

计算机集成制造系统
Computer Integrated Manufacturing Systems
ISSN 1006-5911, CN 11-5946/TP

《计算机集成制造系统》网络首发论文

题目：基于状态空间平均法的 Boost 变换器显式模型预测控制
作者：王昭鸿，许可，兰永红，杨孝凡
DOI：10.13196/j.cims.2023.0098
收稿日期：2023-02-23
网络首发日期：2024-03-05
引用格式：王昭鸿，许可，兰永红，杨孝凡. 基于状态空间平均法的 Boost 变换器显式模型预测控制[J/OL]. 计算机集成制造系统.
<https://doi.org/10.13196/j.cims.2023.0098>



网络首发：在编辑部工作流程中，稿件从录用到出版要经历录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿等阶段。录用定稿指内容已经确定，且通过同行评议、主编终审同意刊用的稿件。排版定稿指录用定稿按照期刊特定版式（包括网络呈现版式）排版后的稿件，可暂不确定出版年、卷、期和页码。整期汇编定稿指出版年、卷、期、页码均已确定的印刷或数字出版的整期汇编稿件。录用定稿网络首发稿件内容必须符合《出版管理条例》和《期刊出版管理规定》的有关规定；学术研究成果具有创新性、科学性和先进性，符合编辑部对刊文的录用要求，不存在学术不端行为及其他侵权行为；稿件内容应基本符合国家有关书刊编辑、出版的技术标准，正确使用和统一规范语言文字、符号、数字、外文字母、法定计量单位及地图标注等。为确保录用定稿网络首发的严肃性，录用定稿一经发布，不得修改论文题目、作者、机构名称和学术内容，只可基于编辑规范进行少量文字的修改。

出版确认：纸质期刊编辑部通过与《中国学术期刊（光盘版）》电子杂志社有限公司签约，在《中国学术期刊（网络版）》出版传播平台上创办与纸质期刊内容一致的网络版，以单篇或整期出版形式，在印刷出版之前刊发论文的录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿。因为《中国学术期刊（网络版）》是国家新闻出版广电总局批准的网络连续型出版物（ISSN 2096-4188，CN 11-6037/Z），所以签约期刊的网络版上网络首发论文视为正式出版。

DOI:10.13196/j.cims.2023.0098

基于状态空间平均法的 Boost 变换器显式模型预测控制

王昭鸿, 许可, 兰永红⁺, 杨孝凡
(湘潭大学 自动化与电子信息学院, 湖南 湘潭 411105)

摘要: 针对开关频率与计算复杂度之间的问题, 本研究利用 Boost 电路数学模型, 提出了一种新型显式模型预测控制策略。首先, 为了把 Boost 电路中的非线性化问题转换成双状态空间的线性化问题, 采取状态平均法, 以折线近似其中电容电压的变化, 并把每一个周期内的电压状态平均值作为变量, 构造了线性变参数模型。然后, 利用泰勒级数设计了一种新的预测模型预测观测器, 并用系统中预测输出和实际输出的偏差, 构造出最小评价函数, 实现对被控对象的持续跟踪控制。最后, 利用改进型内点法进行求解和稳定性分析, 对阶跃、矩形和正弦的三种不同电压信号的追踪进行数值仿真, 验证了所提方法的有效性和优越性。

关键词: 模型预测控制; Boost 变换器; 线性变参数模型; 内点法

中图分类号: TP273

文献标识码: A

Novel explicit model predictive control strategy for Boost converters based on state-space averaging method

WANG Zhaohong, XU Ke, LAN Yonghong⁺, YANG Xiaofan

(School of Automation and Electronic Information, Xiangtan University, Xiangtan 411105, China)

Abstract: Aiming at the problem between switching frequency and computational complexity, this paper proposes a new explicit model predictive control (MPC) strategy using the Boost circuit mathematical model. First, in order to transform the nonlinear problem in the Boost circuit into a linear problem in a two-state space, the state average method is adopted, the change of the capacitor voltage is approximated by a broken line, and the average value of the voltage state in each cycle is used as a variable to construct Linear variable parameter model (LPV). Then, a new prediction model prediction observer is designed by using Taylor series, and the minimum evaluation function is constructed by using the deviation between the predicted output and the actual output in the system to realize the continuous tracking control of the controlled object. Finally, the improved interior point method is used for solution and stability analysis, and numerical simulations are carried out for the rectangular and sinusoidal waveforms, which verified the effectiveness and superiority of the proposed method.

Keywords: model predictive control; Boost converter; linear variable parameter model; interior point method

收稿日期: 2023-02-23; 修订日期: 2024-01-10。Received 23 Feb. 2023; accepted 10 Jan. 2024.

基金项目: 湖南省教育厅科学研究基金资助项目 (22C0069); 湖南省研究生科研创新基金资助项目 (QL20220162); 国家级大学生创新创业训练计划基金资助项目 (202210530028)。Foundation items: Project supported by the Scientific Research Fund of the Hunan Provincial Department of Education, China(No.22C0069), the Hunan Provincial Graduate Scientific Research Innovation Fund, China(No.QL20220162), and the National College Student Innovation and Entrepreneurship Training Program Fund, China(No.202210530028).

1 引言

随着物联网 (IoT) 技术的发展, 中央处理器的计算能力有了显著的提升, 这使得对实时性强和控制精度高的控制系统的设计成为可能。特别是在嵌入式系统中, 处理单元的廉价化、微型化、和低功耗化带来了许多领域的变革, DC-DC 变换器不仅在无人机、智能家居等传统产业有广泛的应用, 而且在自动驾驶汽车、智能家居、充电桩等领域的至关重要[1-6], 因此对控制的实时性和精确度提出了更高的要求, 对简化 DC-DC 变换器的模型以及控制策略的精确度提出了更高的要求。

对于 DC-DC 变换器控制方法的研究可以追溯到 1998 年, H.Sugimoto[7]提出了一种电压型脉宽调制电压型转换器的高性能控制方法, 其为电力电子控制系统采用双环控制方法奠定了理论基础, 该方法从数学及控制学角度为电力电子系统稳定性分析提供了理论基础。由于 DC-DC 变换器开关有导通和关断两个不同的状态反复, 因此电路是非线性的, 其操作分析比较复杂, 但经过数十年的发展, 对电力电子系统的控制策略得到了长足发展。传统的 PID 控制技术, 状态平均和小波分析的方法在负载变化的非线性问题下[8-11], 需要调节的参数多, 计算较为复杂。如文献[12-13]提出的滑模控制和模糊逻辑控制对模糊量及滑模系数的选择较为复杂。文献[14]设计了一种基于 DC-DC 变换器局部线性化离散时间模型的线性二次调节控制器, 但这种控制策略存在计算量大的问题。目前研究策略存在计算量大和计算速度慢等方面不足, 找到一种具有快速响应能力同时兼顾预测精确度的控制策略是本次研究的重点问题。

