Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE
Métodos numéricos NRC 3657

Lizeth Abigail Iza Moreno

1 de julio de 2021

Descripción de la actividad.

1. Utilice todos los métodos estudiados (Newton, Bisección y Secante) para encontrar la raíz de la siguiente función: f(x) = x+cosx en el intervalo [-2, 0], con cuatro cifras decimales.

Método de Newton:

Datos:
Función: $f(x) = x + cos(x)$
Derivada: $f'(x) = 1 - sen(x)$
Interval:[-2,0]
$x_0 = 0$
i=0

Primero evaluamos -2 y 0 en la función:

$$f(x) = x + cos(x)$$
$$f(-2) = -2 + cos(-2) = -2,416$$
$$f(x) = x + cos(x)$$
$$f(0) = 0 + cos(0) = 1$$

Elijo el punto 1 porque está más cerca de la solución

Primera iteración i=0

Evaluamos con $x_0 = 0$ en la función y la derivada:

$$f(x_i) = f(x_0) = f(0) = 0 + cos(0) = 1$$
$$f'(x_i) = f'(x_0) = f'(0) = 1 - sen(0) = 1$$

Reemplazamos en la fórmula de Newton

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$
$$x_1 = 0 - \frac{1}{1}$$
$$x_1 = -1$$

Segunda iteración i=1

Evaluamos con $x_1 = -1$ **en la función y la derivada:**

$$f(x_i) = f(x_1) = f(-1) = -1 + cos(-1) = -0,460$$
$$f'(x_i) = f'(x_1) = f'(-1) = 1 - sen(-1) = 1,841$$

Reemplazamos en la fórmula de Newton

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$
$$x_2 = -1 - \frac{f(-0,460)}{f'(1,841)}$$
$$x_2 = -0,750$$

Tercera iteración i=2

Evaluamos con $x_2 = -0,750$ **en la función y la derivada:**

$$f(x_i) = f(x_2) = f(-0,750) = -1 + cos(-0,750) = -0,018$$
$$f'(x_i) = f'(x_2) = f'(-0,750) = 1 - sen(-0,750) = 1,681$$

Reemplazamos en la fórmula de Newton

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$
$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$
$$x_3 = -0,750 - \frac{f(-0,018)}{f'(1,681)}$$
$$x_3 = -0,739$$

Por lo tanto, la raíz de la función:$f(x) = x + cos(x)$ **es** $-0,739$ llegue a la respuesta con 3 iteraciones.

Método de Bisección

Datos:
Funcion:f(x) = x+cos x
Interval:[-2,0]
a=-2
b=0
i=1

Primera iteración i=1

Primero sacamos el punto medio:
Intervalo:[-2,0]

$$c = \frac{a+b}{2}$$
$$c = \frac{-2+0}{2}$$
$$c = -1$$

Luego evaluamos la función en f(a),f(b),f(c):

$$f(a) = f(-2) = -2 + cos(-2) = -2,416$$
$$f(b) = f(0) = cos(0) = 1$$
$$f(c) = f(-1) = -1 + cos(-1) = -0,460$$

Obtenemos lo intervalos:

f(c).f(b)< 0
Intervalo:[-1,0]

Segunda iteración i=2

Primero sacamos el punto medio:
Intervalo: [-1,0]

$$c = \frac{a+b}{2}$$
$$c = \frac{-1+0}{2}$$
$$c = -0,5$$

Luego evaluamos la función en f(a), f(b), f(c):

$$f(a) = f(-1) = -1 + cos(-1) = -0,460$$
$$f(b) = f(0) = cos(0) = 1$$
$$f(c) = f(-0,5) = -0,5 + cos(-0,5) = 0,378$$

Obtenemos lo intervalos:

f(a).f(c)< 0
Intervalo:[-1,-0,5]

Tercera iteración i=3

Primero sacamos el punto medio:
Intervalo: [-1,-0,5]

$$c = \frac{a+b}{2}$$
$$c = \frac{-1-0,5}{2}$$
$$c = \frac{-1,5}{2}$$
$$c = -0,75$$

