

XCPC 数学基础

ljh

2025 年 5 月 15 日

目录

| | |
|----------------------------|-----------|
| 第一章 组合数学 | 1 |
| 1.1 基本排列组合公式 | 1 |
| 1.2 重要组合恒等式 | 2 |
| 1.3 二项式系数 | 3 |
| 1.4 抽屉原理 | 4 |
| 1.5 容斥原理 | 6 |
| 1.5.1 容斥原理 | 6 |
| 1.5.2 莫比乌斯反演 I | 7 |
| 1.5.3 莫比乌斯反演 II | 12 |
| 1.6 递推关系和生成函数 | 12 |
| 1.6.1 生成函数 | 13 |
| 1.7 卡特兰数和第二类斯特林数 | 16 |
| 1.7.1 卡特兰数 | 16 |
| 1.7.2 第二类斯特林数 | 17 |
| 第二章 数论 | 18 |
| 2.1 整除 | 18 |
| 2.2 同余 | 21 |
| 2.2.1 同余 | 21 |
| 2.2.2 线性同余方程 | 23 |

| | |
|---|-----------|
| 目录 | II |
| 2.3 乘性函数 | 27 |
| 第三章 求和 | 31 |
| 3.1 递归问题 RECURRENT PROBLEMS | 31 |
| 3.1.1 repertoire method | 31 |
| 3.1.2 约瑟夫问题 | 32 |
| 3.2 和式 SUMS | 32 |
| 3.2.1 和式和递归式 SUMS AND RECURRENCES | 32 |
| 3.2.2 和式的处理 MANIPULATION OF SUMS | 34 |
| 3.2.3 扰动法 (perturbation method) | 34 |
| 3.2.4 多重和式 MULTIPLE SUMS | 35 |
| 3.2.5 一般性的方法 GENERAL METHODS | 37 |
| 3.2.6 有限微积分 | 40 |
| 3.2.7 无限和式 INFINITE SUMS | 43 |
| 第四章 概率论 | 45 |
| 4.1 基本概念和公式 | 45 |
| 4.2 重要公式与结论 | 49 |
| 4.2.1 数学期望 (均值) 与方差 | 51 |
| 4.3 期望经典问题入门 | 53 |
| 4.3.1 普通 | 53 |
| 4.3.2 拿球 | 56 |
| 4.3.3 游走 | 56 |
| 4.3.4 解题方法 | 58 |
| 第五章 杂 | 59 |
| 5.1 最小二乘法 | 59 |

第一章 组合数学

1.1 基本排列组合公式

1. 线性排列: n 个数的 r 排列 $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$
2. 圆排列: n 个数的 r 排列 $\frac{P(n, r)}{r}$
3. 项链数: n 个不同的珠子串成一串项链, 则得到不同的项链数为

$$p = \begin{cases} 1, & (n \leq 2) \\ \frac{(n-1)!}{2}, & (otherwise) \end{cases}$$

4. 多重集合的排列: 有 k 种元素, 每种 n_1, n_2, \dots, n_k 个, 的排列公式为

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^k (n_i!)}$$

或记为

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}$$

5. 组合:

$$\binom{n}{r} = \frac{P(n, r)}{r!}$$

6. 多重集的组合 设 S 是有 k 种元素的集合, 每种元素无限个 ($\geq r$), 则其 r 组合的个数为:

$$\binom{r+k-1}{r}$$

或者说有

结论 1.1.1. $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = r (x_i \geq 0)$ 的整数解有

$$\binom{r+k-1}{r}$$

种.

1.2 重要组合恒等式

1. Pascal 公式

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

2.

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$$

3.

$$m \cdot \binom{n}{m} = n \cdot \binom{n-1}{m-1}$$

4.

$$\sum_{k=1}^n k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = n \cdot 2^{n-1}$$

5. 朱世杰恒等式

$$\binom{m+n+1}{n+1} = \sum_{i=0}^m \binom{n+i}{n}$$

6. 范德蒙德恒等式

$$\binom{a+b}{n} = \sum_{i=0}^k \binom{a}{i} \binom{b}{n-i}$$

特别地:

$$\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{n}{n-i}$$

结论 1.2.1. m 个 a , 和最多 n 个 b 的排列数等于

$$\binom{m+n+1}{m+1}$$

结论 1.2.2. 最多 m 个 a , 和最多 n 个 b 的排列数等于

$$\binom{n+m+2}{m+1} - 1$$

7.

$$\sum_{1 \leq k \leq n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1} \quad (n \geq 1)$$

8. 利用导数可以得到

$$\sum_{1 \leq k \leq n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2} \quad (n \geq 1)$$

1.3 二项式系数

结论 1.3.1. 在杨辉三角中规定只能向下或者右下移动, 从 $(0,0)$ 到 (n,k) 的路径数为 $\binom{n}{k}$

定理 1.3.2. 二项式定理

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

定理 1.3.3. *Sperner* 定理:

设 S 是 n 元素集合. 那么 S 上的一个反链至多包含 $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ 个集合.

其中, 这里的反链指的是以集合包含为偏序关系的反链, 即 S 的一个子集的集合, 任何两个集合没有关系.

结论 1.3.4. 多项式系数的帕斯卡公式

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_t} = \binom{n-1}{n_1-1, n_2, \dots, n_t} + \binom{n-1}{n_1, n_2-1, \dots, n_t} + \dots + \binom{n-1}{n_1, n_2, \dots, n_t-1}$$

定理 1.3.5. 多项式定理

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_t)^n = \sum \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_t} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_t^{n_t}$$

定理 1.3.6. 牛顿多项式定理

$$(1+z)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} z^k \quad (a \in R, |z| < 1)$$

定理 1.3.7. Dilworth 定理

设 (X, \leq) 是有限偏序集合, 而 m 是反链的最大大小, 则 X 可以被划分为 m 个链, 但不能被划分成小于 m 个链.

设 (X, \leq) 是有限偏序集合, 而 r 是链的最大大小, 则 X 可以被划分为 r 个反链, 但不能被划分成小于 r 个反链.

1.4 抽屉原理

简单形式

结论 1.4.1. 如果要把 $n+1$ 个物体放进 n 个盒子, 那么至少有一个盒子有至少 2 个物体

加强形式

结论 1.4.2. 设 q_1, q_2, \dots, q_n 是正整数. 如果将 $q_1 + q_2 + \dots + q_n - n + 1$ 个物体放进 n 个盒子. 那么要么第一个盒子含有 q_1 个物体, \dots , 要么第 n 个物体含有 q_n 个物体.

定理 1.4.3. *Ramsey* 定理

在 6 个人 (或者更多), 要么有 3 个人互相认识, 要么有 3 个人互相都不认识.

或者说

对于 $K_n (n \geq 6)$ 我们给他的所有边染红色或蓝色, 总存在一个红 K_3 或蓝 K_3 , 记为 $K_6 \rightarrow K_3, K_3$

推广

定理 1.4.4. 若 $m, n \geq 2$, 存在正整数 p , 使得 $K_p \rightarrow K_m, K_n$ 事实上, 注意到若 p 成立, 则对于 $q \geq p$ 都成立, 取一个子图即可. 我们记 *Ramsey* 数 $r(m, n)$ 为使之成立的最小的数. *Ramsey* 定理保证这样的数一定存在. 注意到

$$r(m, n) = r(n, m)$$

以及

$$r(2, m) = m$$

当 $m \geq 2$ 时, $r(2, m)$ 称为平凡的 *Ramsey* 数 (交换同理).

性质

1.

$$r(m, n) \leq r(m-1, n) + r(m, n-1) (m, n \geq 3)$$

2.

$$r(m, n) \leq \binom{m+n-2}{n-1}$$

(数学归纳法证明)

1.5 容斥原理

1.5.1 容斥原理

定理 1.5.1. 容斥原理

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}| = |S| - \sum |A_i| + \sum |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

可根据贡献法证明.

应用: 不定方程整数解个数问题

例 1.5.2. 求下列方程整数解个数

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$$

满足

$$1 \leq x_1 \leq 5, \quad -2 \leq x_2 \leq 4, \quad 0 \leq x_3 \leq 5, \quad 3 \leq x_4 \leq 9$$

解:

等价于

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 16$$

满足

$$0 \leq a_1 \leq 4, \quad 0 \leq a_2 \leq 6, \quad 0 \leq a_3 \leq 5, \quad 0 \leq a_4 \leq 6$$

不加范围的解的个数为

$$|S| = \binom{16+4-1}{16} = 969$$

其中设 A_1 为 a_1 大于 4 的解的集合 A_2 为 a_2 大于 6 的解的集合 ...

$$|A_1| = \binom{11+4-1}{11} = 364$$

$$|A_2| = \binom{9+4-1}{9} = 220$$

$$|A_3| = \binom{13}{10} = 286$$

$$|A_4| = \binom{12}{9} = 220$$

同理算交集. 然后根据容斥原理可得出答案为 55

结论 1.5.3. 错位排列

$$D_n = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right)$$

有性质

1.

$$\frac{D_n}{n!} \approx e^{-1}$$

2. $D_1 = 0, D_2 = 1$

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

3.

