Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE
Métodos numéricos NRC 3657

Lizeth Abigail Iza Moreno

13 de agosto de 2021

Descripción de la actividad.

1. Resuelva de forma gráfica y utilizando el Simplex el siguiente problema

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & z = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeto a} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 40 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 20 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Forma gráfica

Encontramos los puntos de intersecciones en las restricciones

$$\begin{aligned} si \quad x_1 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 &= 16 \\ 2(0) + x_2 &= 16 \\ x_2 &= 16 \end{aligned}$$

$$P_1 = (0, 16)$$

$$\begin{aligned} si \quad x_2 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 &= 16 \\ 2x_1 + 0 &= 16 \\ x_1 &= \frac{16}{2} \\ x_1 &= 8 \end{aligned}$$

$$P_2 = (8, 0)$$

$$
\begin{aligned}
si \quad x_1 &= 0 \\
2x_1 + 3x_2 &= 40 \\
2(0) + 3x_2 &= 40 \\
x_2 &= \frac{40}{3}
\end{aligned}
$$

$$P_3 = (0, 40/3)$$

$$
\begin{aligned}
si \quad x_2 &= 0 \\
2x_1 + 3x_2 &= 40 \\
2x_1 + 0 &= 40 \\
x_1 &= \frac{40}{2} \\
x_1 &= 20
\end{aligned}
$$

$$P_4 = (20, 0)$$

$$
\begin{aligned}
si \quad x_1 &= 0 \\
3x_1 + x_2 &= 20 \\
3(0) + x_2 &= 20 \\
x_2 &= 20
\end{aligned}
$$

$$P_5 = (0, 20)$$

$$
\begin{aligned}
si \quad x_2 &= 0 \\
3x_1 + x_2 &= 20 \\
3x_1 + 0 &= 20 \\
x_1 &= \frac{20}{3} \\
P_6 &= (20/3, 0)
\end{aligned}
$$

Realizamos la gráfica

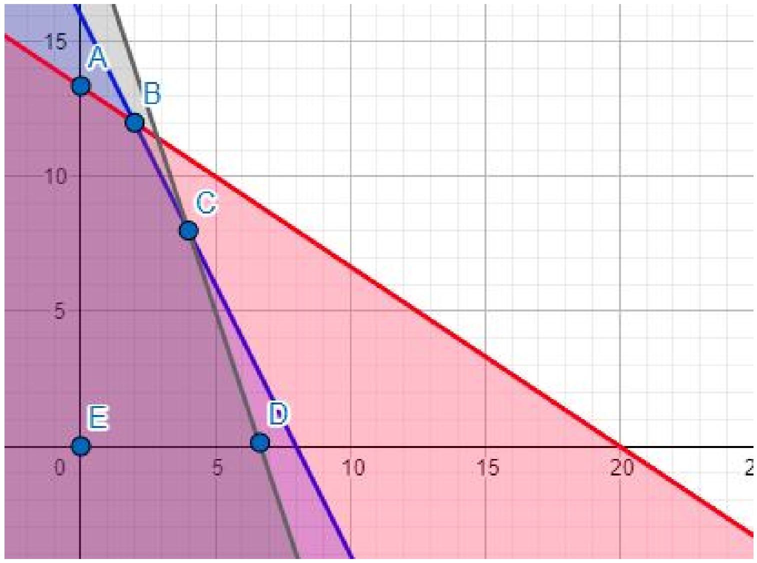

Figura 1: Gráfica

1 y 2:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 16 & \quad (-1) \\ 2x_1 + 3x_2 &= 40 \end{aligned}$$

Hallamos x_2

$$\begin{aligned} -2x_1 - x_2 &= -16 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 40 \\ ------&-- \\ 2x_2 &= 24 \\ x_2 &= \frac{24}{2} \\ \color{blue}{x_2} &\color{blue}{= 12} \end{aligned}$$

Hallamos x_1**:**

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 16 \\ 2x_1 + 12 &= 16 \\ 2x_1 &= 16 - 12 \\ x_1 &= 4 \\ x_1 &= \frac{4}{2} \\ \color{blue}{x_1} &\color{blue}{= 2} \end{aligned}$$

$$\color{blue}{P = (2, 12)}$$

1 y 3:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 16(-1) \\ 3x_1 + x_2 &= 20 \end{aligned}$$

Hallamos x_1

$$\begin{aligned} -2x_1 - x_2 &= -16 \\ 3x_1 + x_2 &= 20 \\ ---&------ \\ x_1 &= 4 \end{aligned}$$

