GEOMETRIA EUCLIDIANA

DEMOSTRACIONES

I. Segmentos y ángulos.

1. En la figura 1, se tiene $\angle CAB \cong \angle CBA$. Demostrar que $\angle CAF$ y $\angle DBH$ son suplementarios.

2. En la figura 2, $\overline{OD}$ y $\overline{OE}$ son bisectrices de $\angle AOB$ y $\angle BOC$ respectivamente, demostrar $\overline{OD} \perp \overline{OE}$.

3. En la figura 3, $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ y $\angle BOE \cong \angle DOF$. Demostrar que $\overline{OF} \perp \overline{OE}$.

4. Con referencia en la figura 4, se tienen las siguientes hipótesis E, D y F son colineales; A, D y B son colineales, si $\angle EDA \cong \angle FDC$. Demuestra que $\overline{EF}$ es bisectriz del $\angle BDC$.

5. En la figura 5, $\overline{MS} \perp \overline{MT}$ y $\overline{MS}$ es bisectriz del $\angle AMD$. Demostrar que $\angle SMD$ y $\angle BMT$ son Complementarios.

6. En la figura 6, $\overline{CB} \perp \overline{CD}$, $\angle RBF \cong \angle FCD$ y $\angle FBC \cong \angle FCB$. Demostrar que $\overline{BC} \perp \overline{BR}$.

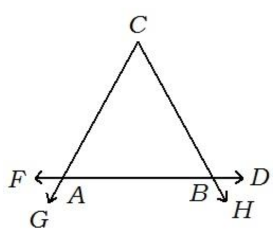

Figura 1

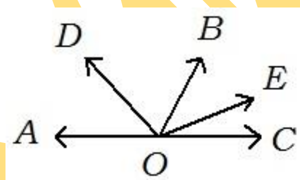

Figura 2

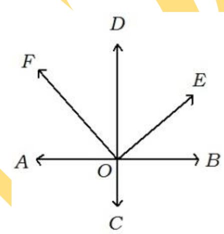

Figura 3

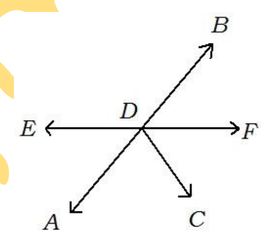

Figura 4

7. En la figura 6, $\overline{BR} \perp \overline{BC}$, $\overline{CB} \perp \overline{CD}$ y $\angle FCB \cong \angle FBC$. Demostrar que $\angle RBF \cong \angle DCF$.

8. En la figura 7, se tiene $\overline{PS} \cong \overline{PR}$ y $\overline{TS} \cong \overline{QR}$. Demostrar que $\overline{PT} \cong \overline{PQ}$.

9. En la figura 8, se tiene las hipótesis $\overline{AD} \cong \overline{BD}$ y $\overline{ED} \cong \overline{CD}$. Demostrar que $\overline{AE} \cong \overline{BC}$.

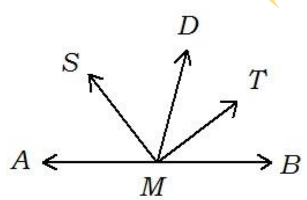

Figura 5

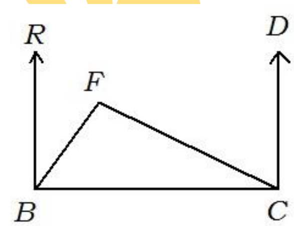

Figura 6

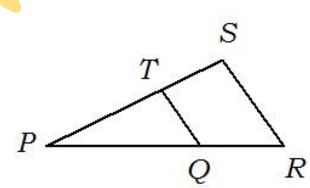

Figura 7

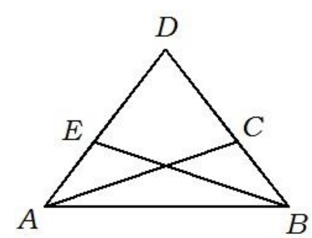

Figura 8

10. En la figura 9, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, X es un punto medio de $\overline{AB}$, Y es un punto medio de $\overline{CB}$. Demostrar $\overline{AX} \cong \overline{CY}$.

11. En la figura 10, $\overline{ED} \cong \overline{CD}$; $\overline{AE} \cong \overline{ED}$; $\overline{BC} \cong \overline{CD}$. Demostrar que $\overline{AE} \cong \overline{BC}$.

12. En la figura 11, se tiene $\angle AGC \cong \angle CGE$ y $\angle AGB \cong \angle DGE$. Demostrar que $\angle BGC \cong \angle DGC$.

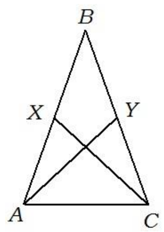

Figura 9

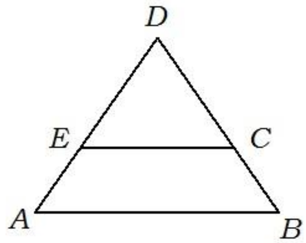

Figura 10

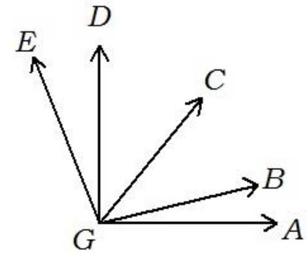

Figura 11

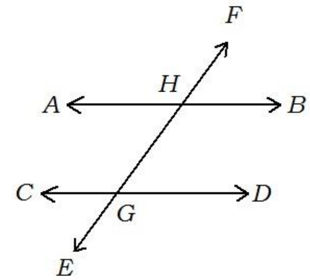

Figura 12

13. En la figura 12, $\angle FGD \cong \angle FHB$. Demostrar que $\angle FGD \cong \angle AHE$.

14. En la figura 12 supóngase qué $\angle FGD \cong \angle FHB$ y demuestre que $\angle FGD$ y $\angle BHE$ son suplementarios.