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

$$\iff D_n - nD_{n-1} = -(D_{n-1} - (n-1)D_{n-2})$$

$$\iff D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$$

结论 1.5.4.

$$Q_n = n! - \binom{n-1}{1}(n-1)! + \binom{n-1}{2}(n-2)! - \binom{n-1}{3}(n-3)! + \cdots + (-1)^{n-1} \binom{n-1}{n-1} 1!$$

为不出现 $i(i+1)$ 的排列数并且有

$$Q_n = D_n + D_{n-1}$$

1.5.2 莫比乌斯反演 I

容斥原理是莫比乌斯反演在有限偏序集上的一个实例.

偏序集形式的容斥原理

对于一个偏序集 $(\mathcal{P}(X_n), \subseteq)$, (X_n 为 n 元集), 若

$$F, G : \mathcal{P}(X_n) \rightarrow R$$

且

$$G(K) = \sum_{L \subseteq K} F(L) \quad (K \subseteq X_n)$$

考虑反解, 有:

$$F(K) = \sum_{L \subseteq K} (-1)^{|K|-|L|} G(L)$$

证明.

$$\begin{aligned} \sum_{L \subseteq K} (-1)^{|K|-|L|} G(L) &= \sum_{L \subseteq K} (-1)^{|K|-|L|} \sum_{T \subseteq L} F(T) \\ &= \sum_{T \subseteq K} F(T) \sum_{T \subseteq L \subseteq K} (-1)^{|K|-|L|} \\ &= F(K) \end{aligned}$$

□

这就是莫比乌斯反演.

因此我们可以对 F, G 下定义, 令 A_1, A_2, \dots, A_n 是有限集 S 的子集, 且 $K \subseteq X_n, F(K)$ 为恰好属于所有 A_i that $i \notin K$ 的元素个数, 即

$$F(K) = \left| \bigcap_{i \notin K} A_i - \bigcup_{i \in K} A_i \right|$$

显然有

$$F(X_n) = n - \left| \bigcup_{i \in X_n} A_i \right|$$

然后令

$$G(K) = \sum_{L \subseteq K} F(L) = \left| \bigcap_{i \notin K} A_i \right|$$

由莫比乌斯反演有

$$F(K) = \sum_{L \subseteq K} (-1)^{|K|-|L|} G(L)$$

有

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n}| = \sum_{J \subseteq K} (-1)^{|J|} \left| \bigcap_{i \in J} A_i \right|$$

等价于上面的容斥原理.

偏序集里的莫比乌斯反演

建议先看看代数系统. 下面将莫比乌斯反演推广到偏序集 (X, \leq) 里. 以下介绍的函数满足

$$f: X \times X \rightarrow \mathcal{R}$$

且 $f(x, y) = 0$ if $x \not\leq y$. 下面考察代数系统 $\langle \mathcal{F}, * \rangle$, 设其为 A

定义 1.5.5. 令 $h = f * g$ 为 f 和 g 的卷积, 如果满足:

$$h(x, y) = \begin{cases} \sum_{z: x \leq z \leq y} f(x, z)g(z, y) & , x \leq y \\ 0 & , other \end{cases}$$

显然卷积运算在该偏序集上是封闭的, 故这是一个广群. 并且显然其是满足结合律, 故其是一个半群.

定义 1.5.6. 科罗内尔 δ 函数:

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & , x = y \\ 0 & , other \end{cases}$$

显然有 $f * \delta = \delta * f = f$, 显然其为卷积运算的么元. 故这个一个独异点.

定义 1.5.7. ζ 函数:

$$\zeta(x, y) = \begin{cases} 1 & , x \leq y \\ 0 & , other \end{cases}$$

定义 1.5.8. 逆函数:

对于 X 中所有的 y 满足 $f(y, y) \neq 0$, 有其逆元.

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{f(y, y)}, & x = y \\ -\frac{1}{f(y, y)} \sum_{x \leq z < y} g(x, z)f(z, y), & x < y \\ 0, & other \end{cases}$$

证明. 若 $x \neq y$

$$\begin{aligned}
 (g * f)(x, y) &= g(x, y)f(y, y) + \sum_{x \leq z < y} g(x, z)f(z, y) \\
 &= - \sum_{x \leq z < y} g(x, z)f(z, y) + \sum_{x \leq z < y} g(x, z)f(z, y) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

故 g 是其左逆元, 类似地可以证明其是右逆元. 故其是 f 的逆元. \square

定义 1.5.9. 莫比乌斯函数:

莫比乌斯函数为 ζ 函数的逆函数.

具体地:

$$\mu(x, y) = \begin{cases} 1 & , x = y \\ -\sum_{x \leq z < y} \mu(x, z) & , x < y \end{cases}$$

下面给出一些常见偏序集的莫比乌斯函数:

1. $(\mathcal{P}(X_n), \subseteq)$

$$\mu(A, B) = (-1)^{|B| - |A|}$$

2. (X_n, \leq) 即正整数集合上的全序关系

$$\mu(k, l) = \begin{cases} 1 & , l = k \\ -1 & , l = k + 1 \\ 0 & , other \end{cases}$$

3. $(X_n, |)$, 即正整数集合上的整除关系

有 $\mu(a, b) = \mu\left(1, \frac{b}{a}\right)$

$$\mu(1, n) = \begin{cases} 1 & , n = 1 \\ (-1)^k & , n \text{ 是互不相同的素数乘积} \\ 0, & , other \end{cases}$$

4. 直积的莫比乌斯函数

线性有限偏序集 $(X, \leq_1), (Y, \leq_2)$, 且 μ_1, μ_2 分别为其莫比乌斯函数, 定义其笛卡尔积的偏序为

$$(x, y) \leq (x', y') \iff x \leq x' \text{ and } y \leq y'$$

那么新偏序集 $(X \times Y, \leq_3)$ 的莫比乌斯函数为

$$\mu((x, y), (x', y')) = \mu_1(x, x')\mu_2(y, y')$$

定理 1.5.10. 莫比乌斯反演:

设 (X, \leq) 是一个具有最小元的线性偏序集. 令 μ 是其莫比乌斯函数, 定义在 X 上的实值函数 $F, G: X \rightarrow \mathcal{R}$ 满足

$$G(x) = \sum_{z \leq x} F(z), \quad (x \in X)$$

那么有

$$F(x) = \sum_{y \leq x} \mu(y, x)G(y), \quad (x \in X)$$

证明.

$$\begin{aligned} \sum_{y \leq x} \mu(y, x)G(y) &= \sum_{y \leq x} \mu(y, x) \sum_{z \leq y} F(z) \\ &= \sum_{z \leq x} F(z) \sum_{z \leq y \leq x} \mu(y, x) \\ &= \sum_{z \leq x} F(z) \delta(z, x) \\ &= F(x) \end{aligned}$$

□

这里最小元保证了和式有限, 因此不用判断敛散性.(这里对和式的一些变换在无穷和式有的有时不成立)

事实上, 莫比乌斯反演是卷积结合律的一个推论.

证明. 不妨设最小元为 0, 定义 $f, g \in \mathcal{F}(X)$

$$f(x, y) = \begin{cases} F(y) & , x = 0 \\ 0 & , other \end{cases}$$

$$g(x, y) = \begin{cases} G(y) & , x = 0 \\ 0 & , other \end{cases}$$

从而有 $g = f * \zeta$, 从而有 $g * \mu = f$,

□

1.5.3 莫比乌斯反演 II

定理 1.5.11. 存在最大元和最小元时。

$$\mu_{\leq}(x, y) = \mu_{\geq}(y, x)$$

1.6 递推关系和生成函数

一些斐波拉契数列的性质:

1.

$$\begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 & F_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$$

$$2. F_{2k} = F_k(2F_{k+1} - F_k); F_{2k+1} = F_{k+1}^2 + F_k^2$$

3.

$$\sum_{i=0}^n f_i = f_{n+2} - 1$$

4.

$$2|f_n \iff 3|n$$

1.6.1 生成函数

这里只做简单介绍

牛顿二项式定理

定理 1.6.1. 设 α 是一个实数. 对于任意 x, y with $0 \leq |x| < |y|$, 有性质

$$(x + y)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k y^{\alpha-k}$$

where

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

设 $|z| < 1$, 特别地有

$$(1+z)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k$$

结论 1.6.2. 若 α 是一个负整数, 且 $\alpha = -n$ then

$$\begin{aligned} \binom{\alpha}{k} &= \binom{-n}{k} \\ &= \frac{-n(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!} \\ &= (-1)^k \binom{n+k-1}{k} \end{aligned}$$

thus: for $|z| < 1$

$$(1+z)^{-n} = \frac{1}{(1+z)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} z^k$$

一般生成函数

无穷数列 h_0, h_1, \dots 的生成函数为 $g(x) = h_0 + h_1x + h_2x^2 + \dots$

生成函数的一些性质

设 H 为数列, F 为其对应的生成函数

$$1. cH \rightarrow cF$$

$$2. H_1 + H_2 \rightarrow F_1 + F_2$$

$$3. 0, 0, 0, \dots + H \rightarrow x^k F$$

$$4. iH(H_1, 2H_2, \dots) \rightarrow F'$$

$$5. \text{ 令 } G_n = \sum_{i+j=n} H_{1i} \cdot H_{2j} \text{ 那么 } G \rightarrow F_1 \cdot F_2$$

一面介绍两种重要的生成函数即: 多重集合的 n 组合级数的生成函数

根据泰勒级数

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

我们可以解 h_n 表示

$$e_1 + e_2 + \dots + e_k = n$$

的非负整数解的个数。

其生成函数为

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n} x^n = \frac{1}{(1-x)^k}$$

例 1.6.3. 设 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n$ 的整数解个数, 其中 x_1 是偶数, x_2 是 5 的倍数, $x_3 \leq 4, x_4 \leq 1$

解:

$$\begin{aligned}
 g(x) &= (1 + x^2 + x^4 + \cdots)(1 + x^5 + \cdots)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(1 + x) \\
 &= \frac{1}{1 - x^2} \frac{1}{1 - x^5} \frac{1 - x^5}{1 - x} (1 + x) \\
 &= \frac{1}{(1 - x)^2} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{n} x^n
 \end{aligned}$$

故为 $n+1$.

