7.2

In [24]:

```
import numpy as np
import scipy.stats as st
import matplotlib.pyplot as plt
from IPython.display import display, Markdown, Latex

%matplotlib inline
```

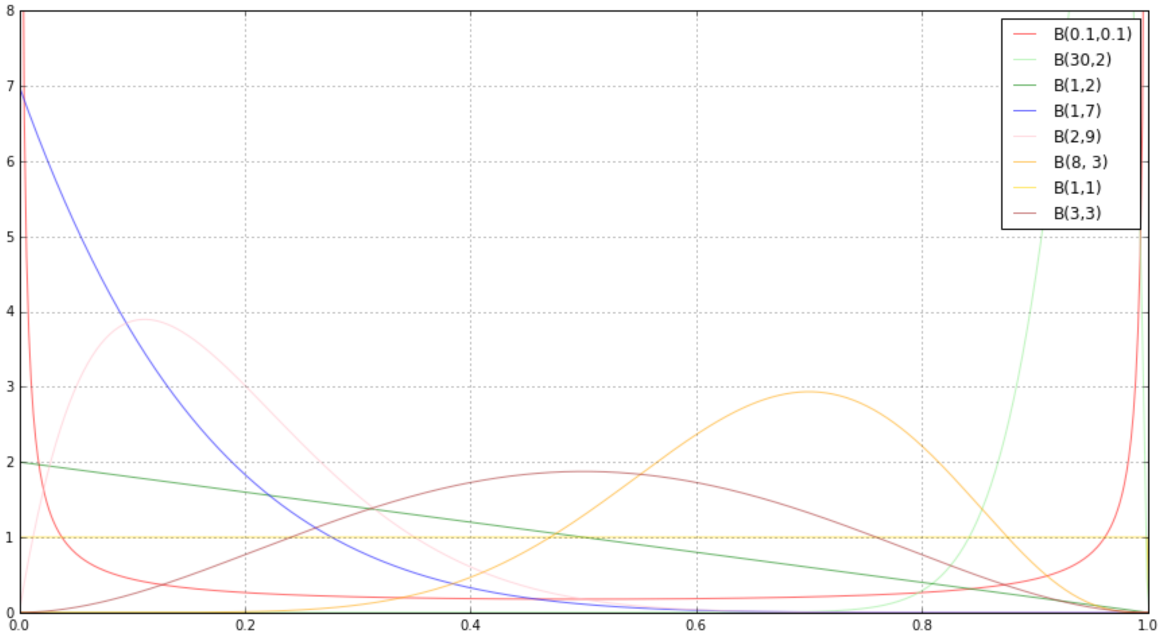
In [25]:

```
sample_size = 20
n = np.arange(1, sample_size + 1)
```

Сопряженным к распределению Бернулли является бета-распределение. Построим несколько графиков плотности бэта-распределения с различными параметрами.

In [64]:

```
plt.figure(figsize=(15, 8))
x = np.linspace(-0.5, 1.5, 1000)
plt.plot(x, st.beta.pdf(x, 0.1, 0.1), color='red', alpha=0.6, label='B(0.1,0.1
plt.plot(x, st.beta.pdf(x, 30, 2), color='lightgreen', alpha=0.6, label='B(30,
plt.plot(x, st.beta.pdf(x, 1, 2), color='green', alpha=0.6, label='B(1,2)')
plt.plot(x, st.beta.pdf(x, 1, 7), color='blue', alpha=0.6, label='B(1,7)')
plt.plot(x, st.beta.pdf(x, 2, 9), color='pink', alpha=0.6, label='B(2,9)')
plt.plot(x, st.beta.pdf(x, 8, 4), color='orange', alpha=0.6, label='B(8, 3)')
plt.plot(x, st.beta.pdf(x, 1, 1), color='gold', alpha=0.6, label='B(1,1)')
plt.plot(x, st.beta.pdf(x, 3, 3), color='brown', alpha=0.6, label='B(3,3)')
plt.legend()
plt.xlim((0, 1))
plt.ylim((0, 8))
plt.grid()
plt.show()
```



Из графика видно, что параментры α, β напрямую связаны с честностью монеты. При $\alpha = \beta$ монета честна, вероятность выпадения орла и решки одинаковы и равняются 0.5. При $\alpha < \beta$ монета нечестна, перевес в сторону решки. При $\alpha > \beta$ - перевес в сторону орла. Причем, чем больше разница между параметрами, тем ближе график к 0 или 1.