Luego evaluamos la función en f(a), f(b), f(c):

$$f(a) = f(-1) = -1 + cos(-1) = -0,460$$
$$f(b) = f(-0,5) = cos(-0,5) = 0,378$$
$$f(c) = f(-0,75) = -0,75 + cos(-0,75) = -0,018$$

Obtenemos lo intervalos:

f(b).f(c)$<$ 0
Intervalo:[-0,75,-0,5]

Cuarta iteración i=4

Primero sacamos el punto medio:
Intervalo: [-0,75,-0,5]

$$c = \frac{a+b}{2}$$
$$c = \frac{-0,75-0,5}{2}$$
$$c = \frac{-1,25}{2}$$
$$c = -0,625$$

Luego evaluamos la función en f(a), f(b), f(c):

$$f(a) = f(-0,75) = -0,75 + cos(-0,75) = -0,018$$
$$f(b) = f(-0,5) = cos(-0,5) = 0,378$$
$$f(a) = f(-0,625) = -0,625 + cos(-0,625) = 0,186$$

Obtenemos lo intervalos:

f(a).f(c)$<$ 0
Intervalo:[-0,75,-0,625]

Quinta iteración i=5

Primero sacamos el punto medio:
Intervalo:[-0,75,-0,625]

$$c = \frac{a+b}{2}$$
$$c = \frac{-0,75 - 0,625}{2}$$
$$c = \frac{-1,375}{2}$$
$$c = -0,688$$

Luego evaluamos la función en f(a), f(b), f(c):

$$f(a) = f(-0,75) = -0,75 + cos(-0,75) = -0,018$$
$$f(b) = f(-0,625) = -0,625 + cos(-0,625) = 0,186$$
$$f(c) = f(-0,688) = -0,688 + cos(-0,688) = 0,085$$

Obtenemos lo intervalos:

f(a).f(c)< 0
Intervalo:[-0,75,-0,688]

Sexta iteración i=6

Primero sacamos el punto medio:
Intervalo:[-0,75,-0,688]

$$c = \frac{a+b}{2}$$
$$c = \frac{-0,75 - 0,688}{2}$$
$$c = \frac{-1,438}{2}$$
$$c = -0,719$$

Luego evaluamos la función en f(a),f(b),f(c):

$$f(a) = f(-0,75) = -0,75 + cos(-0,75) = -0,018$$
$$f(b) = f(-0,688) = -0,688 + cos(-0,688) = 0,085$$
$$f(c) = f(-0,719) = -0,719 + cos(-0,719) = 0,033$$

Obtenemos lo intervalos:

f(a).f(c)< 0
Intervalo:[-0,75,-0,719]

Septima iteración i=7

Primero sacamos el punto medio:
Intervalo:[-0,75,-0,719]

$$c = \frac{a+b}{2}$$
$$c = \frac{-0,75 - 0,719}{2}$$
$$c = \frac{-1,469}{2}$$
$$c = -0,735$$

Luego evaluamos la función en f(a), f(b), f(c):

$$f(a) = f(-0,75) = -0,75 + cos(-0,75) = -0,018$$
$$f(b) = f(-0,719) = -0,719 + cos(-0,719) = 0,033$$
$$f(c) = f(-0,735) = -0,735 + cos(-0,735) = 0,007$$

Obtenemos lo intervalos:

f(a).f(c)< 0
Intervalo:[-0,75,-0,735]

Octava iteración i=8

Primero sacamos el punto medio:
Intervalo:[-0,75,-0,735]

$$c = \frac{a+b}{2}$$
$$c = \frac{-0,75 - 0,735}{2}$$
$$c = \frac{-1,485}{2}$$
$$c = -0,743$$

Luego evaluamos la función en f(a), f(b), f(c):

$$f(a) = f(-0,75) = -0,75 + cos(-0,75) = -0,018$$
$$f(b) = f(-0,735) = -0,735 + cos(-0,735) = 0,007$$
$$f(c) = f(-0,743) = -0,743 + cos(-0,743) = -0,006$$

