信息论 2018 期末回忆版

1. 相互独立的随机变量X_i的概率分布满足：

   $P(X_i = 1) = \frac{1}{i}$

   $P(X_i = 0) = 1 - \frac{1}{i}$

   (1) 求$H(X_1, X_2, \ldots, X_n)$，用求和表示

   (2) 求随机变量序列$\{X_t\}$的熵率

2. 定义 $J(\theta) = E((\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f_\theta(x))^2)$

   其中$f_\theta(x)$是随机变量X的概率密度函数，θ是其中一个参数，E是对随机变量X求期望

   (1) 证明 $J(\theta) = -E(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f_\theta(x))$

   (2) 求正态分布的 $J(\mu)$，（σ为已知常量）

3. 由转移矩阵求信道容量，并说明X在什么分布时取到。$P(Y=j|X=i) = A_{ij}$

   (1) (忘了是不是这样，好像差不多)

   0 1/6 5/6

   5/6 0 1/6

   1/6 5/6 0

   (2)

   0 1/6 5/6

   5/6 0 1/6

   0 5/6 1/6

4. Huffman编码，概率从大到小排序之后为：$p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_n$，证明

   (1) 当 $p_1 < 1/3$ 时，$l_1 \geq 2$

   (2) 当 $p_1 > 2/5$ 时，$l_1 = 1$

5. 字符集 $\mathcal{X}$, 字符 $x \in \mathcal{X}$，假设字符有两个可能的概率分布 $P_1(x), P_2(x)$，现在令 $\mathcal{P} = \sum_{x\in\mathcal{X}} \max\{P_1(x), P_2(x)\}$，定义 $l^*(x) = \lceil \log \frac{\mathcal{P}}{\max\{P_1(x), P_2(x)\}} \rceil$

   (1) 证明 $1 \leq \mathcal{P} \leq 2$，并说明等号取到的条件

   (2) 证明存在长度为$l^*(x)$的前缀码（用Kraft不等式说明）

   (3) 假设现在字符集$\mathcal{X}$的真实分布为 P_0，令P_0为P_1, P_2中的其中之一，若用码长为 $l^*(x)$的前缀码来编码该字符集，证明 $H(X) \leq E(l^*) \leq H(X) + \log\mathcal{P} + 1$