2\right) dx$$

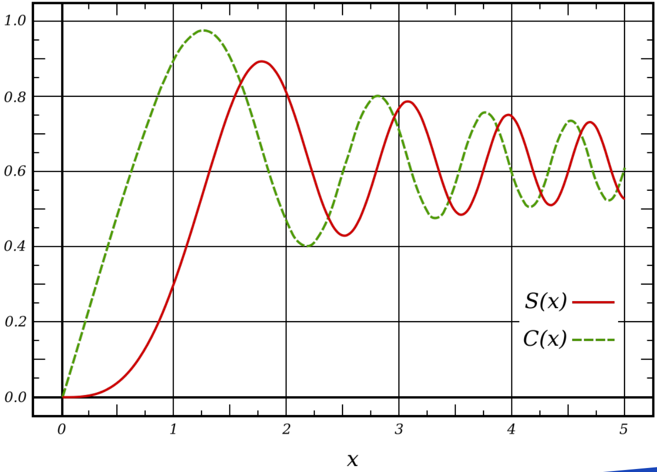
Пусть: $k^2 = \pi x^2/2$, тогда $dk = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{\pi}}dx$, $dx = \frac{2\sqrt{\pi}dk}{\sqrt{2\pi}}$

$$\int_0^\infty \sin\left(k^2\right) \frac{2\sqrt{\pi}dk}{\sqrt{2\pi}} = \frac{2\sqrt{\pi}dk}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \sin\left(k^2\right) dk = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\pi}} * \frac{\sqrt{\pi}}{2^{1.5}} = \frac{1}{2}$$

График функции ошибок



Графики интегралов Френеля



Графики подынтыгральных выражений Френеля

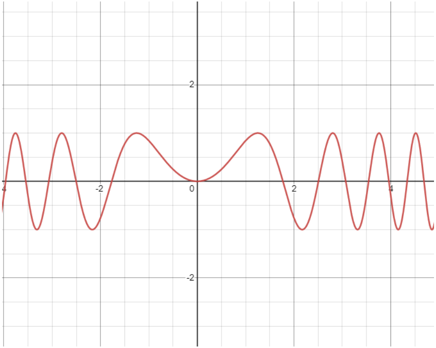


Figura 3: $f(x) = sin(x^2)$

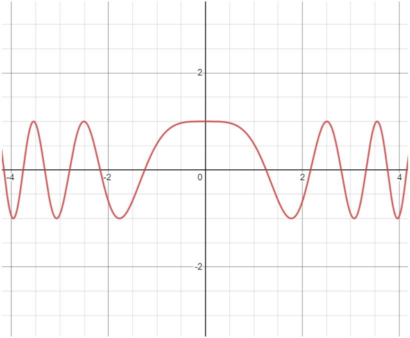


Figura 4: $f(x) = cos(x^2)$

Потенциал векторного поля

Формулировка задания:

Дано векторное поле $\vec{H}$:

$$(y \cos xy; x \cos xy);$$

План:

- Убедиться, что поле потенциально
- Найти уравнения векторных линий
- Изобразить векторные линии на рисунке
- Найти потенциал поля при помощи криволинейного интеграла
- Изобразить эквипотенциальные линии. Проиллюстрировать ортогональность линий уровня и векторных линий.
- Зафиксировать точки A и B на какой-либо векторной линии. Вычислить работу поля вдоль этой линии.

Условие потенциальности

Проверим условие потенциальности:

$$Q = y\cos xy \quad P = x\cos xy$$

$$\frac{\delta P}{\delta y} = \cos xy - yx\sin xy$$

$$\frac{\delta Q}{\delta x} = \cos xy - yx\sin xy$$

так как $\frac{\delta P}{\delta y} = \frac{\delta Q}{\delta x}$, то поле потенциальное.

Векторные линии

Найдем уравнения векторных линий и изобразим их.

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q}$$

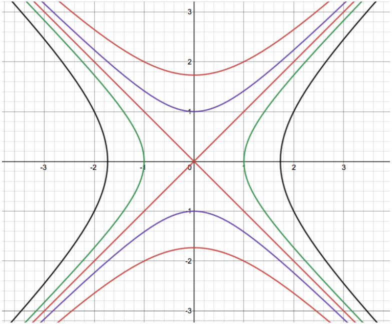
$$\frac{dx}{y\cos xy} = \frac{dy}{x\cos xy} \implies \frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}$$

$$xdx = ydy$$

$$x^2 = y^2 + C$$

$$x^2 - y^2 = C$$

Гиперболы:



