7. Байесовские оценки

1. Сгенерируйте выборку $X_1, ..., X_{100}$ из распределения $N(0, 1)$. Для каждого $n \leqslant 100$ в модели $N(\theta, 1)$ найдите оценку максимального правдоподобия по выборке $X_1, ..., X_n$ и байесовскую оценку, для которой в качестве априорного распределения возьмите сопряженное из теоретической задачи 8.3. Возьмите несколько значений параметров сдвига и масштаба для априорного распределения: (0, 1), (0, 100), (10, 1), (10, 100). Постройте графики абсолютной величины отклонения оценки от истинного значения параметра в зависимости от n для оценки максимального правдоподобия и байесовских оценок, которым соответствуют разные значения параметров априорного распределения (5 кривых на одном графике). Сделайте выводы.

   Аналогичные исследования произведите для модели $N(0, \theta)$. В этом случае возьмите следующие параметры для априорного распределения: (1, 1), (1, 100), (10, 1), (10, 100).

2. Рассмотрите схему испытаний Бернулли (т.е. броски монет) с вероятностью успеха p. Постройте несколько графиков априорного (сопряженное из теоретической задачи 8.4) распределения для разных параметров и охарактеризуйте, как значения параметров априорного распределения соотносятся с априорными знаниями о монете. Это могут быть, например, знания вида "монета, скорее, честна" (при таком априорном распределении наиболее вероятны значения p в окрестности 0.5) , "монета нечестная" (наименее вероятны значения p в окрестности 0.5), "монета, скорее всего, нечестная, перевес в сторону герба" (наиболее вероятны значения p в окрестности 1).

   Проведите по 20 бросков для разных монет (можно сгенерировать на компьютере несколько выборок для различных p) и найдите байесовские оценки вероятности выпадения герба при различных параметрах априорного распределения, при которых получаются разные интерпретации априорных знаний (достаточно трех пар). Сравните с оценками максимального правдоподобия. Постройте графики абсолютных величин отклонений оценок, построенных по выборке $X_1, \ldots, X_n$ ($n \leq 20$), от истинных значений параметра в зависимости от n (для разных p разные графики). Сделайте выводы.

3. Рассматривается следующая параметрическая модель: $X_1, ..., X_N$ — выборка из распределения $N(\theta, 1)$. Известно, что θ близко к нулю: с вероятностью не менее 0.95 выполнено неравенство $|\theta| < 0.5$.

   Сгенерируйте выборку размера 100 из распределения Коши с нулевым параметром сдвига и с параметром масштаба, равным 1. При $N = 100$ используйте эту выборку в качестве $X_1, \ldots, X_N$ для описанной выше модели. Посчитайте байесовские оценки (для одного априорного распределения, учитывающего описанное выше свойство распределения параметра θ) и оценки максимального правдоподобия для всех $n \leqslant 100$. Постройте графики абсолютной величины отклонения этих оценок от истинного значения параметра $\theta_0 = 0$ в зависимости от n. Сделайте выводы.

4. Адаптировать задачу из предыдущего раздела (УМО II) к случаю, когда параметр λ неизвестен и его нужно оценивать (даже вначале, при отсутствии информации) по мере поступления новой информации (с помощью байесовской оценки). В качестве априорного распределения λ возьмите сопряженное к экспоненциальному распределению. Выберите параметры сопряженного распределения и объясните свой выбор. Сделайте выводы.

Данные те же, что и в задаче из предыдущего раздела. Обратите внимание на изменение формата вывода программы.