15. En la figura 13 se tienen las siguientes hipótesis $\overline{AB} \perp \overline{OD}$, $\overline{OE} \perp \overline{OF}$. Demostrar que $\angle BOE \cong \angle FOD$.

16. En la figura 14, $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AE}$ son rayos opuestos; los rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ son opuestos, y además $\angle EAF$ es suplemento de $\angle DBC$. Demostrar que $\angle DAB \cong \angle DBA$.

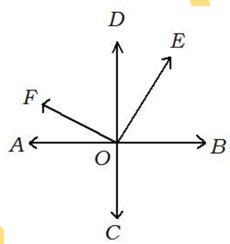

Figura 13

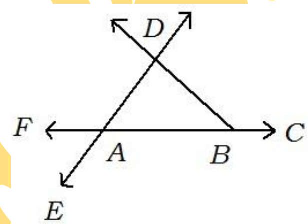

Figura 14

II. Triángulos.

1. En la figura 1, A, C y E son colineales; D, C y B son colineales y F, C y G son colineales. Si $\overline{AC} \cong \overline{EC}$ y $\overline{DC} \cong \overline{BC}$, demostrar que $\Delta AFC \cong \Delta EGC$.

2. En la figura 2, se tiene $\overline{AK} \cong \overline{BJ}$; $\overline{AC} \cong \overline{BC}$. Demostrar que $\Delta ACJ \cong \Delta BCK$.

3. En la figura 2, $\angle JAB \cong \angle KBA$, $\overline{AK}$ es bisectriz del $\angle JAB$ y $\overline{BJ}$ es bisectriz del $\angle KBA$. Demostrar que $\Delta ABK \cong \Delta BAJ$.

4. En la figura 3, $\overline{AC}$ es bisectriz del $\angle PAT$ y $\overline{AP} \cong \overline{AT}$, demostrar que $\overline{BC}$ es bisectriz del $\angle PBT$.

5. En la figura 4, $\overline{CD} \cong \overline{CB}$, $\overline{AB} \perp \overline{CE}$ y $\overline{ED} \perp \overline{AC}$. Demostrar que $\Delta ABC \cong \Delta EDC$.

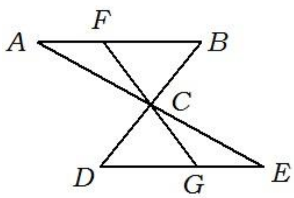

Figura 1

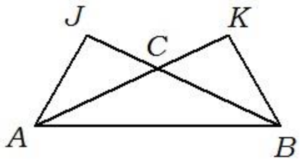

Figura 2

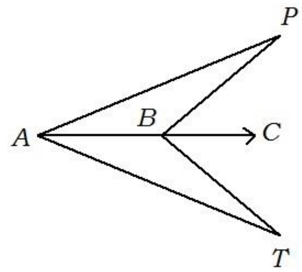

Figura 3

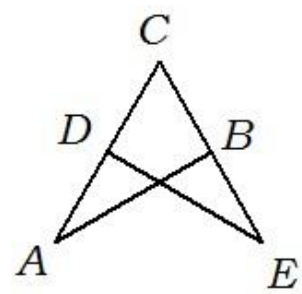

Figura 4

6. En la figura 5, $\overline{AD} \cong \overline{BE}$; $\overline{CD} \cong \overline{CE}$. Demostrar que $\overline{AE} \cong \overline{BD}$.

7. En la figura 6, $\overline{AC} \cong \overline{BC}$; M punto medio de $\overline{AC}$; N es punto medio $\overline{CB}$ y Q es punto medio de $\overline{AB}$. Demostrar que $\overline{MQ} \cong \overline{NQ}$.

8. En la figura 7, se tiene ΔXYZ con $\overline{KM} \perp \overline{XZ}$; $\overline{JM} \perp \overline{YZ}$; $\overline{KX} \cong \overline{JY}$ y $\overline{MK} \cong \overline{JM}$. Demostrar que ΔXYZ es isósceles.

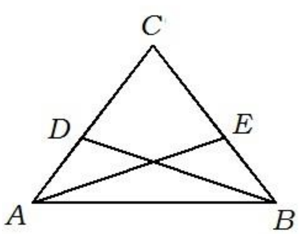

Figura 5

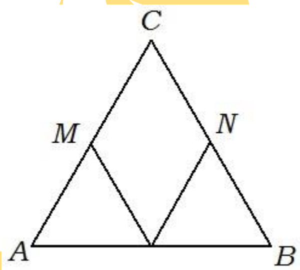

Figura 6

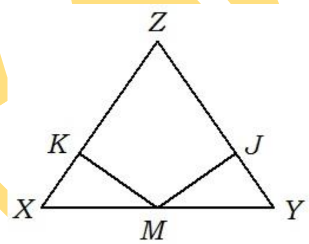

Figura 7

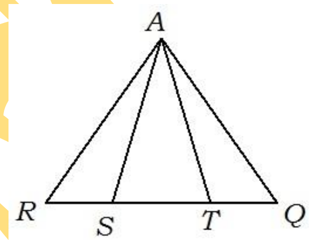

Figura 8

9. En la figura 8 considérese el ΔAQR, con $\overline{AR} \cong \overline{AQ}$ y $\overline{RS} \cong \overline{QT}$. Demostrar que $\angle AST \cong \angle ATS$.