目前, 以优化理论为基础的模型预测控制在 DC-DC 变换器中也得到了广泛的应用, 模型预测更易实现非线性化控制的目标, 达到较高的预测精度。文献[15]基于 Boost 电路非线性特点, 提出了模型预测控制, 来解决传统线性控制理论计算量大, 控制参数整定困难的缺点, 但其占空比是恒定的, 调节时间长。文献[16]利用模型预测控制的方法解决了 DC-DC 变换器动态响应慢及传输功率不均衡问题。文献[17]利用离散集模型预测控制来解决了电流增大和视在功率增加对电网造成不良影响的问题。文献[18-19]表明了模型预测控制在 DC-DC 变换器的广泛应用。文献[20]提出了一种用于 DC-DC 变换器的显式模型预测控制方案, 该方案通过考虑占空比和电流约束来制定最佳输入, 但权重需要在生成的查找表中进行查找, 过程复杂。传统的模型预测控制通常在数学模型的基础上, 利用当前时刻的状态关系式进行离散化, 所预测的下一时刻状态值是利用前一时刻的关系式递推得到的关系式, 来建立预测模型预测观测器, 评价函数通常是与预测值和实际值的关系式, 该关系式计算量大, 精度低, 控制策略有待提升。

综上所述, 提出了对 DC-DC 变换器的显示模型预测控制, 本文所建立的模型预测观测器利用一种新颖的状态平均值方法, 用折线来描述每个开关周期内电感电流和电容电压的变化; 在这种情况下, 将电流或电压的每一个开关周期的平均值作为变量, 就可以对包括开关在内的非线性电路进行线性处理; 用状态平均值作为分析指标, 设计出准确的预测模型, 从而更好地描述控制对象; 评价函数通过增加相关的约束条件, 使得预测值更加准确。通过对占空比的调节, 达到电压预测追踪的效果。本文所提出的控制策略模型更为简单, 能对电压达到更理想的追踪效果。最后, 通过对阶跃、矩形和正弦的三种不同电压信号的追踪, 验证了本研究所提出的控制策略具有好的预测效果。

2 问题描述

DC-DC 变换器通过开关管去实现能量转换, 在能量转换过程中表现出明显的非线性特征。如前文介绍所述, 电力电子控制理论的问题在于开关频率与每次计算之间的复杂关系, 本文研究一种兼顾响应能力和预测精确度的控制策略。为了更好的利用 DC-DC 变换器的特性, 本文先对其状态空间函数进行建模。以升压斩波电路为例进行如下建模分析:

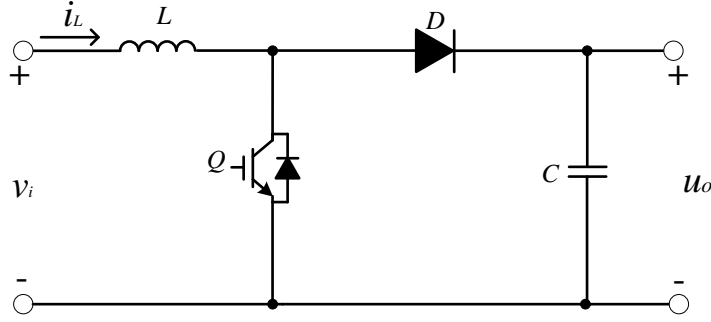


图 1 升压斩波电路

标准 Boost 升压斩波电路模型如图 1 所示，当可控开关 Q 处于通态时，电源 V_i 向电感 L 充电，充电电流恒为 i_L ，把能量存储在 L 中。同时电容 C 的电压向负载供电，基本保持输出电压 u_o 为恒值。一段时间后， Q 断开，电源 V_i 和电感 L 共同向电容 C 和给负载提供能量。因此该电路开关管 Q 导通时的关系式为：

$$\begin{cases} \frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{r_L}{L} \cdot i_L(t) + \frac{V_i}{L} \\ \frac{du_o(t)}{dt} = -\frac{u_o(t)}{CR} \end{cases} \quad (1)$$

其中， i_L 为电感电流， r_L 为电感电阻， R 为负载电阻。

开关管 Q 断开的关系式为：

$$\begin{cases} \frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{r_L}{L} \cdot i_L(t) - \frac{u_o(t)}{L} + \frac{V_i}{L} \\ \frac{du_o(t)}{dt} = \frac{i_L(t)}{C} - \frac{u_o(t)}{CR} \end{cases} \quad (2)$$

由式 (1) 和式 (2) 可分别得出开关管 Q 导通和断开时的状态空间表达式分别为式 (3) 和式 (4)：

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{di_L(t)}{dt} \\ \frac{du_o(t)}{dt} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{r_L}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{CR} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_L(t) \\ u_o(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot V_i \\ A_{on} &= \begin{bmatrix} -\frac{r_L}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{CR} \end{bmatrix} \quad B_{on} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{di_L(t)}{dt} \\ \frac{du_o(t)}{dt} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{r_L}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{CR} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_L(t) \\ u_o(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot V_i \\ A_{off} &= \begin{bmatrix} -\frac{r_L}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{CR} \end{bmatrix} \quad B_{off} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

在一个时间周期内，开关管导通的时间占单周期的时间，即导通占空比为 $D(t)$ 。根据状态平均化法，某一周期的状态空间可由平均化后的状态矩阵 $A(D(t))$ 和输入矩阵 $B(D(t))$ 构成，分别为该周期内开关管通断时间与各自对应通断时的状态空间的乘积：

$$A(D(t)) = D(t) \cdot A_{on} + (1 - D(t)) \cdot A_{off} \quad (5)$$

$$B(D(t)) = D(t) \cdot B_{on} + (1 - D(t)) \cdot B_{off} \quad (6)$$

根据式 (5)、式 (6)，建立以 i_L 、 u_o 为坐标轴的数学模型：

$$\begin{bmatrix} \frac{di_L(t)}{dt} \\ \frac{du_o(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{r_L}{L} & -\frac{1-D(t)}{L} \\ \frac{1-D(t)}{C} & -\frac{1}{CR} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_L(t) \\ u_o(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot V_i \quad (7)$$

由式 (7) 可知, 升压变换器系统为非线性时变系统, 与传统的线性时变系统相比较, 控制输入 (输入侧电压 V_i) 通常为常数, 因此对输出电压的控制主要体现在对状态矩阵的控制。由此, 对升压变换器的输出电压的控制可被转化为对开关管 Q 的占空比 $D(t)$ 的控制。

3 模型预测控制器设计

由式 (7) 可见, 对升压变换器系统的控制问题, 实质上可转化为对系统状态空间占空比控制的离散化问题。因此, 假设电路中的开关是进行反复导通和关断的动作, 电路中各种状态都是线性的, 当开关频率足够高且开关时间很短, 则由积分的定义可知, 在开关管导通和关断期间, 电压可视为线性变化。因此由图 2 所示, 在一个周期内, 升压变换器在开关导通瞬间电压线性上升, 开关关断则线性下降。通过折线把周期内非线性问题近似为线性折线问题, 使实际状态值的表示更为简单, 减小了计算的复杂度, 同时当前时刻值, 受周期内的导通和关断两个变量制约, 使得预测精度更高。