Obtenemos lo intervalos:

f(b).f(c)< 0
Intervalo:[-0,743,-0,735]

Novena iteración i=9

Primero sacamos el punto medio:
Intervalo:[-0,743,-0,735]

$$c = \frac{a+b}{2}$$
$$c = \frac{-0,743-0,735}{2}$$
$$c = \frac{-1,478}{2}$$
$$c = -0,739$$

Luego evaluamos la función en f(a), f(b), f(c):

$$f(a) = f(-0,743) = -0,743 + cos(-0,743) = -0,006$$
$$f(b) = f(-0,735) = -0,735 + cos(-0,735) = 0,007$$
$$f(c) = f(-0,739) = -0,739 + cos(-0,739) = 0,0001$$

Por lo tanto, la raíz de la función:$f(x) = x + cos(x)$ **es** $-0,739$**,llegué a la respuesta con 9 iteraciones**

Método de la Secante:

Datos:
Función:$f(x) = x + cos(x)$
Interval:[-2,0]
$x_0 = -2$
$x_1 = -0$

Primera iteración i=1

Primero evaluamos $x_0 - 2$ **y**$x_1 = 0$ **en la función:**

$$f(x_i - 1) = f(x_0) = f(-2) = -2 + cos(-2) = -2,416$$
$$f'(x_i) = f(x_1) = f'(0) = cos(0) = 1$$

Reemplazamos en la fórmula de la secante

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1}-x_i)}{f(x_{i-1})-f(x_i)}$$
$$x_2 = 0 - \frac{1(-2-0)}{-2,416-1}$$
$$x_3 = -0,585$$

Segunda iteración i=2

Primero evaluamos $x_2 = -0,585$ **y** $x_1 = 0$ **en la función:**

$$f(x_i - 1) = f(x_1) = f(0) = 0 + cos(0) = 1$$
$$f(x_i) = f(x_2) = f(-0,585) = -0,585 + cos(-0,585) = 0,249$$

Reemplazamos en la fórmula de la secante

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(x_1 - x_2)}{f(x_1) - f(x_2)}$$
$$x_3 = -0,585 - \frac{(0,249)(0+0,585)}{(1)-0,249}$$
$$x_3 = -0,779$$

Tercera iteración i=3

Primero evaluamos $x_3 = -0,779$ **y** $x_2 = -0,585$ **en la función:**

$$f(x_i - 1) = f(x_2) = f(-0,585) = -0,585 + cos(-0,585) = 0,249$$
$$f(x_i) = f(x_3) = f(-0,779) = -0,779 + cos(-0,779) = -0,067$$

Reemplazamos en la fórmula de la secante

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)(x_2 - x_3)}{f(x_2) - f(x_3)}$$
$$x_4 = -0,779 - \frac{(-0,067)(-0,585+0,779)}{(0,249+0,067)}$$
$$x_4 = -0,738$$

Cuarta iteración i=4

Primero evaluamos $x_4 = -0,738$ **y** $x_3 = -0,779$ **en la función:**

$$f(x_i - 1) = f(x_3) = f(-0,779) = -0,779 + cos(-0,779) = -0,067$$
$$f(x_i) = f(x_4) = f(-0,738) = -0,738 + cos(-0,738) = 0,002$$

Reemplazamos en la fórmula de la secante

$$x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)(x_3 - x_4)}{f(x_3) - f(x_4)}$$
$$x_5 = -0,738 - \frac{(0,002)(-0,779+0,738)}{(-0,067-0,002)}$$
$$x_5 = -0,739$$

Por lo tanto, la raíz de la función:$f(x) = x + cos(x)$ **es** $-0,739$**,llegue a la respuesta con 4 iteraciones**

2. Encuentre la intersección de las siguientes funciones: f(x) = 3 - x y g(x) = lnx, con tres cifras decimales.

   Primero vamos a igualar:

$$f(x) = g(x)$$
$$3 - x = ln(x)$$
$$ln(x) + x - 3 = 0$$

   Formamos una nueva función

$$p(x) = ln(x) + x - 3 = 0$$

   por lo tanto,las raíces que se encuentren en la función p(x) van hacer los puntos de intersección de f(x) y g(x) y para esto voy a usar el método de Newton.