10. En la figura 9, $\overrightarrow{CM}$ es bisectriz del $\angle ACB$ y $\overline{CD} \cong \overline{CE}$. Demostrar que $\overline{AC} \cong \overline{BC}$.

11. En la figura 10, ΔABC es equilátero y $\overline{AM} \cong \overline{BN} \cong \overline{CO}$. Demuestra que el ΔMNO es equilátero.

12. En la figura 11, con el triángulo ΔABC, se tiene $\overline{AC} \cong \overline{BC} \cong 2(\overline{AB})$, $\overline{AD}$ es mediana del triángulo ΔABC y $\overline{BE}$ es bisectriz del $\angle ABD$. Demostrar que él ΔABD es isósceles y que $\overline{BE}$ es altura y mediana del ΔABD.

13. En la figura 12, $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ y $\overline{AD} \cong \overline{BD}$, demostrar que $\overline{CD}$ es mediatriz de $\overline{AB}$.

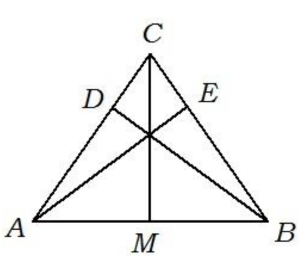

Figura 9

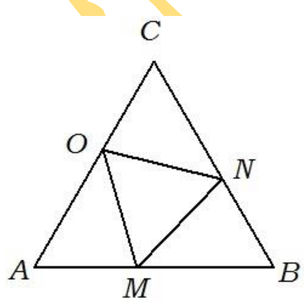

Figura 10

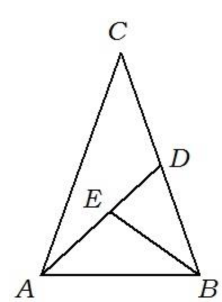

Figura 11

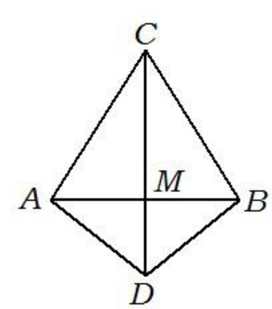

Figura 12

14. En la figura 13, La recta "l" es mediatriz de $\overline{AB}$. Demuestra que P equidista de A y B.

15. En la figura 14, $\overline{CD}$ es mediana del ΔABC y $\overline{AC} \cong \overline{BC}$. Demuestre que $\overline{CD}$ es altura y bisectriz.

16. En la figura 15, $\overline{KP} \cong \overline{MP}$ y $\overline{KY} \cong \overline{MZ}$. Demuestre que $\overline{PX}$ es bisectriz del $\angle YPZ$.

17. En la figura 15, $\angle KPX \cong \angle MPX$; $\overline{KP} \cong \overline{MP}$. Demuestre que $\overline{YX} \cong \overline{XZ}$.

18. En la figura 16, $\angle TXZ \cong \angle TYZ$; $\overline{QZ} \cong \overline{UZ}$; $\overline{XZ} \cong \overline{YZ}$; $\overline{RT} \cong \overline{ST}$ y $\overline{TX} \cong \overline{TY}$. Demostrar $\Delta RUX \cong \Delta QSY$.

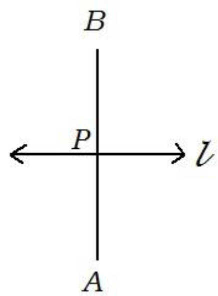

Figura 13

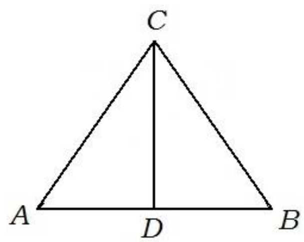

Figura 14

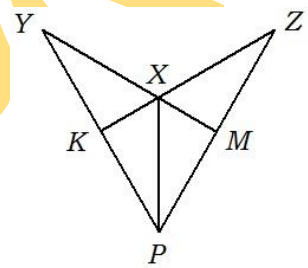

Figura 15

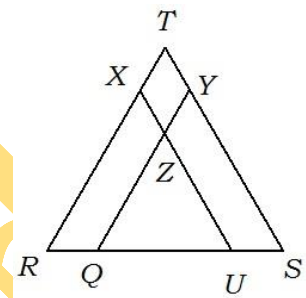

Figura 16

19. En la figura 17, $\angle VRT \cong \angle TSV$ y $\angle TRS \cong \angle VSR$. Demostrar que $\overline{RV} \cong \overline{ST}$.

20. En la figura 18, considérese el ΔRTV. Si $\overline{RS} \cong \overline{UV}$, $\overline{ST} \cong \overline{TU}$ y $\overline{SX} \cong \overline{UX}$, demostrar que $\overline{TW} \perp \overline{RV}$.

21. En el cuadrilátero $\square ABCD$ de la figura 19, se tiene $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$. Demostrar que $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se bisecan.

22. En la figura 20, $\overline{QS}$ y $\overline{RT}$ se bisecan en P. Demostrar que $\overline{AP} \cong \overline{BP}$.

