FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

VIII. Ejercicios:

Calcula las variables independientes o dependientes, según sea el caso en cada función:

1. Si $f(x)=3^x$, obtén: a) $f(5)$; b) $f\left(\frac{3}{2}\right)$; c) $f(-2)$; d) $f\left(-\frac{1}{3}\right)$; e) $f(x)=12$; f) $f(x)=\frac{1}{5}$ y g) $f(x)=\sqrt[3]{9}$.

2. Si $f(x)=e^{x-3}$, obtén: a) $f(-1)$; b) $f\left(\frac{1}{2}\right)$; c) $f\left(-\frac{2}{3}\right)$; d) $f(3)$; e) $f(x)=15$; f) $f(x)=\sqrt{6}$ y g) $f(x)=\frac{e^2}{2}$.

3. Si $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^x$, obtén: a) $f\left(-\frac{1}{2}\right)$; b) $f(0)$; c) $f(-4)$; d) $f\left(\frac{2}{3}\right)$; e) $f(x)=5$; f) $f(x)=\frac{1}{10}$ y g) $f(x)=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

4. Si $f(x)=e^{1-2x}$, Obtén: a) $f\left(-\frac{1}{4}\right)$; b) $f(1)$; c) $f(-3)$; d) $f\left(\frac{5}{6}\right)$; e) $f(x)=\sqrt[3]{e}$; f) $f(x)=\frac{1}{4}$ y g) $f(x)=8$.

5. Si $f(x)=2^x-1$, Obtén: a) $f(0)$; b) $f(-3)$; c) $f\left(\frac{3}{2}\right)$; d) $f\left(-\frac{1}{2}\right)$; e) $f(x)=5$; f) $f(x)=\frac{1}{5}$ y g) $f(x)=\sqrt{3}$.

6. Si $f(x)=\log_3 x$, Obtén: a) $f(3)$; b) $f\left(\frac{3}{4}\right)$; c) $f\left(\sqrt{2}\right)$; d) $f(x)=-1$; e) $f(x)=3$ y f) $f(x)=\frac{1}{2}$.

7. Si $f(x)=\log_{\frac{1}{3}} x$, Obtén: a) $f(0)$; b) $f(1)$; c) $f\left(\frac{2}{3}\right)$; d) $f(x)=-\frac{1}{3}$; e) $f(x)=2$ y f) $f(x)=\frac{1}{3}$.

8. Si $f(x)=\log_2 x-2$, Obtén: a) $f(4)$; b) $f\left(\frac{1}{2}\right)$; c) $f(10)$; d) $f(x)=-\frac{1}{2}$; e) $f(x)=5$ y $f(x)=\frac{1}{5}$.

9. Si $f(x)=\log(x-2)$, Obtén: a) $f\left(\frac{1}{5}\right)$; b) $f(102)$; c) $f\left(\sqrt{5}\right)$; d) $f(x)=6$; e) $f(x)=-2$ y f) $f(x)=\frac{2}{3}$.

10. Si $f(x)=1-\ln x$, Obtén: a) $f(e)$; b) $f\left(\frac{1}{3}\right)$; c) $f\left(\sqrt{3}\right)$; d) $f(x)=-e$; e) $f(x)=5$ y f) $f(x)=\frac{1}{5}$.

IX. Ejercicios.
Resuelve los siguientes problemas de aplicación de logaritmos y exponenciales.

1. Se desea cultivar árboles frutales en un suelo con un pH de 4.5. En otro suelo con pH de 6.2 se cultivarán otros vegetales, ¿cuántas veces es más ácido el primer suelo que el segundo?

2. Después que un estudiante con un virus gripal regresa a un internado aislado de 2000 estudiantes, el número de estudiantes infectados t días después de la llegada del portador está dado por la función:

$N(t)=\dfrac{2000}{1+1999e^{-0.895t}}$, ¿Cuánto tardará la mitad de la población estudiantil para infectarse con el virus? Considerar que en los mil infectados ya está incluido el estudiante portador.