In [39]:

```
def beta_est(alpha, beta, sample):
    alpha_1 = alpha + sample.cumsum()
    beta_1 = beta + n - sample.cumsum()
    return alpha_1 / (alpha_1 + beta_1)
```

In [65]:

```
def sample_func(p):
    sample = st.bernoulli.rvs(p, size = sample_size)
    OMP = sample.cumsum() / n

    plt.figure(figsize=(10, 5))
    plt.plot(n, abs(beta_est(1, 1, sample) - p), color='red', alpha=0.6, label
    plt.plot(n, abs(beta_est(1, 7, sample) - p), color='blue', alpha=0.6, labe
    plt.plot(n, abs(beta_est(30, 2, sample) - p), color='orange', alpha=0.6, l
    plt.plot(n, abs(OMP - p), color='green', alpha=0.6, label='MLE')
    plt.legend()
    #plt.xlim((1, 100))
    #plt.ylim((-40, 60))
    plt.grid()
    plt.show()
```

$X_1, \ldots, X_{20}$ - выборка из распределения $Bernoulli(p)$. Возьмем за априорное распределение $B(\alpha, \beta)$ с различными парами параметров: (1,1), (1,5), (8,4). Построим графики $f(n) = |p_1 - p|$, где p_1 оценка p.

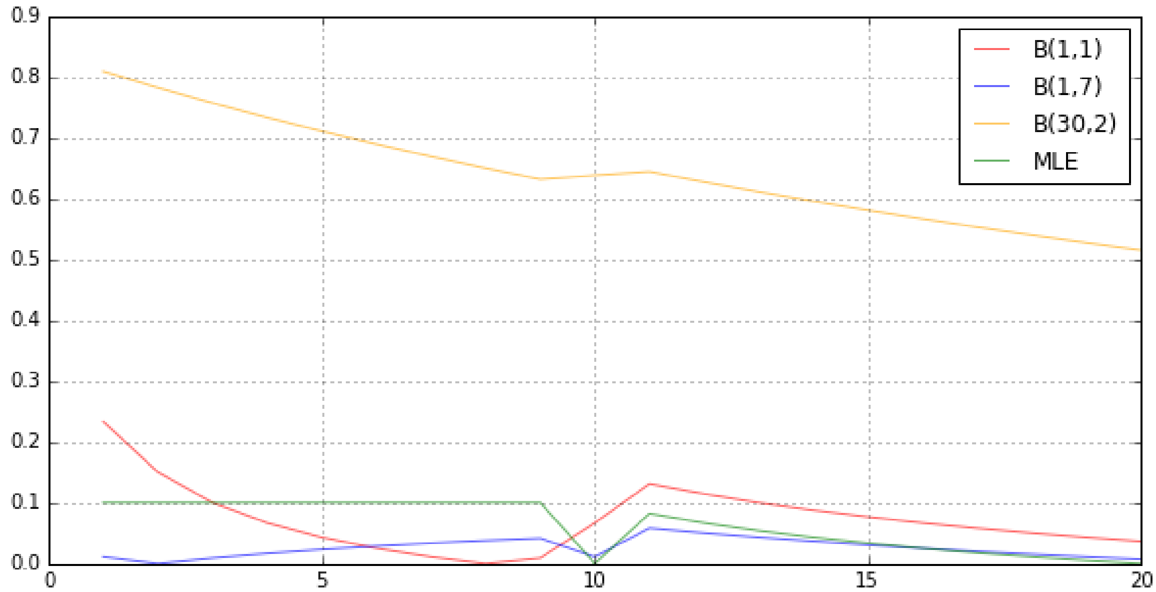
Оценка максимального правдоподобия: $p_1 = \overline{X}$

Байесовская оценка: $p_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\beta_1} = \frac{\alpha+\sum_{i=1}^n x_i}{\alpha+\sum_{i=1}^n x_i+\beta+n-\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{\alpha+\sum_{i=1}^n x_i}{\alpha+\beta+n}$