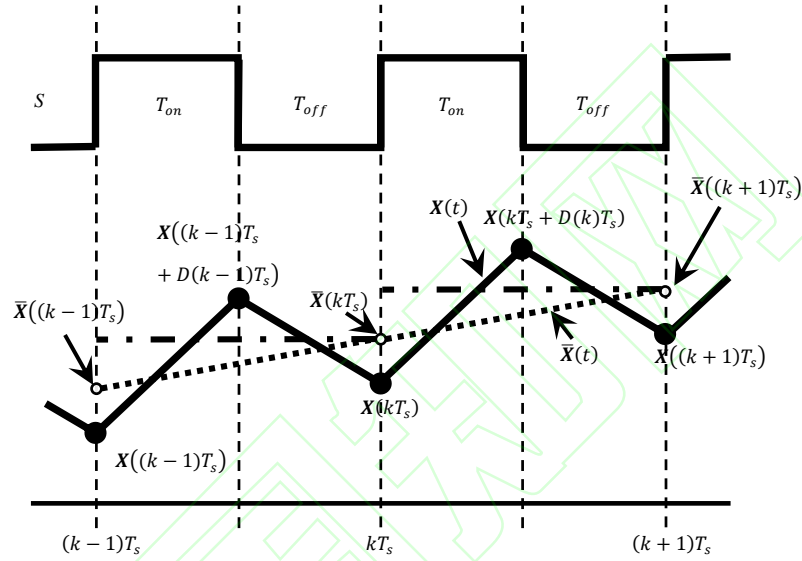


图 2 开关操作和升压转换器状态变化

其中, $\mathbf{X}(t)$ 是系统状态变量, 为 t 时刻电感电流和输出电压的 2×1 的矩阵 $[i_L \ u_o]^T$ 。 T_s 是单周期时间长度, 大小为本周期导通时间 T_{on} 和关断时间 T_{off} 之和。 kT_s 是开关管关断时刻, 为 k 升压段初始时刻。

观察图 2 可知, 电压的变化整体趋势是递增的。所以当开关管导通、关断的频率到达一定数值, 即可认为升压变换器是线性上升或下降的。因此, 可得第 k 个周期内的平均状态量 $\bar{\mathbf{X}}(kT_s)$:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{X}}(kT_s) = \frac{T_{on}(k-1)}{2T_s} [\mathbf{X}((k-1)T_s) + \mathbf{X}((k-1)T_s + D(k-1)T_s)] \\ \quad + \frac{T_{off}(k-1)}{2T_s} [\mathbf{X}((k-1)T_s + D(k-1)T_s) + \mathbf{X}(kT_s)] \\ T_{on}(k) = D(k)T_s \\ T_{off}(k) = (1 - D(k))T_s \end{cases} \quad (8)$$

其中, $T_{on}(k)$ 是第 k 个周期开关管导通的时间, $T_{off}(k)$ 是第 k 个周期开关管关断的时间。因此, 由式 (8) 可知, 第 k 个周期的输出状态空间为式 (7) 线性化的结果, 下面给出本文定理。

定理 1 对于形如图 2 所示 Boost 系统, 可线性化为线性变参数 (Linear parameter-varying, LPV) 模型系统, 状态空间为:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}_{on}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}V_i, kT_s \leq t \leq [kT_s + D(t)T_s] \\ \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}_{off}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}V_i, [kT_s + D(t)T_s] \leq t \leq (k+1)T_s \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}^+ \quad (9)$$

当开关频率足够大, 则 $\Delta(t)$ 足够小, 借助泰勒级数, 结合图 2, 利用状态平均值进行线性化, 预测值 $\bar{\mathbf{x}}(k)$ 可由状态量 \mathbf{X}_{on} 和 \mathbf{X}_{off} 表示:

$$\bar{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{X}_{off}(k) + 0.5 \cdot (\mathbf{A}_{on}T_{on}(k) + \mathbf{A}_{off}T_{off}(k)\mathbf{X}_{on}(k) + \mathbf{B}T_{on}(k) \cdot V_i) \quad (10)$$

其中, $\mathbf{X}_{on}(k)$ 是开关管在第 $(k+1)$ 个周期导通截止时的状态变量, 此时升压变换器升压阶段结束, 即将开始降压阶段, 即 $\mathbf{X}(kT_s + D(k)T_s)$, $D(k)$ 为第 k 个周期的导通占空比。 $\mathbf{X}_{off}(k)$ 为开关管在第 k 个周期关断结束时的状态变量, 此时升压变换器降压阶段结束, 即将开始升压阶段, 即 $\mathbf{X}(kT_s)$ 。

所以, 升压变换器的控制转换为对 \mathbf{X}_{on} 和 \mathbf{X}_{off} 的模型预测控制, 其中导通时间和关断时间相互联系、相互制约, 通过由对开关管占空比控制来得到预测值。为了控制策略的稳定性及预测精度, 通过对预测值和实际值的关系共同构造的成本函数, 使系统达到更好的性能, 约束条件和代价函数共同对模型预测空间产生影响, 成本函数最小值作为预测输出。经下文理论分析和实验验证, 此定理可满足稳定性分析, 是系统的一个模型预测观测器。

构造升降压变换器的成本函数, 为:

$$f(x) = f(x)_1 + f(x)_2 + f(x)_3 \\ = \|\bar{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{r}(k)\|_P + \|T_{on}(k) - T_{on}(k-1)\|_Q + \|\bar{\mathbf{x}}(k) - \bar{\mathbf{x}}(k-1)\|_R \quad (11)$$

等式约束条件可分为模型约束和单位周期长度的约束, 根据式 (10) 可得升降压变换器的模型约束由开关管导通和关断两个状态的约束, 同时根据每周期单位时间与开关管导通和关断时间的关系, 即可得出关于时间的等式约束条件:

$$\begin{cases} h(x)_1 = \mathbf{X}_{on}(k) - \mathbf{X}_{off}(k) - (\mathbf{A}_{on}\mathbf{X}_{off}(k) + \mathbf{B}\mathbf{V}_i)T_{on}(k) \\ h(x)_2 = \mathbf{X}_{off}(k+1) - \mathbf{X}_{on}(k) - \mathbf{X}_{on}(k)T_{off}(k) \\ h(x)_3 = T_s - T_{on} - T_{off} \end{cases} \quad (12)$$

单位周期长度与开关管时间, 同时也组成了不等式的约束条件:

$$\begin{cases} g(x)_1 = T_s - T_{on} \\ g(x)_2 = T_s - T_{off} \end{cases} \quad (13)$$

综上所述, 对于式 (10) 的状态空间, 因为外部干扰和模型失配的影响, 系统的预测输出和实际输出存在偏差。根据李亚普洛夫稳定性条件, 可即通过成本函数进行模型预测, 得出最优解后代入控制。与文献[21]不同, 结合本策略, 根据文献[22]可构造评价函数, 由成本函数 (*cost function*) 和约束条件组成:

$$\min_x f(x) = \|\bar{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{r}(k)\|_P + \|T_{on}(k) - T_{on}(k-1)\|_Q + \|\bar{\mathbf{x}}(k) - \bar{\mathbf{x}}(k-1)\|_R \quad (14.a)$$

$$\text{s.t. } \begin{cases} h(x)_1 = \mathbf{X}_{on}(k) - \mathbf{X}_{off}(k) - (\mathbf{A}_{on}\mathbf{X}_{off}(k) + \mathbf{B}\mathbf{V}_i)T_{on}(k) \\ h(x)_2 = \mathbf{X}_{off}(k+1) - \mathbf{X}_{on}(k) - \mathbf{X}_{on}(k)T_{off}(k) \end{cases} \quad (14.b)$$

$$\begin{cases} h(x)_3 = T_s - T_{on} - T_{off} \\ g(x)_1 = T_s - T_{on} \geq 0 \\ g(x)_2 = T_s - T_{off} \geq 0 \end{cases} \quad (14.c)$$

由成本函数式 (14.a)、和两个约束条件方程 (14.b) 和 (14.c) 共同构成本文所提出的评估函数, 跟据评估函数所提供的信息, 在控制过程中规划出一条期望的参考轨迹, 使追踪误差最小, 达到预期目的。