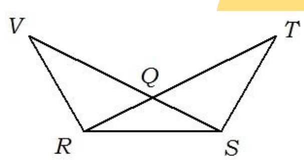

Figura 17

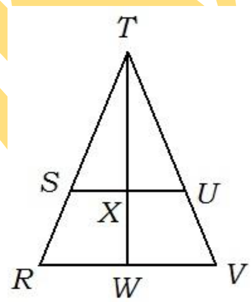

Figura 18

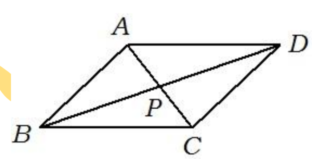

Figura 19

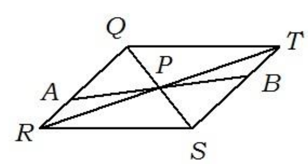

Figura 20

III. Rectas Paralelas.

1. En el cuadrilátero $\square PRST$ de la figura 1, $\overline{RT}$ y $\overline{PS}$ son diagonales, $\overline{PQ} \cong \overline{QS}$ y $\overline{RQ} \cong \overline{QT}$. Demostrar que $\overline{PT} \parallel \overline{RS}$ y $\overline{PR} \parallel \overline{ST}$.

2. En la figura 2, se tiene $\overline{KL} \cong \overline{LN}$ y $\overrightarrow{LQ}$ es bisectriz del $\angle MLN$. Demostrar que $\overline{LQ} \parallel \overline{KN}$.

3. En la figura 3, ΔPQT es isósceles, con $\overline{PT} \cong \overline{QT}$ y $l \parallel \overline{PQ}$. Demostrar que $\angle TRS \cong \angle TSR$.

4. En la figura 4, $\overline{PQ} \parallel \overline{RS}$, M es el punto medio de $\overline{AB}$. Determina que M es punto medio del $\overline{CD}$.

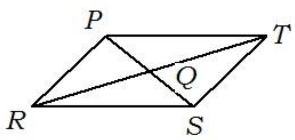

Figura 1

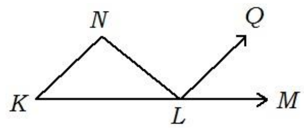

Figura 2

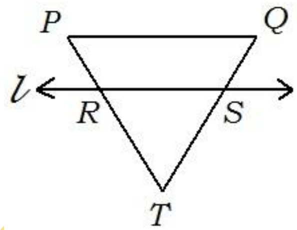

Figura 3

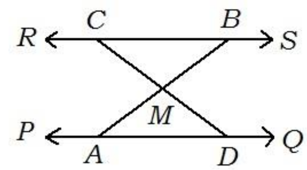

Figura 4

5. En la figura 5, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\angle CAD \cong \angle DAB$. Demostrar que él ΔACD es isósceles.

6. En la figura 6, $\overline{AD}$ es bisectriz del $\angle CAB$ y $\overline{AC} \cong \overline{CD}$. Determinar que $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$.

7. En la figura 7, $\overline{EF}$ biseca a $\overline{CD}$ y al $\overline{AB}$; $\angle A \cong \angle B$ y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$. Demostrar que $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$.

8. En la figura 8, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{BC} \cong \overline{AD}$. Demostrar que $\overline{CD}$ y $\overline{AB}$ se bisecan en E .

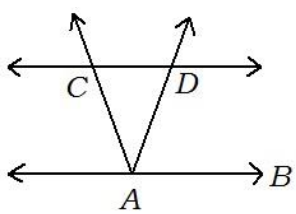

Figura 5

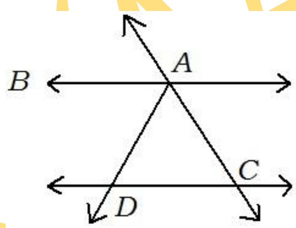

Figura 6

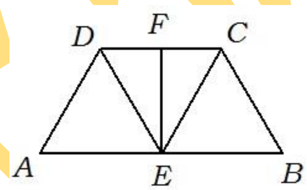

Figura 7

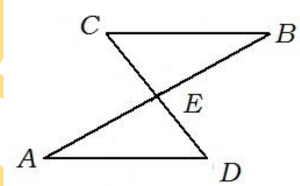

Figura 8

9. En la figura 9, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y $\angle DAB$ es $\angle$ recto. Demostrar que $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

10. En la figura 10, $\square\, ABCD$ es un paralelogramo, $\overline{AC}$ es una diagonal, $\overline{CF} \cong \overline{AH}$, E es el punto medio de $\overline{BC}$ y G es un punto medio de $\overline{AD}$. Determinar que $\overline{EF} \cong \overline{GH}$.

11. En el paralelogramo $\square\, JKLM$, las diagonales se interceptan en Q, Los puntos P, Q y A son colineales. Demostrar que Q es el punto medio de $\overline{AP}$. Figura 11.

12. En la figura 12, A, B y C son colineales, $\overline{AP} \cong \overline{AQ}$, $\overline{BP} \cong \overline{BQ}$, $\overline{BX} \cong \overline{BY}$ y $\overline{CX} \cong \overline{CY}$. Demostrar que $\overline{PQ} \parallel \overline{XY}$.