我们得到几个小结论:

1. 限制 $\geq k$, 可以乘 x^k
2. 限制 $\leq k$, 少写几项
3. 是 k 的倍数, 整体代换

指数生成函数

无穷数列 h_0, h_1, \cdots 的指数生成函数为 $g(x) = h_0 + h_1 \frac{x}{1!} + h_2 \frac{x^2}{2!} + \cdots$

下面给出一类常用的指数生成函数, 即多重集合的 n 排列数的生成函数.

定理 1.6.4. 设 S 是多重集合 $\{n_1 a_1 \cdots n_k a_k\}$, 其中 $n_i \geq 0$, 那么数列的指数生成函数为

$$g(x) = f_{n_1}(x) f_{n_2}(x) \cdots f_{n_k}(x)$$

其中

$$f_{n_i}(x) = \sum_{k=0}^{n_i} \frac{x^k}{k!}$$

例 1.6.5. 用红, 白, 蓝, 绿色给 $1 \times n$ 棋盘染色, 其中要求红色为偶数, 白色是奇数, 求方案数

解:

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right)^2 \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots \right) \left(x + \frac{x^3}{3!} + \cdots \right) \\
 &= e^{2x} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \\
 &= \frac{e^{4x} - 1}{4} \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} 4^n \frac{x^n}{n!} - \frac{1}{4} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} 4^{n-1} \frac{x^n}{n!}
 \end{aligned}$$

故为 4^{n-1}

1. 对于偶数限制此项为

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

2. 奇数限制

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

对于求解线性齐次递推关系这里不做介绍

1.7 卡特兰数和第二类斯特林数

1.7.1 卡特兰数

折线图

只有两类线段 $(a,b)-(a+1,b+1)$ 或 $(a,b)-(a+1,b-1)$

结论 1.7.1. $A_0(a_0, b_0), A_n(a_n, b_n)$ 能用折线连接的充要条件是

$$|b_n - b_0| \leq a_n - a_0 = n \text{ 且 } 2 \mid (|b_n - b_0| + n)$$

连接这两点的折线有

$$\binom{n}{\frac{n+b_n-b_0}{2}}$$

条.

卡特兰数:

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$

递推式

$$C_n = \sum_{k=1}^n C_{k-1} C_{n-k} = \frac{1}{n+1} (4n-2) C_{n-1}$$

Catalan 数列 C_n 可以应用于以下问题:

1.7.2 第二类斯特林数

第二章 数论

2.1 整除

结论 2.1.1. 令 a, b, c 为整数, 那么有:

$$\gcd(a + cb, b) = \gcd(a, b)$$

定义 2.1.2. $a, b, m, n \in \mathbb{Z}$, 称 $ma + nb$ 为 a, b 的线性组合

定理 2.1.3. 裴蜀定理:

如果 a, b 均为整数, 则有整数 m 和 n , 使得

$$ma + nb = \gcd(a, b)$$

其中该等式又被称为裴蜀等式, m, n 被称为裴蜀数.

可以用扩展欧几里得算法求出 $ma + nb = \gcd(a, b)$ 的特解, 然后有通解

$$\begin{cases} m = m_0 + k \frac{b}{\gcd(a, b)} \\ n = n_0 - k \frac{a}{\gcd(a, b)} \end{cases}$$

注意到

$$a(m + bu) + b(n - au) = \gcd(a, b)$$

故满足等式的 m, n 有无穷多对.

引理 2.1.4. 两个不全为 0 的整数 a, b 的最大公因数是其线性组合中最小的正整数.

证明. 不妨设 d 是 a, b 线性组合中最小的正整数. 考虑带余除法:

$$a = dq + r \text{ 从而有 } r = a - dq = a - q(ma + nb) = (1 - qm)a - qnb$$

因此 $d|a$, 同理 $d|b$, 故 d 为公因数.

不妨设 $e = \gcd(a, b)$, 那么 $d|e$, 又 $e|(ma + nb)$, 即 $e|d$

故 $e = d$ □

定理 2.1.5. 如果 a, b 是整数, 那么所有 a, b 的线性组合所构成的集合与所有 $\gcd(a, b)$ 的倍数所构成的集合相同. 换言之, 所有 a, b 的线性组合, 都是 $\gcd(a, b)$ 的倍数.

定理 2.1.6. 如果 a, b 是不全为 0 的整数, 那么正整数 d 是 a, b 的最大公因数, 当且仅当 1. $d|a, d|b$ 2. 若 $c|a, c|b$, 那么 $c|d$

定义 2.1.7. 令 a_1, a_2, \dots, a_n 为不全为 0 的整数, 如果 d 为他们公因子中最大的一个, 则称 d 为 a_1, a_2, \dots, a_n 的最大公因数. 记为 $\gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) = d$

定理 2.1.8.

$$\gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) = \gcd(a_1, a_2, \dots, \gcd(a_{k-1}, a_k), \dots, a_n)$$

定义 2.1.9. 我们称 a_1, a_2, \dots, a_n 互素如果 $\gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$

定义 2.1.10. 我们称 a_1, a_2, \dots, a_n 两两互素, 如果任意两个数互素

定理 2.1.11. 若 $\gcd(a, m) = 1, \gcd(b, m) = 1$, 则 $\gcd(ab, m) = 1$

若 $\gcd(a, b) = 1$, 则 $\gcd(a^k, b^l) = 1$

定理 2.1.12. 设正整数 a, b 之积是一个整数的 $k(k \geq 2)$ 次幂. 若 $\gcd(a, b) = 1$. 则 a, b 都是整数的 k 次幂. 一般地: 设正整数 a_1, a_2, \dots, a_n 之积是一个正整数的 k 次幂. 若 a_1, a_2, \dots, a_n 两两互素, 则 a_1, a_2, \dots, a_n 都是整数的 k 次幂.

引理 2.1.13.

$$\gcd(a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k) = \gcd^k(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

推论 2.1.14. 裴蜀定理可以推广到 n 个整数的情形：设 a_1, a_2, \dots, a_n 是不全为零的整数，则存在整数 x_1, x_2, \dots, x_n ，使得 $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = \gcd(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 。其逆定理也成立：设 a_1, a_2, \dots, a_n 是不全为零的整数， $d > 0$ 是 a_1, a_2, \dots, a_n 的公因数，若存在整数 x_1, x_2, \dots, x_n ，使得 $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = d$ ，则 $d = \gcd(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 。

推论 2.1.15. 对自然数 a, b 和整数 n ， a 与 b 互素，考察不定方程： $ax + by = n$ 其中 x 和 y 为自然数。如果方程有解，称 n 可以被 a, b 表示。记 $C = ab - a - b$ 。由 a 与 b 互素， C 必然为奇数。则有结论：对任意的整数 n ， n 与 $C - n$ 中有且仅有一个可以被表示。即：可表示的数与不可表示的数在区间 $[0, C]$ 对称（关于 C 的一半对称）。0 可被表示， C 不可被表示；负数不可被表示，大于 C 的数可被表示。

推论 2.1.16. 二元一次不定方程有非负整数解的条件

$a, b > 0$ ，若 $ax + by = n, (a, b) = 1$ ，则 $n > ab - a - b$ 时有解，解的个数为 $\left\lfloor \frac{n}{ab} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{ab} \right\rfloor + 1$

结论 2.1.17.

$$\gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) = \gcd(a_1, a_2 - a_1, \dots, a_n - a_{n-1})$$

一些小结论

1. 在 $[1, 18]$ 的范围下，一个数最多与连续 7 个数不互质。
2. 一个数能被 4 整除，当且仅当末尾两位能被 4 整除

3. 一个数能被 25 整除, 当且仅当末尾两位能被 25 整除
4. 一个数能被 8 整除, 当且仅当末尾三位能被 8 整除
5. 一个数能被 125 整除, 当且仅当末尾三位能被 125 整除
6. 一个数能被 3 整除, 当且仅当各位数之和能被 3 整除
7. 一个数能被 9 整除, 当且仅当各位数之和能被 9 整除
8. 能被 7 整除的数的特征: a. 抹去个位数 b. 减去原个位数的 2 倍 c. 其差能被 7 整除。
9. 能被 11 整除的数的特征: a. 抹去个位数 b. 减去原个位数 c. 其差能被 11 整除。或: 奇数位上的数字和与偶数位上的数和相减, 其差能被 11 整除