4 算法求解及稳定性分析

在整个控制时域中, 令 k 时刻为当前时刻。控制器结合当前系统的测量值和预测模型, 预测未来一段时域内 $[k, k+p]$ (也被称为预测时域) 系统的输出。将成本函数作为目标函数, 通过求解满足目标函数以及各种约束的优化问题, 得到 $[k, k+m]$ (也被称为控制时域, $m < p$) 时域内的一系列控制变量序列。并将该时控制系列中的第一个元素作为被控对象的实际控制量, 当来到下一时刻 $k+1$ 时重复上述过程。如此滚动的完成一个个带约束的优化问题, 以实现对被控对象的持续跟踪控制。

实现 DC-DC 变换器的跟踪控制问题需先转化为带约束条件的非线性规划问题 (Constrained nonlinear programming, NLP), 求带约束的非线性规划问题的解。求解带约束的非线性规划问题比解线性问题的解要困难的多, 并且没有适于各种问题的一般算法 (如共轭梯度法, Newton 法, 内、外罚函数法等) 都存在很大局限性, 各有自己特定的适用范围。为求解该问题, 本文提出了一种改进型内点法进行求解, 将式 (14) 替换为屏障子函数如下:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{z}} \quad & \varphi_{\mu}(\mathbf{z}) \equiv f(x) - \mu \sum_{i=1}^m \ln s_i \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{h}(x) = 0 \\ & \mathbf{g}(x) = -\mathbf{s} \end{aligned} \quad (15)$$

其中, f 为 $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^1$ 的一维函数, n 为自变量 x 的维数。 $\mathbf{h} = [h_1 \ h_2 \ h_3]$, $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^l$, l 为等式约束条件 $h(x)_i = 0$ 的个数, $l = 3$ 。 $\mathbf{g} = [g_1 \ g_2]$, $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$, m 为不等式约束条件 $g(x)_j \leq 0$ 的个数, $m = 2$ 。 s_i 为松弛变量, \mathbf{s} 则是由这 m 个松弛变量组成的松弛向量, $\mathbf{s} > \mathbf{0}$ 。 $\mathbf{z} = (x, \mathbf{s})$ 。 μ 为内惩罚参数, $\mu > 0$, $\varphi_{\mu}(\mathbf{z})$ 为内惩罚函数。

将式 (9) 各值代入式 (15) 后, 只含等式约束的优化问题可以直接应用拉格朗日乘子法求解。相应的拉格朗日函数可写出为 $\mathcal{L}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\lambda}; \mu)$:

$$\mathcal{L}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\lambda}; \mu) = f(x) - \mu \ln s_1 s_2 + \boldsymbol{\lambda}_h^T \begin{bmatrix} h(x)_1 \\ h(x)_2 \\ h(x)_3 \end{bmatrix} + \boldsymbol{\lambda}_g^T \begin{bmatrix} g(x)_1 + s_1 \\ g(x)_2 + s_2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

将式 (15) 使用拉格朗日乘数法对自变量和拉格朗日乘子分别求微分, 这组解就是待求的最优解, 经整理后写成向量形式, 即可得到屏障问题式的一阶最优线性条件的向量等式形式:

$$\begin{bmatrix} \nabla f(x) + \mathbf{A}_h(x)^T \boldsymbol{\lambda}_h + \mathbf{A}_g(x)^T \boldsymbol{\lambda}_g \\ \mathbf{S} \boldsymbol{\Lambda}_g \mathbf{e} - \mu \mathbf{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

其中, $\boldsymbol{\lambda}_h \in \mathbf{R}^l$, $\boldsymbol{\lambda}_g \in \mathbf{R}^m$, 分别是 $\mathbf{h}(x)$ 和 $\mathbf{g}(x)$ 的拉格朗日乘子, $\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{\lambda}_h, \boldsymbol{\lambda}_g)$ 。 $\mathbf{A}_h(x)^T$ 、 $\mathbf{A}_g(x)^T$ 分别是 $\mathbf{h}(x)$ 和 $\mathbf{g}(x)$ 的雅克比矩阵。 $\mathbf{S} \geq \mathbf{0}$, \mathbf{S} 为由向量 \mathbf{s} 构成的对角矩阵。 $\boldsymbol{\Lambda}_g \geq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\Lambda}_g$ 为由向量 $\boldsymbol{\lambda}_g$ 构成的对角矩阵。

将式 (16) 以牛顿法求解, 即可从当前的迭代 $(\mathbf{z}, \boldsymbol{\lambda})$ 得到原对偶系统:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\lambda}; \mu) & \mathbf{A}(x)^T \\ \mathbf{A}(x) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_z \\ \mathbf{d}_{\lambda} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{z}} \mathcal{L}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\lambda}; \mu) \\ \mathbf{c}(\mathbf{z}) \end{bmatrix} \quad (18)$$

其中, \mathbf{d}_z 、 \mathbf{d}_{λ} 、 $\mathbf{c}(\mathbf{z})$ 的定义分别为:

$$\mathbf{d}_z = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_x \\ \mathbf{d}_s \end{bmatrix}, \mathbf{d}_{\lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_h \\ \mathbf{d}_g \end{bmatrix}, \mathbf{c}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(x) \\ \mathbf{g}(x) + \mathbf{s} \end{bmatrix} \quad (19)$$

并且, $\mathbf{W}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\lambda}; \mu)$ 和 $\mathbf{A}(x)$ 的定义为:

$$\mathbf{W}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\lambda}; \mu) = \begin{bmatrix} \nabla_{xx} \mathcal{L}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\lambda}; \mu) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}^{-1} \boldsymbol{\Lambda}_g \end{bmatrix}, \mathbf{A}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_h(x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_g(x) & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (20)$$

从而, 原对偶系统的迭代为:

$$\begin{cases} \mathbf{z}^+ = \mathbf{z} + \alpha_z \mathbf{d}_z \\ \boldsymbol{\lambda}^+ = \boldsymbol{\lambda} + \alpha_{\lambda} \mathbf{d}_{\lambda} \end{cases} \quad (21)$$

注: α_z 、 α_{λ} 为 \mathbf{z} 、 $\boldsymbol{\lambda}$ 的步长。步长 α_z 、 α_{λ} 可首先求出其最大值, 即范围:

$$\alpha_z^{\max} = \max\{\alpha \in (0, 1] | \mathbf{s} + \alpha \mathbf{d}_s \geq (1 - \tau) \mathbf{s}\} \quad (22)$$

$$\alpha_{\lambda}^{\max} = \max\{\alpha \in (0, 1] | \boldsymbol{\lambda}_g + \alpha \mathbf{d}_g \geq (1 - \tau) \boldsymbol{\lambda}_g\} \quad (23)$$

然后, 通过回溯线搜索算得步长:

$$\alpha_z \in (0, \alpha_z^{\max}], \alpha_{\lambda} \in (0, \alpha_{\lambda}^{\max}] \quad (24)$$

现提出一种信赖域算法, 增强信赖域步骤在存在 *Hessian* 或 *Jacobian* 秩缺陷时的鲁棒性, 提高每次迭代中的可行性和最优性。当线搜索 (*Line Search*) 迭代收敛到非平稳点时, 式 (20) 中的步长 α_z 或 α_{λ} 收敛到零。监控这些步长, 当其小于某一给定阈值时, 放弃线搜索式 (17) 至式 (20), 并用信赖域步骤代替它。由此产生的算法具有较好的全局收敛性。

算法的步骤如下:

步骤一: 对原始-对偶系统 (17) 进行因子计算, 并记录其系数矩阵的负特征值的个数 *neig*。

步骤二: 令置线搜索标志 *LineSearch* = *False*。

步骤三: 判断 *neig* 是否小于等于 l 与 m 之和, 若满足, 则求解式 (17) 得到搜索方向 $\mathbf{d} = (\mathbf{d}_z, \mathbf{d}_{\lambda})$, 使用式 (21)、式 (22) 算得 α_z^{\max} 、 α_{λ}^{\max} 。

步骤四: 判断 $\min\{\alpha_z^{\max}, \alpha_{\lambda}^{\max}\}$ 是否大于 δ , 若满足, 则令 j 为 0, α_T 为 1。

步骤五：判断 $\varphi_v(\mathbf{z}_k + \alpha_T \alpha_z^{max} \mathbf{d}_z)$ 是否小于等于 $\varphi_v(\mathbf{z}_k) + \eta \alpha_T \alpha_z^{max} D\varphi_v(\mathbf{z}_k; \mathbf{d}_z)$ ，若满足，则令 $\alpha_z = \alpha_T \alpha_z^{max}$ ， $\alpha_\lambda = \alpha_T \alpha_\lambda^{max}$ ，再根据式(20)算得 \mathbf{z}_{k+1} 、 λ_{k+1} 。计算 Δ_{k+1} ，并将 *LineSearch* 置为 *True*。若不满足，则执行步骤六。

步骤六：令 $j=j+1$ ，并选出 $\min\{\alpha_T\}$ 。

步骤七：判断， j 是否小于等于 $imax$ 、 α_T 是否大于 δ 、*LineSearch* 是否为 *False*，若不满足，则执行步骤五。

步骤八：判断 *LineSearch* 是否为 *False*，若满足，则使用全局收敛的信赖域算法计算 \mathbf{z}_{k+1} 、 λ_{k+1} 、 Δ_{k+1} 。

注：需要指出的是步骤三中负特征值的个数 $neig > l + m$ 时， \mathbf{d}_z 就不能保证是下降方向，并且原始-对偶步将被丢弃。设置初始值 $\mathbf{z}_0 = (x_0, s_0)$ ，乘法器初始值 λ_0 ，信赖域半径初始值 $\Delta_0 > 0$ ，屏障参数初始值 $\mu_0 > 0$ ，初始 $k=0$ 。 $0 < \eta$ ， $0 < \delta < 1$ ， $imax \in N$ 。 $\varphi_v(z)$ 是使用惩罚参数 v 的价值函数， $D\varphi_v(z; \mathbf{d}_z)$ 为 φ_v 沿 \mathbf{d}_z 方向的导数。

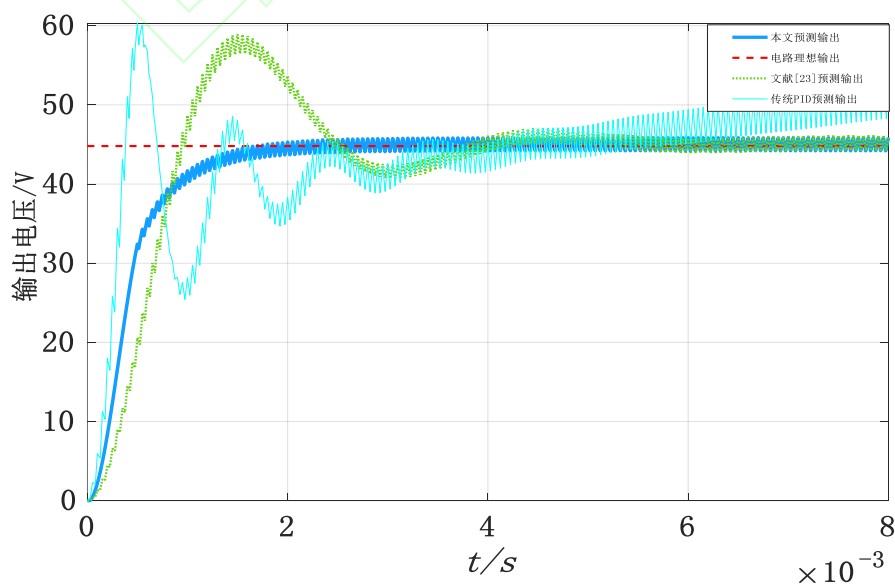
5 模拟实验验证

为了验证本文提出的 MPC 方法的可行性和有效性，利用 Matlab /Simulink 进行仿真验证，仿真结果表明了本文提出的控制策略的有效性。表 1 展示了模拟验证过程中的电路和控制器参数的设定值。

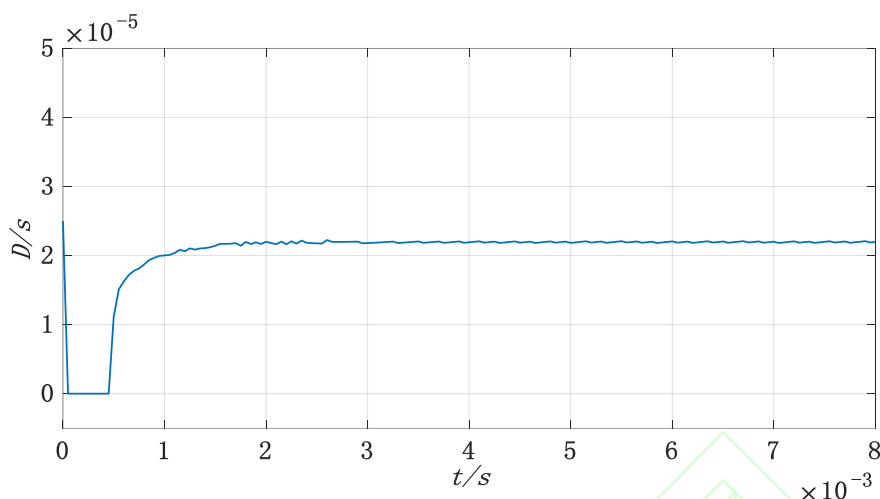
模型预测控制的目标就是在最多 N 步的控制策略下降状态作用到原点(稳定点)附近的终端集 x_0 内，并保证在后续时间状态始终处于终端集内，这里的终端集 x_0 就是系统的最小鲁棒不变集。系统的当前状态在任意情况下都存在一个输入使得系统的状态可以进入到下一个可达集内。因此可以使用一步模型预测控制的方法，首先确定一个最小的整数 N ，使得当前的状态 $x(k)$ ，然后通过求解相应的线性优化问题得到一个最优输入 $u(k)$ 。经过理论分析，选取预测步长为 5 和控制步长为 3，任意 $[A(D(t)), B(D(t))]$ 都能保证将系统状态作用到可达集 x_N 内,使得实验数据具有较高的鲁棒性，以保证变换器能有最快的响应速度。实验结果证明了本策略的有效性，但是对步长选择并不是唯一的，而是在满足理论分析的条件下，选取的使仿真结果较好的值。

