Метод Гаусса

Гащук Елизавета, 332 группа

1.Постановка задачи.

Требуется решить систему $\boldsymbol{Ax = b}$, где $\boldsymbol{A \in Mat_{n\times n}}$,а $\boldsymbol{x, b \in Mat_{n\times 1}}$. $\boldsymbol{A = (a_{ij})}$, $\boldsymbol{x = (x_i)}$, $\boldsymbol{b = (b_i)}$. Имеем $\boldsymbol{n \times n, m \times m}$ - размер всей матрицы, размер матриц разбиения, соответственно.

2.Хранение данных.

Представим нашу матрицу $\boldsymbol{A}$ в виде одномерного массива размером $\boldsymbol{n^2}$ так, что элементы будут расположены следующим образом: $\boldsymbol{a_{1,1}}$, $\boldsymbol{a_{1,1}}$, $\boldsymbol{\ldots}$,$\boldsymbol{a_{1,n}}$, $\boldsymbol{a_{2,1}}$,$\boldsymbol{a_{2,2}}$,$\boldsymbol{\ldots}$. Так же потребуется три дополнительных массива $\boldsymbol{V_1, V_2, V_3}$ размером $\boldsymbol{m \times m}$.

Доступ к $\boldsymbol{A_{i,j}}$. $\boldsymbol{a}$ - массив $\boldsymbol{n^2}$, введем $\boldsymbol{*p_a, v, h, p_a = a + (i \cdot n + j) \cdot m}$. Скажем, что $\boldsymbol{\alpha_{r,t}}^{\boldsymbol{i,j}}$ - это элемент $\boldsymbol{(r, t)}$ матрицы $\boldsymbol{A_{i,j}}$. Если $\boldsymbol{i < k \longrightarrow v = k}$, иначе $\boldsymbol{v = l}$. Если $\boldsymbol{j < k \longrightarrow h = k}$, иначе $\boldsymbol{h = l}$, тогда для $\boldsymbol{r \in (1, .., v)}$

$\boldsymbol{t \in (1, .., h)}$ $\boldsymbol{\alpha_{r,t}}^{\boldsymbol{i,j}}$ есть $\boldsymbol{p_a[r \cdot n + t]}$

3.Алгоритм.

Представим число $\boldsymbol{n}$ в виде: $\boldsymbol{n = k \cdot m + l}$, тогда наша матрица $\boldsymbol{A}$ и столбец $\boldsymbol{B}$ могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{pmatrix} A_{1,1}{}^{m\times m} & A_{1,2}{}^{m\times m} & \ldots & A_{1,k}{}^{m\times m} & A_{1,k+1}{}^{m\times l} \\ A_{2,1}{}^{m\times m} & A_{2,2}{}^{m\times m} & \ldots & A_{2,k}{}^{m\times m} & A_{2,k+1}{}^{m\times l} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{k,1}{}^{m\times m} & A_{k,2}{}^{m\times m} & \ldots & A_{k,k}{}^{m\times m} & A_{k,k+1}{}^{m\times l} \\ A_{k+1,1}{}^{l\times m} & A_{k+1,2}{}^{l\times m} & \ldots & A_{k+1,k}{}^{l\times m} & A_{k+1,k+1}{}^{l\times l} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_1{}^{m\times 1} \\ B_2{}^{m\times 1} \\ \ldots \\ B_k{}^{m\times 1} \\ B_{k+1}{}^{l\times 1} \end{pmatrix}$$

S - ый шаг.

$$\begin{pmatrix} {\boldsymbol{E_{1,1}}}^{m\times m} & {\boldsymbol{A^*_{1,2}}}^{m\times m} & \dots & \dots & {\boldsymbol{A^*_{1,k}}}^{m\times m} & {\boldsymbol{A^*_{1,k+1}}}^{m\times l} \\ \mathbf{0} & {\boldsymbol{E_{2,2}}}^{m\times m} & \dots & \dots & {\boldsymbol{A^*_{2,k}}}^{m\times m} & {\boldsymbol{A^*_{2,k+1}}}^{m\times l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \dots & {\boldsymbol{A^*_{s,s}}}^{m\times m} & \dots & {\boldsymbol{A^*_{s,k}}}^{m\times m} & {\boldsymbol{A^*_{s,k+1}}}^{m\times l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \dots & {\boldsymbol{A^*_{k+1,s}}}^{l\times m} & \dots & {\boldsymbol{A^*_{k+1,k}}}^{l\times m} & {\boldsymbol{A^*_{k+1,k+1}}}^{l\times l} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{B_1^{*m\times 1}} \\ \boldsymbol{B_2^{*m\times 1}} \\ \dots \\ \boldsymbol{B_s^{*m\times 1}} \\ \dots \\ {\boldsymbol{B^*_{k+1}}}^{l\times 1} \end{pmatrix}$$