2.2 同余

以下所有参数未特殊说明, 均为默认整数, 模数默认正整数

2.2.1 同余

定义 2.2.1. 设 m 是正整数, 若 $m|(a-b)$, 则称 a 和 b 模 m 同余. 记作 $a \equiv b \pmod{m}$

性质

1. $a \equiv b \pmod{m} \iff \exists k(k \in \mathbb{Z}), a = b + kz$
2. $a \equiv a \pmod{m}$
3. $a \equiv b \pmod{m} \rightarrow b \equiv a \pmod{m}$
4. $a \equiv b \pmod{m}, b \equiv c \pmod{m} \rightarrow a \equiv c \pmod{m}$
5. $a \equiv b \pmod{m}, c \equiv d \pmod{m} \rightarrow a + c \equiv b + d \pmod{m}, a - c \equiv b - d \pmod{m}, ac \equiv bd \pmod{m}$
6. $a^n \equiv b^n \pmod{m}$
7. $ac \equiv bc \pmod{m}, d = \gcd(c, m) \rightarrow a \equiv b \pmod{m/d}$

$$8. a \equiv b \pmod{m}, n|m \rightarrow a \equiv b \pmod{n}$$

$$9. a \equiv b \pmod{m}, a \equiv b \pmod{n} \rightarrow a \equiv b \pmod{\text{lcm}(m, n)}$$

定义 2.2.2. 设模为 n , 则根据余数可将所有的整数分为 n 类, 把所有与整数 a 模 n 同余的整数构成的集合叫做模 n 的一个剩余类, 记作 $[a]$. 并把 a 叫作剩余类 $[a]$ 的一个代表元。

定义 2.2.3. 从模 n 的每个剩余类中各取一个数, 得到一个由 n 数组成的集合, 叫做模 n 的一个完全剩余系。

结论 2.2.4. 若 r_1, r_2, \dots, r_m 是模 m 的一个完全剩余系, 且正整数 a 满足 $\gcd(a, m) = 1$, 则对任何整数 $b, ar_i + b$ 也为一个完全剩余类。

证明. 若不然, 则存在 $ar_i + b \equiv ar_j + b \pmod{m} \iff ar_i \equiv ar_j \pmod{m} \iff m|a(r_i - r_j) \iff m|a_i - a_j \iff r_i \equiv r_j \pmod{m}$ 与条件矛盾. 故得证 \square

结论 2.2.5. a_1, a_2, \dots, a_m 是模 m 的一个完全剩余系, b_1, b_2, \dots, b_n 是模 n 的一个完全剩余系, 且 $\gcd(n, m) = 1$ 那么 $na_i + mb_j$ 是模 mn 的一个完全剩余系

证明. 首先由乘法原理知道有 mn 个数, 那么只需证两两不同余即可

若不然则对于 $(a, b) \neq (a', b')$ $na + mb \equiv na' + mb' \pmod{mn} \iff mn|n(a - a') + m(b - b') \iff m|(a - a'), n|(b - b') \iff a \equiv a' \pmod{m}, b \equiv b' \pmod{n}$ 与条件矛盾. 故得证. \square

定义 2.2.6. 简化剩余系也称既约剩余系或缩系, 是 m 的完全剩余系中与 m 互素的数构成的子集, 如果模 m 的一个剩余类里所有数都与 m 互素, 就把它叫做与模 m 互素的剩余类. 在与模 m 互素的全体剩余类中, 从每一个类中各任取一个数作为代表组成的集合, 叫做模 m 的一个简化剩余系。

结论 2.2.7. 若 r_1, r_2, \dots, r_m 是模 m 的一个缩系, 且正整数 a 满足 $\gcd(a, m) = 1$, 则 ar_i 也为一个缩系.

证明. 由完系性质 1 可知其两两不同余, 故只需证明其与均 m 互质即可. 因为 $\gcd(r_i, m) = 1, \gcd(a, m) = 1 \Rightarrow \gcd(ar_i, m) = 1$ 得证 \square

结论 2.2.8. a_1, a_2, \dots, a_m 是模 m 的一个缩系, b_1, b_2, \dots, b_n 是模 n 的一个缩系, 且 $\gcd(n, m) = 1$ 那么 $na_i + mb_j$ 是模 mn 的一个缩系

证明. 只需证明其是所有与 mn 互质的剩余类.

$$\begin{aligned} & \gcd(a_i, m) = 1, \gcd(b_j, n) = 1, \gcd(n, m) = 1 \\ & \Rightarrow \gcd(na_i, m) = 1, \gcd(mb_j, n) = 1 \\ & \Rightarrow \gcd(na_i + mb_j, n) = 1, \gcd(na_i + mb_j, m) = 1 \\ & \Rightarrow \gcd(na_i + mb_j, mn) = 1 \end{aligned}$$

若将 a_i, b_j 扩展成完系, 若 $\gcd(na_i + mb_j, mn) = 1 \Rightarrow \gcd(na_i + mb_j, m) = 1, \gcd(na_i + mb_j, n) = 1 \Rightarrow \dots$ 逆着证回去即可. \square

2.2.2 线性同余方程

定义 2.2.9. 形如 $ax \equiv b \pmod{m}$ 的同余式称为一元线性同余方程

定理 2.2.10. $\gcd(a, m) = d, d \nmid b$, 则无解, 否则恰好有 d 个模 m 不同余的解.

证明. 若 $d \nmid b$, 则 $ax \equiv b \pmod{m} \iff ax - ym = b$, 根据贝祖定理显然无解.

若 $d \mid b$, 则显然有无穷多组解, 我们设其中一组特解为 x_0, y_0

其通解为 $x = x_0 + (m/d)t, y = y_0 + (a/d)t$

设 $x_1 = x_0 + (m/d)t_1, x_2 = x_0 + (m/d)t_2$

$x_1 \equiv x_2 \pmod{m} \iff t_1 \equiv t_2 \pmod{d}$

所以有 d 个不同于的解. \square

定义 2.2.11. $\gcd(a, m) = 1, ax \equiv 1 \pmod{m}$ 则称该同余方程的一个解为 a 模 m 的逆, 记为 a^{-1} . 显然 $\gcd(a^{-1}, m) = 1$

定理 2.2.12. 设 p 为素数, 正整数 $a = a^{-1}$, 当且仅当 $a \equiv \pm 1 \pmod{p}$.

证明. $a \equiv \pm 1 \pmod{p} \iff a^2 \equiv 1 \pmod{p}$ 反过来. 有

$$a^2 \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow p | (a^2 - 1) \Rightarrow p | (a + 1) p | (a - 1) \Rightarrow a \equiv \pm 1 \pmod{p} \quad \square$$

定理 2.2.13. 威尔逊定理

若 p 是素数, 则 $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$

证明. $p = 2$ 显然成立.

否则对于 $1 \leq a \leq p - 1$, 可以找到其逆元与之配对, 且除 1 和 $p - 1$ 都能两两配对.

$$\text{故 } (p - 1)! \equiv p - 1 \equiv -1 \pmod{p} \quad \square$$

定理 2.2.14. 威尔逊定理逆定理

若 $n \geq 2$ 是正整数, 且 $(n - 1)! \equiv -1 \pmod{n}$ 则 n 为质数

证明. 若不然, 设 n 为合数, 则其必存在小于 n 的素因子 p

所以有 $(n - 1)! \equiv -1 \pmod{n}, p | n \Rightarrow (n - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$,

但是 $(n - 1)! \equiv 0 \pmod{p}$

而 $n > 1$ 矛盾. 故得证. \square

定理 2.2.15. 费马小定理

如果 p 是一个素数, a 是正整数且 a 不是 p 的倍数, 则 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

证明. 因为 $\gcd(a, p) = 1$

所以 $\prod_{i=1}^{p-1} ia \equiv \prod_{i=1}^{p-1} i \pmod{p} \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ 得证. \square

定义 2.2.16. 欧拉函数

对于正整数 n , 小于等于 n 且与 n 互质的正整数的个数, 称为欧拉函数, 记作 $\phi(n)$

定理 2.2.17. 设 m 是一个正整数, a 是一个正整数且 $\gcd(a, m) = 1$, $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$

证明. 设 $r_1, r_2, \dots, r_{\phi(m)}$, 是不超过 m 的模 m 的一个缩系.

那么 $ar_1, ar_2, \dots, ar_{\phi(m)}$ 也是一个缩系

故 $ar_1 ar_2 \dots ar_n \equiv r_1 r_2 \dots r_n \pmod{m} \iff a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$

得证. □

定义 2.2.18. 同余方程组是指一组形如下面的方程的集合:

$$\begin{cases} a_1 \equiv b_1 \pmod{m_1} \\ a_2 \equiv b_2 \pmod{m_2} \\ \vdots \\ a_n \equiv b_n \pmod{m_n} \end{cases}$$

其中, a_i 和 b_i 是整数, m_i 是正整数。这组方程要求对于每个 i , a_i 除以 m_i 的余数等于 b_i 除以 m_i 的余数, 即 a_i 与 b_i 在模 m_i 下同余。解同余方程组就是要找到满足所有这些条件的整数解。

例 2.2.19.

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{3} \\ x \equiv 2 \pmod{5} \\ \vdots \\ x \equiv 3 \pmod{7} \end{cases}$$

我们可以使用迭代法 (逐级满足法) 解决. 由第一个式子得 $x = 3t + 1$ 然后带入 $3t + 1 \equiv 2 \pmod{5} \iff t \equiv 4 \pmod{5}$ 以此类推. 但是这只能解决一些简单的问题, 下面我们给出一般地解法.

