§ 5. Геометрические приложения

1. Касательная прямая и нормальная плоскость. Уравнение касательной прямой к кривой

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t)$$

в точке ее $M(x, y, z)$ имеет вид

$$\frac{X - x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{Y - y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{Z - z}{\frac{dz}{dt}}.$$

Уравнение нормальной плоскости в этой точке:

$$\frac{dx}{dt}(X - x) + \frac{dy}{dt}(Y - y) + \frac{dz}{dt}(Z - z) = 0.$$

2. Касательная плоскость и нормаль. Уравнение касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$ в точке ее $M(x, y, z)$ имеет вид

$$Z - z = \frac{dz}{dx}(X - x) + \frac{dz}{dy}(Y - y)$$

Уравнение нормали в точке M есть

$$\frac{X - x}{\frac{dz}{dx}} = \frac{Y - y}{\frac{dz}{dy}} = \frac{Z - z}{-1}.$$

Если уравнение поверхности задано в неявном виде $F(x, y, z) = 0$, то соответственно имеем

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z - z) = 0$$

- уравнение касательной плоскости и

$$\frac{X - x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z - z}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

- уравнение нормали. 3. Огибающая кривая семейства плоских кривых. Огибающая кривая однопараметрического семейства кривых $f(x, y, \alpha) = 0$ (α - параметр) удовлетворяет системе уравнений:

$$f(x, y, \alpha) = 0, \quad f'_\alpha(x, y, \alpha) = 0.$$

4. Огибающая поверхность семейства поверхностей. Огибающая поверхность однопараметрического семейства поверхностей $F(x, y, z, \alpha) = 0$ удовлетворяет системе уравнений:

$$F(x, y, z, \alpha) = 0, \quad F'_\alpha(x, y, z, \alpha) = 0.$$

В случае двупараметрического семейства поверхностей $\Phi(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$ огибающая поверхность удовлетворяет следующим уравнениям:

$$\Phi(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \Phi'_\alpha(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \Phi'_\beta(x, y, z, \alpha, \beta) = 0.$$

Написать уравнения касательных прямых и нормальных плоскостей в данных точках к следующим кривым:

3528. $x = a\cos\alpha\cos t, y = a\sin\alpha\cos t, z = a\sin t$; в точке $t = t_0$.

3529. $x = a\sin^2 t, y = b\sin t\cos t, z = c\cos^2 t$; в точке $t = \frac{\pi}{4}$.

3530. $y = x, z = x^2$; в точке $M(1,1,1)$.

3531. $x^2 + z^2 = 10, y^2 + z^2 = 10$; в точке $M(1,1,3)$.

3532. $x^2 + y^2 + z^2 = 6, x + y + z = 0$; в точке $M(1,-2,1)$.

3533. На кривой

$$x = t, y = t^2, z = t^3$$

найти точку, касательная в которой параллельна плоскости $x + 2y + z = 4$

3534. Доказать, что касательная к винтовой линии

$$x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt$$

образует постоянный угол с осью Oz.

3535. Доказать, что кривая

$$x = ae^t\cos t, y = ae^t\sin t, z = ae^t$$

пересекает все образующие конуса $x^2 + y^2 = z^2$ под одним и тем же углом.

3536. Доказать, что локсодрома

$$tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Psi}{2}\right) = e^{k\varphi} \quad (k = const),$$

где φ - долгота, ψ - широта точки сферы, пересекает все меридианы сферы под постоянным углом. 3537. Найти тангенс угла, образованного касательной в точке $M_0\,(x_0, y_0)$ к кривой

$$z = f(x,y), \quad \frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\sin\alpha},$$

где f - дифференцируемая функция, с плоскостью Oxy. 3538. Найти производную функции

$$u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

в точке $M(1,2,-2)$ в направлении касательной в этой точке к кривой

$$x = t, y = 2t^2, z = -2t^4.$$