

# XCPC 数学基础

ljh

2025 年 8 月 4 日

# 目录

<b>第一章 组合数学</b>	<b>1</b>
1.1 基本排列组合公式 . . . . .	1
1.2 重要组合恒等式 . . . . .	2
1.3 二项式系数 . . . . .	3
1.4 抽屉原理 . . . . .	4
1.5 容斥原理 . . . . .	6
1.5.1 容斥原理 . . . . .	6
1.5.2 莫比乌斯反演 I . . . . .	7
1.5.3 莫比乌斯反演 II . . . . .	12
1.6 递推关系和生成函数 . . . . .	12
1.6.1 生成函数 . . . . .	13
1.7 卡特兰数和第二类斯特林数 . . . . .	16
1.7.1 卡特兰数 . . . . .	16
1.7.2 斯特林数 . . . . .	17
1.7.3 球盒模型 . . . . .	18
<b>第二章 数论</b>	<b>20</b>
2.1 整除 . . . . .	20
2.2 同余 . . . . .	23
2.2.1 同余 . . . . .	23

目录	II
2.2.2 线性同余方程 . . . . .	25
2.3 乘性函数 . . . . .	29
<b>第三章 求和</b>	<b>33</b>
3.1 递归问题 RECURRENT PROBLEMS . . . . .	33
3.1.1 repertoire method . . . . .	33
3.1.2 约瑟夫问题 . . . . .	34
3.2 和式 SUMS . . . . .	34
3.2.1 和式和递归式 SUMS AND RECURRENCES . . . . .	34
3.2.2 和式的处理 MANIPULATION OF SUMS . . . . .	36
3.2.3 扰动法 (perturbation method) . . . . .	36
3.2.4 多重和式 MULTIPLE SUMS . . . . .	37
3.2.5 一般性的方法 GENERAL METHODS . . . . .	39
3.2.6 有限微积分 . . . . .	42
3.2.7 无限和式 INFINITE SUMS . . . . .	45
<b>第四章 概率论</b>	<b>47</b>
4.1 基本概念和公式 . . . . .	47
4.2 重要公式与结论 . . . . .	51
4.2.1 数学期望 (均值) 与方差 . . . . .	53
4.3 期望经典问题入门 . . . . .	55
4.3.1 普通 . . . . .	55
4.3.2 拿球 . . . . .	58
4.3.3 游走 . . . . .	58
4.3.4 解题方法 . . . . .	60
<b>第五章 杂</b>	<b>61</b>
5.1 最小二乘法 . . . . .	61

# 第一章 组合数学

## 1.1 基本排列组合公式

1. 线性排列:  $n$  个数的  $r$  排列  $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$
2. 圆排列:  $n$  个数的  $r$  排列  $\frac{P(n, r)}{r}$
3. 项链数:  $n$  个不同的珠子串成一串项链, 则得到不同的项链数为

$$p = \begin{cases} 1, & (n \leq 2) \\ \frac{(n-1)!}{2}, & (otherwise) \end{cases}$$

4. 多重集合的排列: 有  $k$  种元素, 每种  $n_1, n_2, \dots, n_k$  个, 的排列公式为

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^k (n_i!)}$$

或记为

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}$$

5. 组合:

$$\binom{n}{r} = \frac{P(n, r)}{r!}$$

6. 多重集的组合 设  $S$  是有  $k$  种元素的集合, 每种元素无限个 ( $\geq r$ ), 则其  $r$  组合的个数为:

$$\binom{r+k-1}{r}$$

或者说有

结论 1.1.1.  $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = r (x_i \geq 0)$  的整数解有

$$\binom{r+k-1}{r}$$

种.

## 1.2 重要组合恒等式

1. Pascal 公式

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

2.

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$$

3.

$$m \cdot \binom{n}{m} = n \cdot \binom{n-1}{m-1}$$

4.

$$\sum_{k=1}^n k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = n \cdot 2^{n-1}$$

5. 朱世杰恒等式

$$\binom{m+n+1}{n+1} = \sum_{i=0}^m \binom{n+i}{n}$$

6. 范德蒙德恒等式

$$\binom{a+b}{n} = \sum_{i=0}^k \binom{a}{i} \binom{b}{n-i}$$

特别地:

$$\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{n}{n-i}$$

结论 1.2.1.  $m$  个  $a$ , 和最多  $n$  个  $b$  的排列数等于

$$\binom{m+n+1}{m+1}$$

结论 1.2.2. 最多  $m$  个  $a$ , 和最多  $n$  个  $b$  的排列数等于

$$\binom{n+m+2}{m+1} - 1$$

7.

$$\sum_{1 \leq k \leq n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1} \quad (n \geq 1)$$

8. 利用导数可以得到

$$\sum_{1 \leq k \leq n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2} \quad (n \geq 1)$$

## 1.3 二项式系数

结论 1.3.1. 在杨辉三角中规定只能向下或者右下移动, 从  $(0,0)$  到  $(n,k)$  的路径数为  $\binom{n}{k}$

定理 1.3.2. 二项式定理

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

定理 1.3.3. *Sperner* 定理:

设  $S$  是  $n$  元素集合. 那么  $S$  上的一个反链至多包含  $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$  个集合.

