Funciones

exponenciales y logarítmicas.

Funciones logarítmicas y exponenciales

Base

Exponente

$2^{3}=8$ Resultado

Recordado

- $(2^2)(2^3)= 2^5$
- $(2^6)/(2^2)=2^4$
- $(2^2)^4=2^8$
- $\sqrt[2]{2^4 = 2^{\frac{4}{2}}}$
- $2^0 = 1$
- $2^1 = 2$
- $a^n b^n = (ab)^n$
- $(a/b)^m = \frac{a^m}{b^m}$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $(\frac{a}{b})^n = (\frac{b}{a})^{-n}$

Ejercicio

- $\frac{2^4}{2^3} = 2^7$
- $(3^2)(3^{-6}) = 3^{-4}$
- $\sqrt[3]{2^6} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2$
- $(2^4)^{-3}= 2^{-12}$

Ecuaciones exponenciales

Algebra

Base

- $x^1 + 2 = 2x + 6 \; Ec. 1er\ grado$
- $x^2 + 5x + 6 = 0 \; Ec. 2do\ grado$

Ejemplo

- $\underline{5^x = 625}$

Base común
(Ley biuvoca)

- $5^x = 5^x$

625	5
125	5
25	5
1	

Aplicar logaritmos

$$5^x = 6$$

$$\log 5^x = \log 625$$

$$X = \frac{\log 625}{\log 5}$$

X=4

Logaritmo

- $2^3 = 8 \leftrightarrow \log_2 8 = 3$

- $\log_5 125 = 3$

125	5
25	5
5	5
1	

- $\log_3 81 = 4$

81	4
27	4
9	4
3	4
1	

- $\log_5 625 = 4$

625	5
125	5
25	5
5	5
1	

LEYES DE LOS LOGARITMOS

$\log AB = \log A + \log B$

$\log \frac{A}{B} = \log A - \log B$

$\log A^B = B \log A$

$\log \sqrt[B]{A} = \frac{\log A}{B}$

$\log_a a = 1 \quad \log_a 1 = 0$

Ejemplo 2

$3^{x+2} = 81$

81	3
27	3
9	3
3	3
1	

$3^{x+2} = 3^4$

X+2=4

X=4-2

X=2

Ejemplo 3

$\left({}^{3}/_{7}\right)^{3x-7} = \left({}^{7}/_{3}\right)^{-7x+3}$

$3x - 7 = -7x + 3$

$3x + 7x = 3 + 7$

$10x = 10$

$x - \frac{10}{10}$

$x = 1$

Ejemplo 4

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{9}{16}$$
$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{9}{16}$$
$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{3}{4}\right)^{2}$$
$$x-1-\frac{1}{2}=2$$
$$x=2+1+\frac{1}{2}$$

$$x=3.5$$

Ejemplo 5.

- $8^{2x2-4}=64^{x}$
- Aplicar logaritmo $5^{2x-3}=3^{5x-1}$
- $\log_5 2x-3 \quad \log_3 5x-1 <---- \log_A B = \ B\log A$
- $(2x-3)\log 5 = \ (5x-1)\log 3$
- $2x\log 5-3\log 5=5x\log 3-1\log 3$
- $2x\log 5-5\log 3=3x\log 5-1\log 3$
- $x(2\log 5-5\log 3)=3\log 5-\log 3$
- $x=\frac{3\log 5-\log 3}{2\log 5-5\log 3}=(3\log 5-\log 5)/(2\log 5-5\log 3)$
- $x=-1.64$

Multiplicación (a+b)x=axbx

Constante de un lado y variado factoriza X

Ejemplo 6.