表 1 参数设定值

Symbol	参数	数值
V_i	输入电压	24V
L	电感	250 μ H
C	电容	200 μ F
R	负载电阻	3 Ω
r_L	电感寄生电阻	1m Ω
f_{sw}	开关频率	20kHz
V_{dis}	输入电压扰动	$\pm 5\%V_i$
h_c	控制步长	3
h_p	预测步长	5



a) 不同策略对电压的预测效果



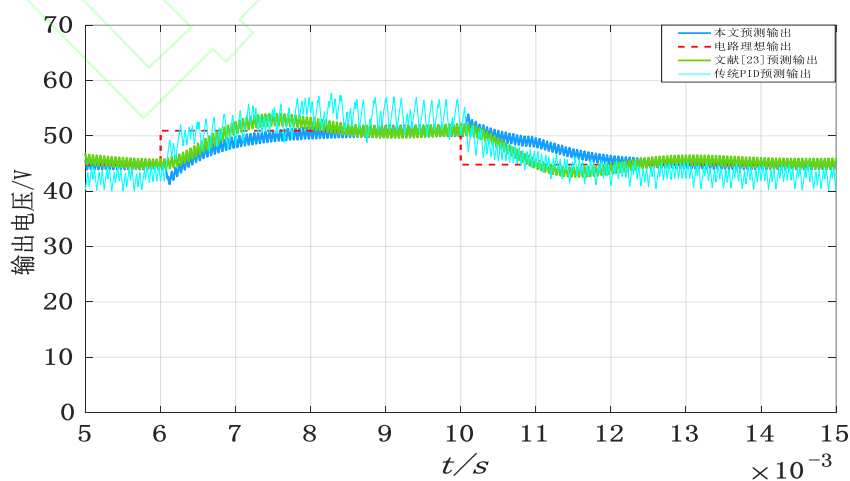
b) 晶体管在一个周期内的导通时间波形

图 3 控制系统对阶跃函数的跟踪效果

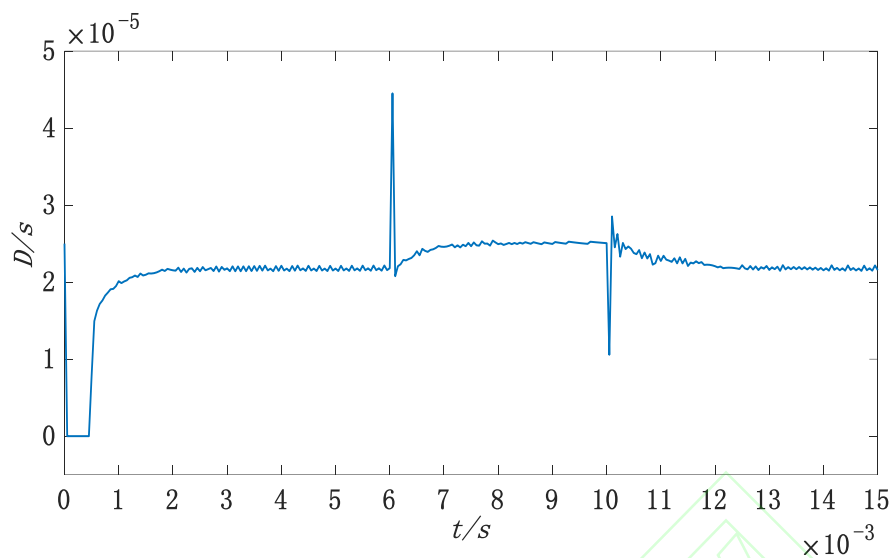
因为阶跃函数的传递函数中含有平方项,所以系统追踪过程较为复杂,若系统在阶跃函数的作用下能满足要求,那么其它在一阶的函数作用下,系统也可达到较好的动态性能。与参考文献[23]和传统 PID 控制策略对比,由图 3(a)中仿真结果可以看出,对比实验的电压波动范围超过本文预测输出,文献[23]其超调量接近 30%,调节时间大于 2 毫秒。而本文所提的显式模型预测控制的输出,调节时间小于 2 ms,且超调量为 4.28%,减小了 22.95%,响应速度提高了 0.25ms,在动态性能和快速响应性能方面均有提升。并且在图 3(b)的波形中可以看出响应与波动时间一致,响应速度快。

从图 4(a)仿真结果中可以看出,当受到矩形波中上升和下降的扰动时,本文所提出的控制策略比其它两种控制策略达到稳定预测的时间短 1.11 ms 和 6.48 ms,超调量低 8.72%和 2.1%,电压波动范围低于传统控制策略,所以可以更准确的预测电压变化趋势,并使得快速响应和准确性的能力达到平衡最优。图 4(b)可以看出矩形波在 6×10^{-3} 秒突然变化时,控制开关在同一时刻响应,即系统的响应速度快,实时性较高。

当扰动量变为反正弦时,跟踪效果如图 5(a)所示,对照组在受到扰动预测时,传统预测波形较参考值偏差比本策略高 4.27v 和 1.71v,准确性低。对比实验达到稳定所需的时间比本策略长 0.8 ms 和 0.43 ms,所以,本策略的快速性和准确性均更好。并且,从图 5(b)中可以看出,系统在 6.5×10^{-3} s— 10×10^{-3} s 波动时控制开关随正弦扰动信号在同一时间发生变化,响应速度快。

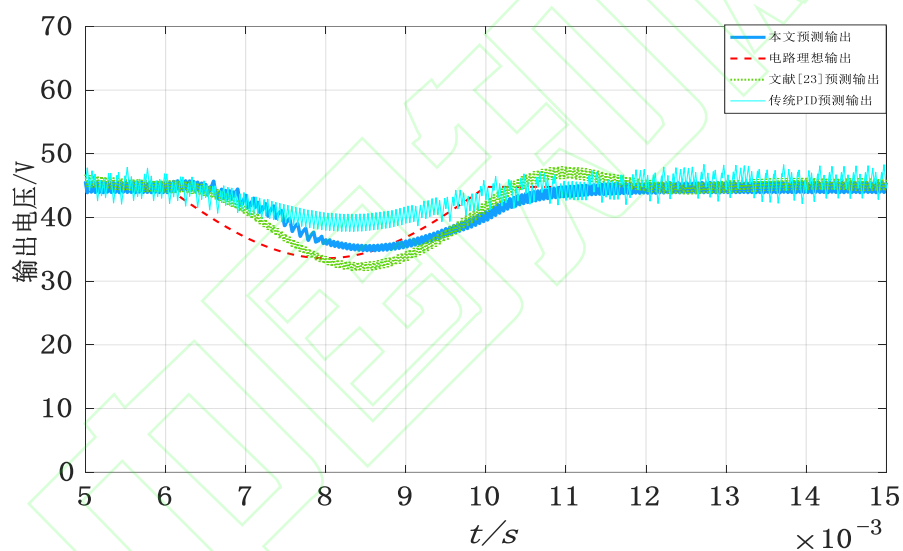


a) 不同策略对电压的预测效果

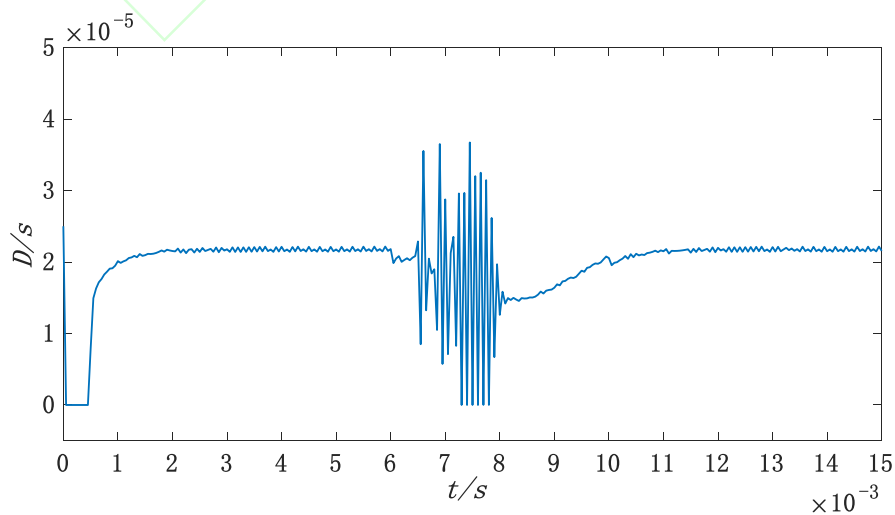


b) 晶体管在一个周期内的导通时间波形

图 4 控制系统对矩形波形的跟踪效果



a) 不同策略对电压的预测效果



b) 晶体管在一个周期内的导通时间波形

图 5 控制系统对正弦波形的跟踪效果

由表 2 总结两种控制策略对系统稳定性和快速性的对比结果分析,可以发现,对于不同类型的输入,采用本文所提出的策略,通过对占空比的调节,系统预测结果和速度均优于其它的控制策略。