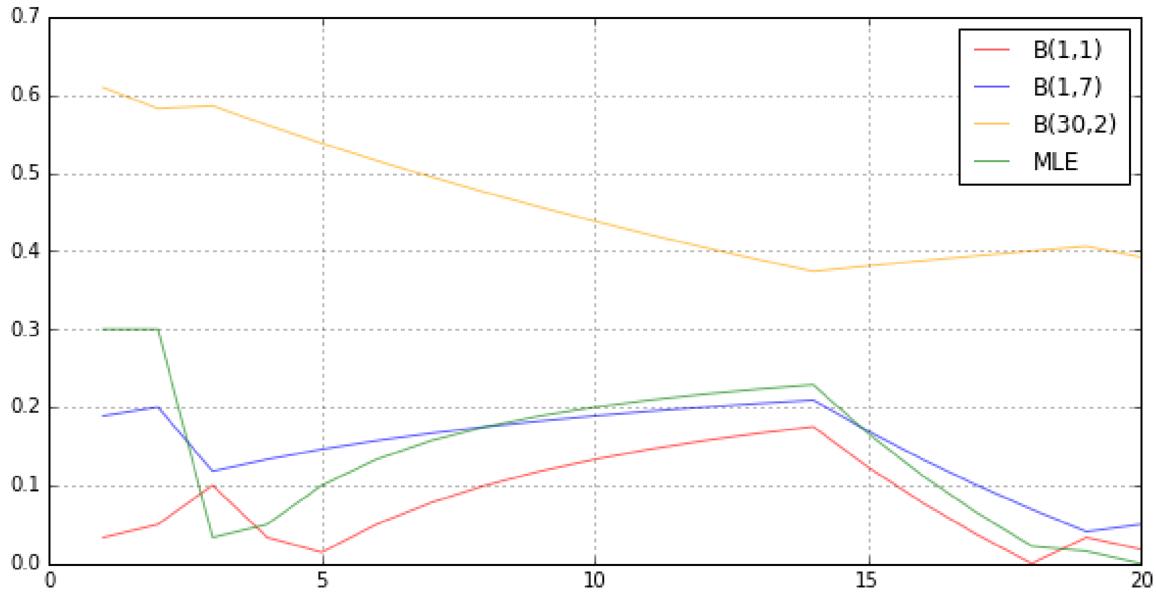
In [66]:

```
p = np.arange(0.1,1,0.2)
for _p in p:
    print("p = ", _p)
    sample_func(_p)
```