- $3^{x+1}=4^{x+1}$
- $\log 3^{x+1}$=$\log 4^{x+1}$
- $(x+1)\log 3=(x+1)\log 4$
- $x\log 3+\log 3=x\log 4+\log 4$
- $x\log 3-x\log 4= \ \log 4-\log 3$
- $x(\log 3-\log 4)=\log 4-\log 3$
- $x\frac{\log 4-\log 3}{\log 3-\log 4}=x=-1$

Ejemplo 7

- $5^{x-3} + 5^{x-2} + 5^{x-1} = 31$
- $5^x\left(\frac{1}{125}\right) + 5^x\left(\frac{1}{25}\right) + 5^x\left(\frac{1}{5}\right) = 31$
- $5^x\left(\frac{1}{125}\right) = 31$
- $5^x = \frac{\frac{31}{1}}{\frac{31}{125}} = \frac{(31)(125)}{(31)(1)} = 125$

125	5
25	5
5	5
1	

$$\frac{1}{125} + \frac{1}{25} = \frac{1+5+25}{125} = \frac{31}{125}$$

- $5^x = 125$
- $5^x = 5^3$
- $x = 3$

Ejemplo 8

- $2^{x+3} + 2^{x+2} + 2^{x+1} + 2^x = 60$
- $2^x(2^3) + 2^x(2^2) + 2^x(2^1)2^x(1) = 60$
- $2^x(2^3 + 2^2 + 2^1 + 1) = 60$
- $2^0(8 + 4 + 2 + 1) = 60$
- $2^x(15) = 60$
- $2^x\,\frac{60}{15}$
- $2^x = 4$
- $2^x = 2^2$
- $x = 2$

- Numero de Euler

  e= 2.2783

  - $\log_e x = \ln - logaritmo\ natural$
  - $\ln AB = \ln A + \ln B$ $\qquad \log_2 2 = 1$
  - $\ln \frac{A}{B} = \ln A - \ln B$ $\qquad \ln = \log_e e = 1$

- $\ln A^B = B \ln A$
- $\ln \sqrt[B]{A} = \frac{\ln A}{B}$
- $\ln e = 1$
- $\ln 1 = 0$
- $e^{\ln x} = x$

Ejemplo 1

Base común.

- $e^{x-2} = e^0$
- $e^{x-2} = e^0$
- $x - 2 = 0$
- X=2

Aplicando logaritmo natural.

- $\ln e^{x-2} = \ln e^0$
- $(x-2) \log e = 0 \ln e$
- $(x-2) \log e = \ln e = 0$
- $x - 2 = 0$
- $x = 2$

- $\log_e x - 2 = \log_e 0$
- $(x-2) \log e = 0 \log e$
- $(x-2) \log e = 0$
- $(x-2) \frac{0^{10}}{\log e}$
- $(x-2) = 0$
- $x = 2$

Ejemplo 2

- $e^{4x} = 0.231$
- $\ln e^{4x} = \ln 0.231$
- $4x = \ln 0.231$
- $x = \left(\frac{\ln 0.231}{4}\right)$
- $x = -0.3663$

Cambio de variable

- $2^{4x} - 2^{2x} - 12 = 0$

Recordando

- $(2^x)^2 = 2^{2x}$
- $(2^{2x})^2 - 2^x - 12 = 0$

Cambio de variables

- $y = 2^{2x}$
- $y^2 - y - 12 = 0$
- $a^{x2} + bx + c = 0$
- $(y - 4)(y + 3) = 0$
- $y_1 = -4\; y_2 = -3$
- $para\; y_2$
- $2^{2x} = -3$
- $\log 2^{2x} = \log -3$
- No existe
  - Para y_1
  - 2^{2x}=4
  - $2^{2x} = 2^2$
  - $x = 1$

Para y_1

2^{2x}	4
2^{2x}	2^2
2^x	2
x	2

Ecuaciones logarítmicas

- $\log_2(x + 4) = \log_2(x - 2)$
- $\log AB = \log A + \log B$
- $A^{\log AX} = X \quad \log\frac{A}{B} = \log A - \log B$
- $2^3 = 8 <=> \log_2 8 = 3$

Estructuras

- Definir de logaritmos y aplicar exponencial
- $\log_a(x) = c$
- Ley biunívoca
- $\log_a(x) = \log_a(c)$

Ejemplo 1

- $\log_{10}(x+4) = 2$

Definición de log.

