9.3

In [1]:

```
import numpy as np
import scipy.stats as st
import matplotlib.pyplot as plt
from IPython.display import display, Markdown, Latex

%matplotlib inline
```

In [2]:

```
sample_size = 100
gamma = 0.95
sample = st.norm.rvs(size = sample_size)
x = np.arange(1, sample_size + 1)
```

$X_i \sim N(a, \sigma^2), i = 1, .., 100$

(a) ДИ для a при известном σ^2

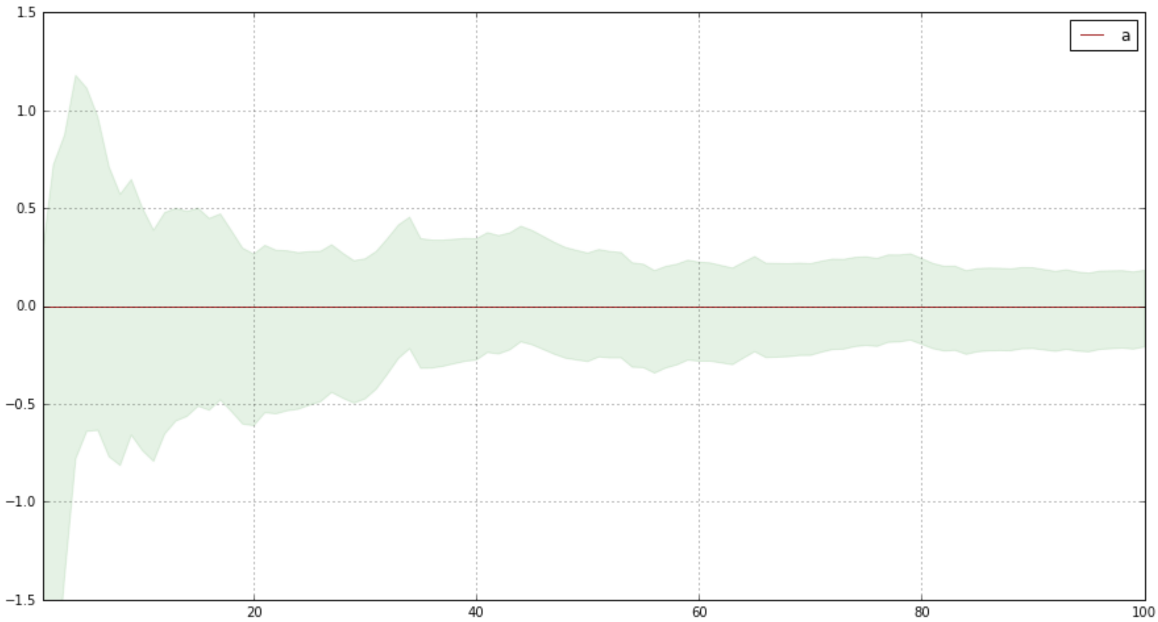
Пусть σ^2 известно и равно 1, найдем точный доверительный интервал для a:

Случайная величина $\sqrt{n}\frac{\overline{X}-a}{\sigma} \sim N(0,1)$, поэтому $P(u_{\frac{1-\gamma}{2}} < \sqrt{n}\frac{\overline{X}-a}{\sigma} < u_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \gamma$, где $u_{\frac{1-\gamma}{2}} = -u_{\frac{1+\gamma}{2}}$ - квантили стандартного нормального распределения.

Тогда ДИ для $a : (\overline{X} - u_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + u_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

In [3]:

```
means = sample.cumsum() / x
plt.figure(figsize=(15, 8))
plt.plot(x, np.zeros(sample_size), color='brown', label='a')
plt.fill_between(x, means - st.norm.ppf(1/2+gamma/2)*(x**(-1/2)),
                    means + st.norm.ppf(1/2+gamma/2)*(x**(-1/2)), alpha=0.1, colo
plt.legend()
plt.xlim((1, 100))
plt.ylim((-1.5, 1.5))
plt.grid()
plt.show()
```



Истинное значение a попадает в ДИ.

(b) ДИ для σ^2 при известном a

Пусть а известно и равно 0, найдем точный доверительный интервал для σ^2:

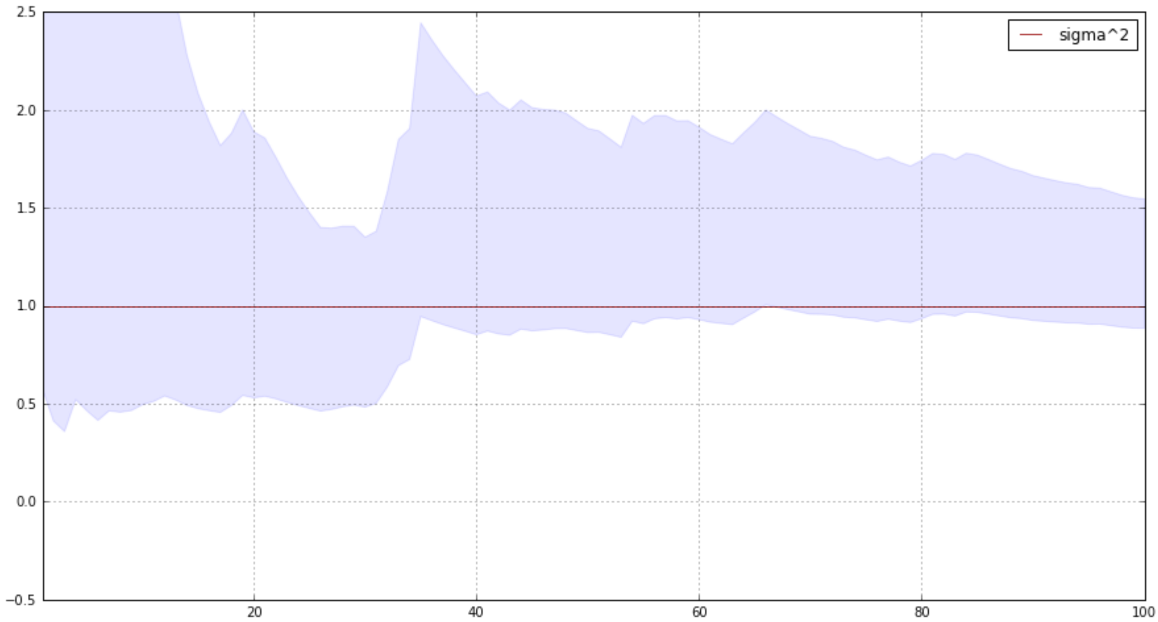
Случайная величина $\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - a)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_n$

Тогда $P(u_{\frac{1-\gamma}{2}} < \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - a)^2}{\sigma^2} < u_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \gamma$, где $u_{\frac{1-\gamma}{2}}$ и $u_{\frac{1+\gamma}{2}}$ - квантили χ^2_n

ДИ для σ^2 : $(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - a)^2}{u_{\frac{1+\gamma}{2}}}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - a)^2}{u_{\frac{1-\gamma}{2}}})$

In [68]:

```
plt.figure(figsize=(15, 8))
plt.plot(x, np.ones(sample_size), color='brown', label='sigma^2')
plt.fill_between(x, (sample**2).cumsum()/st.chi2.ppf(1/2 + gamma/2, x),
                    (sample**2).cumsum()/st.chi2.ppf(1/2 - gamma/2, x), alpha=0.1
plt.legend()
plt.xlim((1, 100))
plt.ylim((-0.5, 2.5))
plt.grid()
plt.show()
```



Истинное значение σ^2 попадает в ДИ.

(c) ДИ для a при неизвестном σ^2

Пусть σ^2 неизвестно, найдем точный доверительный интервал для a:

Случайная величина $\sqrt{n}\frac{\overline{X}-a}{S} \sim T_{n-1}$, где T_{n-1} - распределение Стьюдента с $n-1$ степенями свободы, а $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ - оценка σ^2

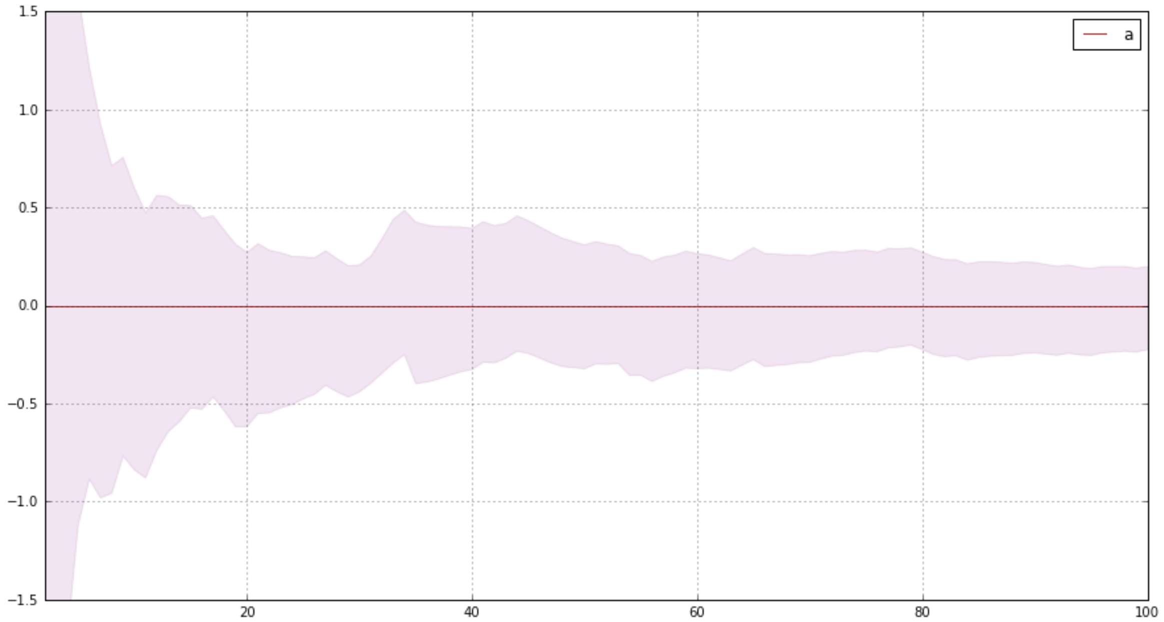
Тогда $P(u_{\frac{1-\gamma}{2}} < \sqrt{n}\frac{\overline{X}-a}{S} < u_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \gamma$, где $u_{\frac{1-\gamma}{2}} = -u_{\frac{1+\gamma}{2}}$ - квантили из распределения Стьюдента с n-1 степенями свободы.