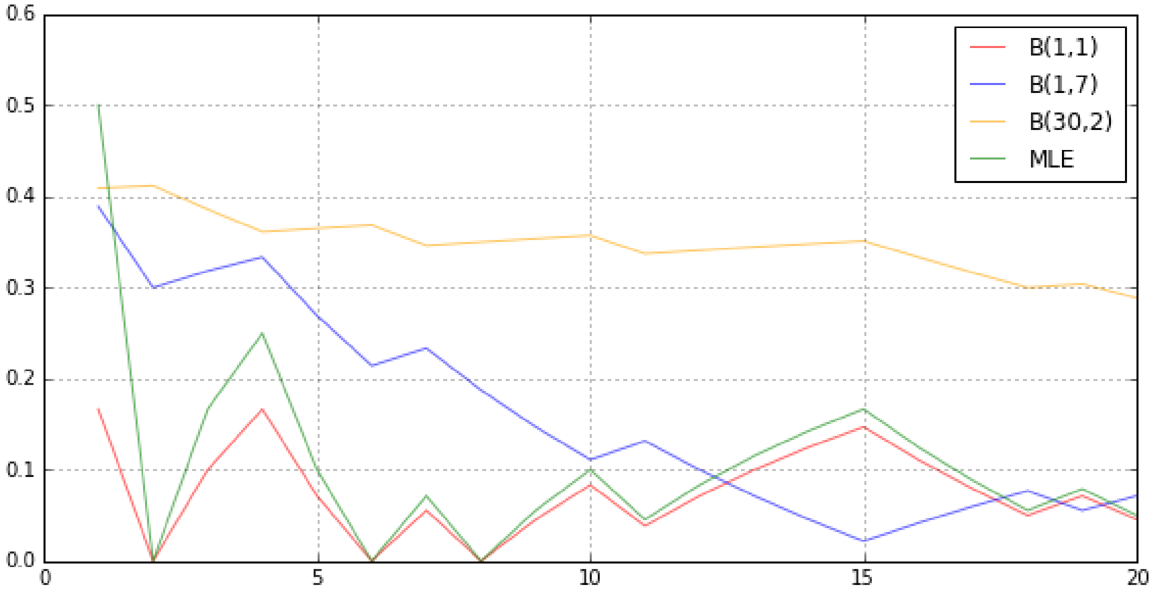
p = 0.1



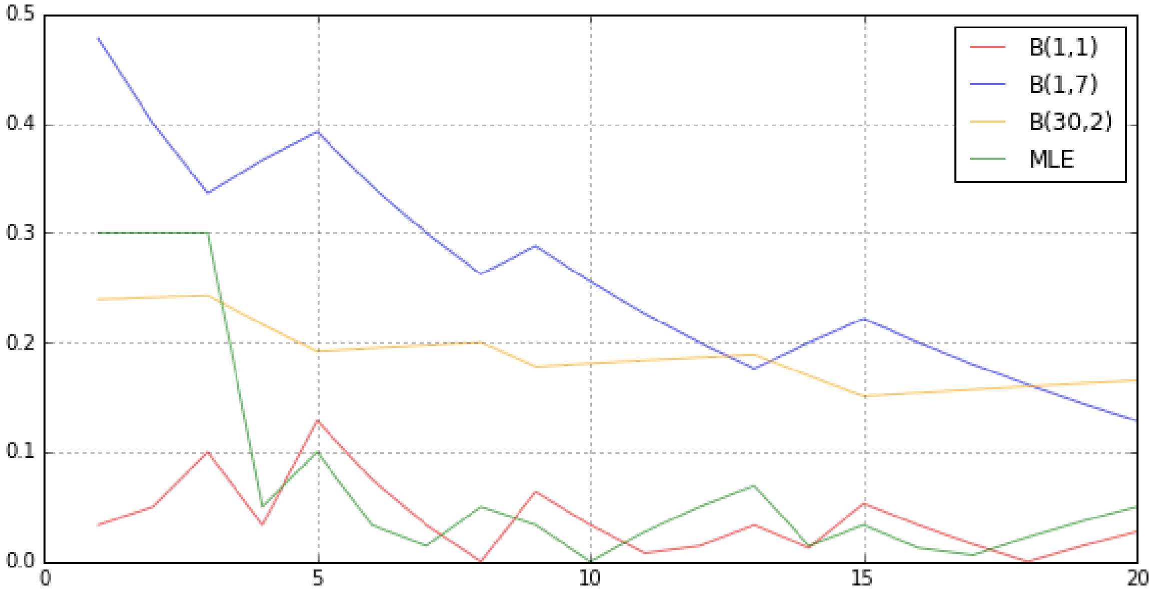
p = 0.3



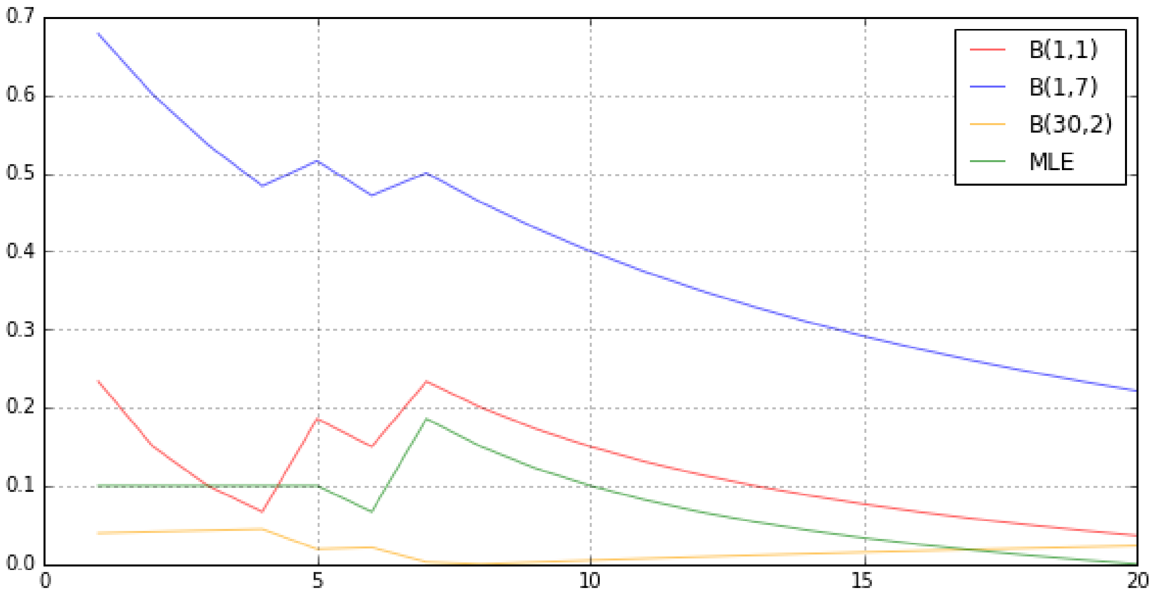
p = 0.5


B(1,1)
B(1,7)
B(30,2)
MLE
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0
5
10
15
20

p = 0.7


B(1,1)
B(1,7)
B(30,2)
MLE
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0
5
10
15
20

p = 0.9


B(1,1)
B(1,7)
B(30,2)
MLE
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0
5
10
15
20

Из графиков видно, что теория о нечестности монеты работает: при параметрах бета-распределения, при которых перевес был в сторону орла (то есть наиболее вероятны значения p, близкие к 1), оценка становится точнее с приближение p к 1; при параметрах бета-распределением с перевесом в сторону решки оценка лучше при малых p. Оценка максимального правдоподобия примерно одинакова при любых p, как и оценка при $B(1, 1)$. При $p = 0.5$, эти две оценки ведут себя одинаково.