- $10^2 = (x+4)$
- $100 = x+4$
- $100 - 4 = x$
- $96 = x$

Aplicar exponencial

- $\log_{10}(x+4) = 10^2$
- 10
- $(x+4) = 100$
- $x = 100 - 4$
- $x = 96$

Ejemplo ley biunívoca

- $\log x(x+1) = \log 3x + 3$
- $x(x+1) = 3x + 3$
- $x^2 + x = 3x + 3$
- $x^2 + x = 3x + 3$
- $x_1 = 3 \qquad x_2 = -1$
- x_1 $\qquad$ x_2
- $\log_3(3+1) = \log 9 + 3$ $\qquad$ $\log(-1)(-1+1) = \log -3 + 3$
- $\log_1 2 = \log 12$ $\qquad$ $\log 0 = \log 0$

Ejemplo 3

- $\log_2(x+5) - \log_2(x-2) = 3$
- $\log = \left(\frac{x+5}{x-2}\right) = 3$
- $\log_2 \frac{(x+5)}{(x-2)} = 2^3$
- $\frac{x+5}{x-2} = 8$
- $x + 5 = 8(x-2)$

- $x + 5 = 8x - 16$
- $x - 8x = -16 - 5$
- $-7x = -21$
- $x = \frac{-21}{-7}$
- $x = 3$

Ejemplo.

- $\log_2(x^2 + 4x + 7) = 2$
- $(x^2 + 4x + 7)$=4
- $x^2 + 4x + 7 - 4$=0
- $x^2 + 4x + 3 = 0$
- $(x + 1)(x - 4)$

Ejemplo

- $\log_{10}[x(x + 15)] = \log_{10} 100 \ \ ley\ biunivoca$
- $x(x + 15) = 100$
- $x^2 + 15x - 100 = 0$
- $(x_1 = 5) \quad (x_2 = -20)$

Ejemplo

- $\log(x + 1) - \log x = 1$
- $\log = \left(\frac{x+1}{x}\right) = 10$
- $\log = \left(\frac{x+1}{x}\right) = 10^1$
- $\frac{x+1}{x} = 10$
- $x + 1 = 10x$
- $x - 10x = 1$
- $9x = -1$
- $x = \frac{1}{9}$

Ejemplo

- $2\log_2 x^2 - 2\log_2(-x) = 4$
- $\log_2 \frac{x^4}{x^2} = 4$
- $\log_2 x^2 = 4$
- $2^4 = x^2$
- $\sqrt{\frac{16}{2}} = \sqrt{x}$
- $4 = x$

Ejemplo

- $\log_2(x^2 + 3x - 2) = 3$
- $2^3 x(x + 3_x - 2) = 3$
- $x^2 + 3_x - 2 = 8$
- $x^2 + 3x - 10 = 0$
- $(x - 5)(x - 2) = 0$

Ejemplo

- $\log_3(x + 4) + \log 3\,(x - 4) = 2$
- $\log \frac{(x+4)}{(x-4)} = 2$
- $\log_3 \frac{(x+4)}{(x-4)} = 3^2$
- $\frac{(x+4)}{(x-4)} = 9$
- $x + 4 = 9(x - 4)$
- $x + 5 = 9x - 4$
- $x + 9x = 5 - 4$
- $10x = 1$
- $x = \frac{10}{1}$

Ejemplo

- $2\log x = 3 + \log x - \log 10$
- $\log x^2 = 3 + \log x = -1$
- $\log x^2 - \log x = 2$

- $\log\left(\frac{x^2}{x}\right) = 2$
- $\log x = 2$
- $x = 10^2$
- $x = 100$

Cambio de variable

Recordando

- $x^2 + bx + c = 0$
- $x^2 + 5x + 6 = 0$
- $(x + 3)(x + 2) = 0$
- $x_1 = -3 \qquad x_2 = -2$