其中, 这里的反链指的是以集合包含为偏序关系的反链, 即  $S$  的一个子集的集合, 任何两个集合没有关系.

**结论 1.3.4.** 多项式系数的帕斯卡公式

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_t} = \binom{n-1}{n_1-1, n_2, \dots, n_t} + \binom{n-1}{n_1, n_2-1, \dots, n_t} + \dots + \binom{n-1}{n_1, n_2, \dots, n_t-1}$$

**定理 1.3.5.** 多项式定理

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_t)^n = \sum \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_t} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_t^{n_t}$$

**定理 1.3.6.** 牛顿多项式定理

$$(1+z)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} z^k \quad (a \in R, |z| < 1)$$

**定理 1.3.7.** Dilworth 定理

设  $(X, \leq)$  是有限偏序集合, 而  $m$  是反链的最大大小, 则  $X$  可以被划分为  $m$  个链, 但不能被划分成小于  $m$  个链.

设  $(X, \leq)$  是有限偏序集合, 而  $r$  是链的最大大小, 则  $X$  可以被划分为  $r$  个反链, 但不能被划分成小于  $r$  个反链.

## 1.4 抽屉原理

简单形式

**结论 1.4.1.** 如果要把  $n+1$  个物体放进  $n$  个盒子, 那么至少有一个盒子有至少 2 个物体

加强形式

**结论 1.4.2.** 设  $q_1, q_2, \dots, q_n$  是正整数. 如果将  $q_1 + q_2 + \dots + q_n - n + 1$  个物体放进  $n$  个盒子. 那么要么第一个盒子含有  $q_1$  个物体,  $\dots$ , 要么第  $n$  个物体含有  $q_n$  个物体.

**定理 1.4.3.** *Ramsey* 定理

在 6 个人 (或者更多), 要么有 3 个人互相认识, 要么有 3 个人互相都不认识.

或者说

对于  $K_n (n \geq 6)$  我们给他的所有边染红色或蓝色, 总存在一个红  $K_3$  或蓝  $K_3$ , 记为  $K_6 \rightarrow K_3, K_3$

推广

**定理 1.4.4.** 若  $m, n \geq 2$ , 存在正整数  $p$ , 使得  $K_p \rightarrow K_m, K_n$  事实上, 注意到若  $p$  成立, 则对于  $q \geq p$  都成立, 取一个子图即可. 我们记 *Ramsey* 数  $r(m, n)$  为使之成立的最小的数. *Ramsey* 定理保证这样的数一定存在. 注意到

$$r(m, n) = r(n, m)$$

以及

$$r(2, m) = m$$

当  $m \geq 2$  时,  $r(2, m)$  称为平凡的 *Ramsey* 数 (交换同理).

性质

1.

$$r(m, n) \leq r(m-1, n) + r(m, n-1) (m, n \geq 3)$$

2.

$$r(m, n) \leq \binom{m+n-2}{n-1}$$

(数学归纳法证明)



## 1.5 容斥原理

### 1.5.1 容斥原理

**定理 1.5.1.** 容斥原理

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}| = |S| - \sum |A_i| + \sum |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

可根据贡献法证明.

应用: 不定方程整数解个数问题

**例 1.5.2.** 求下列方程整数解个数

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$$

满足

$$1 \leq x_1 \leq 5, \quad -2 \leq x_2 \leq 4, \quad 0 \leq x_3 \leq 5, \quad 3 \leq x_4 \leq 9$$

解:

等价于

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 16$$

满足

$$0 \leq a_1 \leq 4, \quad 0 \leq a_2 \leq 6, \quad 0 \leq a_3 \leq 5, \quad 0 \leq a_4 \leq 6$$

不加范围的解的个数为

$$|S| = \binom{16+4-1}{16} = 969$$

其中设  $A_1$  为  $a_1$  大于 4 的解的集合  $A_2$  为  $a_2$  大于 6 的解的集合 ...

$$|A_1| = \binom{11+4-1}{11} = 364$$

$$|A_2| = \binom{9+4-1}{9} = 220$$

$$|A_3| = \binom{13}{10} = 286$$

$$|A_4| = \binom{12}{9} = 220$$

同理算交集. 然后根据容斥原理可得出答案为 55

**结论 1.5.3. 错位排列**

$$D_n = n! \left( 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right)$$

有性质

1.

$$\frac{D_n}{n!} \approx e^{-1}$$

2.  $D_1 = 0, D_2 = 1$

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

3.