3. ¿Cuál es el pH del jugo de naranja si la concentración de iones hidrógeno del jugo es de 6.28×10^{-5} ? ¿Cuál es la concentración de iones hidrógeno de la cerveza si tiene un pH de 4.2 aproximadamente?

4. La población $P(t)$ de la India (en millones), t años después de 1980, puede aproximarse por: $P(t)=651e^{0.02t}$, ¿Cuándo será de mil millones?

5. Si la potencia o intensidad de un sonido se duplica (por ejemplo, aumentando el volumen), ¿cuál es la diferencia en los niveles de intensidad del sonido? Y si la potencia de un sonido es aumentada en 30%, ¿cuál es la diferencia en los niveles de sonido? $\left(\alpha = 10\log\dfrac{I}{I_0}\right)$

6. Un método para medir la <u>magnitud</u> M de un sismo en términos de la <u>amplitud</u> A de sus ondas de choque fue ideado por Richter, quien diseñó una escala que lleva su nombre, donde la magnitud se define por $M=\log\dfrac{A}{A_0}$, siendo A la amplitud de la onda sísmica mayor y A_0 es una amplitud de referencia que corresponde a la magnitud $M=0$. Un sismo de magnitud 5.5 produce daños serios, la magnitud del terremoto en San Francisco en l906 fue de 8.3 en la escala de Richter. En septiembre de 1985 ocurrió un terremoto de magnitud 7.8 (escala Richter) en la ciudad de México, comparado con este último terremoto, ¿cuántas veces más intenso fue el terremoto de San Francisco en 1906? Sugerencias: comparar $\dfrac{A}{A_0}$ correspondiente al terremoto de 1906 con $\dfrac{A}{A_0}$ correspondiente al terremoto de 1985.

7. Según la <u>ley de absorción</u> de Lambert, si un haz luminoso entra verticalmente en la superficie de un lago, su intensidad decrece conforme aumenta el espesor de la capa de agua que atraviesa. Para una intensidad inicial I_0, la intensidad reducida de la luz a una profundidad de x metros está dada por la función $I(x)=I_0e^{-\mu x}$, el parámetro $\mu>0$ se llama <u>coeficiente de absorción</u>. Si la intensidad de la luz solar a 6 metros de profundidad en un lago se ha reducido al 70%, calcular la profundidad a la cual la intensidad será el 20% de la intensidad en la superficie.

8. Cierta sustancia radiactiva decrece según la función $Q(t)=Q_0e^{-0.0063t}$ en donde Q_0 es la cantidad inicial de sustancia y t es el tiempo en días. Calcular aproximadamente la <u>vida media</u> de la sustancia, es decir, el número de días en que la cantidad inicial de sustancia se reduce a la mitad.

9. En ciertas condiciones, la presión p, a la altura h (en pies), está dada por: $p=29e^{-0.000034h}$ a) ¿Cuál es la presión a una altura de 40,000 pies? B) ¿A qué altura se tendrá una presión de 10?

10. El carbono 14 existe en los cuerpos orgánicos en un porcentaje fijo Q. Cuando el organismo muere, el carbono 14 disminuye en tal forma que al cabo de t años, el porcentaje de carbono 14 que aún permanece en el cuerpo es de: $P(t)=Q\left(2^{-\frac{t}{5600}}\right)$. Si un organismo muerto tiene $P=0.76Q$, ¿aproximadamente que tiempo tiene de muerto?

11. El argón 39 radiactivo, tiene una vida media de 4 minutos, es decir, en cuatro minutos la mitad de cualquier cantidad de argón 39 se convertirá en otra sustancia, debido a la desintegración. Si se comienza con A_0 mg. de argón 39, la cantidad sobrante después de t minutos está dada por:

$A(t)=A_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{4}}$. a) ¿En cuánto tiempo se habrá reducido a la quinta parte de la cantidad original? b) ¿Qué porcentaje de la cantidad inicial de argón 39 quedará después de 10 minutos? c) Comenzando con 300 mg., ¿en qué tiempo quedará 125 mg.? d) Si después de 16 minutos quedan 1.5 mg., ¿cuál era la cantidad original?