Ejemplo 1

- $(\log_2 x)^2 - 3\log_2 x + 2 = 0$
- $y_1 = \log_2 x$
- Cambio de variable
- $y^2 - 3y + 2 = 0$
- $(y - 2)(y - 1) = 0$
- $y_1 = 2 \qquad y_2 = 1$

y_1	y_2
$\log_2 x = 2$	$\log_2 x - 1$
$x = 2^2$	$x = 2^1$
$x = 4$	$x = 2$

Ejemplo

- $(\log_x)^2 - 3\log x = 0$
- $y = \log x$
- $y^2 - 3y + 2 = 0$
- $(y - 2)(y - 1) = 0$
- $y_1 = 2 \qquad y_2 = 1$

y_1	y_2
$\log_{10} x = 2$	$\log_{10} x = 1$
$2\log_{10} x = 10^2$	$2\log_{10} x = 10^1$

- $x = 10^2$ $\qquad\qquad$ $x = 10^2$
- $x = 100$ $\qquad\qquad$ $x = 10$

Ejemplo.

- $(\log_2 x)^2 - 5\log_2 x + 4 = 0$
- $y = \log_2 x$
- $y^2 - 5_y + 4 = 0$
- $(y - 4)(y + 1) = 0$
- $y_1 = 4 \qquad y_2 = 1$

- y_1 $\qquad\qquad$ y_2
- $\log_2 x = 4$ $\qquad\qquad$ $\log_2 x = 1$
- $2\log_2 x = 4$ $\qquad\qquad$ $2\log_2 x = 2^1$
- $x = 4^2$ $\qquad\qquad$ $x = 2^1$
- $x = 16$ $\qquad\qquad$ $x = 2$

Ejemplo

- $\log x = \frac{2 - \log x}{\log x}$
- $\log x^2 + \log x - 2 = 0$
- $\log x^2 = y$
- $y^2 = y - 2 = 0$
- $(y_1 + 2)(y_2 = -1)$
- $y_1 = -2 \quad y_2 = 1$

- $y1$ $\qquad\qquad$ $y2$
- $\log_{10} x = 1$ $\qquad\qquad$ $\log_{10} x = -2$
- $x = 10^1$ $\qquad\qquad$ $x = 10^{-2}$
- $x = 10$ $\qquad\qquad$ $x = \frac{1}{10^2}$ $\qquad$ $x = \frac{1}{100}$

Función logarítmica

Características

Tiene sentido cuando el logaritmo es mayor que cero
Tabla de valores
Daremos a X un valor que me permita el dominio, cuando la base no es 10 y aplicamos la definición del logaritmo
Para calcular el valor de y → logaX= y ↔ ay=x

