

[chapter] [chapter]

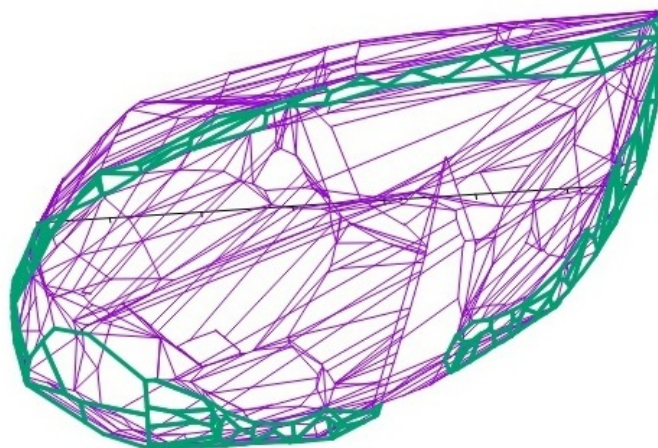
Содержание

1	Введение	2
2	Цилиндрическая поверхность.	4
3	Числовые характеристики.	6
4	Рундист.	11

Введение

При оценке драгоценного камня одним из важнейших факторов является качество огранки. В связи с этим, чтобы уменьшить влияние текущих дефектов на стоимость камня, важной задачей является идентификация примитивов, аппроксимирующих различные части камня.

В данном документе речь пойдет о *рундисте*, части многогранника, аппроксимируемой цилиндрической поверхностью.



Краткий обзор глав.

Глава "1.Введение".

В введении поясняется, с какой целью создан данный документ.

Глава "2.Цилиндрическая поверхность".

В этой главе будут даны необходимые общие понятия о цилиндрических поверхностях.

Глава "3.Числовые характеристики".

Раздел описывает статистики, рассчитываемые для цилиндрических поверхностей.

Глава "4.Рундист".

Дается определение рундиста на основе вычисленных статистик.

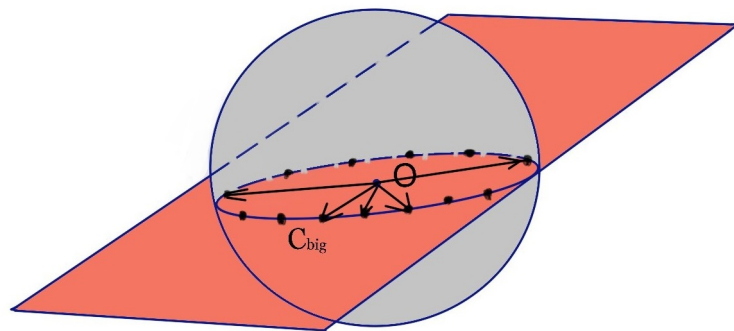
Цилиндрическая поверхность.

Определение (Цилиндрическая поверхность.). Поверхность Cyl называется **цилиндрической**, если она образована параллельным перемещением некоторой прямой l , называемой **образующей**, вдоль некоторой кривой γ , называемой **направляющей**.

Следствие. Векторы, перпендикулярные каждой точке цилиндрической поверхности (**нормали поверхности**), лежат в одной плоскости.

Определение. $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$.

Следствие. Единичные нормали цилиндрической поверхности, выпущенные из $\vec{0}$, лежат на C . C – сечение S^1 некоторой плоскостью Π через $\vec{0}$: $C_{big} = S^1 \cap \Pi$



Рассмотрим множество единичных нормалей $\{n_j\}_{j=1}^N$ граней исходного многогранника P , выпущенных из $\vec{0}$. Тогда для нахождения цилиндрических поверхностей на многограннике будем искать множества $N^{(i)} = \{n_j\}_{j \in T_i}$, лежащие на S , где $T_i \subset \{1, \dots, N\}$ – набор индексов. Найденные наборы граней, соответствующие $N^{(i)}$, обозначим $\{R_i\}$.

Замечание. $\vec{0}$, $N^{(j)}$ лежат на окружности S с некоторой погрешностью.