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

$$\iff D_n - nD_{n-1} = -(D_{n-1} - (n-1)D_{n-2})$$

$$\iff D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$$

**结论 1.5.4.**

$$Q_n = n! - \binom{n-1}{1}(n-1)! + \binom{n-1}{2}(n-2)! - \binom{n-1}{3}(n-3)! + \cdots + (-1)^{n-1} \binom{n-1}{n-1} 1!$$

为不出现  $i(i+1)$  的排列数并且有

$$Q_n = D_n + D_{n-1}$$

## 1.5.2 莫比乌斯反演 I

容斥原理是莫比乌斯反演在有限偏序集上的一个实例.

偏序集形式的容斥原理

对于一个偏序集  $(\mathcal{P}(X_n), \subseteq)$ , ( $X_n$  为  $n$  元集), 若

$$F, G : \mathcal{P}(X_n) \rightarrow R$$

且

$$G(K) = \sum_{L \subseteq K} F(L) \quad (K \subseteq X_n)$$

考虑反解, 有:

$$F(K) = \sum_{L \subseteq K} (-1)^{|K|-|L|} G(L)$$

证明.

$$\begin{aligned} \sum_{L \subseteq K} (-1)^{|K|-|L|} G(L) &= \sum_{L \subseteq K} (-1)^{|K|-|L|} \sum_{T \subseteq L} F(T) \\ &= \sum_{T \subseteq K} F(T) \sum_{T \subseteq L \subseteq K} (-1)^{|K|-|L|} \\ &= F(K) \end{aligned}$$

□

这就是莫比乌斯反演.

因此我们可以对  $F, G$  下定义, 令  $A_1, A_2, \dots, A_n$  是有限集  $S$  的子集, 且  $K \subseteq X_n, F(K)$  为恰好属于所有  $A_i$  that  $i \notin K$  的元素个数, 即

$$F(K) = \left| \bigcap_{i \notin K} A_i - \bigcup_{i \in K} A_i \right|$$

显然有

$$F(X_n) = n - \left| \bigcup_{i \in X_n} A_i \right|$$

然后令

$$G(K) = \sum_{L \subseteq K} F(L) = \left| \bigcap_{i \notin K} A_i \right|$$

由莫比乌斯反演有

$$F(K) = \sum_{L \subseteq K} (-1)^{|K|-|L|} G(L)$$

有

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n}| = \sum_{J \subseteq K} (-1)^{|J|} \left| \bigcap_{i \in J} A_i \right|$$

等价于上面的容斥原理.

## 偏序集里的莫比乌斯反演

建议先看看代数系统. 下面将莫比乌斯反演推广到偏序集  $(X, \leq)$  里. 以下介绍的函数满足

$$f: X \times X \rightarrow \mathcal{R}$$

且  $f(x, y) = 0$  if  $x \not\leq y$ . 下面考察代数系统  $\langle \mathcal{F}, * \rangle$ , 设其为  $A$

**定义 1.5.5.** 令  $h = f * g$  为  $f$  和  $g$  的卷积, 如果满足:

$$h(x, y) = \begin{cases} \sum_{z: x \leq z \leq y} f(x, z)g(z, y) & , x \leq y \\ 0 & , other \end{cases}$$

显然卷积运算在该偏序集上是封闭的, 故这是一个广群. 并且显然其是满足结合律, 故其是一个半群.

**定义 1.5.6.** 科罗内尔  $\delta$  函数:

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & , x = y \\ 0 & , other \end{cases}$$

显然有  $f * \delta = \delta * f = f$ , 显然其为卷积运算的么元. 故这个一个独异点.

**定义 1.5.7.**  $\zeta$  函数:

$$\zeta(x, y) = \begin{cases} 1 & , x \leq y \\ 0 & , other \end{cases}$$

**定义 1.5.8.** 逆函数:

对于  $X$  中所有的  $y$  满足  $f(y, y) \neq 0$ , 有其逆元.

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{f(y, y)}, & x = y \\ -\frac{1}{f(y, y)} \sum_{x \leq z < y} g(x, z)f(z, y), & x < y \\ 0, & other \end{cases}$$

证明. 若  $x \neq y$

$$\begin{aligned}
 (g * f)(x, y) &= g(x, y)f(y, y) + \sum_{x \leq z < y} g(x, z)f(z, y) \\
 &= - \sum_{x \leq z < y} g(x, z)f(z, y) + \sum_{x \leq z < y} g(x, z)f(z, y) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

故  $g$  是其左逆元, 类似地可以证明其是右逆元. 故其是  $f$  的逆元.  $\square$

**定义 1.5.9.** 莫比乌斯函数:

莫比乌斯函数为  $\zeta$  函数的逆函数.