定理 2.2.20. 中国剩余定理 (CRT)

设 m_1, m_2, \dots, m_r 是两两互素的正整数, 则同余方程

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \vdots \\ x \equiv a_r \pmod{m_r} \end{cases}$$

有模 $m_1 m_2 \dots m_r$ 的唯一解

$$x = \sum_{i=1}^r a_i M_i M_i^{-1}$$

其中

$$M_i = \frac{1}{m_i} \prod_{j=1}^r m_j, \quad M_i M_i^{-1} \equiv 1 \pmod{m_i}$$

证明. 先证明 x 是方程组的解.

对于任意一个方程有,

$$x \equiv a_k M_k M_k^{-1} \equiv a_k \pmod{m_k}, \text{ 显然成立.}$$

下证唯一性.

若 x_1, x_2 为方程组的 2 个解, 则有 $x_1 \equiv x_2 \pmod{m_k} \iff m_k | (x_1 - x_2) \iff M | (x_1 - x_2) \iff x_1 \equiv x_2 \pmod{M}$ □

定理 2.2.21. 拉格朗日定理

p 为素数, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ($p \nmid a_n$) 是模 p 意义下的整系数多项式方程, 则同余方程 $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ 在模 p 意义下至多有 n 个不同的解.

推论 2.2.22. 若超过 n 个解, 则 $p \mid a_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$), 即 $f(x)$ 是模 p 意义下的零多项式

推论 2.2.23. 若 $n \leq p$ 则同余式 $f(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \equiv 0 \pmod{p}$ 有 n 个解的充要条件是 $x^p - x$ 除以 $f(x)$ 所得的余式的一切系数都是 p 的倍数

这里介绍一个比较重要的多项式, 常用于构造

$$f(x) = \prod_{i=1}^{p-1} (x - i) - (x^{p-1} - 1)$$

定理 2.2.24. *wolstenholme* 定理

若 p 为大于 3 的素数, 则

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{k} \equiv 0 \pmod{p^2}$$

2.3 乘性函数

定义 2.3.1. 算术函数

定义在所有正整数上的函数称为算数函数.

定义 2.3.2. 乘性函数

若 $\gcd(m, n) = 1$, 均有 $f(mn) = f(m)f(n)$, 则称 f 为乘性函数.

结论 2.3.3. 若 f 为乘性函数, $n = \prod_{i=1}^k p_i^{a_i}$ 为一个素因数分解. 则 $f(n) = \prod_{i=1}^k f(p_i^{a_i})$ 由定义显然成立.

定义 2.3.4. 和函数

f 为一个算术函数, $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$ 称为 f 的和函数

定义 2.3.5. 欧拉函数

$\phi(n) = \sum_{i=1}^n [\gcd(i, n) = 1]$, 称为欧拉函数.

结论 2.3.6. 设 p 是素数, $\phi(p^a) = p^a - p^{a-1}$

证明. 由定义, $\phi(p^a) = \sum_{i=1}^{p^a} [\gcd(i, p^a) = 1] = \sum_{i=1}^{p^a} 1 - [\gcd(i, p^a) \neq 1] = p^a - \sum_{i=1}^{p^a} [\gcd(i, p^a) \neq 1]$, 这样的 i 显然只有 p 的倍数, 有 p^{a-1} 个, 证毕. \square

结论 2.3.7. 欧拉函数是乘性函数

证明. 若 $\gcd(m, n) = 1$ 由缩系的定义知道, 显然模 m 的缩系有 $\phi(m)$ 个数, 模 n 的缩系有 $\phi(n)$ 个数, 由缩系的一个性质知模 mn 的缩系有 $\phi(m)\phi(n)$ 个数. 故 $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$ \square

结论 2.3.8. $n > 2, \phi(n)$ 为偶数

结论 2.3.9.

$$\phi(n) = n \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

证明. 容斥原理可证明这里用乘性函数的性质证明

$$\begin{aligned} \phi(n) &= \prod_{i=1}^k \phi(p_i^{a_i}) \\ &= \prod_{i=1}^k (p_i^{a_i} - p_i^{a_i-1}) \\ &= \prod_{i=1}^k p_i^{a_i} \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \\ &= n \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \end{aligned}$$

\square

结论 2.3.10. 欧拉函数的和函数

$$F(n) = \sum_{d|n} \phi(d) = n$$

结论 2.3.11. 定义 C_d 为 1 到 n 中与 n 最大公因数为 d 的集合容易证明其是 1 到 n 构成的正整数集合的一个划分. 而 C_d 中有 $\phi(n/d)$ 个元素, (若 $a \in C_d$ 则 $\gcd(a/d, n/d) = 1$), 故 $n = \sum_{d|n} C_d = \sum_{d|n} \phi(n/d) = \sum_{d|n} \phi(d)$ 得证.

定义 2.3.12. 狄利克雷卷积

f, g 为算数函数, 定义狄利克雷积为

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$$

实际上这整数上一章的卷积在整除关系上的定义

性质

1. $f * g = g * f$
2. $(f * g) * h = f * (g * h)$
3. $f * (g + h) = f * g + f * h$

这里的算数函数就是 $f(1, x) \in \mathcal{F}$

故有逆元的条件是 $f(1) \neq 0$

定理 2.3.13. 如果 f, g 是乘性函数, 则 $f * g$ 也是乘性函数

定理 2.3.14. 若 $F = f * g, h$ 是 g 的逆函数, 那么 $f = F * h$

定理 2.3.15. 乘性函数的和函数也是乘性函数

定义 2.3.16. 因子和与因子个数函数

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d$$

$$\tau(n) = \sum_{d|n} 1$$

结论 2.3.17. 因子和与因子个数函数均为乘性函数

结论 2.3.18. 设 $n = \prod_{i=1}^k p_i^{a_i}$

$$\sigma(n) = \prod_{j=1}^k \frac{p_j^{a_j+1} - 1}{p_j - 1}$$

$$\tau(n) = \prod_{j=1}^k (a_j + 1)$$

定义 2.3.19. 莫比乌斯函数

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & (n = 1) \\ (-1)^r, & (n = \prod_{i=1}^r p_i) \\ 0, & (other) \end{cases}$$

定理 2.3.20. $f = F * \mu$

第三章 求和

一些记号

调和数 (harmonic number)

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

基本公式

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{1 \leq k \leq n} a^{n-k} b^{k-1}$$

3.1 递归问题 RECURRENT PROBLEMS

3.1.1 repertoire method

例

$$f(1) = \alpha$$

$$f(2n) = 2f(n) + \beta$$

$$f(2n+1) = 2f(n) + \gamma$$

知

$$f(n) = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma$$

通过对 $f(n)$ 赋值或 (α, β, γ) 赋值, 求解。

在参数较少的情况下, 可以将一些相同参数, 分别设为独立参数, 更容易找到有解的情况。

3.1.2 约瑟夫问题

形如

$$\begin{aligned} f(j) &= \alpha_j, & 1 \leq j < d \\ f(dn + j) &= cf(n) + \beta_j, & 0 \leq j < d, n \geq 1 \end{aligned}$$

有

$$f((b_m b_{m-1} \dots b_0)_d) = (\alpha_{b_m} \beta_{b_{m-1}} \dots \beta_{b_0})_c$$

3.2 和式 SUMS

用

$$\sum_{P(k)} a_k$$

表示。

3.2.1 和式和递归式 SUMS AND RECURRENCES

和式可以表示为递归形式:

$$\begin{aligned} S_0 &= a_0 \\ S_{n+1} &= S_n + a_{n+1} \end{aligned}$$

用 repertoire method 解。

例 3.2.1. 计算

$$\sum_{k=0}^n (a + bn)$$

写成递归式

$$S_0 = \alpha$$

$$S_n = S_{n-1} + \beta n + \gamma$$

其中

$$\alpha = \gamma = a, \beta = b$$

设

$$S_n = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma$$

带入 $1, n, n^2$

解出

$$\begin{cases} A(n) = 1 \\ B(n) = \frac{n(n+1)}{2} \\ C(n) = n \end{cases}$$

故

$$S_n = a + na + \frac{n(n+1)}{2}b$$

递归式可以转化为和式

对于形如

$$a_n T_n = b_n T_{n-1} + c_n$$

的递归式，可以设求和因子 (summation factor)

$$s_n = \frac{\prod_{i=1}^n a_i}{\prod_{i=1}^n b_i} \cdot \frac{b_1}{a_n}$$

然后同时乘上求和因子即可得出

$$T_n = \frac{1}{s_n a_n} \left(s_1 b_1 T_0 + \sum_{k=1}^n c_k s_k \right)$$

注意：求和因子不能为 0

3.2.2 和式的处理 MANIPULATION OF SUMS

和式的变换

$$\begin{aligned} \sum_{k \in K} c a_k &= c \sum_{k \in K} a_k \\ \sum_{k \in K} (a_k + b_k) &= \sum_{k \in K} a_k + \sum_{k \in K} b_k \\ \sum_{k \in K} a_k &= \sum_{p(k) \in K} a_{p(k)} \\ \sum_{k \in K} a_k + \sum_{k \in K'} a_k &= \sum_{k \in K \cap K'} a_k + \sum_{k \in K \cup K'} a_k \end{aligned}$$