Числовые характеристики.

$R = \{Face_i\}_{i \in T}$ – набор граней, соответствующий $\{n_i\}_{i \in T}$.

Полоса набора R .

Определение (Аппроксимирующая плоскость.). $\Pi = \Pi(R)$ – плоскость, аппроксимирующая вершины граней R в метрике

$$\rho(R, \Pi) = \sum_{i \in T} \sum_{j_i} dist(v_{j_i}, \Pi(R)),$$

где $dist(v_{j_i}, \Pi)$ – евклидово расстояние от точки v_{j_i} до плоскости Π , $\{v_{j_i}\}$ – вершины $Face_i$.

Замечание. Далее, в качестве прямой, аппроксимирующей произвольный набор точек, будем использовать *робастную линейную регрессию*.

Развернем набор граней R на плоскости, перпендикулярной Π .

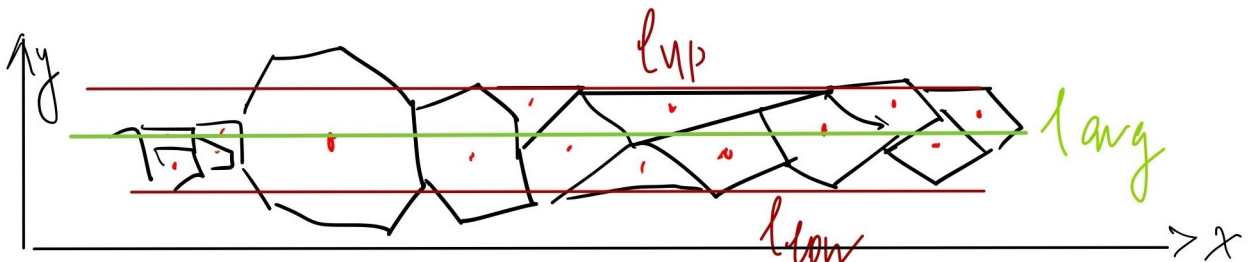


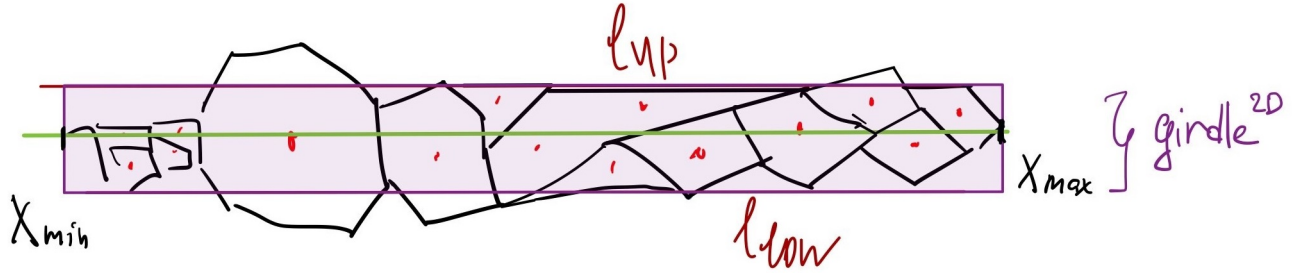
Рис. 3.1: $\{c_i\}$ – красные точки.

Далее:

- Приближим центры граней $\{c_i\}$ прямой l_{avg} .
- Найдем контур $Contour$ развернутого набора R .
- Рассмотрим вершины граней, лежащие выше прямой l_{avg} : $\{v_k^{(u)}\} \in \cup_i Face_i$: $\forall k v_k^{(u)} \in Contour$, $y < v_k^{(u)}(y)$, $(x, y) \in l_{avg}$. Построим $l^{(up)}$ по набору $\{v_k^{(u)}\}$. Аналогично по точкам $\{v_k^{(l)}\}$, лежащим ниже прямой l_{avg} , вычислим $l^{(low)}$.