Рассмотрим ${\boldsymbol{A_{s,s}}}^{m\times m}$. Пусть $\exists$ обратная к ней матрица, тогда ${\boldsymbol{A_{s,s}}}^{m\times m} \longrightarrow \boldsymbol{V_1}$, $\boldsymbol{V_2} = {\boldsymbol{V_1}}^{-1}$. Для $\boldsymbol{j \in (s, .., k+1)}$ делаем $\boldsymbol{A_{s,j}} \longrightarrow \boldsymbol{V_1}$, $\boldsymbol{V_3} = \boldsymbol{V_2} \cdot \boldsymbol{V_1}$, $\boldsymbol{V_3} \longrightarrow \boldsymbol{A_{s,j}}$, получаем следующее:

$$\begin{pmatrix} {\boldsymbol{E_{1,1}}}^{m\times m} & {\boldsymbol{A^*_{1,2}}}^{m\times m} & \dots & \dots & {\boldsymbol{A^*_{1,k}}}^{m\times m} & {\boldsymbol{A^*_{1,k+1}}}^{m\times l} \\ \mathbf{0} & {\boldsymbol{E_{2,2}}}^{m\times m} & \dots & \dots & {\boldsymbol{A^*_{2,k}}}^{m\times m} & {\boldsymbol{A^*_{2,k+1}}}^{m\times l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \dots & {\boldsymbol{E_{s,s}}}^{m\times m} & \dots & {\boldsymbol{A^*_{s,k}}}^{m\times m} & {\boldsymbol{A^*_{s,k+1}}}^{m\times l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \dots & {\boldsymbol{A^*_{k+1,s}}}^{l\times m} & \dots & {\boldsymbol{A^*_{k+1,k}}}^{l\times m} & {\boldsymbol{A^*_{k+1,k+1}}}^{l\times l} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{B_1^{*m\times 1}} \\ \boldsymbol{B_2^{*m\times 1}} \\ \dots \\ \boldsymbol{B_s^{*m\times 1}} \\ \dots \\ {\boldsymbol{B^*_{k+1}}}^{l\times 1} \end{pmatrix}$$

Далее для

$$\boldsymbol{i \in (s+1, .., k)}$$

$$\boldsymbol{j \in (s, .., k)}$$

$$\boldsymbol{A_{i,j}^{m\times m} = A_{i,j}^{m\times m} - A_{i,1}^{m\times m} \cdot {A^*_{s,j}}^{m\times m}}$$

$$\boldsymbol{{B_i}^{m\times 1} = {B_i}^{m\times 1} - A_{i,1}^{m\times m} \cdot B_s^{*m\times 1}}$$

$$\boldsymbol{A_{i,k+1}^{m\times l} = A_{i,k+1}^{m\times l} - A_{i,1}^{m\times m} \cdot {A^*_{s,k+1}}^{m\times l}}$$

$$\boldsymbol{j \in (s, .., k)}$$

$$\boldsymbol{A_{k+1,j}^{l\times m} = A_{k+1,j}^{l\times m} - A_{k+1,1}^{l\times m} \cdot {A^*_{s,j}}^{m\times m}}$$

$$\boldsymbol{{B_{k+1}}^{l\times 1} = {B_{k+1}}^{l\times 1} - A_{k+1,1}^{l\times m} \cdot B_s^{*m\times 1}}$$

