№67

б) $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\dots+nC_n^n$;

Обозначим искомую сумму через S:

$S=C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\dots+nC_n^n$,

$S+0\cdot C_n^0=0\cdot C_n^0+C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\dots+nC_n^n$,

используем св-во $C_n^k=C_n^{n-k}$,

$S=0\cdot C_n^n+1\cdot C_n^{n-1}+2\cdot C_n^{n-2}+\dots+nC_n^0$,

складываем с предыдущим,

$2S=n\cdot C_n^0+n\cdot C_n^1+n\cdot C_n^2+\dots+nC_n^n$,

используем св-во $C_n^0+C_n^1+\dots+C_n^n=2^n$,

$2S=n\cdot 2^n$,

$S=n\cdot 2^{n-1}$.

в) $4C_n^2+7C_n^3+10C_n^4+\dots+(3n-2)C_n^n$;

Обозначим искомую сумму через S:

$S=4C_n^2+7C_n^3+10C_n^4+\dots+(3n-2)C_n^n$,

используем св-во $C_n^k=C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^k$,

$S = 4C_{n-1}^1 + 4C_{n-1}^2 + 7C_{n-1}^2 + 7C_{n-1}^3 + \ldots +$
$+ (3n-2)C_{n-1}^{n-1} + (3n-2)C_{n-1}^{n},$
добавим C_n^1 и преобразуем в $C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1$.

2) $C_{n+1}^2 + 2C_{n+1}^3 + 3C_{n+1}^4 + \ldots + nC_{n+1}^{n+1};$
Обозначим искомую сумму через S:
$S = C_{n+1}^2 + 2C_{n+1}^3 + 3C_{n+1}^4 + \ldots + nC_{n+1}^{n+1},$
используем св-во $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k;$

$S = C_n^1 + C_n^2 + 2C_n^2 + 2C_n^3 + 3C_n^3 + 3C_n^4 + \ldots +$
$+ nC_n^n + nC_n^{n+1},$

$S-1 = -C_n^0 + C_n^1 + 3C_n^2 + \ldots + (2n-1)C_n^n + nC_n^{n+1},$
используем св-во $C_n^k = C_n^{n-k},$

$S-1 = (2n-1)C_n^0 + (2n-3)C_n^1 + (2n-5)C_n^2 + \ldots - C_n^n +$
$+ nC_n^{n+1},$
складываем с предыдущим,
$2S-2 = (2n-2)C_n^0 + (2n-2)C_n^1 + (2n-2)C_n^2 + \ldots +$
$+ (2n-2)C_n^n + nC_n^{n+1},$
используем св-во $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n,$

$$2S-2=(2n-2)\cdot 2^n+nC_n^{n+1},$$
$$S-1=(n-1)2^n+nC_n^{n+1},$$
$$S-1=n\cdot 2^n-2^n+nC_n^{n+1},$$
$2^n=C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^n$, no это мы
$$S-1=n\cdot C_n^0+nC_n^1+nC_n^2+\ldots+nC_n^n+nC_n^{n+1}-2^n,$$
$$S-1=n\cdot 2^{n+1}-2^n,$$
$$S=2^n(2^n-1)+1.$$

№ 68

a) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}$,

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k,$$
$$n(1+x)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n} k\cdot C_n^k\cdot x^{k-1},$$
$$nx(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n} k\cdot C_n^k\cdot x^k,$$
$$n(n-1)x(1+x)^{n-2}+n(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n} x^2 C_n^x x^k.$$

№ 69

a) $\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n+k-2}(4j+k-3)$;

$\sum\limits_{k=1}^{n} a=n\cdot a$, $\sum\limits_{j=1}^{n} j=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$;

$$\sum_{k=1}^{n}\left(4\left(\left(\frac{n-k-2}{2}\right)^2+\frac{n-k-2}{2}\right)+k(n-k-2)-3(n-k-2)\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\Big(2\big((n-k)^2+4-4(n-k)+n-k-2\big)+k(n-k-2)-$$

$$-3(n-k-2)\Big)=\sum_{k=1}^{n}\Big(2\big(n^2+k^2-2nk+2-3n+3k\big)+$$

$$+k(n-k-2)-3(n-k-2)\Big)=\sum_{k=1}^{n}\big(2n^2+2k^2-4nk+$$

$$+4-6n+6k+nk-k^2-2k-3n+3k+6\big)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(2n^2+k^2-9n+7k-3nk+10\right)=$$

$$=2n^3+\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}-9n^2+7\left(\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}\right)-3n\Big(\frac{n^2}{2}+$$

$$+\frac{n}{2}\Big)+10n=\frac{7n^3}{3}-\frac{17n^2}{2}+\frac{n}{6}+\frac{7n^2}{2}+\frac{7n}{2}-\frac{3n^3}{2}-$$

$$-\frac{3n^2}{2}+10n=\frac{5n^3}{6}-\frac{13n^2}{2}+\frac{41}{3}n.$$