Определение (Полоса рундиста ($girdle^{2D}$)). **Полоса рундиста** – пространство плоскости, заключенное между $l^{(up)}$ и $l^{(low)}$ на участке $[x_{min}, x_{max}]$:

$$girdle^{2D}(R) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : l^{(low)} \leq y \leq l^{(up)}\}.$$

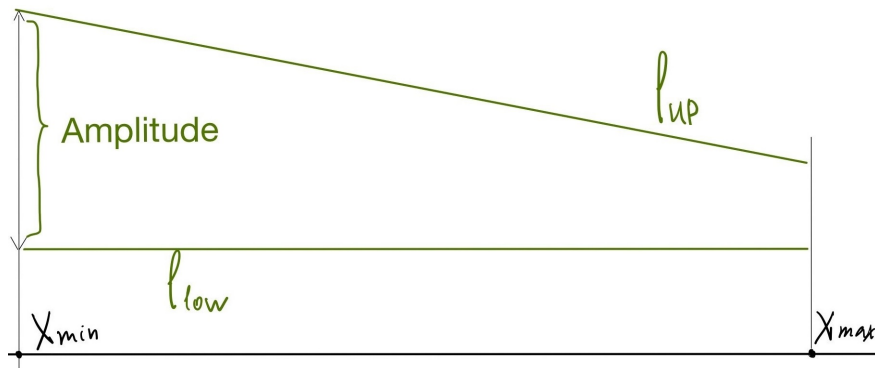


Определение. $x_{min} = \underset{x \in \{v_k(x)\}}{argmin}(x)$, $x_{max} = \underset{x \in \{v_k(x)\}}{argmax}(x)$.

Определение (Размах полосы R (Amplitude)).

$$Amplitude(R) := \underset{x \in [x_{min}, x_{max}]}{argmax} |l^{(up)}(x) - l^{(low)}(x)|,$$

где $l(x)$ – координата y точки $(x, y) \in l$.



Определение (Параллельность $girdle^{2D}$).

$$\sin(R) := |\sin \angle(l^{(up)}, l^{(low)})|.$$

Определение. Измерим, насколько сильно R выходит за свою полосу: посчитаем площадь частей граней $Face_i$, выходящих за полосу:

$$S_{extern}(R) := \sum_i Area(Face_i \cap \{\mathbb{R}^2 \setminus girdle^{2D}\})$$

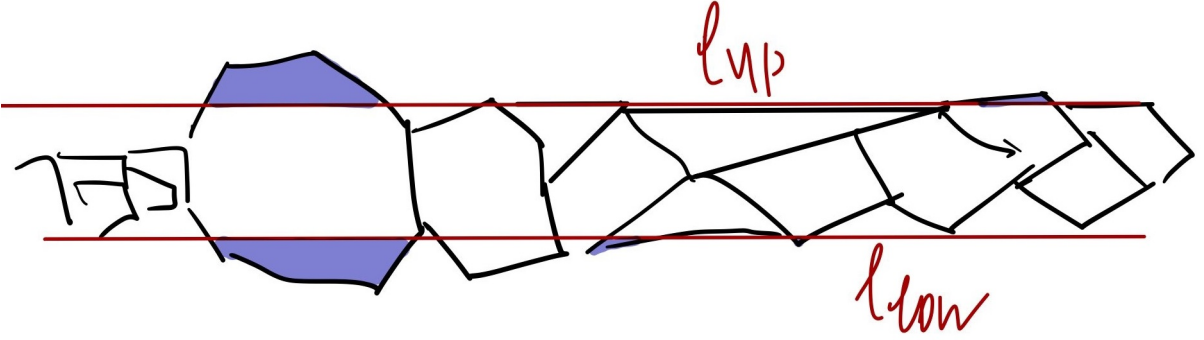


Рис. 3.2: В примере на изображении выше находим суммарную площадь синих участков.

Замечание. Возможна ситуация, когда в R лежат наборы, не соответствующие (визуально) одной и той же части камня. Разобьем R на подмножества смежных граней: $R^i : \bigcup_i R^i = R$.

Однако, может быть такое, что \exists грани $\in R$, для которых среди элементов R нет смежных граней.