12. Al adquirir una habilidad particular, como nadar o escribir a máquina, la persona progresa más rápido al principio y luego se estabiliza, este comportamiento se puede aproximar por medio de una ecuación exponencial de la forma: $y=a\left(1-e^{-c}\right)$; donde a y c son constantes positivas. Las curvas que produce esta función, tienen aplicación en sicología, educación e industria, Supongas que el aprendizaje de la mecanografía en una persona determinada esta dado por la ecuación exponencial: $N(n)=80\left(1-e^{-0.08n}\right)$; donde $N(n)$ es el número de palabras por minuto que puede escribir a máquina después de n semanas de instrucción. Aproximadamente, ¿cuántas semanas tardas la persona en aprender a mecanografiar a razón de 60 palabras por minuto?

13. Comenzando con c miligramos del isótopo de polonio ^{210}P, la cantidad restante a los t días puede ser aproximada por: $A(t)=ce^{-0.0059t}$. Si la cantidad inicial es de 50 mg., calcule, redondeando a centigramos, la cantidad restante a los a) 30 días. b) 180 días y c) 365 días.

14. La cantidad de cierta sustancia radiactiva decrece conforme transcurre el tiempo t en días, las cantidad inicial de sustancia es Q_0 y la cantidad que aún queda después de t días está dada por la función: $Q(t)=Q_0e^{-0.0063t}$. Calcula: a) El tiempo en que la cantidad inicial de sustancia se reduce a la cuarta parte. b) El tiempo en que solo queda el 80% de la cantidad inicial. c) La cantidad que queda de 35 gramos de esta sustancia, después de 5 días. d) La cantidad inicial de ésta sustancia, si después de 30 días quedan 10 gramos.

15. El estroncio radioactivo 90 tiene una vida media de 28 años; es decir, que después de 28 años, la mitad de cualquier cantidad de estroncio 90, se convertirá en otra sustancia debido a su desintegración radiactiva. Si se coloca una barra que contiene 100 mg de estroncio 90 en un reactor nuclear, la cantidad que de él permanecerá después de t años, está dada por: $A(t)=100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{28}}$. Calcula la cantidad de estroncio que queda si: a) $t=0$, b) $t=6$ y c) $t=28$.

16. Se conoce como cohorte al conjunto de peces que resultan de una reproducción anual, normalmente el número de peces que siguen vivos cuando han pasado t años, está dada por la función exponencial: $N(t)=N_0e^{-0.02t}$, en donde N_0 es la cantidad inicial de peces en la cohorte. Calcula: a) El tiempo que debe transcurrir a partir de la reproducción para que el número inicial de peces se reduzca a la mitad si este es de 300, 900 y N_0. b) El porcentaje del número inicial en la cohorte que aún vive después de 10 años.

17. El número de bacterias existentes en un cultivo, después de t horas, está dada por: $N(t)=N_0e^{kt}$, donde N_0 es el número inicial de bacterias, al tiempo $t=0$; k es la tasa de crecimiento y t es el tiempo en horas. Encuentra el valor de k si se sabe que después de una hora la colonia ha aumentado dos veces respecto a su número inicial, si éste es de: a) 500 bacterias. b) 1,000 bacterias. c) N_0 bacterias.

18. El yodo radiactivo ^{131}I decrece conforme a la función: $N(t)=N_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}}$, donde N_0 es la dosis inicial y t el tiempo en días. Si la vida media es el tiempo en que las partículas radiactivas se reducen a la mitad del número original. a) ¿Cuál es la vida media del yodo ^{131}I? b) ¿En qué tiempo se disminuye la dosis inicial a un 10%?