Hallamos x_2**:**

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 16 \\ 2(4) + x_2 &= 16 \\ 8 + x_2 &= 16 \\ x_2 &= 16 - 8 \\ x_2 &= 8 \end{aligned}$$

$$P = (4, 8)$$

x_1	x_2	$z = 3x_1 + 2x_2$
0	40/3	80/3
2	12	30
4	8	28
20/3	0	20

Por lo tanto, Las soluciones son:

$$\begin{aligned} Z &= 30 \\ X_1 &= 2 \\ X_2 &= 12 \end{aligned}$$

Método simplex

Introducimos la variable de holguera S_1

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad z &= 3x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeto a} \quad 2x_1 + x_2 + S_1 \quad &= 16 \\ 2x_1 + 3x_2 \quad + S_2 &= 40 \\ 3x_1 + x_2 \quad + S_3 &= 20 \\ x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Despejamos la función objetiva:

$$z = 3x_1 + 2x_2$$
$$z - 3x_1 - 2x_2 = 0$$

Realizamos la tabla simplex:

- Hallamos la columna pivote
- Para hallar la fila pivote dividimos la solución con la columna pivote

Tabla simplex								
Variables básicas	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Solución	División
Z	1	-3	-2	0	0	0	0	0
S_1	0	2	1	1	0	0	16	8
S_2	0	2	3	0	1	0	40	20
S_3	0	3	1	0	0	1	20	6,6667

Cuadro 1: TABLA SIMPLEX

- En la tabla el 3 es el elemento pivote

Iteración 1									
	Variables básicas	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Solución	División
$3f_4 + f_1$	Z	1	0	-1	0	0	1	20	-20
$-2f_4 + f_2$	S_1	0	0	1/3	1	0	-2/3	8/3	8
$-2f_4 + f_3$	S_2	0	0	7/3	0	1	-2/3	80/3	11,43
$1/3 - f_4$	X_1	0	1	1/3	0	0	1/3	20/3	20

Cuadro 2: TABLA SIMPLEX

- En la tabla el 1/3 es el elemento pivote

Iteración 2									
	Variables básicas	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Solución	División
$f_2 + f_1$	Z	1	0	0	3	0	-1	28	-28
$3f_2$	X_2	0	0	1	3	0	-2	8	-4
$-7/3f_2 + f_3$	S_2	0	0	0	-7	1	4	8	2
$-1/3f2 + f4$	X_1	0	1	0	-1	0	1	4	4

Cuadro 3: TABLA SIMPLEX

- En la tabla el 4 es el elemento pivote

Iteración 3								
	Variables básicas	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Solución
$f_3 + f_1$	Z	1	0	0	5/4	1/4	0	30
$2f_3 + f_2$	X_2	0	0	1	-1/2	1/2	0	12
$1/4 f_3$	S_2	0	0	0	-7/4	1/4	1	2
$-f_3 + f_4$	X_1	0	1	0	3/4	-1/4	0	2

Cuadro 4: TABLA SIMPLEX

Por lo tanto, Las soluciones son:

$$Z = 30$$
$$X_1 = 2$$
$$X_2 = 12$$

2. Escriba el problema dual de los siguientes problemas primales

Problema primal A :

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & z = -5x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeto a} \quad & -x_1 + x_2 \leq -2 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

El problema dual es:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & w = -2y_1 + 5y_2 \\ \text{sujeto a} \quad & -y_1 + 2y_2 \geq -5 \\ & y_1 + 3y_2 \geq 2 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Problema primal B :

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & z = 6x_1 + 3x_2 \\ \text{sujeto a} \quad & 6x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 2 \\ & 3x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

El problema dual es:

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & w = 2y_1 + 5y_2 \\ \text{sujeto a} \quad & 6y_1 + 3y_2 \geq 6 \\ & -3y_1 + 4y_2 \geq 3 \\ & y_1 + y_2 \geq 0 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

3. Una compañía fabrica dos productos, A y B. Los ingresos unitarios son \$2 y \$3, respectivamente. Las disponibilidades diarias de dos materias primas, M_1 y M_2, utilizadas en la fabricación de los dos productos son de 8 y 18 unidades, respectivamente. Una unidad de A utiliza 2 unidades de M_1 y 2 unidades de M_2, y una unidad de B utiliza 3 unidades de M_1 y 6 unidades de M_2.