ДИ для a : $(\overline{X} - u_{\frac{1+\gamma}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + u_{\frac{1+\gamma}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}})$

In [69]:

```
S = np.array([])
for k in range(1,sample_size+1):
    S = np.append(S, sum([(sample[i] - sample.sum()/sample_size)**2 for i in r

plt.figure(figsize=(15, 8))
plt.plot(x, np.zeros(sample_size), color='brown', label='a')
plt.fill_between(x, means - st.t.ppf(1/2+gamma/2, x-1)*S**(1/2)*(x)**(-1/2),
                 means + st.t.ppf(1/2+gamma/2, x-1)*S**(1/2)*(x)**(-1/2), alph
plt.legend()
plt.xlim((2, 100))
plt.ylim((-1.5, 1.5))
plt.grid()
plt.show()
```



Истинное значение a попадает в ДИ

(d) ДИ для σ^2 при неизвестном a

Пусть a неизвестно, найдем точный доверительный интервал для σ^2:

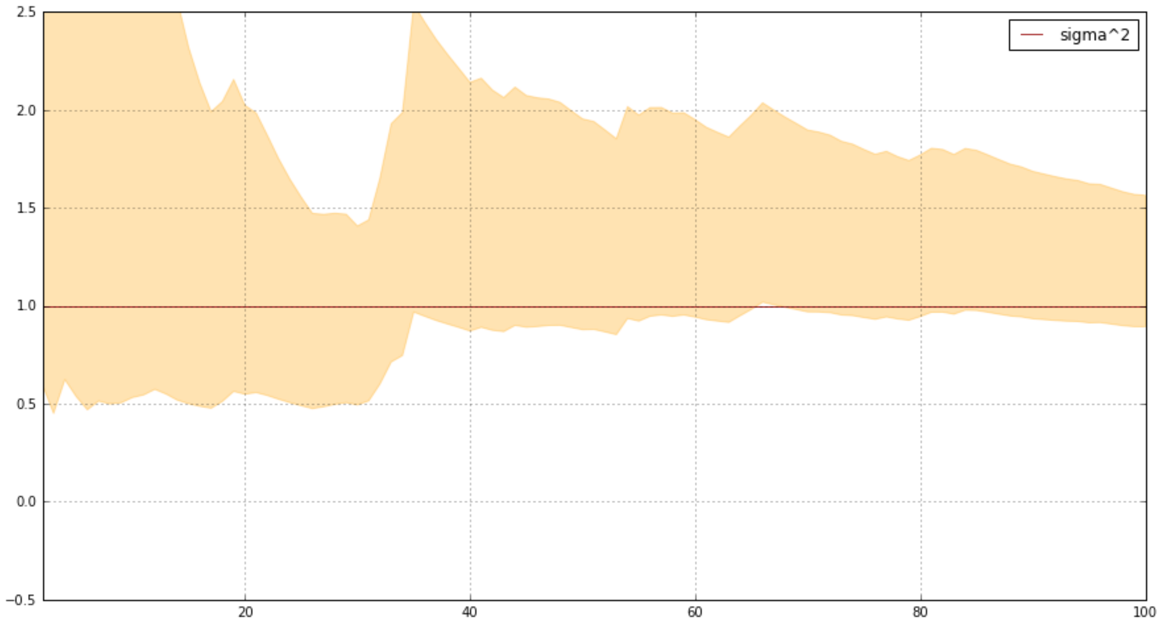
Случайная величина $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$, где $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$ - оценка σ^2

Тогда $P(u_{\frac{1-\gamma}{2}} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < u_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \gamma$, где $u_{\frac{1-\gamma}{2}}$ и $u_{\frac{1+\gamma}{2}}$ - квантили из хи-квадрат распределения с n-1 степенями свободы.