其中对于 $n \in K$ ，有且仅有一个整数满足 $p(k) = n$

3.2.3 扰动法 (perturbation method)

对一个和式记其为 S_n ，将其第一项和最后一项分离出来，用两种方法改写 S_{n+1} 。

类似于算两次法

例 3.2.2. 如求和式

$$S_n = \sum_{0 \leq k \leq n} k 2^k$$

有

$$\begin{aligned} S_n + (n+1)2^{n+1} &= S_{n+1} \\ &= \sum_{0 \leq k \leq n} (k+1)2^{k+1} \\ &= 2S_n + \sum_{0 \leq k \leq n} 2^{k+1} \end{aligned}$$

有

$$\begin{aligned} S_n &= (n+1)2^{n+1} - \sum_{0 \leq k \leq n} 2^{k+1} \\ &= (n+1)2^{n+1} - \frac{2(1-2^{n+1})}{1-2} \\ &= (n-1)2^{n+1} + 2 \end{aligned}$$

3.2.4 多重和式 MULTIPLE SUMS

基本性质

$$\sum_j \sum_k a_{j,k} [P(j, k)] = \sum_{P(j,k)} a_{j,k} = \sum_k \sum_j a_{j,k} [P(j, k)]$$

$$\sum_{j \in J} \sum_{k \in K(j)} a_{j,k} = \sum_{k \in K'} \sum_{j \in J'(k)} a_{j,k}$$

$$\sum_{j \in J} a_{f(j)} = \sum_{j \in J, k \in K} a_k [f(j) = k] = \sum_{k \in K} a_k \sum_{j \in J} [f(j) = k]$$

其中 $f: J \rightarrow K$

例 3.2.3. 求

$$S_n = \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{1}{k-j}$$

有

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{1 \leq k \leq n} \sum_{1 \leq j < k} \frac{1}{k-j} \\ &= \sum_{1 \leq k \leq n} \sum_{0 < j \leq k-1} \frac{1}{j} \\ &= \sum_{1 \leq k \leq n} H_{k-1} \end{aligned}$$

不太好做，（可以交换求和次序解）

考虑直接把 $k-j$ 当成一个整体。

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{1 \leq j < k+j \leq n} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{1 \leq k \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n-k} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{n-k}{k} \\ &= nH_n - n \end{aligned}$$

有

$$\sum_{0 \leq k < n} H_k = nH_n - n$$

思考：

对含 $k+f(j)$ 的二重和式，可以考虑用 $k-f(j)$ 替换 k ，并先对 j 求和比较好。

几何观点：按对角线求和。

3.2.5 一般性的方法 GENERAL METHODS

以

$$S_n = \sum_{0 \leq k \leq n} k^2$$

为例

归纳法

如果注意到

$$S_n = \frac{n(n + \frac{1}{2})(n + 1)}{3}$$

就可以使用数学归纳法

扰动法

观察

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq k \leq n} k^2 + (n + 1)^2 &= S_{n+1} \\ &= \sum_{1 \leq k \leq n+1} k^2 \\ &= \sum_{0 \leq k \leq n} (k + 1)^2 \\ &= \sum_{0 \leq k \leq n} k^2 + 2 \sum_{0 \leq k \leq n} k + n + 1 \end{aligned}$$

虽然没有成功，但注意到我们，成功地解出了

$$\sum_{0 \leq k \leq n} k$$

考虑对

$$T_n = \sum_{0 \leq k \leq n} k^3$$

操作, 有

$$\begin{aligned}
 T_n + (n+1)^3 &= T_{n+1} \\
 &= \sum_{1 \leq k \leq n+1} k^3 \\
 &= \sum_{0 \leq k \leq n} (k+1)^3 \\
 &= T_n + 3S_n + 3 \sum_{0 \leq k \leq n} k + n + 1
 \end{aligned}$$

得到

$$\begin{aligned}
 3S_n &= (n+1)^3 - 3 \frac{n(n+1)}{2} - (n+1) \\
 &= (n+1) \left(n^2 + \frac{1}{2}n \right) \\
 &= n \left(n + \frac{1}{2} \right) (n+1)
 \end{aligned}$$

成套方法

有

$$R_0 = d$$

$$R_n = R_{n-1} + an^2 + bn + c$$

其解的一般形式为

$$R_n = aA(n) + bB(n) + cC(n) + dD(n)$$

设 $R_n = 1, n, n^2, n^3$

解得

$$\begin{cases} A(n) = \frac{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3} \\ B(n) = \frac{1}{2}(n^2 + n) \\ C(n) = n \\ D(n) = 1 \end{cases}$$

故

$$R_n = A(n)$$

事实上对 (a,b,c,d) 赋值更简单。

微积分法

求

$$\begin{aligned} S_n - \int_0^n x^2 dx &= \sum_{1 \leq k \leq n} \left(k^2 - \int_{k-1}^k x^2 dx \right) \\ &= \sum_{1 \leq k \leq n} \left(k - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n}{3} \end{aligned}$$

展开和收缩

转化为二重和式，以简化通项。

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{1 \leq k \leq n} k^2 \\ &= \sum_{1 \leq k \leq n} k \sum_{1 \leq j \leq k} 1 \\ &= \sum_{1 \leq j \leq n} \sum_{j \leq k \leq n} k \\ &= \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{(j+n)(n-j+1)}{2} \\ &= \frac{n^3 + n^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{2} S_n \end{aligned}$$

有限微积分

有 $k^2 = k^2 + k^1$

故

$$\begin{aligned}
 \sum_{0 \leq k \leq n} k^2 &= \sum_{0 \leq k < n+1} k^2 + k^1 \\
 &= \left(\frac{k^3}{3} + \frac{k^2}{2} \right) \Big|_0^{n+1} \\
 &= \left(\frac{(n+1)^3}{3} + \frac{(n+1)^2}{2} \right) \\
 &= \frac{(n+1)(n+\frac{1}{2})n}{3}.
 \end{aligned}$$

3.2.6 有限微积分

类似微分算子 D

$$Df(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

定义差分算子 Δ

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$$

定义下降阶乘幂 (falling factorial power)

$$x^{\underline{m}} = x(x-1) \cdots (x-m+1) \quad (m \geq 0 \in \mathbb{Z})$$

和上升阶乘幂 (rising factorial power)

$$x^{\overline{m}} = x(x+1) \cdots (x+m-1) \quad (m \geq 0 \in \mathbb{Z})$$

注意到: $n! = n^{\underline{n}} = 1^{\overline{n}}$

有

$$\Delta(x^{\underline{m}}) = mx^{\underline{m-1}}$$

类比积分, 我们定义不定和式 (indefinite sum)

$$\sum g(x) \delta x$$

满足

$$g(x) = \Delta f(x) \iff \sum g(x) \delta x = f(x) + C$$

其中 C 为满足 $p(x+1) = p(x)$ 的任意一个函数 $p(x)$ 。

有限微积分有确定的和式 (sum)

$$\sum_a^b g(x) \delta x = f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a)$$

有以下性质

$$\begin{aligned} \sum_a^b g(x) \delta x &= \sum_{a \leq k < b} g(x) \quad a \leq b \\ \sum_a^b g(x) \delta x &= - \sum_b^a g(x) \delta x \\ \sum_a^b + \sum_b^c &= \sum_a^c \end{aligned}$$

并且阶乘幂满足二项式定理

负指数的下降阶乘幂定义如下

$$x^{\overline{-m}} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+m)} \quad m > 0$$

从而有以下性质

$$x^{\overline{m+n}} = x^{\overline{m}}(x-m)^{\overline{n}}$$

$$\sum_a^b x^{\overline{m}} \delta x = \frac{x^{\overline{m+1}}}{m+1} \Big|_a^b, \quad (m \neq -1)$$

若 $m = -1$ 则为 $H_b - H_a$

| | | | |
|-----------------------|--------------------------|-------------------|--------------------------|
| $f = \sum g$ | $\Delta f = g$ | $f = \sum g$ | $\Delta f = g$ |
| $x^0 = 1$ | 0 | 2^x | 2^x |
| $x^1 = x$ | 1 | c^x | $(c-1)c^x$ |
| $x^2 = x(x-1)$ | $2x$ | $\frac{c^x}{c-1}$ | c^x |
| x^m | mx^{m-1} | cu | $c\Delta u$ |
| $\frac{x^{m+1}}{m+1}$ | x^m | $u+v$ | $\Delta u + \Delta v$ |
| H_x | $x^{-1} = \frac{1}{x+1}$ | uv | $u\Delta v + Ev\Delta u$ |

分部求和 (summation by parts)

有

$$\Delta(u(x)v(x)) = u(x)\Delta v(x) + Ev(x)\Delta u(x)$$

其中, **E** 为移位算子 (shift operator) $Ef(x) = f(x+1)$

简记为

$$\Delta(uv) = u\Delta v + Ev\Delta u$$

从而有

$$\sum u\Delta v = uv - \sum Ev\Delta u$$

如

例 3.2.4.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n k2^k &= \sum_0^{n+1} x2^x \delta x \\
 &= \sum_0^{n+1} x\delta 2^x \\
 &= (n+1)2^{n+1} - \sum_0^{n+1} 2^{x+1} \delta x \\
 &= (n+1)2^{n+1} - 2^{n+2} + 2 \\
 &= (n-1)2^{n+1} + 2
 \end{aligned}$$