19. El número de bacterias crece de acuerdo con la función: $N(t) = N_0\left(2^{\frac{t}{15}}\right)$, donde N_0 representa el número de bacterias presentes inicialmente y $N(t)$ el número de bacterias después de t minutos. a) ¿Cuánto tiempo tardará en cuadriplicarse? b) Si en el cultivo inicial existen 1,500 bacterias. ¿En qué tiempo existirán 150,000 bacterias?

20. Una sola bacteria de cólera se divide cada media hora para producir dos bacterias completas. Si se comienza con una colonia de B_0 bacterias, al cabo de t horas, se tendrá: $B(t) = B_0\left(2^{2t}\right)$ bacterias. a) ¿Cuánto tiempo se necesitará para que la colonia se triplique? b) ¿Cuántas veces habrá crecido la colonia después de 5 horas?

21. Si el costo de manufacturación de x artículos es $C(x) = 400 + 300\log(x+3)$. Determina: a) ¿Cuál es el costo de 200 artículos? b) Si el costo por la manufacturación fue de 1,210.47 ¿de cuántos artículos se está hablando?

22. Según la ley de Newton del enfriamiento, si un objeto a la temperatura B está rodeado por un medio (aire o agua, por ejemplo), a la temperatura A, con $A < B$, entonces la temperatura del objeto al cabo de t minutos es: $f(t) = A + (B - A)10^{-kt}$, donde k es una constante positiva. Determina: a) ¿Qué valor tiene la k de cierto medio que se encuentra a 20°C, si produce un enfriamiento de 60 a 45°C en 10 minutos? b) Para el medio del inciso anterior, ¿en cuánto tiempo disminuirá la temperatura de un objeto de 100 a 60°C al introducirse en dicho medio que se encuentra a una temperatura de 40°C?

23. Si el pH de una sustancia se obtiene como: $pH = -\log[H^+]$, donde $[H^+]$ mide la concentración de iones de hidrogeno. Si el pH del agua de mar es de 8.5, calcule el valor correspondiente de $[H^+]$.

24. Una población bacteriana se duplica cada hora; comenzando con una bacteria. a) ¿Cuántas bacterias habrá al final de 3, 5 y t horas? b) ¿Después de cuánto tiempo habrá 750, 1500 y 3000 bacterias?

25. Una computadora disminuye su valor al paso de los años; el precio de una Imac fue, cuando el modelo era nuevo, de $14,000. Cada año pierde 15% de su valor. a) ¿Después de que tiempo costará $10,500? b) ¿Después de que tiempo costará la mitad del precio original? c) ¿Después de que tiempo costará $5,500?

26. Los materiales traslúcidos atenúan la intensidad de la luz que los atraviesa. Una hoja de un milímetro de espesor de un determinado plástico traslúcido reduce la intensidad de la luz en un 15%. ¿Cuántas hojas de este plástico se necesitan para reducir la intensidad de la luz hasta el 25% de su valor original?

27. Se acordó que las tarifas de la energía eléctrica, para no aumentarlas súbitamente, se incrementarán en un 10% cada mes. a) ¿En cuánto tiempo se duplicarán? b) ¿En cuánto tiempo se triplicarán?

28. En ciertas condiciones, $I = 10^{\frac{D}{10}}$, donde D es el número de decibeles de un sonido e I es su intensidad. Si un muchacho grita con 30 decibeles más que una chica que habla, ¿cuál es el cociente de la intensidad de el, a la de ella?

29. Cierta tienda establece que los clientes que compran a crédito, deben pagar un interés del 18% anual, capitalizado mensualmente por cada cuenta no pagada. Si un cliente compra a crédito un televisor de $3,500 y no hace ningún pago durante un año, ¿cuánto debe a la tienda al final de un año?

30. Si un fondo de ahorros paga 10% de interés anualmente, y si el interés se capitaliza semestralmente, ¿cuánto dinero habrá que invertir inicialmente para tener $5,000 después de un año?