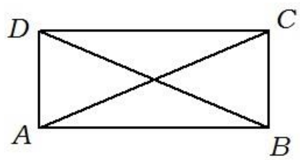

Figura 9

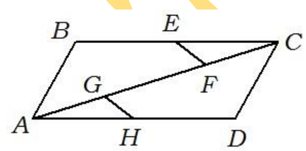

Figura 10

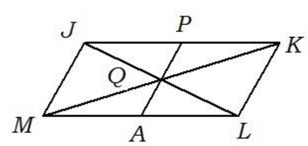

Figura 11

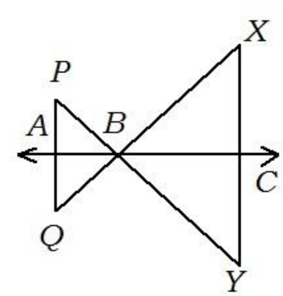

Figura 12

13. En la figura 13, $\overline{KM} \cong \overline{HR}$, $\overline{MQ} \cong \overline{HP}$. Demostrar que $\overline{KR} \parallel \overline{PQ}$.

14. En la figura 14, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{FG}$ biseca al $\angle BFE$ y $\overline{EG}$ biseca al $\angle DEF$. Determina qué $\overline{EG} \perp \overline{FG}$.

15. En la figura 15, $\overline{MX}$ es bisectriz del $\angle PMN$; $\overline{NX}$ es bisectriz del $\angle PNM$ y $\overline{QR} \parallel \overline{MN}$. Demostrar que ΔMQX y ΔNRX son triángulos isósceles.

16. En la figura 16, se tiene que el cuadrilátero $\square\, ABCD$, con H como punto medio del $\overline{AB}$, G punto medio de $\overline{CD}$, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ y $\angle A \cong \angle B$. Demostrar que $\overline{GH} \perp \overline{CD}$, $\overline{GH} \perp \overline{AB}$ y $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

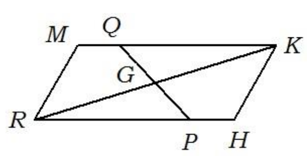

Figura 13

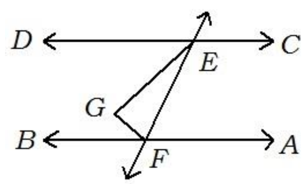

Figura 14

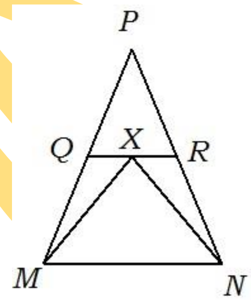

Figura 15

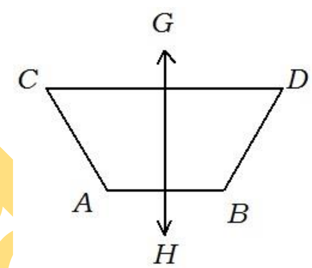

Figura 16

17. En la figura 17, en el ΔPQR, el $\angle R$ es un ángulo recto, $\overline{QT} \cong \overline{QV}$ y $\overline{PS} \cong \overline{PV}$. Determina que $m(\angle X) = 45°$.

18. En la figura 18, $\square\, AJKM$ y $\square\, BJKM$ son paralelogramos. Demostrar que si $\overline{JK} \cong \overline{KM}$, entonces ΔABC es isósceles.

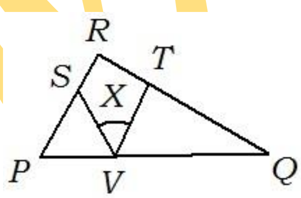

Figura 17

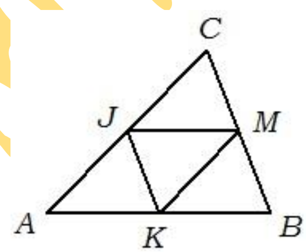

Figura 18

IV. Semejanza

1. En la figura 1, se tiene que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. Demostrar que $\Delta ABC \sim \Delta ADE$, y con los datos en la figura, obtener el valor de x.

2. En la figura 2, considera que $\overline{PN} \perp \overline{KL}$ y $\overline{NP} \perp \overline{MN}$. Demuestra que $\Delta KLP \sim \Delta MNP$, y con los datos en la figura determina el valor de x.

3. En la figura 3, si $\overline{GH} \parallel \overline{EF}$, determina el valor de x.

4. En la figura 4, si $\overline{AB} \parallel \overline{CE}$, $\overline{AC} \perp \overline{BC}$ y $\overline{DE} \perp \overline{BC}$, demostrar que $(\overline{AB})(\overline{CF}) = (\overline{BC})(\overline{EC})$.

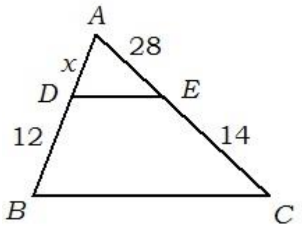

Figura 1

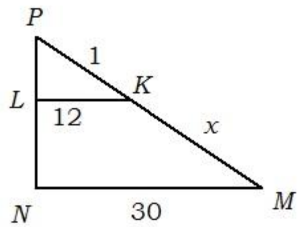

Figura 2

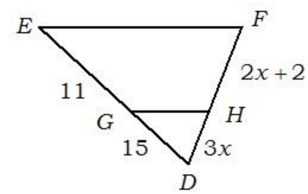

Figura 3

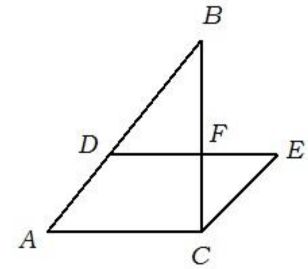

Figura 4

5. En la figura 5, si $\overline{AD} \perp \overline{CD}$ y $\overline{AC} \perp \overline{BE}$, demuestra que $\Delta ABE \sim \Delta ADC$, y con los datos en la figura calcula la longitud del $\overline{DE}$.