所以综上所述,本文提出的状态空间方程、模型预测方法以及采用的求解算法,能够对输出电压达到预测和跟踪效果,实现其快速性、准确性追踪的目的,达到了精度和速度的平衡最优。

表 2 两种控制策略的稳定性和快速性对比

输入形式		干扰超调量			调节时间/ms		
		传统 PID	文献[23]	本文	传统 PID	文献[23]	本文
阶跃输入		36.05%	27.23%	4.28%	2.45	2.20	1.95
矩形波扰动	上升沿	11.29%	4.67%	2.57%	9.53	13.90	8.42
	下降沿	7.37%	3.57%	1.78%	12.71	12.08	12.07
正弦波扰动结束		14.25%	6.79%	1.80%	12.31	11.94	11.51

6 结束语

针对 DC-DC 变换器,本文提出了一种新型显式模型预测控制策略。先根据 Boost 变换器数学模型,建立了升压变换器的导通和关断状态空间模型。又通过对状态空间函数的特性分析,将非线性控制目标重构为线性变参数 (LPV) 的模型状态矩阵。再针对这一目标,提出了一种增强过渡动力学的显式模型预测控制器 (MPC),利用泰勒级数设计出一种新的预测模型。通过状态空间平均法 (SSA) 的测量,将估计的平均状态作为代价函数中的目标变量之一,从而充分减轻了升压变换器控制系统的计算量。最后,实验结果表明,基于状态空间平均法的新型升压变换器显式模型预测控制,其电压预测波形与实验结果高度吻合,使系统能达到预测追踪波形变化的目的,实现准确快速的跟踪。但如何利用算法研究 P 、 Q 、 R 对成本函数的加权,减少预测步数的同时提高控制的快速性和准确性将是今后值得继续探讨的方向。

参考文献

- [1] Bauersfeld L, Spannagl L, Ducard G J J, et al. MPC flight control for a tilt-rotor VTOL aircraft[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2021, 57(4): 2395-2409.
- [2] Liang Huiyong, Zhao Zhengeng. Safety Analysis of Quadrotor UAV Based on Neural Network[J/OL]. Control Engineering, 2022(8): 1-11. [梁惠勇,赵振根.基于神经网络的四旋翼无人机安全性分析[J/OL].控制工程,2022(8): 1-11]
- [3] Monteiro V, Lopes J P, Moreira C, et al. New Operation Opportunities for the Solid-State Transformer in Smart Homes: A Comprehensive Analysis[C]//IECON 2021 - 47th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society. IEEE, 2021: 1-6.
- [4] Tang L, Yan F, Zou B, et al. An improved kinematic model predictive control for high-speed path tracking of autonomous vehicles[J]. IEEE Access, 2020, 8: 51400-51413.
- [5] Pan Yawen, Zhang Ronghui, Jiang Ziyun, et al. Analysis and Research on Attitude Control of Quadrotor UAV[J]. Industrial Control Computer, 2021, 34(4): 30-32+34. [潘亚文,张荣辉,蒋紫韵,等.四旋翼无人机姿态控制分析及研究[J].工业控制计算机,2021,34(4):30-32+34.]
- [6] Liang Jie, Chen Li, Liang Pin. Neural Network Adaptive Control and Vibration Mode Hierarchical Fuzzy Control of Flexible Arm Space Robot[J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2012, 18(9): 1930-1937. [梁捷,陈力,梁频.柔性臂空间机器人的神经网络自适应控制及振动模态分级模糊控制[J].计算机集成制造系统,2012,18(9):1930-1937.]
- [7] Sugimoto H, Morimoto S, Yano M. A high performance control method of a voltage-type PWM converter[C]//PESC'88 Record., 19th Annual IEEE Power Electronics Specialists Conference. IEEE, 1988: 360-368.
- [8] Rudenko Y. Analysis of DC-DC Converters by Averaging Method based on Lagrange Theorems[C]//2021 IEEE 2nd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek). IEEE, 2021: 367-370.
- [9] Sarif M S M, Pei T X, Annuar A Z. Modeling, design and control of bidirectional DC-DC converter using state-space average model[C]//2018 IEEE symposium on computer applications & industrial electronics (ISCAIE). IEEE, 2018: 416-421.

- [10]Navyasri G S, Deepa K, Sailaja V. Fault Analysis in Three Phase Transmission Lines using Wavelet Method[C]//2022 6th International Conference on Trends in Electronics and Informatics (ICOEI). IEEE, 2022: 248-254.
- [11]Zhang Tongguo, Gao Wenjin, Zhang Ji, et al. Peak Current Control Strategy of DC/DC Converter Based on PI Control[J].Mechatronic Engineering Technology 2022,51(5):98-101. [张同国,高文进,张冀,等.基于PI控制的DC/DC变换器峰值电流控制策略[J].机电工程技术,2022,51(5):98-101.]
- [12]Xie H, Cai F, Jiang J, et al. An Improved Droop Control for DC Microgrid Based on Fuzzy Logic Algorithm[C]//2022 IEEE 9th International Conference on Power Electronics Systems and Applications (PESA). IEEE, 2022: 1-6.
- [13]Sachin C S, Nayak S G. Design and simulation for sliding mode control in DC-DC Boost converter[C]//2017 2nd International Conference on Communication and Electronics Systems (ICCES). IEEE, 2017: 440-445.
- [14]Leung F H F, Tam P K S, Li C K. An improved LQR-based controller for switching DC-DC converters[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 1993, 40(5): 521-528.
- [15]Huang Xiaohui, Ju Wenlong, Liu Bin. Model Predictive Control Strategy of Single-phase Dual Boost Grid-connected Inverter[J]. Power Electronics Technology, 2022,56(6):95-97. [黄晓辉,巨文龙,刘斌.单相双Boost并网逆变器的模型预测控制策略[J].电力电子技术,2022,56(6):95-97.]
- [16]An Feng, Song Wensheng, Yang Kexin. Model Predictive Control and Power Balance Method of Dual Active Full-Bridge DC-DC Converter for Power Electronic Transformers[J]. Chinese Journal of Electrical Engineering, 2018,38(13):3921-3929+4034. [安峰,宋文胜,杨柯欣.电力电子变压器的双有源全桥DC-DC变换器模型预测控制及其功率均衡方法[J].中国电机工程学报,2018,38(13):3921-3929+4034.]
- [17]Chen Hongwen, Zhou Maohua. Automatic Reactive Power Compensation for Power Electronic Devices Based on Discrete Set Model Predictive Control[J]. Automation Technology and Application, 2021,40(12):6-9+57. [陈洪文,周茂华.基于离散集模型预测控制的电力电子装置自动无功补偿[J].自动化技术与应用,2021,40(12):6-9+57.]
- [18]Choi J, Lee G, Kang F. Cascaded dc-to-dc converter employing a tapped-inductor for high voltage Boost ing ratio[C]//IECON 2015-41st Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society. IEEE, 2015: 000932-000937.
- [19]Karamanakos P, Geyer T, Manias S. Direct model predictive current control of dc-dc Boost converters[C]//2012 15th International Power Electronics and Motion Control Conference (EPE/PEMC). IEEE, 2012: DS2c. 11-1-DS2c. 11-8.
- [20]Andrea Giovanni B and Mariethoz, SEbastien ,et al."Explicit Model Predictive Control of DC-DC Switched-Mode Power Supplies With Extended Kalman Filtering," in IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 56, no. 6, pp. 1864-1874, June 2009.
- [21]Chen Rong, Zhang Shengtao, Li Zhaowei, et al. Research on model predictive control of DC-DC converter based on three-step discrete method [J]. Computer Simulation, 2022, 39(7): 274-280. [陈荣,张胜涛,李兆伟等.基于三步离散法的DC-DC变换器模型预测控制研究[J].计算机仿真,2022,39(7):274-280.]
- [22]Waltz R A, Morales J L, Nocedal J, et al. An interior algorithm for nonlinear optimization that combines line search and trust region steps[J]. Mathematical programming, 2006, 107(3): 391-408.
- [23]Wang Xiaolan, Jia Qiming. Robust Model Predictive Control of DC/DC Converter Based on LMI[J]. Guangdong Electric Power, 2022,35(4):21-27. [王晓兰,贾启明.基于LMI的DC/DC变换器鲁棒模型预测控制[J].广东电力,2022,35(4):21-27.]
- [24]足立修一. モデル予測制御の基礎[J]. 日本ロボット学会誌, 2014, 32(6):64-65.