例 3.2.5.

$$\begin{aligned}
 \sum_{0 \leq k < n} k H_k &= \sum_0^n x H_x \delta x \\
 &= \frac{1}{2} \left(\sum_0^n H_x \delta x^2 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(x^2 H_n - \sum_0^n x \delta x \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(x^2 H_n - \frac{n^2}{2} \right) \\
 &= \frac{n^2}{2} \left(H_n - \frac{1}{2} \right)
 \end{aligned}$$

3.2.7 无限和式 INFINITE SUMS

容易发现

$$\sum_{k \geq 0} x^k = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & 0 \leq x < 1 \\ \infty, & x \geq 1 \end{cases}$$

交错和

$$\sum_{k \in K} a_k = \sum_{k \in K} a_k^+ - \sum_{k \in K} a_k^-$$

设 $A^+ = \sum_{k \in K} a_k^+$, 类似定义 A^-

- 若均有限的值, 则称为绝对收敛。
- 若 $A^+ = \infty$, 而后者为有限的值, 则称发散于 $+\infty$, 反之发散于 $-\infty$
- 否则不做定义。

只要我们处理的是刚才所定义的绝对收敛的和式, 这一章里的所有操作都完全成立.

对复数分实部和虚部计算即可。

第四章 概率论

4.1 基本概念和公式

对概率运算规定一些简单的基本法则：

1. 设 A 是随机事件，则 $0 \leq P(A) \leq 1$,
2. 设 Ω 为必然事件，则 $P(\Omega) = 1$,
3. 若事件 A 和 B 不相容，则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$,

可推广至无穷：

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

4. 一般情况下， $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ ， $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$
5. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
6. $P(A - B) = P(A) - P(AB)$

定理 4.1.1. 全概率公式

设 B_1, B_2, \dots, B_n 是样本空间 Ω 中的两两不相容的一组事件，即 $B_i B_j = \phi$, $i \neq j$ ，且满足 $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$ ，则称 B_1, B_2, \dots, B_n 是样本空间 Ω 的一个分割（又称为完备事件群，英文为 *partition*）。设 $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ 是样本空间 Ω

的一个分割, A 为 Ω 的一个事件, 则

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)$$

定理 4.1.2. 贝叶斯公式

设 $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ 是样本空间的一个分割, A 为 Ω 中的一个事件, $P(B_i) > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, $P(A) > 0$, 则

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^n P(A|B_j)P(B_j)}$$

用于因果转换.

定义 4.1.3. 事件的独立性

设 A, B 是随机试验中的两个事件, 若满足 $P(AB) = P(A)P(B)$, 则称事件 A 和 B 相互独立。

判断事件的独立, 应该是从实际出发, 如果能够判断事件 B 的发生与否对事件 A 的发生与否不产生影响, 则事件 A, B 即为独立。

设 \tilde{A} 表示事件 A 发生和不发生之一, \tilde{B} 表示事件 B 发生和不发生之一。有独立性的定义可推至 $P(\tilde{A}\tilde{B}) = P(\tilde{A})P(\tilde{B})$ (一共有四个等式)。可推广至:

$$P(\tilde{A}_1\tilde{A}_2\dots\tilde{A}_n) = P(\tilde{A}_1)\dots P(\tilde{A}_n)$$

上面有 2^n 个等式。

独立一定相容

重要公式与结论

$$(1) P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$(2) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$(3) P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

$$(4) P(A - B) = P(A) - P(AB)$$

$$(5) P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB), P(A) = P(AB) + P(A\bar{B}),$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(\bar{A}B) = P(AB) + P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B)$$

$$(6) P(\bar{A}_1|B) = 1 - P(A_1|B), P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1A_2|B)$$

$$P(A_1A_2|B) = P(A_1|B)P(A_2|A_1B)$$

$$(7) A_1, A_2, \dots, A_n \quad P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i), P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n (1 - P(\bar{A}_i))$$

随机变量 (Random variable): 值随机会而定的变量, 研究随机试验的一串事件。可按维数分为一维、二维至多维随机变量。按性质可分为离散型随机变量以及连续型随机变量。

分布 (Distribution): 事件之间的联系, 用来计算概率。

示性函数 (Indication function): $I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \text{反之} \end{cases}$, 事件 A 有随机变量

I_A 表示出来, I_A 称为事件 A 的示性函数。

定义 4.1.4. 概率函数:

设 X 为一随机变量, 其全部可能值为 $\{a_1, a_2, \dots\}$, 则 $p_i = P(X = a_i), i = 1, 2, \dots$ 称为 X 的概率函数。

定义 4.1.5. 概率分布函数:

定义: 设 X 为一随机变量, 则函数

$$F(X) = P(X \leq x) \quad (-\infty < x < \infty)$$

称为 X 的分布函数。(注: 这里并未限定 X 为离散型的, 它对任何随机变量都有定义。)

性质:

$F(x)$ 是单调非降的: 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $F(x_1) \leq F(x_2)$.

当 $x \rightarrow \infty$ 时, $F(x) \rightarrow 1$; 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $F(x) \rightarrow 0$.

离散型随机变量分布函数:

对于离散型随机变量, $F(X) = P(X \leq x) = \sum_{\{i|a_i \leq x\}} p_i, \quad p_i = P(X = i) = F(i) - F(i-1)$ 。

1. 连续型随机变量: 设 X 为一随机变量, 如果 X 不仅有无限个而且有不可数个值, 则称 X 为一个连续型随机变量。

定义 4.1.6. 概率密度函数:

设连续型随机变量 X 有概率分布函数 $F(x)$, 则 $F(x)$ 的导数 $f(x) = F'(x)$ 称为 X 的概率密度函数。

性质

1. 对于所有的 $-\infty < x < +\infty$, 有 $f(x) \geq 0$;

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$;

3. 对于任意的 $-\infty < a \leq b < +\infty$, 有 $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$.

注:

1. 对于任意的 $-\infty < x < +\infty$, 有 $P(X = x) = \int_x^x f(u)du = 0$.
2. 假设有总共一个单位的质量连续地分布在 $a \leq x \leq b$ 上, 那么 $f(x)$ 表示在点 x 的质量密度且 $\int_c^d f(x)dx$ 表示在区间 $[c, d]$ 上的全部质量。

定义 4.1.7. 概率分布函数:

设 X 为一连续型随机变量, 则

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u)du, \quad -\infty < x < +\infty$$

4.2 重要公式与结论

二项分布 $X \sim B(n, p)$ 的期望为 np , 方差为 $np(1-p)$

均匀分布 $X \sim U(a, b)$ 的期望为 $\frac{a+b}{2}$, 方差为 $\frac{1}{12}(b-a)^2$

定义 4.2.1. 边缘分布:

因为 X 的每个分量 X_i 都是一维随机变量, 故它们都有各自的分布 F_i ($i = 1, \dots, n$), 这些都是一维分布, 称为随机向量 X 或其分布 F 的边缘分布。

离散随机变量:

$$\begin{aligned} p_X(x_i) &= P(X = x_i) \\ &= \sum_j^m P(X = x_i, Y = y_j) \\ &= \sum_j^m p_{ij} = p_{i\cdot}, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_Y(y_i) &= P(Y = y_i) \\
 &= \sum_i^m P(X = x_i, Y = y_j) \\
 &= \sum_i^m p_{ij} = p_{j\cdot}, \quad j = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned}$$

连续随机变量:

为求某分量 X_i 的概率密度函数, 只需把 $f(x_1, \dots, x_n)$ 中的 x_i 固定, 然后对 $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ 在 $-\infty$ 到 ∞ 之间做定积分, 如

$$(X, Y) \sim f(x, y) f_X(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) dv f_Y(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) du$$

定义 4.2.2. 离散型随机变量的条件分布: 设 (X, Y) 为二维离散型随机变量, 对于给定的事件 $\{Y = y_j\}$, 其概率 $P(Y = y_j) > 0$, 则称

$$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{j\cdot}}, \quad i = 1, 2, \dots$$

为在给定 $Y = y_j$ 的条件下 X 的条件分布律。类似的, 称

$$P(Y = y_i | X = x_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}, \quad j = 1, 2, \dots$$

为在给定 $X = x_j$ 的条件下 Y 的条件分布律。

连续型随机变量的条件分布: 设 (X, Y) 为二维连续型随机变量, 对于给定条件 $Y = y$ 下的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}, \quad f_Y(y) > 0.$$

类似的, 在 $X = x$ 下的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}, \quad f_X(x) > 0.$$

可推广

定义 4.2.3. 随机变量的独立性

称随机变量 X_1, \dots, X_n 相互独立,

1. 离散型随机变量

则联合分布律等于各自的边缘分布律的乘积, 即

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \dots P(X_n = x_n)$$

其中 (x_1, \dots, x_n) 为 (X_1, \dots, X_n) 的值域中的任意一点。

2. 连续型随机变量

则联合密度等于各自的边缘密度的乘积, 即

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n), \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in R^n$$

3. 一般地

设 X_1, \dots, X_n 为 n 个随机变量, 如果它们的联合分布函数等于各自边缘分布函数的乘积, 即

$$F(X_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \dots F_n(x_n), \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in R^n$$

则称随机变量 X_1, \dots, X_n 相互独立。

以下内容才是重点!!!!