Método de Newton:

Datos:
Funcion:$p(x) = ln(x) + x - 3$
Derivada:$p'(x) = \frac{1}{x} + 1$
Interval:[-2,0]
$x_0 = 2$
i=0

Primera iteración i=0

Evaluamos con $x_0 = 2$ en la función y derivada:

$$p(x_i) = p(x_0) = p(2) = ln(2) + 2 - 3 = -0,307$$
$$p'(x_i) = p'(x_0) = p'(2) = \frac{1}{2} + 1 = 1,5$$

Ahora reemplazamos en la fórmula de Newton

$$x_{i+1} = x_i - \frac{p(x_i)}{p'(x_i)}$$
$$x_1 = x_0 - \frac{p(x_0)}{p'(x_0)}$$
$$x_1 = 2 - \frac{-0,307}{1,5}$$
$$x_1 = 2,205$$

Segunda iteración i=1

Evaluamos con $x_1 = 2,205$ en la función y derivada:

$$p(x_i) = p(x_1) = p(2,205) = ln(2,205) + 2,205 - 3 \qquad = -0,004$$
$$p'(x_i) = p'(x_1) = p'(2,205) = \frac{1}{2,205} + 1 = 1,454$$

Ahora reemplazamos en la fórmula de Newton

$$x_{i+1} = x_i - \frac{p(x_i)}{p'(x_i)}$$
$$x_2 = x_1 - \frac{p(x_1)}{p'(x_1)}$$
$$x_2 = 2,205 - \frac{-0,004}{1,454}$$
$$x_2 = 2,208$$

Tercera iteración i=2

Evaluamos con $x_2 = 2,208$ en la función y derivada:

$$p(x_i) = p(x_2) = p(2,208) = ln(2,208) + 2,208 - 3 \qquad = 0,000$$
$$p'(x_i) = p'(x_2) = p'(2,208) = \frac{1}{2,208} + 1 = 1,453$$

Ahora reemplazamos en la fórmula de Newton

$$x_{i+1} = x_i - \frac{p(x_i)}{p'(x_i)}$$
$$x_3 = x_2 - \frac{p(x_2)}{p'(x_2)}$$
$$x_3 = 2,208 - \frac{0}{1,453}$$
$$x_3 = 2,208$$

Ahora reemplazamos la raíz en cualquiera de las funciones dadas

$$f(x) = 3 - x$$
$$f(2,208) = 3 - 2,208$$
$$f(2,208) = 0,792$$

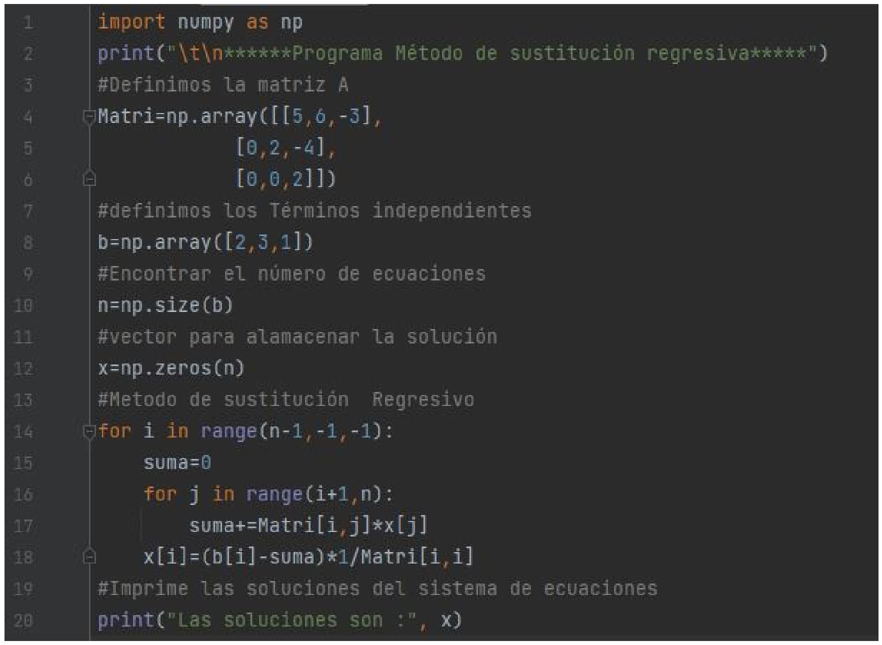
Por lo tanto en punto de intersección es (2,208;0,792)