6. En la figura 6, se tiene $m(\overline{BN}) = 3$, $m(\overline{NQ}) = 5$, $m(\overline{BC}) = 7$, $m(\overline{AQ}) = 1$ y $m(\overline{AC}) = 9$. Demostrar que $\Delta CDE \sim \Delta ABC$.

7. En la figura 7, se sabe que $\Delta KMP \sim \Delta KLR$. Demostrar que el $\angle Q \cong \angle MKL$.

8. En la figura 8, D es punto medio del $\overline{AC}$ y E punto medio de $\overline{BC}$. Demostrar que el $\Delta CDE \sim \Delta ABC$.

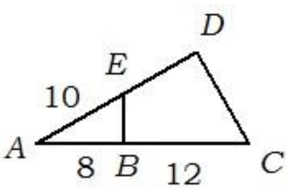

Figura 5

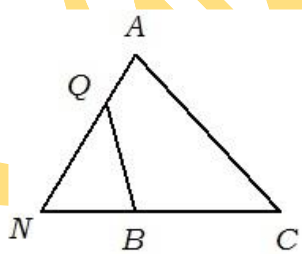

Figura 6

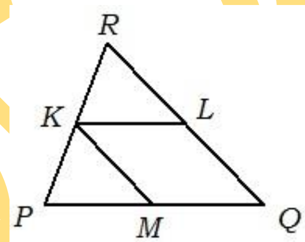

Figura 7

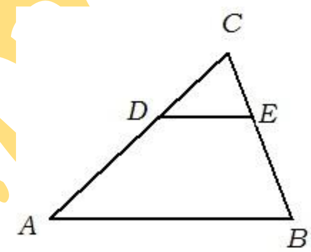

Figura 8

9. En la figura 9, si $\overline{EH} \parallel \overline{DG}$ y $\overline{DH} \parallel \overline{FG}$, demostrar que $\Delta DEH \sim \Delta DFG$ y de acuerdo con los datos, determinar y.

10. En la figura 10, se tiene que $\overline{PQ} \perp \overline{QR}$ y $\overline{PS} \perp \overline{QS}$. Demuestra que $\Delta PQS \sim \Delta QRS$ y calcule el valor de h si $m(\overline{PS}) = 16$ y $m(\overline{SR}) = 4$.

11. En la figura 11, D, E y F son puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Demuestre que $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

12. En la figura 12, se tiene que $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$. Determinar el valor de x.

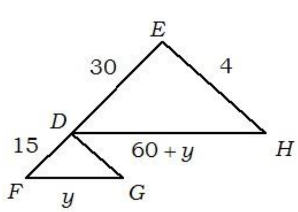

Figura 9

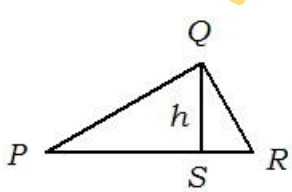

Figura 10

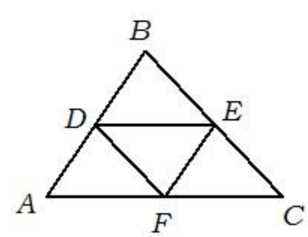

Figura 11

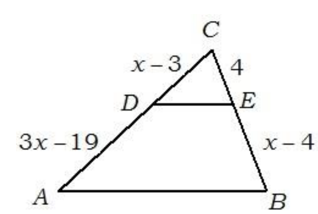

Figura 12

13. En la figura 13, usar el teorema del ángulo externo y el teorema sobre las medidas de ángulos en un triángulo para obtener los valores de x y y.

14. Con los datos indicados en la figura 14, demostrar que $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.

15. En la figura 15, $\overline{AD}$, $\overline{GH}$ y $\overline{BC}$ cada uno perpendicular al $\overline{AB}$. Demuestra que $(\overline{AH})(\overline{CG}) = (\overline{BH})(\overline{AG})$.

16. En la figura 16, $\overline{BE} \perp \overline{AD}$, $\overline{CD} \perp \overline{AD}$, $\overline{AC} \perp \overline{BC}$ y $\overline{CF} \perp \overline{BE}$. Demostrar que $\Delta BCF \sim \Delta ACD$.

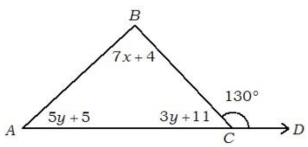

Figura 13

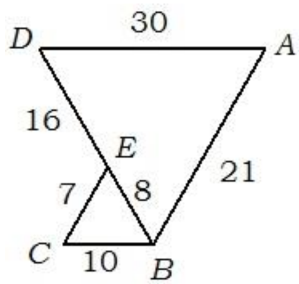

Figura 14

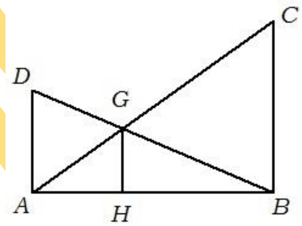

Figura 15

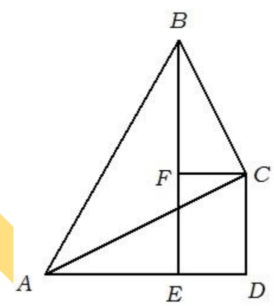

Figura 16

17. En la figura 17, $\overline{MO} \perp \overline{OQ}$, $m(\overline{MO}) = m(\overline{OP}) = 2$ y $\overline{MP} \cong \overline{PQ}$. Determinar $m(\overline{MQ})$ y $m(\angle QMO)$.