31. El decaimiento de cierto material radiactivo, se comporta de acuerdo con el siguiente modelo: $N(T) = N_0(0.85^{2T})$, donde N_0 es la cantidad inicial, T el tiempo en horas y $N(T)$ la cantidad restante después de T horas. a) Determina cuando tiempo debe transcurrir para que la cantidad inicial se reduzca al 40%. b) ¿Qué porcentaje de la cantidad inicial queda después de medio día? c) ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que la cantidad inicial se disminuya a una milésima parte? d) Si después de un día, resta una millonésima de gramo de material radioactiva, ¿cuánto era la cantidad inicial?

32. El crecimiento de una población de bacterias se duplica cada hora. Cada una crece hasta alcanzar un cierto tamaño y se divide en dos nuevas bacterias, repitiéndose el proceso en cada célula. ¿Cuántas células habrá al final de: a) 12 horas? (N = 4096). b) 4 horas 20 minutos? ($N = \sqrt[3]{8192}$). c) Determina el tiempo que tardará en producirse un cultivo que contenga 750 bacterias. (t = 9.55075)

33. En la materia viva, la cantidad de carbono 14 (un isótopo radiactivo del carbono 12, normal) es constante. Al morir un organismo, los átomos de carbono 14 decaen, es decir cambian a nitrógeno 14 emitiendo una radiación; esto ocurre de tal manera que solamente habrá la mitad de átomos de carbono 14 cada 5570 años (aproximadamente). Esto es que la vida media del carbono 14 es de 5 570 años. Los científicos miden la emisión de radiación para poder inferir la cantidad de carbono 14 en la materia viva y pueden estimar cuando murió. Si A_0 es la cantidad inicial de carbono 14 presente, entonces la cantidad A de carbono 14 que queda después de t años está dada por la función: $A = A(t) = A_0 2^{-\frac{1}{5}t}$. Determina: a) Si A_0 es 100, traza la gráfica del decaimiento radiactivo del carbono 14, dibujando $A(t)$. b) ¿Cuánto carbono 14 está presente en un artefacto que originalmente contenía 100 mg y murió hace 3000 años? (A(3000) = 68.84 mg aproximadamente)

34. Los materiales translúcidos tienen la propiedad de reducir la intensidad de la luz que pasa a través de ellos. Una hoja de 1 mm de espesor de un cierto plástico translúcido reduce la intensidad de luz en 8%. ¿Cuántas hojas de este tipo se necesitan para reducir la intensidad de un haz de luz al 25% de su valor original?

35. El estroncio 90 radiactivo se utiliza en los reactores nucleares. Su ley de decaimiento está dada por la función: $P = P(t) = P_0 e^{-0.0248t}$. Determina la vida media del estroncio 90.

36. Un isótopo radiactivo se desintegra de modo que la cantidad residual Q del isótopo al término de t años está dada por $Q(t) = Q_0(2^{-kt})$, donde k es una constante. Si la vida media del isótopo es de N años: a) Demuestra que $Q(t) = Q_0\left(2^{-\frac{t}{N}}\right)$. b) Suponiendo que N = 25 años, ¿en cuánto tiempo la cantidad inicial del isótopo se reduce en un 70%? c) También con N = 25 años, ¿qué porcentaje de una cantidad inicial de 200 gramos del isótopo se habrá desintegrado después de 10 años?

37. En la escala de Richter, la magnitud de un sismo (R) es el logaritmo común de $\frac{I}{I_0}$, donde I representa la intensidad; obtener la magnitud de un sismo cuya intensidad es: 1000 veces I_0.

38. La intensidad del sonido que percibe el oído humano tiene diferentes niveles. Para hallar el nivel de intensidad α (en decibeles) que corresponde a una intensidad de sonido I se emplea la fórmula: $\alpha = 10\log\frac{I}{I_0}$ donde I_0 representa la intensidad del sonido más débil que puede detectarse por el oído bajo ciertas condiciones. Determina α si I es 10 000 veces mayor que I_0.

