2013年信息论期末考试参考答案

1

(1)$h(f) \leq h(g)$

(2)

$$\begin{aligned} h(g) &= -\int \frac{f(x)+f(-x)}{2} \log \frac{f(x)+f(-x)}{2} \mathrm{d}x \\ &= -\int \frac{f(x)}{2} \log \frac{f(x)+f(-x)}{2} \mathrm{d}x - \int \frac{f(-x)}{2} \log \frac{f(x)+f(-x)}{2} \mathrm{d}x \\ &= -\int f(x) \log \frac{f(x)+f(-x)}{2} \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

$$h(g) - h(f) = \int f(x) \log \frac{f(x)}{\frac{f(x)+f(-x)}{2}} \mathrm{d}(x) = D(f||g) \geq 0.$$

(3)将f对称化，那么g的分布更加均匀，不确定性增加，所以熵会增加.

2

(1)体重与性别（例子很多）

(2)定义$f(x,y) = \frac{\partial Pr(X<x, Y=y)}{\partial x}, f(x) = \sum_y f(x,y), p(y) = P(Y=y)$.由定义可知条件概率$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{p(y)}$，$p(y|x) = \frac{f(x,y)}{f(x)}$.

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= -\int f(x) \sum_y p(y|x) \log p(y|x) \mathrm{d}x \\ &= -\int f(x) \sum_y \frac{f(x,y)}{f(x)} \log p(y|x) \mathrm{d}x \\ &= -\int \sum_y f(x,y) \log \frac{f(x,y)}{f(x)} \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

同理$h(X|Y) = -\sum_y \int f(x,y) \log \frac{f(x,y)}{p(y)} \mathrm{d}x$.

(3)

$$\begin{aligned}
I_1(X;Y)=H(Y)-H(Y|X) &= -\sum_y p(y)\log p(y)+\int\sum_y f(x,y)\log\frac{f(x,y)}{f(x)}\mathrm{d}x \\
&= -\sum_y p(y)\log p(y)+\int\sum_y f(x,y)\log f(x,y)\mathrm{d}x-\int\sum_y f(x,y)\log f(x)\mathrm{d}x \\
&= H(Y)-H(X,Y)+h(X).
\end{aligned}$$

同理可证$I_2(X;Y)=H(Y)-H(X,Y)+h(X)$. 因此$I_1(X;Y)=I_2(X;Y)$.

3

构造一个矩阵M，矩阵元素对于行是凸的，对于列是凹的即可，矩阵元素都不相等，也有其他构造方法，都要满足$\max_i(\min_j M_{i,j})=\min_j(\max_i M_{i,j})$.

4

X与Z的熵的大小关系是$H(Z)\geq H(X)$.

因为对于任意固定的$Y=k(k=0,1,2)$，Z的分布是X的分布的一个置换，因此$H(Z|Y)=H(X)$. 又由条件熵的性质$H(Z|Y)\leq H(Z)$，知$H(Z)\geq H(X)$.

5

一个简单的方法是构造(6,3)码，3是纠错码的位数。在构造奇偶校验矩阵H的过程中,少选一维列向量即可，这样得到的hamming码的长度为6，不是2^m-1的形式. 很容易推广这一方法来构造更大的矩阵H. 当位数很大时，这种编码方式效率接近1.