18. En la figura 18, ΔMNQ es equilátero con lados de longitud a. Determina la longitud de la altura $\overline{NQ}$.

19. En la figura 19, $\overline{CD}$ es la altura del ΔABC, con los valores indicados de termina h.

20. En la figura 20, el ΔABC es equilátero y la altura $\overline{BD}$ mide 6 unidades. Demuestre que cada lado del triángulo mide $4\sqrt{3}$.

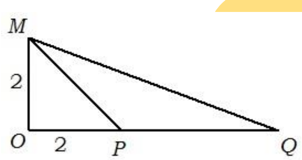

Figura 17

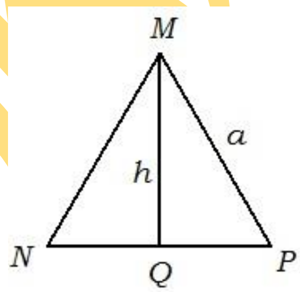

Figura 18

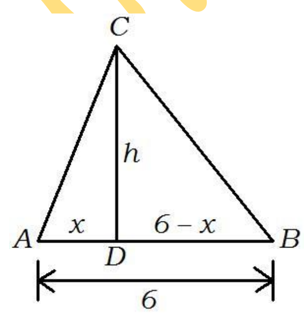

Figura 19

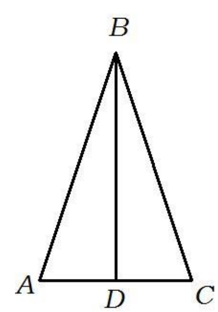

Figura 20

21. En la figura 21, la altura correspondiente a la hipotenusa del triángulo rectángulo ΔABC divide a la hipotenusa en segmentos cuyas longitudes son 5 y 15. Determínese la longitud de la altura y las longitudes de los catetos del triángulo.

22. En la figura 22, $m(\overline{AB}) = 10$, $m(\overline{BC}) = 17$, $m(\overline{AC}) = 21$. Determina la altura $\overline{BD}$.

23. En la figura 23, el $\angle M$ es ángulo recto. Con los datos de la figura, determina $m(\overline{MQ})$ y $m(\overline{PQ})$.

24. En la figura 24, $\overline{BD} \perp \overline{AC}$, $\overline{BE} \perp \overline{CE}$ y de acuerdo con los datos $\overline{AC} = 17$, $\overline{BC} = 26$ y $\overline{BE} = 10$. Determina $\overline{AB}$.

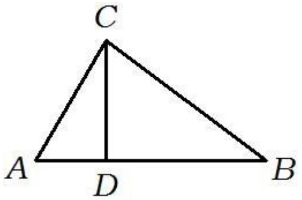

Figura 21

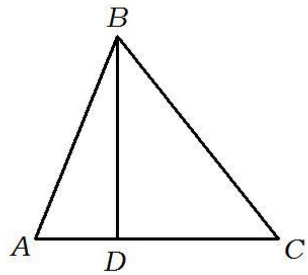

Figura 22

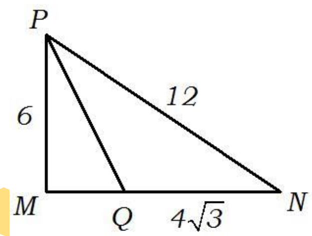

Figura 23

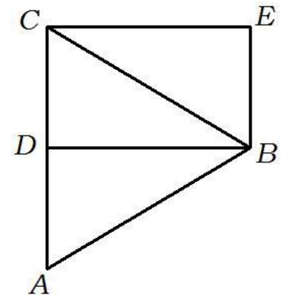

Figura 24

25. Los lados del triángulo rectángulo ΔABC miden $m(\overline{BC}) = 3$, $m(\overline{AC}) = 4$ y $m(\overline{AB}) = 5$. Se escoge un punto D en la hipotenusa de 2 unidades del vértice en el que se intersecan la hipotenusa y el cateto mayor. Encontrar la distancia del punto elegido al vértice del ángulo recto.

26. $ABCD$ son los vértices de un rombo, cuyas diagonales miden $30\ cm$ y $40\ cm$, considerando que las diagonales se bisecan, calcula la longitud de cada lado.

V. Circunferencia

1. En la figura 1, $\overline{AC}$ es diámetro, $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son cuerdas. Demostrar que $\overline{AB} \perp \overline{BC}$.

2. En la figura 2, O equidista de las cuerdas $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$. Demostrar que ΔABC es equilátero.

3. En la figura 3, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son tangentes a la circunferencia menor, demostrar que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

4. En la figura 4, $\overline{CE}$ es diámetro, $\overline{AB} \perp \overline{CE}$ en D; $\overline{OD} \perp \overline{CD}$ y $m(\overline{CE}) = 20$. Determinar $m(\overline{AB})$ y $m(\angle AOB)$.