3. Programe el método de sustitución regresiva. Analice el número de operaciones del algoritmo para matrices de tamaño 3×3.

   Realice con el siguiente ejemplo :

$$\begin{cases} 5x + 6y - 3z = 2 \\ 2y - 4z = 3 \\ 2z = 1 \\ \end{cases}$$

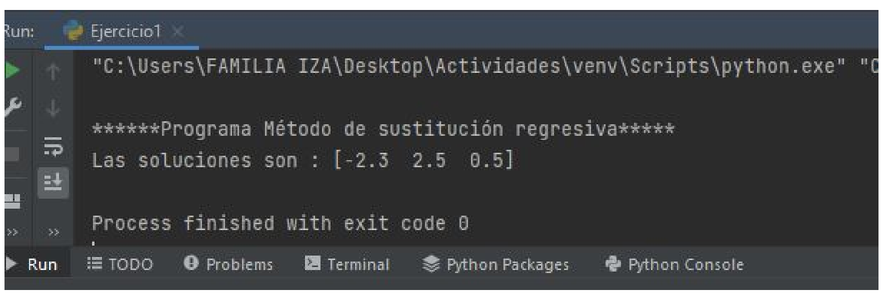
Código:



```python
import numpy as np
print("\t\n******Programa Método de sustitución regresiva*****")
#Definimos la matriz A
Matri=np.array([[5,6,-3],
            [0,2,-4],
            [0,0,2]])
#definimos los Términos independientes
b=np.array([2,3,1])
#Encontrar el número de ecuaciones
n=np.size(b)
#vector para alamacenar la solución
x=np.zeros(n)
#Metodo de sustitución  Regresivo
for i in range(n-1,-1,-1):
    suma=0
    for j in range(i+1,n):
        suma+=Matri[i,j]*x[j]
    x[i]=(b[i]-suma)*1/Matri[i,i]
#Imprime las soluciones del sistema de ecuaciones
print("Las soluciones son :", x)
```

Figura 1: Código del Método de sustitución regresiva

Corrida de Escritorio:




```
"C:\Users\FAMILIA IZA\Desktop\Actividades\venv\Scripts\python.exe" "C

******Programa Método de sustitución regresiva*****
Las soluciones son : [-2.3  2.5  0.5]

Process finished with exit code 0
```

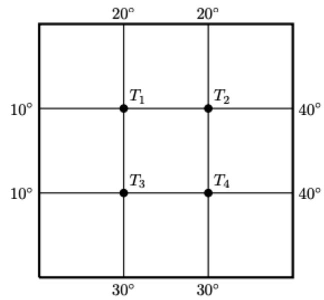
Figura 2: Ejecución del programa.