作者简介:

王昭鸿 (1987—), 男, 湖南邵阳人, 讲师, 博士, 研究方向: 智能优化与预测控制技术, E-mail: trancemania@xtu.edu.cn;

许可 (1998—), 女, 河南商丘人, 硕士研究生, 研究方向: 智能优化与预测控制技术, E-mail: 1517225918@qq.com;

兰永红 (1976—), 男, 湖南汨罗人, 教授, 博士, 研究方向: 重复学习控制理论与应用, E-mail: yhlan@xtu.edu.cn;

杨孝凡 (2002—), 男, 四川内江人, 硕士研究生, 研究方向: 智能优化与预测控制技术, E-mail:

1084097521@qq.com。

附录

证明 定理 1 根据参考文献[24]对式 (7) 相应的升压段 $T_{on}(k)$ 和降压段 $T_{off}(k)$ 在同一周期进行积分, 可知在 T_s 时间内:

$$X((k-1)T_s + D(k-1)T_s) = e^{A_{on}T_{on}(k-1)}X((k-1)T_s) + \int_0^{T_{on}(k-1)} e^{A_{on}t} dt * BV_i \quad (25)$$

$$X(kT_s) = e^{A_{off}T_{off}(k-1)}X((k-1)T_s + D(k-1)T_s) + \int_0^{T_{off}(k-1)} e^{A_{off}t} dt * BV_i \quad (26)$$

对式 (25)、式 (26) 的等式两边同时微分, 消去积分符号:

$$\begin{cases} X_{on}(k) = e^{A_{on}T_{on}(k)}X_{off}(k) + A_{on}^{-1}(e^{A_{on}T_{on}(k)} - 1)BV_i \\ X_{off}(k+1) = e^{A_{off}T_{off}(k)}X_{on}(k) + A_{off}^{-1}(e^{A_{off}T_{off}(k)} - 1)BV_i \end{cases} \quad (27)$$

借助泰勒级数, 式 (27) 可被改写为:

$$\begin{cases} X_{on}(k) = X(kT_s + T_{on}(k)) = X(kT_s) + \frac{dX(t)}{dt} \Big|_{t=kT_s^+} \cdot T_{on}(k) \\ \quad = X_{off}(k) + (A_{on}X_{off}(k) + BV_i)T_{on}(k) \\ X_{off}(k+1) = X(kT_s + T_{on}(k) + T_{off}(k)) = X_{on}(k) + \frac{dX(t)}{dt} \Big|_{t=kT_s+T_{on}(k)^+} \cdot T_{off}(k) \\ \quad = X_{on}(k) + (A_{off}X_{on}(k) + BV_i)T_{off}(k) \end{cases} \quad (28)$$

由式 (28) 可知, 第 k 个周期开关导通过程中, $X_{on}(k)$ 除了和输入电压 V_i 及其系数有关, 还与 $X_{off}(k)$ 相关; 同样地, $X_{off}(k+1)$ 也是 $X_{on}(k)$ 的函数。

将状态量 X_{on} 和 X_{off} 按占空比大小求取平均值作为最后的输出, 可得状态平均值为:

$$\bar{x}(k) = \frac{X_{off}(k) + X_{on}(k)}{2}T_{on}(k) + \frac{X_{on}(k) + X_{off}(k+1)}{2}T_{off}(k) \quad (29)$$

将式 (28) 中的 $X_{on}(k)$ 和 $X_{off}(k+1)$ 代入式 (29), 可得出输出解析解:

$$\bar{x}(k) = X_{off}(k) + 0.5 \cdot (A_{on}T_{on}(k) + A_{off}T_{off}(k))X_{on}(k) + BT_{on}(k) \cdot V_i \quad (30)$$

通过对预测值和实际值的关系共同构造的成本函数, 使系统达到更好的性能, 进一步约束条件取得代价函数最小值, 以选择成本函数参数。一个完整的约束条件由等式约束和不等式约束共同完成, 在二者的约束下, 成本函数作为最优控制器, 控制模型进行反馈校正。因此, 成本函数是输出准确性的直接体现, 由式 (30) 可得:

$$f(x)_1 = [\bar{x}(k) - r(k)]^T \cdot P \cdot [\bar{x}(k) - r(k)] \quad (31)$$

其中, $r(k)$ 为参考电压, $r(k) = [0 \quad r]^T$ 。

而在保证输出量与参考值误差尽可能小, 输出足够准确的前提下, 还需使系统能够稳定的运行。因此, 每一步的时间变换应该尽可能的小, 同时每一步输出量之间的差值同样需要越小越好, 再构造式 (32) 和 (33):

$$f(x)_2 = [T_{on}(k) - T_{on}(k-1)]^T \cdot Q \cdot [T_{on}(k) - T_{on}(k-1)] \quad (32)$$

$$f(x)_3 = [\bar{x}(k) - \bar{x}(k-1)]^T \cdot R \cdot [\bar{x}(k) - \bar{x}(k-1)] \quad (33)$$

其中, P 、 Q 、 R 分别为输出量成本函数和稳定性成本函数所占权重, Q 为标量, P 、 R 均为 2 阶实对称矩阵。由于单位周期时间一定, T_{on} 与 T_{off} 在求最优解时效果相同, 所以只需合理配置权重 Q 的大小即可。经过多次实验仿真尝试, 所选取的 P 、 Q 、 R 值达到较好的实验效果。

得到定理 1, 式 (30) 同公式(10), 证毕。