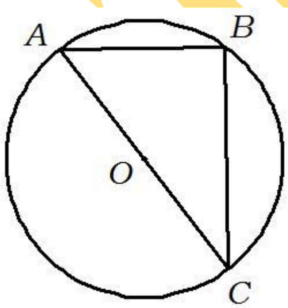

Figura 1

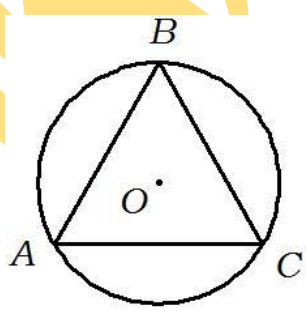

Figura 2

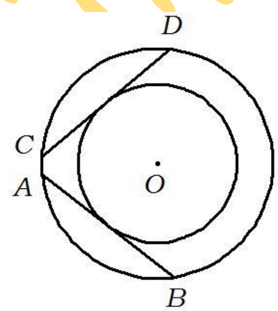

Figura 3

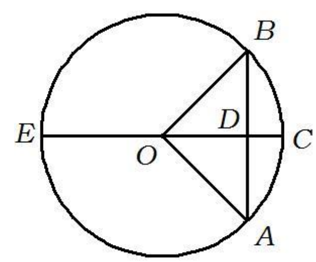

Figura 4

5. En la figura 5, $\overline{CD}$ es diámetro, $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ en E, $m(\overline{AB}) = 16$ y $m(\overline{DE}) = 16$. Hallar $m(\overline{CD})$.

6. En la figura 6, l es tangente a la circunferencia en P, $\overline{AB} \parallel l$ y $\overline{MO} \cong \overline{MP}$. Si $m(\overline{AB})$, determinar la longitud del radio $\overline{OP}$.

7. En la figura 7, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son cuerdas. Demostrar que si $m(\overline{AB}) > m(\overline{CD})$, entonces $m(\overline{FO}) > m(\overline{EO})$.

8. En la figura 8, $\overline{BP}$ y $\overline{AP}$ son rectas tangentes a la circunferencia. Determina qué él $\overline{BP} \cong \overline{AP}$ y que $m(\angle OPB) = m(\angle OPA)$.

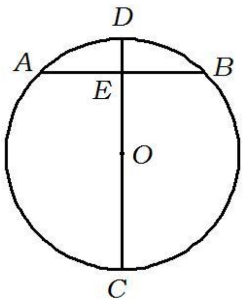

Figura 5

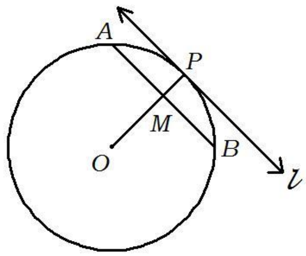

Figura 6

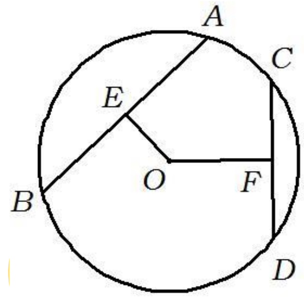

Figura 7

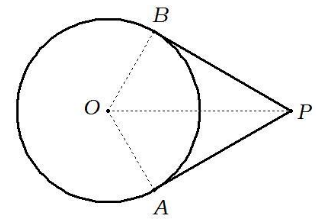

Figura 8

9. Usar las conclusiones del ejercicio 8, para determinar el valor de x en el ΔABC circunscrito a la circunferencia. (Ver figura 9).

10. En la figura 10, las circunferencias son tangentes exteriores en P, $\overline{AB}$ es tangente común a las dos circunferencias. Determinar que él $\overline{O_1O_2} \perp \overline{AB}$, $m(\overline{O_1O_2}) = m(\overline{r_1r_2})$ y que $\overline{AB}$ biseca a $\overline{CD}$ y a $\overline{EF}$.

11. En la figura 11, $\overline{AB}$ es una cuerda común a las circunferencias. Demuestre que $\overline{O_1O_2}$ es mediatriz de $\overline{AB}$.

12. En la figura 12, los lados del triángulo rectángulo ΔABC son tangentes a la circunferencia: Si $m(\overline{AB}) = 16$, $m(\overline{BC}) = 8$ y $m(\overline{AC}) = 10$. Determine el radio de la circunferencia.

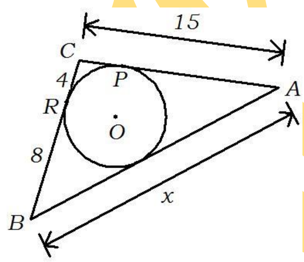

Figura 9

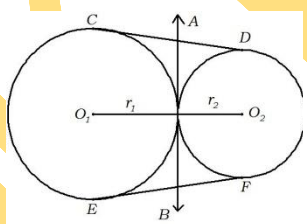

Figura 10

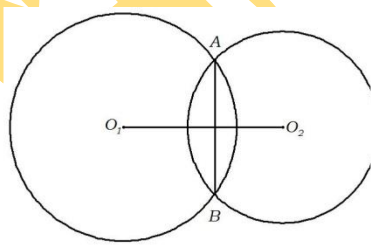

Figura 11

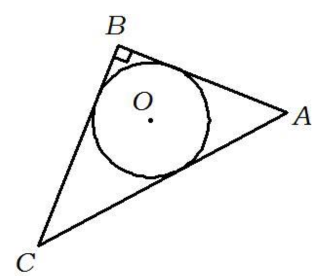

Figura 12

13. En la figura 13, se tienen circunferencias tangentes en A, B y C. Si $m(\overline{OQ}) = 6$, $m(\overline{PQ}) = 5$ y $m(\overline{OP}) = 7$, hallar $m(\overline{AO})$, $m(\overline{BQ})$ y $m(\overline{CP})$.

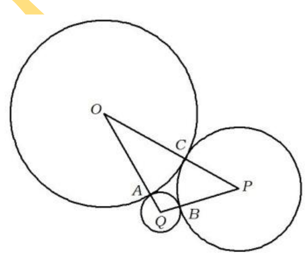

Figura 13