Análisis del el número de operaciones de un algoritmo para matrices de tamaño 3×3

A las operaciones del algoritmo se le consideran también como costo computacional, que es el número de operaciones básicas que realiza un algoritmo, este método de sustitución regresiva en una matriz de 3x3, $nxn = n^2 = 3^3 = 9$**,entonces este método tiene 9 operaciones.**

4. Una importante parte de la física es la termodinámica que es el estudio de la transferencia de calor. En este ejercicio vamos a determinar la distribución de temperatura de estado estable de una placa delgada cuando se conoce la temperatura en los bordes.
Suponga que la placa que se ilustra en la figura representa una sección transversal de una viga de metal, con flujo de calor despreciable en la dirección perpendicular a la placa. Sean T_1, T_2, T_3 y T_4 las temperaturas en los cuatro nodos interiores de la malla en la figura. La temperatura en un nodo es aproximadamente igual al promedio de las temperaturas de los cuatro nodos más cercanos, esto es, a

la izquierda, arriba, a la derecha y abajo.
Escriba un sistema de ecuaciones cuya solución de estimaciones de las temperaturas T_1, T_2, T_3 y T_4



Primero sacamos las ecuaciones de cada una de las temperaturas:

Nodo 1

$$T_1 = \frac{10 + T_2 + 20T_3}{4}$$
$$4T_1 = 30 + T_2 + T_3$$

$$4T_1 - T_2 - T_3 = 30 < - - - - - - - -(1)$$

Nodo 2

$$T_2 = \frac{T_1 + 20 + 40 + T_4}{4}$$
$$4T_2 = 60 + T_1 + T_4$$

$$-T_1 + 4T_2 - T_4 = 60 < - - - - - - - -(2)$$

Nodo 3

$$T_3 = \frac{T_1 + 10 + T_4 + 30}{4}$$
$$4T_3 = 40 + T_1 + T_4$$

$$-T_1 + 4T_3 - T_4 = 40 < - - - - - - - -(3)$$

Nodo 4

$$T_4 = \frac{T_3 + T_2 + 40 + 30}{4}$$
$$4T_4 = T_3 + T_2 + 70$$

$$-T_2 - T_3 + 4T_4 = 70 < - - - - - - - -(4)$$

A continuación escribo el sistema de ecuaciones:

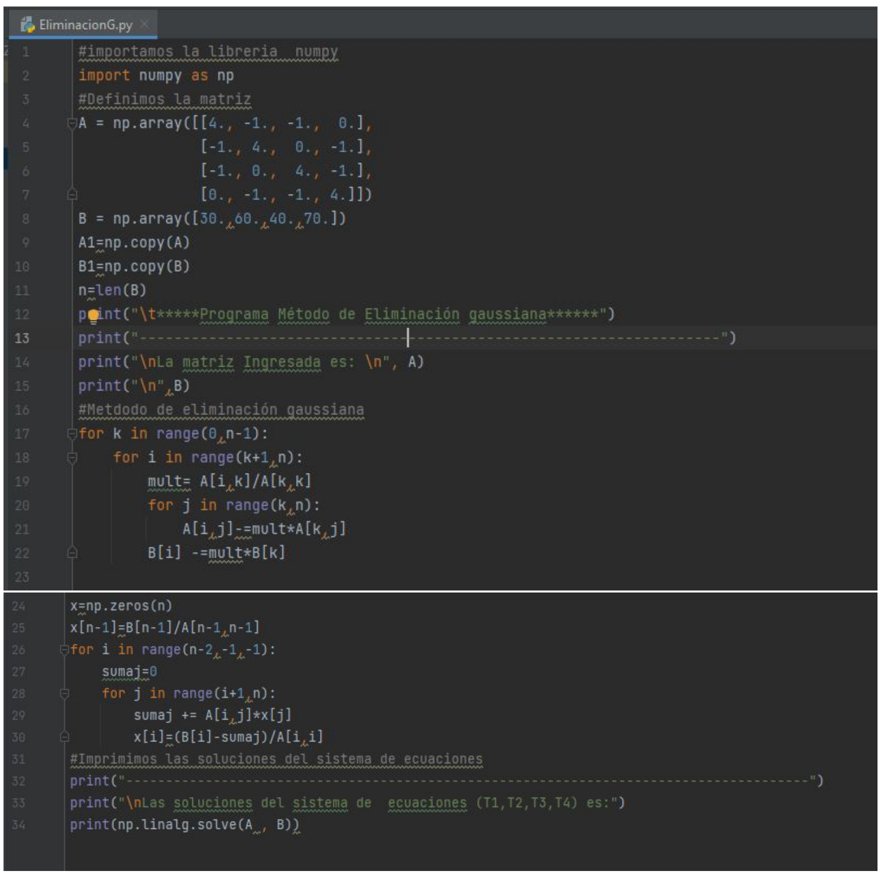
$$\begin{cases} 4T_1 - T_2 - T_3 = 30 \\ -T_1 + 4T_2 - T_4 = 60 \\ -T_1 + 4T_3 - T_4 = 40 \\ -T_2 - T_3 + 4T_4 = 70 \end{cases}$$