Потенциал

Найдем потенциал поля при помощи криволинейного интеграла:

$$U = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy$$

Пусть $x_0 = y_0 = 0$, тогда

$$U = \int_0^x 0dx + \int_0^y x \cos xydy = \sin xy + C$$

Линии уровня

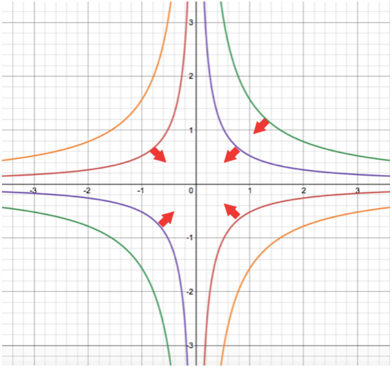
Изобразим эквипотенциальные линии, проиллюстрировав ортогональность линий уровня и векторных линий.

$$\sin xy = C$$

$$xy = \arcsin C$$

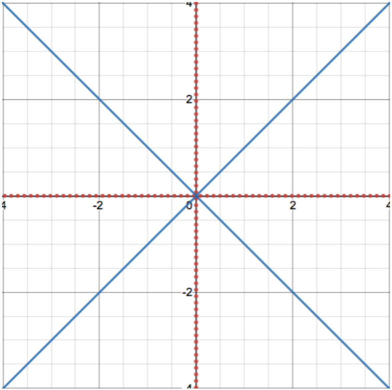
$$y = \frac{\arcsin C}{x}$$

Гиперболы:



Линии уровня

Строим:



Пусть C = 0

векторные линии: $x^2 = y^2$

Линии уровня: $xy = 0$

Работа поля

При C = 1

$$x^2 - y^2 = 1$$

Пусть $A(1;0)\ \ B(2;\sqrt{3})$

$$A = U(B) - U(A) =$$

$$= \sin 2\sqrt{3} - \sin 0 = \sin 2\sqrt{3}$$

В общем виде:

$$A(x_0; \sqrt{x_0^2 - 1})\quad B(x_1; \sqrt{x_1^2 - 1})$$

$$A = \sin x_1 \sqrt{x_1^2 - 1} - \sin x_0 \sqrt{x_0^2 - 1}$$

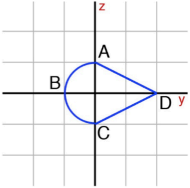
Поток векторного поля

Формулировка задания:

Дано тело *T*, ограниченное следующими поверхностями:

$$y+\sqrt{1-x^2-z^2}=0,\ y+2\sqrt{x^2+z^2}=2$$

На рисунке представлено сечение тела Т координатной плоскостью *Oyz*.



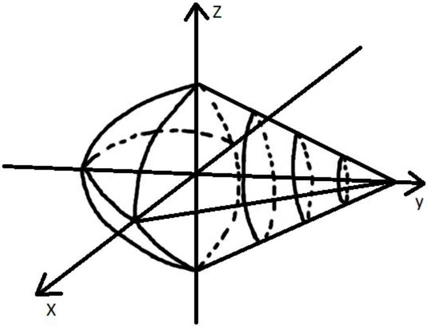
План:

- Изобразить тело Т на графике в пространстве
- Вычислить пототк поля $\vec{a}=(\cos zy)\vec{i}+x\vec{j}+(e^{y^2}-5z)\vec{k}$ через боковую поверхность тела *T*, образованную вращением дуги *ABC* вокруг оси *Oy*, в направлении внешней нормали поверхности тела *T*.

Изображение тела *T*

Тело *T*, ограниченное следующими поверхностями:

$$y + \sqrt{1 - x^2 - z^2} = 0,\ y + 2\sqrt{x^2 + z^2} = 2$$



Вычисление потока поля

Расчет:

$$\vec{a} = (\cos zy)\vec{i} + x\vec{j} + (e^{y^2} - 5z)\vec{k}$$

через полусферу: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ при $y \leq 0$

Поверхность проецируем на плоскость *Oxz*

Добавим к полусфере круг:

$$\begin{cases} 1 = x^2 + z^2 \\ 0 = y \end{cases}$$

Найдем поток через замкнутую поверхность по теореме Остроградского-Гаусса:

$$div = \frac{\delta P}{\delta x} + \frac{\delta Q}{\delta y} + \frac{\delta R}{\delta z} = 0 + 0 - 5 = -5$$

Вычисление потока поля

Расчет:

$$\dot{\Pi} = \iiint_v div\vec{a}dv = -5 \iiint_v dv =$$

$$= -5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi}{3} = \frac{-10\pi}{3}$$

Найдем поток через круг $y = 0$, поэтому $n^\circ = (0;1;0)$

$$(a \cdot n^\circ) = x$$

$$x^2 + z^2 \leq 1$$

$$\Pi_1 = \iint_s xds = \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{sqrt1-x^2} xdz = \int_{-1}^{1} xdx \left(z \Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{sqrt1-x^2} \right) =$$

Вычисление потока поля

Расчет:

$$= \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}x dx = -\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} d(1-x^2) =$$

$$= -\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_{-1}^{1} = 0$$

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2$$

где Π_2 - поток полусф $\implies \Pi_2 = -\frac{10\pi}{3}$