Рассмотрим случай, когда такая грань $Face_{i_0}$ одна. Необходимо объединить ее с соответствующим ей набором R^i . Если \exists вершина $v \in Face_{i_0} : v \in girdle^{2D}(R^i)$, то добавим $Face_{i_0}$ в R^i .

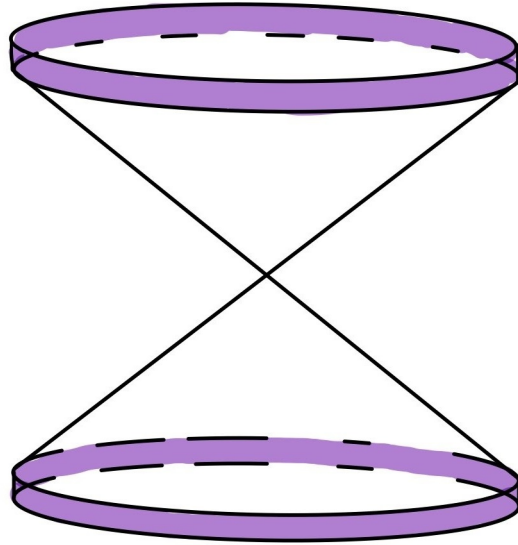
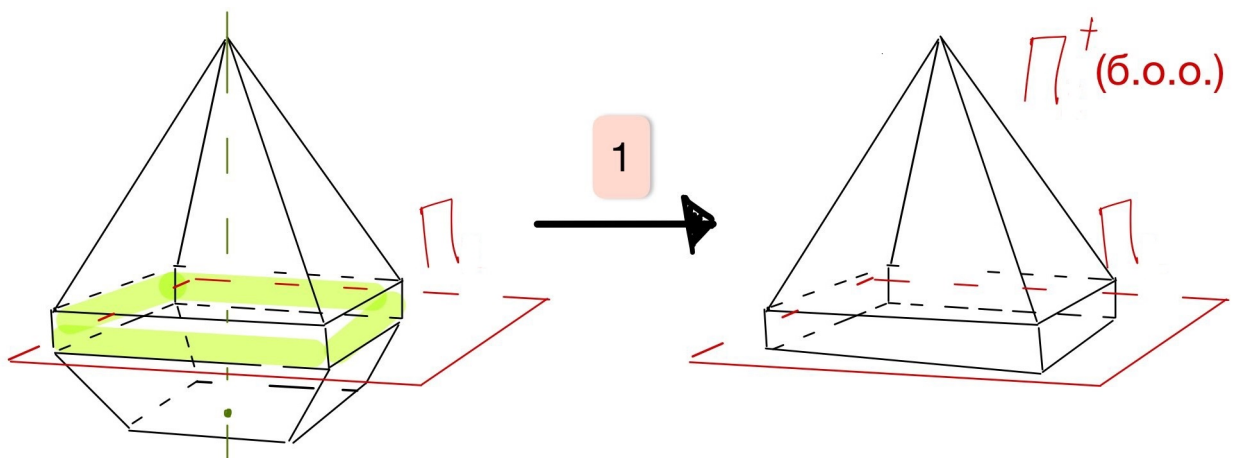