Escrito en forma de matriz

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 60 \\ 40 \\ 70 \end{bmatrix}$$

Programe el método de eliminación gaussiana y halle el valor de estas temperaturas. Utilice como apoyo el ejercicio del literal anterior.

Código:



```
EliminacionG.py
#importamos la libreria  numpy
import numpy as np
#Definimos la matriz
A = np.array([[4., -1., -1.,  0.],
              [-1., 4.,  0., -1.],
              [-1., 0.,  4., -1.],
              [0., -1., -1., 4.]])
B = np.array([30.,60.,40.,70.])
A1=np.copy(A)
B1=np.copy(B)
n=len(B)
print("\t*****Programa Método de Eliminación gaussiana******")
print("----------------------------------------------------------------------")
print("\nLa matriz Ingresada es: \n", A)
print("\n",B)
#Metdodo de eliminación gaussiana
for k in range(0,n-1):
    for i in range(k+1,n):
        mult= A[i,k]/A[k,k]
        for j in range(k,n):
            A[i,j]-=mult*A[k,j]
        B[i] -=mult*B[k]

x=np.zeros(n)
x[n-1]=B[n-1]/A[n-1,n-1]
for i in range(n-2,-1,-1):
    sumaj=0
    for j in range(i+1,n):
        sumaj += A[i,j]*x[j]
        x[i]=(B[i]-sumaj)/A[i,i]
#Imprimimos las soluciones del sistema de ecuaciones
print("--------------------------------------------------------------------------------")
print("\nLas soluciones del sistema de  ecuaciones (T1,T2,T3,T4) es:")
print(np.linalg.solve(A , B))
```

Figura 3: Código del método de eliminación gaussiana

Corrida de Escritorio:

```
    *****Programa Método de Eliminación gaussiana******
-----------------------------------------------------------------

La matriz Ingresada es:
 [[ 4. -1. -1.  0.]
 [-1.  4.  0. -1.]
 [-1.  0.  4. -1.]
 [ 0. -1. -1.  4.]]

 [30. 60. 40. 70.]
-----------------------------------------------------------------------------------

Las soluciones del sistema de  ecuaciones (T1,T2,T3,T4) es:
[20.  27.5 22.5 30. ]

Process finished with exit code 0
```

Figura 4: Ejecución del método de eliminación gaussiana

5. Programe el pivoteo parcial en el algoritmo de eliminación gaussiana. Utilice este nuevo programa para resolver el ejercicio anterior. Compare los resultados.

   Código:

```python
#importamos la libreria  numpy
import numpy as np
#Definimos la matriz
A = np.array([[4., -1., -1.,  0.],
              [-1., 4.,  0., -1.],
              [-1., 0.,  4., -1.],
              [0., -1., -1., 4.]])
B = np.array([30.,60.,40.,70.])
A1=np.copy(A)
B1=np.copy(B)
n=len(B)
print("\t*****Programa Método de Eliminación gaussiana con pivote parcial*****")
print("-------------------------------------------------------------------")
print("\nLa matriz Ingresas es: \n", A)
print("\n",B)
#Método con pivoteo parcial
for k in range(n-1):
        #Se Elije el elemento de pivote más grande a continuación (incluido) k
        maxindex = abs(A[k:,k]).argmax()+ k
        if A[maxindex, k] == 0:
            raise ValueError("Matrix is singular.")
        #Intercambiar filas
        if maxindex != k:
            A[[k,maxindex]] = A[[maxindex, k]]
            B[[k,maxindex]] = B[[maxindex, k]]
for k in range(0,n-1):
#Método de eliminación gaussiana
    for i in range(k+1,n):
        mult= A[i,k]/A[k,k]
        for j in range(k,n):
            A[i,j]-=mult*A[k,j]
        B[i] -=mult*B[k]
x=np.zeros(n)
x[n-1]=B[n-1]/A[n-1,n-1]
#Sustitución regresiva
for i in range(n-2,-1,-1):
    sumaj=0
    for j in range(i+1,n):
        sumaj += A[i,j]*x[j]
        x[i]=(B[i]-sumaj)/A[i,i]
#Imprimimos las soluciones del sistema de ecuaciones
print("---------------------------------------------------------------------------------")
print("\nLas soluciones del sistema de  ecuaciones (T1,T2,T3,T4) es:")
print(np.linalg.solve(A , B))
```