39. En los lagos y e el mar, la vida vegetal sólo puede existir bajo una capa de agua que tenga unos 10 metros de profundidad pues la luz del día es absorbida gradualmente por el agua. La intensidad de la luz, decrece cuando el espesor de la capa de agua aumenta según la ley de Lambert; si un haz luminoso

vertical entra en el agua con una intensidad original I_0 e I es la intensidad reducida en una profundidad de x metros, la ley establece que : $I(x)=I_0e^{-\mu x}$. El parámetro $\mu>0$ se llama coeficiente de absorción, depende de la pureza del agua y de la longitud de onda del rayo, ¿cómo se expresa μ en términos de I_0, I y x?

40. Un capacitor se descarga al transcurrir el tiempo T, si Q_0 es la carga inicial y Q la carga en cualquier tiempo T, una fórmula que describe el proceso es: $Q(t)=Q_0e^{-kT}$, donde k es una constante. Si la carga del capacitor se reduce de 0.002 a 0.0015 unidades en 10 minutos, calcula el valor de la constante k.

Sociales - administrativas.

41. Durante cuánto tiempo debes mantener 10,000 pesos en un banco, a una tasa del 6.1 % anual, si quieres duplicar tu capital? a) A interés compuesto anual. b) Si los intereses se abonan mensualmente.

42. Supongamos que un automóvil deprecia su valor en un 15 % anual. a) Si nuevo costó $22,000, ¿cuánto valdrá a los 6 años? b) ¿Cuántos años deben pasar para que su valor sea inferior a 5000 pesos?

43. El sueldo de los funcionarios experimenta una subida anual del 3.5 %, desde el año 2000. Si un funcionario ganaba 16000 pesos mensuales a comienzos del año 2000, ¿cuánto tardará en ganar el doble?

Físico – Matemáticas.

44. Un circuito eléctrico contiene una batería que produce un voltaje de 60V, un resistor con una resistencia de 13Ω y un inductor con inductancia de 5H. Se puede demostrar que la corriente I = I(t) (en amperes A) t segundos después de cerrar el interruptor es $I(t)=\frac{60}{13}(1-e^{-\frac{13t}{5}})$ ¿Cuántos segundos tomará para que la corriente sea 2A?

45. En un circuito RC, la carga del capacitor no adquiere instantáneamente su valor máximo, Q, sino que va aumentando en una proporción que depende de la capacidad, C, del propio capacitor y de la resistencia, R, conectada en serie con él. Por tanto la cantidad de carga que tendrá ese condensador en función del tiempo transitorio del circuito será $Q(t)=Q_0(1-e^{-\frac{t}{RC}})$ Se conecta un capacitor de 20 μF a un generador de 200 V a través de una resistencia de 0,5 MΩ. a) Hallar la carga del capacitor al cabo de 0, 10 y 100 segundos , después de haberlo conectado. Sabiendo que Qo = 4Mc y RC=10s.

46. En un circuito RC, la intensidad de corriente de carga de un capacitor está dado por la siguiente expresión: $I(t)=I_0(e^{-\frac{t}{RC}})$. Donde RC, es la constante de tiempo de que depende de la capacidad del capacitor y de la resistencia a la que está conectado en serie con el. Al conectarse capacitor de 10 μF a un generador de 100 V a través de una resistencia de 1 MΩ. Calcula: a) La intensidad de la corriente de carga para 1 y 10 segundos. b) ¿Qué tiempo será necesario para que la intensidad de corriente de carga pase de 0.02 a 0.0005 A?

47. Un circuito está constituido por una resistencia y una capacidad a la cual se le aplica la fem de un generador de cc a través del interruptor S, sabiendo que el generador es de 30V, el capacitor de 100μF y una resistencia de 2KΩ. Calcula: a) La constante de tiempo RC b) La caída de tensión en el condensador para los tiempos t=RC; t=2RC, que está dada por: $V(t)=V_0(1-e^{-\frac{t}{RC}})$