Materia prima	Productos	Disponibilidad
	A B	
M_1	2 3	8
M_2	2 6	18
Ingresos	2 3	

Variables de decisión:
x_1= Numero de productos A
x_2= Numero de productos B

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad z &= 2x_1 + 3x_2 \\ \text{sujeto a} \quad 2x_1 + 3x_2 &\leq 8 \\ 2x_1 + 6x_2 &\leq 18 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Resolvemos mediante el método gráfico:

Encontramos las restricciones con los ejes

$$\begin{aligned} si \quad x_1 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 8 \\ x_2 &= \frac{8}{3} \\ P &= (0, 8/3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} si \quad x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 8 \\ 2x_1 &= 8 \\ x_1 &= \frac{8}{2} \\ x_1 &= 4 \\ Q &= (4, 0) \end{aligned}$$

$$si \quad x_1 = 0$$
$$2x_1 + 6x_2 = 18$$
$$x_2 = \frac{18}{6}$$
$$x_2 = 3$$
$$R = (0, 3)$$

$$si \quad x_2 = 0$$
$$2x_1 + 6x_2 = 18$$
$$2x_1 = 18$$
$$x_1 = \frac{18}{2}$$
$$x_1 = 9$$
$$S = (9, 0)$$

Gráfica:

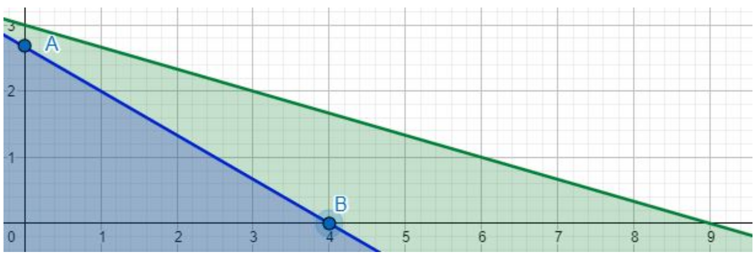

Figura 2: Gráfica

$$Z_C = 2x_1 + 3x_2$$
$$Z_C = 0 + 3(8/3)$$
$$Z_C = 8$$

Las soluciones son:

$$Z = 8$$
$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 8/3$$

a) Determine los precios duales de M_1 y M_2 y sus intervalos de factibilidad..

Calculamos el precio dual de M_1 :

$$2x_1 + 3x_2 \leq 9$$

$$si \quad x_1 = 0$$
$$2x_1 + 3x_2 = 9$$
$$x_2 = \frac{9}{3}$$
$$x_2 = 3$$
$$C = (0, 3)$$

$$si \quad x_2 = 0$$
$$2x_1 + 3x_2 = 9$$
$$2x_1 = 9$$
$$x_1 = \frac{9}{2}$$
$$D = (4{,}5, 0)$$

$$Z_G = 2x_1 + 3x_2$$
$$Z_G = 2(0) + 3(3)$$
$$Z_G = 9$$

El precio dual de M_1 es:

$$M_1 = \frac{Z_G - Z_C}{Cambiodecapacidad}$$
$$M_1 = \frac{9 - 8}{1}$$
$$M_1 = \$1/unidad$$

Gráfica:

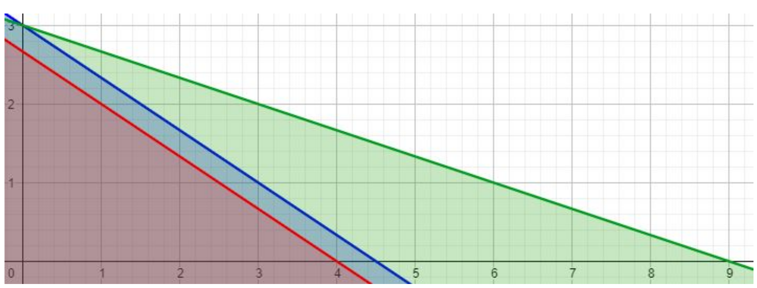

Figura 3: Gráfica

Intervalo de factibilidad

- Disponibilidad mínima de M_1 en C(0,3)
- Disponibilidad Máxima de M_1 en s(9,0)

Evaluamos en M_2

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 \\ 2(0) + 3(3) = 9 \\ 2(9) + 3(0) = 18 \end{aligned}$$

Por lo tanto el intervalo de factibilidad es:

$$9 \leq M_1 \leq 18$$

El precio dual para M_2:

El precio dual de M_2 es cero, porque la función objetiva es paralela a M_1

b) Suponga que pueden adquirirse 4 unidades más de M_1 al costo de 30 centavos por unidad.¿Recomendaría la compra adicional?

$$\begin{aligned} Ingreso \quad 4 * (1) = 4 \\ Costo \quad 4 * (0,3) = 1,2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, si se recomienda la compra ya que al agregar 4 unidades la utilidad seria de $\$8 + \$4 + \$1,2 = \$13,2$

c) ¿Cuánto es lo máximo que la compañía debe pagar por unidad de M_2?

Ya que es una restricción redundante, el precio dual que se debe pagar por unidad de M_2 es de cero, en otras palabras la compañía no debe pagar nada.

d) Si la disponibilidad de M_2 se incrementa en 5 unidades, determine el ingreso óptimo asociado.