Función logarítmica can la base mayor que 1

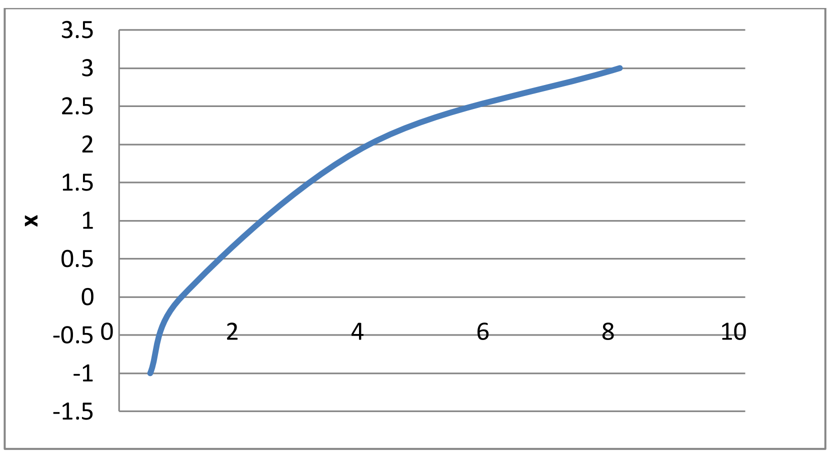
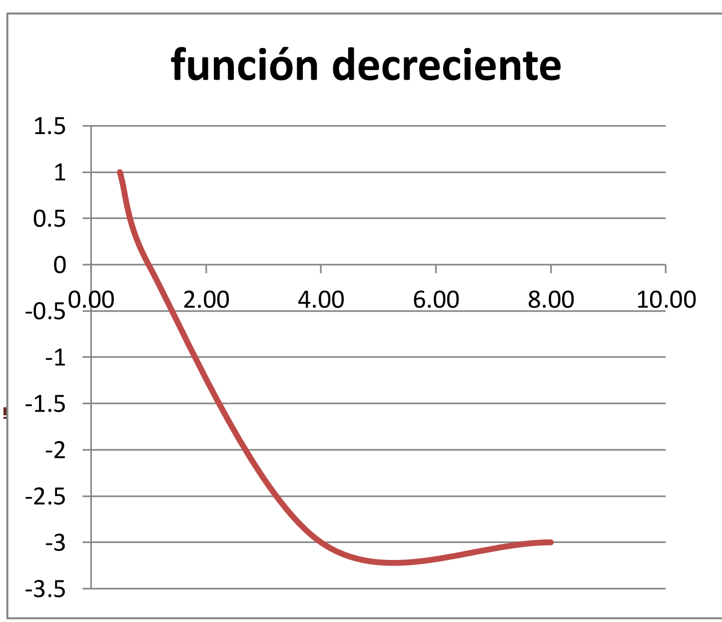


Tabla de valores	
X	y
½	-1
1	0
4	2
8	3

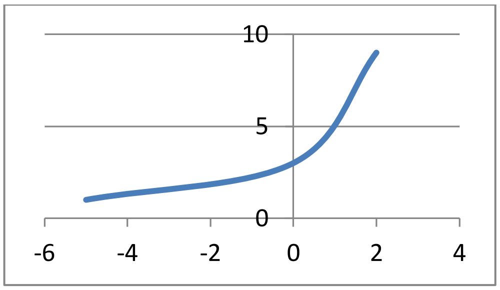


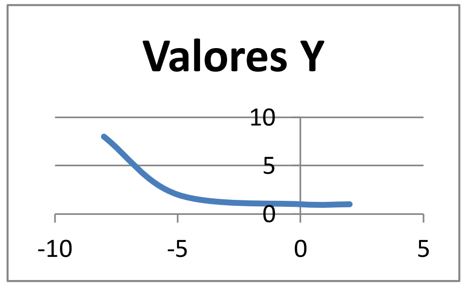
Función logarítmica con base 0&1 F(x)= log0, sx

x	Y
½	1
1	0
4	-2
8	-3

Funciones exponenciales

Una función exponencial con base B es una función de la forma $f(x) = b^x$, se le llama así a la función de cuya base forma genérica es $f(x) = b^x$ siendo un numero positivo de 1





Propiedades

- La función aplicada al valor cero es siempre igual a 1 $f(0) = a^0 1$
- La función exponencial de 1 es siempre igual a la base $f(0) = a^0 = a$
- La función exponencial de una suma de valores es igual al producto de dicha función
- Función e^x e=2.718281 se define matemáticamente como el limite al que tiende la expresión $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Ejercicios de aplicación.

La media del estroncio 90 es de 25 años, esto significa que la mitad de cualquier cantidad de estroncio 90, se desintegra en 25 años y está dando por la función m(+)=mo2- +/25

a) Si la muestra de estroncio 90 tiene una masa de 24 gramos ¿Cuál será la masa restante de dicho material después de 40 años?
b) Si los gramos restante después de 50 años son 12.5 gramos ¿Cuál fue la masa inicial de la muestra?
c) Si la masa inicial fue de 100 gramos y la masa final es de 16.49 gramos ¿Cuál fue el tiempo transcurrido para dicha designación?