Матрица примет вид:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E_{1,1}}^{m\times m} & \boldsymbol{A^*_{1,2}}^{m\times m} & \dots & \dots & \boldsymbol{A^*_{1,k}}^{m\times m} & \boldsymbol{A^*_{1,k+1}}^{m\times l} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E_{2,2}}^{m\times m} & \dots & \dots & \boldsymbol{A^*_{2,k}}^{m\times m} & \boldsymbol{A^*_{2,k+1}}^{m\times l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{E_{s,s}}^{m\times m} & \dots & \boldsymbol{A^*_{s,k}}^{m\times m} & \boldsymbol{A^*_{s,k+1}}^{m\times l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{A^*_{k+1,k}}^{l\times m} & \boldsymbol{A^*_{k+1,k+1}}^{l\times l} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{B^*_1}^{m\times 1} \\ \boldsymbol{B^*_2}^{m\times 1} \\ \dots \\ \boldsymbol{B^*_s}^{m\times 1} \\ \dots \\ \boldsymbol{B^*_{k+1}}^{l\times 1} \end{pmatrix}$$

Проделаем все то же самое для $\boldsymbol{s = s + 1}$.

Единичные блоки на диагонали. В итоге приходим к виду:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E_{1,1}}^{m\times m} & \boldsymbol{A^*_{1,2}}^{m\times m} & \dots & \dots & \boldsymbol{A^*_{1,k}}^{m\times m} & \boldsymbol{A^*_{1,k+1}}^{m\times l} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E_{2,2}}^{m\times m} & \dots & \dots & \boldsymbol{A^*_{2,k}}^{m\times m} & \boldsymbol{A^*_{2,k+1}}^{m\times l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{E^*_{s,s}}^{m\times m} & \dots & \boldsymbol{A^*_{s,k}}^{m\times m} & \boldsymbol{A^*_{s,k+1}}^{m\times l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{0} & \dots & \dots & \dots & \dots & \boldsymbol{E^*_{k+1,k+1}}^{l\times l} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{B^*_1}^{m\times 1} \\ \boldsymbol{B^*_2}^{m\times 1} \\ \dots \\ \boldsymbol{B^*_s}^{m\times 1} \\ \dots \\ \boldsymbol{B^*_{k+1}}^{l\times 1} \end{pmatrix}$$

Далее проделываем "обратный ход Гаусса": $\boldsymbol{X_{k+1}}^{l\times 1} = \boldsymbol{B_{k+1}}^{l\times 1}$.

Для $\boldsymbol{i \in (k, .., 1)}$

$$\boldsymbol{X_i}^{m\times 1} = \boldsymbol{B^*_i}^{m\times 1} - \sum_{j=k}^{i-1} \boldsymbol{A^*_{i,j}}^{m\times m} \cdot \boldsymbol{X_j}^{m\times 1} - \boldsymbol{A^*_{i,k+1}}^{m\times l} \cdot \boldsymbol{X_{k+1}}^{l\times 1}$$

4.Сложность.

Рассмотрим p - ый шаг, распишем количество действий для него, далее просуммируем p от 1 до k (будем считать, что $\boldsymbol{l} = 0$, сложность "обратного"хода $\boldsymbol{\sim \mathcal{O}(n^2)}$)

$$\begin{pmatrix} {E_{1,1}}^{m\times m} & {A^*_{1,2}}^{m\times m} & \dots & \dots & {A^*_{1,k}}^{m\times m} \\ 0 & {E_{2,2}}^{m\times m} & \dots & \dots & {A^*_{2,k}}^{m\times m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & {A^*_{p,p}}^{m\times m} & \dots & {A^*_{p,k}}^{m\times m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & {A^*_{k,p}}^{m\times m} & \dots & {A^*_{k,k}}^{m\times m} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B^{*m\times 1}_1 \\ B^{*m\times 1}_2 \\ \dots \\ B^{*m\times 1}_p \\ \dots \\ B^{*m\times 1}_k \end{pmatrix}$$

• Поиск обратной матрицы ${A_{p,p}}^{m\times m}$. Рассмотрим p - ый шаг, распишем количество действий для него, далее просуммируем p от 1 до m (количество перестановок при смене строк, когда $a_{p,p} = 0$, учитывать не будем, так как вклад в коэффициент при m^3 это нам не даст)

$$\left(\begin{array}{cccccc|ccc} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & a_{1,m} & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & a_{2,m} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{p,p} & \dots & a_{p,m} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{m,p} & \dots & a_{m,m} & \dots & \dots & \dots \end{array}\right)$$

Делим $2m - p + 1 - 1$ элементов (не $2m - p + 1$, потому что знаем, что при делении $a_{p,p}$ на $a_{p,p}$ будет 1) на $a_{p,p}$ в p - ой строке.