Por lo tanto, $z = 8$ ya que es una restricción redundante.

4. Plantee el siguiente problema y resuélvalo utilizando un software de programación lineal.

Una refinería fabrica dos tipos de combustible para avión, F_1 y F_2, mezclando cuatro tipos de gasolina, A, B, C y D. El combustible F_1 incluye las gasolinas A, B, C y D en la proporción 1:1:2:4, y el combustible F_2 incluye la proporción 2:2:1:3. Los límites de abasto de A, B, C y D son 1 000, 1 200, 900 y 1 500 barriles/día, respectivamente. Los costos por barril de las gasolinas A, B, C y D son \$120, \$90, \$100 y \$150, respectivamente. Las combustibles F_1 y F_2 se venden a \$200 y \$250 por barril, respectivamente. La demanda mínima de F_1 y F_2 es de 200 y 400 barriles/día, respectivamente.

	Gasolina A	Gasolina B	Gasolina C	Gasolina D
Combustible F_1	1	1	2	4
Combustible F_2	2	2	1	3
Costo por barril	120	90	100	150
Limite de abasto(barril/día)	1000	1200	900	1500

	Combustible F_1	Combustible F_2
Precio de venta (barril)	200	250
Demanda mínima(barril/día)	200	400

Planteamos las variables de decisión:

- X_{11}= Barriles de gasolina A utilizada en la producción diaria del combustible F_1
- X_{21}= Barriles de gasolina A utilizada en la producción diaria del combustible F_1
- X_{31}= Barriles de gasolina A utilizada en la producción diaria del combustible F_1
- X_{41}= Barriles de gasolina A utilizada en la producción diaria del combustible F_1

- X_{12}= Barriles de gasolina A utilizada en la producción diaria del combustible F_2
- X_{22}= Barriles de gasolina A utilizada en la producción diaria del combustible F_2
- X_{32}= Barriles de gasolina A utilizada en la producción diaria del combustible F_2
- X_{42}= Barriles de gasolina A utilizada en la producción diaria del combustible F_2

Funcion objetiva:

$$\text{Minimizar} \quad Z = 120(X_{11} + X_{12}) + 90(X_{21} + X_{22}) + 100(X_{31} + X_{32}) + 150(X_{41} + X_{42})$$

Restricciones:

$$\begin{aligned} \text{sujeto a} \quad 0{,}125X_{11} + 0{,}125X_{21} + 0{,}25X_{31} + 0{,}5X_{41} &\geq 200 \\ 0{,}25X_{12} + 0{,}25X_{22} + 0{,}125X_{32} + 0{,}375X_{42} &\geq 400 \\ X_{11} + X_{12} &\leq 1000 \\ X_{21} + X_{22} &\leq 1200 \\ X_{31} + X_{32} &\leq 900 \\ X_{41} + X_{42} &\leq 1500 \end{aligned}$$

Condiciones de no negatividad:

$$X_{11}, X_{21}, X_{31}, X_{41}, X_{12}, X_{22}, X_{32}, X_{42} \geq 0$$

Resolver utilizando un software de programación lineal.

Para resolver el siguiente ejercicio de Programación Lineal hice uso de Solver en Microsoft Excel.

Solución:

Ejercicio 4: Refineria de conbustibles para avión

Simplex con Solver de Excel

Variables de decisión							
X11	X21	X31	X41	X12	X22	X32	X42
1000	1200	900	0	0	0	0	1500

Función objetiva	
Minimizar:	
Z	543000

Restricciones:			
	Izquierdo	Signo	Derecha
#1	500	>=	200
#2	562,5	>=	400
#3	1000	<=	1000
#4	1200	<=	1200
#5	900	<=	900
#6	1500	<=	1500

Minimizar Z = 120(X11+X12)+90(X21+X22+100(X31+X32) +150(X41+X42)

Sujeto a:

0.125X11 + 0.125X21 + 0.25X31 + 0.5X41 >= 200

0.25X12 + 0.25X22 + 0.12532 + 0.375X42 >= 400

X11+ X12 <= 1000

X21+ X22 <=1200

X31+ X32 <= 900

X41+ X42 <= 1500

X11,X21,X31,X41,X12,X22,X32,X42 >= 0

Figura 4: Solución del ejercicio en Solver de Excel

Por lo tanto las soluciones son:

$Z = 543000$
$X_{11} = 1000$
$X_{21} = 1200$
$X_{31} = 900$
$X_{41} = 0$
$X_{12} = 0$
$X_{22} = 0$
$X_{32} = 0$
$X_{42} = 1500$