- m(+) masa final
- $m_0 2^{\frac{+}{25}}$ decreciente
  a) $m_0 = 24g$
  +=40g
  m(+)?
- Sustituyendo
- $m(+) = (24)(2)$
- $m(+) = (24)(2)^{-1.6}$
- $m(+) = (24)(0.32)$
- $m(+) = 7.68$
  b) $m(+) = 12.5$
    - +=50 años
    - Mo=?
    - $12.5 = mo2\frac{-50}{25}$
    - $12.5 = mo2^{-2}$
    - $12.5 = (0.5)$
    - $\frac{12.5}{0.25} = mo$
    - $mo = 50g$
  c) $mo = 100g$
    - $m(+) = 16.49$
    - $+=? = 1000\ 2^{\frac{1}{25}}$
    - $16.49 = 100\ 2^{\frac{1}{25}}$

- $\log 16.49 = \log 100\ \ 2^{\frac{1}{25}}$
- $\log 16.49 - \log 100 = 2^{\frac{1}{25}} \log 2$
- $\frac{\log 16.49 - \log 100}{\log 2} = \frac{1}{25}$
- $-25(\frac{\log 16.49 - \log 100}{\log 2})$
- $+= 65\ años$

Ejemplo 2

En un pueblo pequeño, diminuto, casi inexistente llamado Pachuca, la población crece a una tasa del 3% anual dicho crecimiento está dado por la función

- $p(+) = po(1 + 0.03)^t$
  a) Si la población inicial en dicho poblado es de 1000 habitantes, ¿Cuántas personas existirán después de 10 años?
  b) Si la población resultante después de 15 años fue de 25000 habitantes ¿Cuál fue la población existente antes de ese tiempo?
  c) Si la población inicial fue de 3000 habitantes y la población final es de 10000 habitantes ¿Cuál fue el tiempo transcurrido para dicho cambio?
- $P(t) = Po(1 + 0.03)^t$
- $P(t) poblacion\ final$
- $Po = poblacion\ inicial$
- T= tiempo
- Sustitución
- $P(+) = 1000(1 + 0.03)^{10}$
- $P(+) = 1000(1.03)^{10}$
- $P(+) = 1000(1.343)$
- $P(+) = 1343$

- ✓ $P(+) = 25000$
- ✓ $t = 15\ años$
- ✓ $Po = ?$
- ✓ $sustitución$
- ✓ $25000 = Po(1.03)^{15}$
- ✓ $25000 = Po(1.557)$
- ✓ $\frac{25000}{1.557}$= 16056

- $sustutición$
- $Po = 3000$
- $P(t) = 1000$
- t?
- $1000 = 3000(1.03)^t$
- $\log 1000 = \log 3000(1.03)^t$
- $\log 1000 = \log 3000 + log(1.03)^t$
- $\log 1000 - \log 3000 = log(1.03)^t$
- $\log 1000 - \log 3000 = tlog(1.03$
- $\frac{\log 10000 - \log 3000}{\log 1.03}$
- $t = 407$

Ejercicio 1

En un experimento científico se descubrió el crecimiento exponencial de un crecimiento de moscas después de dos días iniciando el experimento se tenía 200 moscas, para el 4to día se tenían 800 moscas

a) Cuál sería la población para el sexto día
b) $N(+) = No(2)^2 \; funcion$

$$200 = no\ (2)^2$$
$$200 = no\ 4$$
$$\frac{200}{4} = No$$
$$No = 50$$

c) $1000 = 50(2)^+$

$$\log 1000 = \log 50\ (2)^+$$
$$\log 1000 = \log 50 + \log 2^+$$
$$log1000 - log50 - (+)log2$$
$$\frac{log1000 - log50}{log2} = 4.3$$

Ejercicio 2

La mosca drosfila se duplica cada 2.5 días dicho crecimiento poblacional se describe con la siguiente función $N(t) = No2^{\frac{-t}{2.5}}$

a) Si al principio teníamos 10 moscas macho y diez hembras ¿en cuánto tiempo tendríamos 139 individuos

$$N(t) = 20(2)^{\frac{t}{2.5}}$$

$$139 = 20(2)^{\frac{t}{2.5}}$$
$$log139 = log20(2)^{\frac{t}{2.5}}$$
$$log139 = log20 + log2^{\frac{t}{2.5}}$$
$$log139 - log20 = \frac{(t)}{2.5}log2$$
$$\frac{log139 - log20}{log2} = \frac{t}{2.5}$$
$$t = 6.75$$