Figura 5: Código del método de Eliminación gaussiana con pivoteo parcial

Corrida de Escritorio:

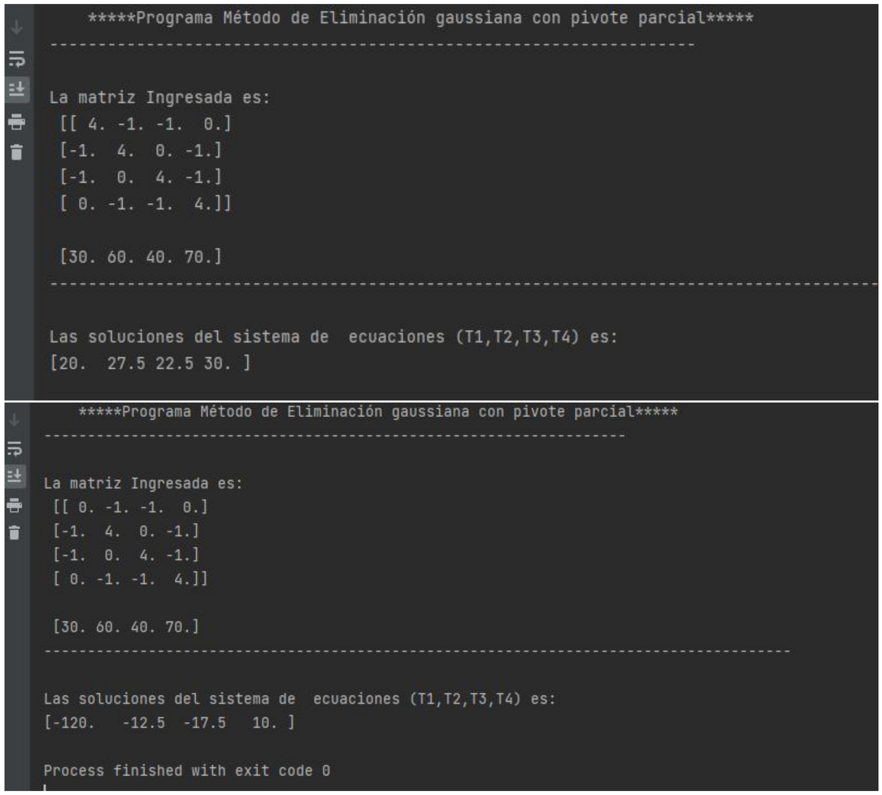


Figura 6: Ejecuciones del método de Eliminación gaussiana con pivoteo parcial

Compare los resultados:

Al comparar los resultados entre en método de eliminación gaussiana sin pivote y con pivote vemos que tenemos resultados iguales, pero si colocamos un cero en la primera fila en el código sin pivote este nos da error en el resultado, en cambio en el método con pivote nos muestra una solución como podemos ver en la figura 7 ya que este se encarga en que en cada pivote queden los elementos mayores a través del intercambio de filas de tal forma si la matriz no tiene una fila con todos sus elementos nulos se pueda resolver mediante eliminación Gaussiana con pivoteo parcial.