Отсюда ДИ для σ^2 : $(\frac{(n-1)S^2}{u_{\frac{1-\gamma}{2}}}, \frac{(n-1)S^2}{u_{\frac{1+\gamma}{2}}})$

In [70]:

```
plt.figure(figsize=(15, 8))
plt.plot(x, np.ones(sample_size), color='brown', label='sigma^2')
plt.fill_between(x, x*S/st.chi2.ppf(1/2+gamma/2, x-1),
                 x*S/st.chi2.ppf(1/2-gamma/2, x-1), alpha=0.3, color='orange')
plt.legend()
plt.xlim((2, 100))
plt.ylim((-0.5, 2.5))
plt.grid()
plt.show()
```



Истинное значение σ^2 попадает в ДИ

(e) ДО для (a, σ^2)

Построим доверительную область для параметров (a, σ^2)

Воспользуемся независимостью $\overline{X}$ и S^2.

$P(\sqrt{n}\frac{|\overline{X}-a|}{\sigma} < u_{\frac{1+\gamma}{2}}, t_{\frac{1-\gamma}{2}} < \frac{nS^2}{\sigma^2} < t_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \gamma^2$, где u_p - p-квантиль $N(0, 1)$, а t_p - p-квантиль χ^2_{n-1}.

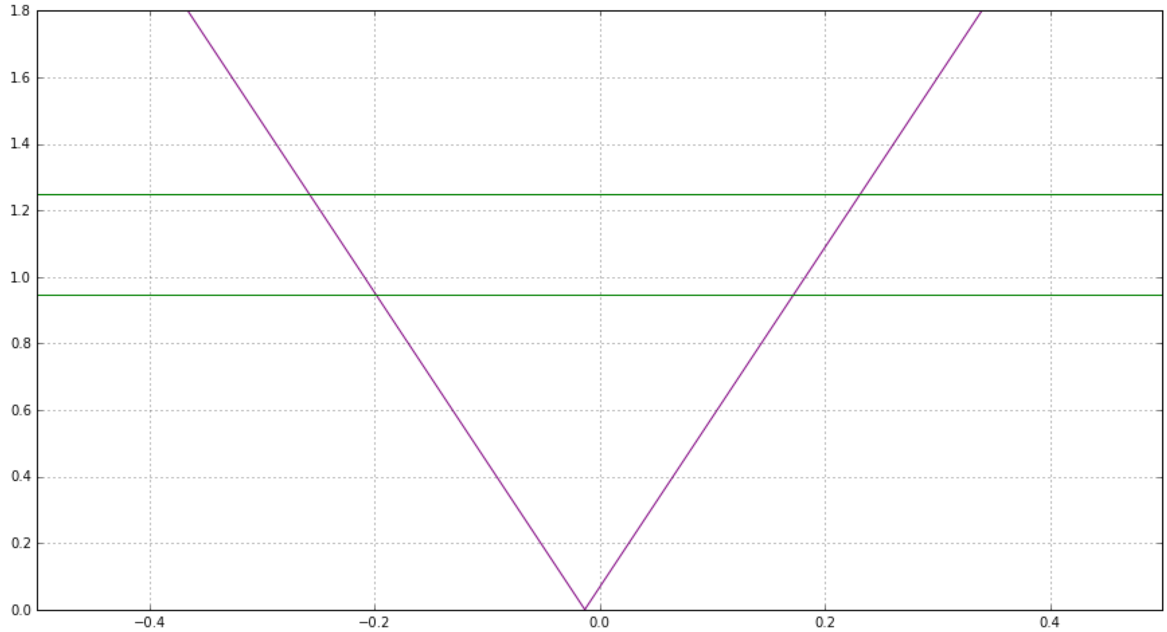
Построим доверительную область:

In [67]:

```
plt.figure(figsize=(15, 8))
a = np.arange(sample.mean() -2.5,sample.mean() + 2.5, 0.05)
y = sample_size**0.5*(sample.mean() - a)/st.norm.ppf(1/2 - gamma/2)
plt.plot(a, y, color = 'purple')
plt.plot(a, -y, color = 'purple')

plt.plot(a, np.ones(sample_size)*(sample_size*S[sample_size - 1]/st.chi2.ppf(1
plt.plot(a, np.ones(sample_size)*(sample_size*S[sample_size - 1]/st.chi2.ppf(1


plt.ylim([-0,1.8])
plt.xlim([-0.5,0.5])
plt.grid()
plt.show()
```



Полученная трапеция - доверительная область для (a, σ^2). Как мы видим, значения $a = 0, \sigma = 1$ попадают в ДО.