以下内容才是重点!!!!

以下内容才是重点!!!!

4.2.1 数学期望（均值）与方差**定义 4.2.4. 数学期望**

设随机变量 X 只取有限个可能值 a_1, \dots, a_m , 其概率分布为 $P(X = a_i) = p_i$ ($i = 1, \dots, m$).

则 X 的数学期望记作 EX 或 $E(X)$, 定义为 $E(X) = a_1p_1 + a_2p_2 + \dots + a_mp_m$.

数学期望也常称为均值, 即指以概率为权的加权平均。

1. 离散型变量的数学期望: $E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i p_i$. (当级数绝对收敛, 即 $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| p_i < \infty$)

2. 连续型变量的数学期望: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$. (当 $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$)

性质

1. 若干个随机变量之和的期望等于各变量的期望值和, 即

$$E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n).$$

2. 若干个独立随机变量之积的期望等于各变量的期望之积, 即

$$E(X_1 X_2 \dots X_n) = E(X_1) E(X_2) \dots E(X_n).$$

3. 设随机变量 X 为离散型, 有分布 $P(X = a_i) = p_i (i = 1, 2, \dots)$; 或者为连续型, 有概率密度函数 $f(x)$. 则

$$E(g(x)) = \sum_i g(a_i) p_i \quad (\text{当 } \sum_i |g(a_i)| p_i < \infty \text{ 时})$$

或

$$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx \quad (\text{当 } \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f(x) dx < \infty \text{ 时})$$

4. 若 c 为常数, 则 $E(cX) = cE(X)$.

定义 4.2.5. 条件数学期望

随机变量 Y 的条件期望就是它在给定的某种附加条件下的数学期望。

$E(Y|x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y|x) dy$. 它反映了随着 X 取值 x 的变化 Y 的平均变化的情况如何。

在统计上, 常把条件期望 $E(Y|x)$ 作为 x 的函数, 称为 Y 对 X 的回归函数。

性质: 1. $E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} E(Y|x) f_X(x) dx$.

2. $E(Y) = E[E(Y|X)]$.

定义 4.2.6. 方差与标准差

设 X 为随机变量, 分布为 F , 则 $Var(X) = E(X - EX)^2$ 称为 X (或分布 F) 的方差,

其平方根 $\sqrt{Var(X)}$ (取正值) 称为 X (或分布 F) 的标准差。

性质: 1. $Var(X) = E(X^2) - (EX)^2$.

2. 常数的方差为 0, 即 $Var(c) = 0$.

3. 若 c 为常数, 则 $Var(X + c) = Var(X)$.

4. 若 c 为常数, 则 $Var(cX) = c^2 Var(X)$.

5. 独立随机变量和的方差等于各变量方差和, 即 $Var(X_1 + \dots + X_n) = Var(X_1) + \dots + Var(X_n)$.

4.3 期望经典问题入门

<https://notes.sshwy.name/Math/Expectation/Classic/#E-%E7%BB%8F%E5%85%B8%E9%A2%98> 重要公式与结论 1. 期望具有线性性

2. 独立事件的期望有

$$E(XY) = EXEY$$

3.

$$E(X) = E(E(X|Y))$$

4.3.1 普通

结论 4.3.1. 有 n 个随机变量 $\langle X_n \rangle$, 每个随机变量量都是从 $[1, m]$ 中随机一个整数, $\max \langle X_n \rangle$ 的期望为

$$m - \frac{1}{m^n} \sum_{i=1}^{m-1} i^n$$

。

证明. 设 $Y = \max \langle X_n \rangle$, 有

$$\begin{aligned}
 EY &= \sum_{1 \leq i \leq m} P(Y = i)i \\
 &= \sum_{1 \leq i \leq m} i(F_y(i) - F_y(i-1)) \\
 &= \frac{1}{m^n} \left(\sum_{1 \leq i \leq m} i^{n+1} - i \cdot (i-1)^n \right) \\
 &= \frac{1}{m^n} \left(\sum_{1 \leq i \leq m} i^{n+1} - \sum_{0 \leq i \leq m-1} i^{n+1} + i^n \right) \\
 &= \frac{1}{m^n} \left(m^{n+1} - \sum_{0 \leq i \leq m-1} i^n \right) \\
 &= m - \frac{1}{m^n} \sum_{i=1}^{m-1} i^n
 \end{aligned}$$

□

结论 4.3.2. 概率为 p 的事件期望 $\frac{1}{p}$ 次发生.

证明. 设随机变量 X 表示其在第 x 次发生.

$$\begin{aligned}
 EX &= \sum_{i=1}^{\infty} P(X = i)i \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} P(X = i) \sum_{j=1}^i 1 \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} P(X \geq j) \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} (1-p)^{j-1} \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} (1-p)^j \\
 &= \frac{1}{1 - (1-p)} \\
 &= \frac{1}{p}
 \end{aligned}$$

□

结论 4.3.3. 现在红包发了一个 w 元的红包, 有 n 个人来抢 (均匀分布)。那么请问第 k 个人期望抢到 $\frac{w}{2^k}$.

证明. 设第 k 个人抢到 X , 前面的人抢 Y . 有

$$E(X) = E(E(X|Y)) = E\left(\frac{w-Y}{2}\right) = \frac{w}{2} - \frac{1}{2}E(Y)$$

然后容易解出答案.

离散情况这样难以求解, 在取球一节有其他解法

□

结论 4.3.4. 赠券收集问题

一个 n 面的骰子, 期望 nH_n 次能使得每一面都被掷到。

证明. t_x 为设已经出现了 $x-1$ 面, 掷出第 x 面的次数.

设 $T = \sum t$. 有

$$E(T) = \sum_{i=1}^n E(t_i)$$

由于掷出第 x 面的概率为 $\frac{n-x+1}{n}$, 固

$$\begin{aligned} E(T) &= \sum_{i=1}^n E(t_i) \\ &= \sum_{x=1}^n \frac{n-x+1}{n} \\ &= n \cdot H_n \end{aligned}$$

□

同时他们也是相互独立的.

4.3.2 拿球

结论 4.3.5. 箱子里有 n 个球 $1, 2, \dots, n$, 你要从里面拿 m 次球, 拿了后不放回, 取出的数字之和的期望为 $\frac{m(n+1)}{2}$ 。

证明. 设随机变量 x_i :

$$x_i = \begin{cases} i & , \text{if } i \text{ is chosen} \\ 0 & , \text{if } i \text{ isn't chosen} \end{cases}$$

那么有

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) &= \sum_{i=1}^n E(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{m}{n} i \\ &= \frac{m(n+1)}{2} \end{aligned}$$

发现是否放回不影响期望

□

结论 4.3.6. 箱子里有 n 个球 $1, 2, \dots, n$, 你要从里面拿 m 次球, 拿了后以 p_1 的概率放回, p_2 的概率放回两个和这个相同的球 (相当于增加一个球), 取出的数字之和的期望为 $\frac{m(n+1)}{2}$ 。

证明. 设 x_i 为第 i 个球的贡献, y_i 为其被拿出来的次数, 那么 $x_i = i \cdot y_i$

$$E\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \sum_{i=1}^n E(y_i) \cdot i$$

因为 $E(y_i) = E(y_j)$, $\sum y_i = m$ 得出 $E(y_i) = \frac{m}{n}$ 故上式答案为 $\frac{m(n+1)}{2}$

□

4.3.3 游走

结论 4.3.7. 在一条 n 个点的链上游走, 从一端走到另一端的期望步数为 $(n-1)^2$ 。

证明. 假设步数是 S , 求 S 的期望。我们定义一个随机变量 x_i 表示从 i 出发随机游走, 第一次到 $i+1$ 的步数。

$$E\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} E(x_i)$$

又

$$EX_{i+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 + EX_i + EX_{i+1})$$

故

$$EX_{i+1} = EX_i + 2$$

□

结论 4.3.8. 在一个 n 个点的完全图上游走, 从一个点走到另一个点的期望步数为 $n-1$ 。

证明. 由于是完全图, 所以任意两个点为起点和终点的期望步数是相同的. 于是有

$$E = \frac{1}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}(1+E)$$

得到 $E = n-1$

□

结论 4.3.9. 在一个 n 个点的完全二分图 $K_{n,n}$ 上游走, 从一个点走到另一个点的期望步数为 $2n-1$ 。

证明. E_1 表示异侧点的期望, E_2 表示同侧点的期望。

$$E_1 = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}(1+E_2)$$

$$E_2 = 1 + E_1$$

故 $E_1 = 2n-1, E_2 = 2n$

□

结论 4.3.10. 在一个 n 个点的菊花图上游走, 从一个点走到另一个点的期望步数为 $2n-3$ 。

证明与上类似

4.3.4 解题方法

1. 贡献法,

若不行可以尝试更换计算贡献的东西 (如边 \rightarrow 点)

第五章 杂

5.1 最小二乘法

误差的平方和最小

$$L = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2$$

拟合直线 $y = kx + b$

$$\begin{cases} k &= \frac{\sum xy - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x^2 - n\bar{x}^2} \\ b &= \bar{y} - k\bar{x} \end{cases}$$