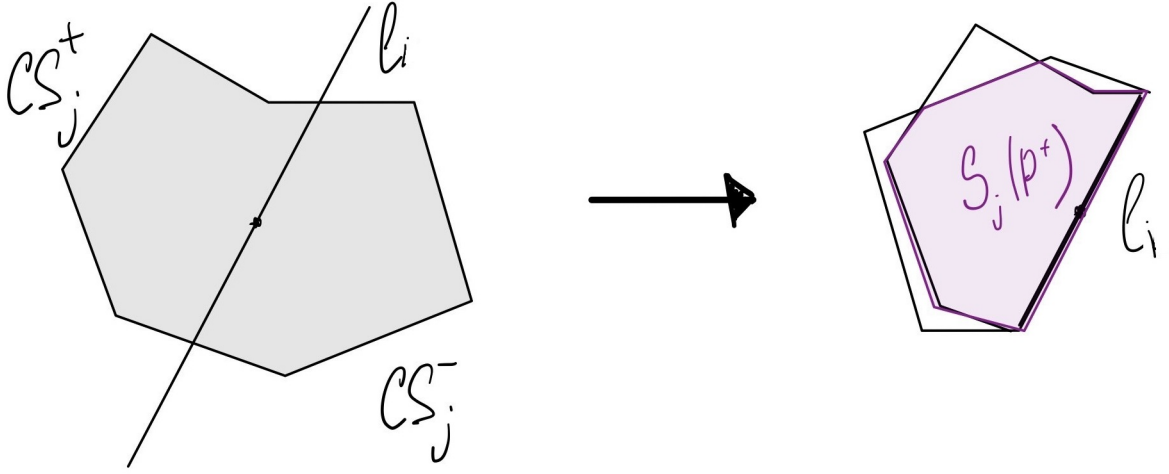
Рис. 3.3: В примере на изображении выше фиолетовые части многогранника будут лежать в одном R .

Симметричность многогранника относительно набора R .

Π делит \mathbb{R}^3 на два полупространства, Π^+ и Π^- , соответственно, делит многогранник P на $P^+ \in \Pi^+$ и $P^- \in \Pi^-$. Рассмотрим P^+ , аналогично для P^- .



Будем пересекать P^+ плоскостями Π_j , параллельными Π . $CS_j(CrossSection)$ – граница j -ого сечения, $j = 1, N_{cs}$.



Введем меру симметричности CS_j . Для этого проведем n прямых l_i через центр многогранника P , спроецированного на Π_j , с шагом по углу $\frac{360}{n}$. l_i делит CS_j на две части: CS_j^+ , CS_j^- . Отобразим CS_j^- на CS_j^+ симметрично относительно l_i (обозначение для отображенного CS_j^- оставим тем же), найдем площадь пересечения и поделим ее на площадь CS_j для нормировки:

$$S_j^i(P^+) := \frac{Area(CS_j^+ \cap CS_j^-)}{Area(CS_j)}.$$

Таким образом, набору R поставим в соответствие величину

$$Sym(R) := \sum_{j=1}^{N_{cs}} \sum_{i=1}^n S_j^i(P^+) + S_j^i(P^-).$$

Мера близости набора R и аппроксимирующей ее цилиндрической поверхности Cyl .

R – набор граней, Cyl – аппроксимирующая его цилиндрическая поверхность. Для каждого множества граней R вычислим, насколько хорошо оно "ложится" на Cyl :

$$S_{Cyl}(R) := \frac{Area(R \cap Cyl)}{Area(R)}$$

Рундист.

Определение (Рундист). **Рундист** – набор граней $R_0 = \{Face_i\}_{i \in T_0} \in \{R_i\}$, удовлетворяющий наибольшему числу следующих свойств:

1. R_0 имеет наибольшее число элементов среди остальных R_i :

$$R_0 := \underset{R \in \{R_i\}}{argmax}(|R|)$$

2. полоса R_0 имеет наименьший размах среди остальных R_i :

$$R_0 := \underset{R \in \{R_i\}}{argmin}(Amplitude(R))$$

3. угол между $l^{(up)}$ и $l^{(low)}$, соответствующий R_0 , наименьший среди остальных R_i :

$$R_0 := \underset{R \in \{R_i\}}{argmin}(\sin(R))$$

4. через ось, перпендикулярную $\Pi(R_0)$ и проходящую через центр многогранника P , проходит наибольшее количество плоскостей симметрии относительно других $\Pi(R_i)$:

$$R_0 := \underset{R \in \{R_i\}}{argmax}(Sym(R))$$

5. набор R_0 лучше всех остальных R_i аппроксимируется соответствующим цилиндром:

$$R_0 := \underset{R \in \{R_i\}}{argmax}(S_{Cyl}(R))$$

Замечание. Константы, которые должны быть заданы:

- N_{cs} – количество сечений плоскостями для вычисления меры симметричности;

- n – количество отражений для одного сечения при вычислении меры симметричности;