La eficiencia de un operador en cierta fabrica está dada por la expresión $n = 120 - 80e^{-0.3(t)}$ donde el operador puede completar n unidades de trabajo cada dia después de desarrollar dicho trabajo durante (t) meses

a) ¿Cuántos meses de experiencia requerirá dicho operador para completar 88 unidades diarias

N=unidades de trabajo

T= meses

- $88 = 120 = 80e^{-04t}$
- $88 - 120 = 80e^{-0.3}$
- $32 - 80e^{-0.3}$
- $\ln 32 = \ln 80e^{-0.3t}$
- $\ln 32 - \ln 80 + \ln e^{-0.3t}$
- $\left(\frac{\ln 32 - \ln 80}{-0.3}\right) = t$
- 18.072=0.3t
- $\frac{18.072}{0.3} = t$
- $60.24 = t$

Un elemento radio activo se desintegra después de un tiempo su masa está dada por la función n en kilogramos y t en años dicha función es $n(60)2^{-0.2+}$

¿Cuántos años tendrá para tener 60 gramos?

- $0.6 = (60)_2^{-0.2t}$
- $logo.06 = log60 + log2^{-02t}$
- $\log 0.06 - log60 = (-0.2t)log2$
- $\frac{log0.06 - log60}{log2} = -0.2t$
- $-9.93 = 0.2t$ $\quad$ $49.65t$

En un campus del IPN con una población de 10000 habitantes uno de ellos regreso con un virus contagioso

La programación de virus entre el estudiante se calcula mediante la función $y = \frac{10000}{1+9999} e^{-0.08t}$

Sustituyendo

- $y = \frac{10000}{1+9999} e^{-0.08t}$
- $y = \frac{10000}{1+9999} e^{-0.08(5)}$
- $y = \frac{10000}{1+9999e}^{-0.4}$
- $y = \frac{10000}{1+9999}$(0.6703)
- $y = \frac{10000}{1+6702}$
- $y = \frac{10000}{6703} = 1.49$

b) Y=5000
T=?

- $5000 = \frac{10000}{1+9999e}^{-0.08t}$
- $5000 = \left(\frac{10000}{1+9999e}^{-0.08t}\right) = 10000$
- $1 + 9999^{-0.08t} = 2$
- $999e^{-0.08t} = 1$
- $\ln 9999e^{-0.08} = In1$
- $\ln 9999 + Ine^{-0.08} = In1$
- $Ine^{-0.08} = In1 - In9999$
- $-0.08 + Ine = In1 - In9999$
- $\frac{-0.08t = In9 - In9999}{Ine}$
- $t = \left(\frac{In1 - In9999}{\frac{In}{-0.08}}\right)$
- $t = 115$

Una hoja de un milímetro de espesor de un cierto plástico translucido reduce la intensidad de la luz en 8 %

¿Cuántas hojas de este tipo de material se necesitan para reducir la intensidad de un haz de luz al 25 % de su valor original?

- $p(+) = po(1 + 0.03)^{t}$
- $p(t) = 1000(1 + 0.03)$
- $p(+) = 1000$

Para día 1

- $p(t) = 1000(1 + 0.03)^1$
- $1000(1.03)$
- $p(t) = 1030$

Para día 2

- $p(t) = 1000(1.03)^2$
- $= 1000(1.06)$
- $= 1060$

Un barco paga 3% de rendimiento anual en su cuenta Premium

a) Si yo coloco 30,000 pesos en dicha cuenta ¿en cuánto tiempo mi capital seria de 100,000 pesos?

$$25 = 100(1 - 0.08$$

$$100000 = 3000(1 + 0.03)^4$$

$$N(t) = No(1 + 1)$$

$$N(t) = No(2)$$