Для $i \in (1, .., m), i \neq p$ умножить p - ую строку на $a_{i,p}$: $(2m - p) \cdot (m - 1)$

Для $i \in (1, .., m), i \neq p$ вычесть p - ую строку: $(2m - p) \cdot (m - 1)$

Имеем: $2m - p + 2 \cdot (2m - p) \cdot (m - 1)$. Просуммируем p от 1 до m:

$\frac{1}{2} \cdot m \cdot (3 \cdot m - 1) + 2 \cdot (m - 1) \cdot m \cdot (3 \cdot m - 1) \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot m^3 + \mathcal{O}(m^2)$

• Умножить обратную к ${A_{p,p}}^{m\times m}$ на (k - p) матриц в p - ой строке (не на (k - p + 1), потому что знаем, что ее умножение на ${A_{p,p}}^{m\times m}$ даст нам единичную) и столбец $B^{*m\times 1}_p$. Матрица $m\times m$ на $m\times m$: $(2\cdot m-1)\cdot m^2$. Матрица $m\times m$ на столбец $m\times 1$: $(2m-1)m$. Итого $(2\cdot m-1)\cdot(k-p)\cdot m^2+(2\cdot m-1)\cdot m$.

• Для $i \in (p+1, .., k)$ умножить (k - p) матриц в p - ой строке и столбец $B^{*m\times 1}_p$ на $A_{i,1}$. Матрица $m \times m$ на $m \times m$: $(2 \cdot m - 1) \cdot m^2$. Матрица $m \times m$ на столбец $m \times 1$: $(2 \cdot m - 1) \cdot m$. Итого

$((2 \cdot m - 1) \cdot (k-p) \cdot m^2 + (2 \cdot m - 1) \cdot m) \cdot (k-p)$.

- Для $i \in (p+1, .., k)$ вычитаем из i - ой "блочной"строки p - ую. $(m^2 \cdot (k-p) + m) \cdot (k-p)$.

Матрица и вектор - столбец будут иметь вид:

$$\begin{pmatrix} {E_{1,1}}^{m\times m} & {A^*_{1,2}}^{m\times m} & \dots & \dots & {A^*_{1,k}}^{m\times m} \\ 0 & {E_{2,2}}^{m\times m} & \dots & \dots & {A^*_{2,k}}^{m\times m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & {E^*_{p,p}}^{m\times m} & \dots & {A^*_{p,k}}^{m\times m} \\ 0 & \dots & 0 & {A^*_{p+1,p+1}}^{m\times m} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & {A^*_{k,p+1}}^{m\times m} & \dots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_1^{*m\times 1} \\ B_2^{*m\times 1} \\ \dots \\ \dots \\ B_p^{*m\times 1} \\ \dots \\ B_k^{*m\times 1} \end{pmatrix}$$

Получаем: $2 \cdot m^3 \cdot (k-p)^2 + (k-p) \cdot (2 \cdot m - 1) \cdot m \cdot (m+1) + (2 \cdot m - 1) \cdot m + m \cdot (k-p) + 3 \cdot m^3 + \mathcal{O}(m^2)$, просуммируем p от 1 до k :

$\frac{1}{6} \cdot k \cdot (2 \cdot k^2 - 3 \cdot k + 1) \cdot 2 \cdot m^3 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot (k-1) \cdot (2 \cdot m - 1) \cdot m \cdot (m+1) + k \cdot (2 \cdot m - 1) \cdot m + m \cdot \frac{1}{2} \cdot k \cdot (k-1) + k \cdot 3 \cdot m^3 + k \cdot \mathcal{O}(m^2)$

При $m = 1, k = n$: $\frac{2}{3} \cdot n^3 + \mathcal{O}(n^2)$

При $m = n, k = 1$: $3 \cdot n^3 + \mathcal{O}(n^2)$