具体地:

$$\mu(x, y) = \begin{cases} 1 & , x = y \\ -\sum_{x \leq z < y} \mu(x, z) & , x < y \end{cases}$$

下面给出一些常见偏序集的莫比乌斯函数:

1.  $(\mathcal{P}(X_n), \subseteq)$

$$\mu(A, B) = (-1)^{|B| - |A|}$$

2.  $(X_n, \leq)$  即正整数集合上的全序关系

$$\mu(k, l) = \begin{cases} 1 & , l = k \\ -1 & , l = k + 1 \\ 0 & , other \end{cases}$$

3.  $(X_n, |)$ , 即正整数集合上的整除关系

有  $\mu(a, b) = \mu\left(1, \frac{b}{a}\right)$

$$\mu(1, n) = \begin{cases} 1 & , n = 1 \\ (-1)^k & , n \text{ 是互不相同的素数乘积} \\ 0, & , other \end{cases}$$

#### 4. 直积的莫比乌斯函数

线性有限偏序集  $(X, \leq_1), (Y, \leq_2)$ , 且  $\mu_1, \mu_2$  分别为其莫比乌斯函数, 定义其笛卡尔积的偏序为

$$(x, y) \leq (x', y') \iff x \leq x' \text{ and } y \leq y'$$

那么新偏序集  $(X \times Y, \leq_3)$  的莫比乌斯函数为

$$\mu((x, y), (x', y')) = \mu_1(x, x')\mu_2(y, y')$$

#### 定理 1.5.10. 莫比乌斯反演:

设  $(X, \leq)$  是一个具有最小元的线性偏序集. 令  $\mu$  是其莫比乌斯函数, 定义在  $X$  上的实值函数  $F, G: X \rightarrow \mathcal{R}$  满足

$$G(x) = \sum_{z \leq x} F(z), \quad (x \in X)$$

那么有

$$F(x) = \sum_{y \leq x} \mu(y, x)G(y), \quad (x \in X)$$

证明.

$$\begin{aligned} \sum_{y \leq x} \mu(y, x)G(y) &= \sum_{y \leq x} \mu(y, x) \sum_{z \leq y} F(z) \\ &= \sum_{z \leq x} F(z) \sum_{z \leq y \leq x} \zeta(z, y)\mu(y, x) \\ &= \sum_{z \leq x} F(z)\delta(z, x) \\ &= F(x) \end{aligned}$$

□

这里最小元保证了和式有限, 因此不用判断敛散性.(这里对和式的一些变换在无穷和式有的有时不成立)

事实上, 莫比乌斯反演是卷积结合律的一个推论.

证明. 不妨设最小元为 0, 定义  $f, g \in \mathcal{F}(X)$

$$f(x, y) = \begin{cases} F(y) & , x = 0 \\ 0 & , other \end{cases}$$

$$g(x, y) = \begin{cases} G(y) & , x = 0 \\ 0 & , other \end{cases}$$

从而有  $g = f * \zeta$ , 从而有  $g * \mu = f$ ,

□

### 1.5.3 莫比乌斯反演 II

定理 1.5.11. 存在最大元和最小元时。

$$\mu_{\leq}(x, y) = \mu_{\geq}(y, x)$$

## 1.6 递推关系和生成函数

一些斐波拉契数列的性质:

1.

$$\begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 & F_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$$

$$2. F_{2k} = F_k(2F_{k+1} - F_k); F_{2k+1} = F_{k+1}^2 + F_k^2$$

3.

$$\sum_{i=0}^n f_i = f_{n+2} - 1$$

4.

$$2|f_n \iff 3|n$$

### 1.6.1 生成函数

这里只做简单介绍

牛顿二项式定理

**定理 1.6.1.** 设  $\alpha$  是一个实数. 对于任意  $x, y$  with  $0 \leq |x| < |y|$ , 有性质

$$(x + y)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k y^{\alpha-k}$$

where

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

设  $|z| < 1$ , 特别地有

$$(1+z)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k$$

**结论 1.6.2.** 若  $\alpha$  是一个负整数, 且  $\alpha = -n$  then

$$\begin{aligned} \binom{\alpha}{k} &= \binom{-n}{k} \\ &= \frac{-n(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!} \\ &= (-1)^k \binom{n+k-1}{k} \end{aligned}$$

thus: for  $|z| < 1$

$$(1+z)^{-n} = \frac{1}{(1+z)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} z^k$$



## 一般生成函数

无穷数列  $h_0, h_1, \dots$  的生成函数为  $g(x) = h_0 + h_1x + h_2x^2 + \dots$

生成函数的一些性质

设  $H$  为数列,  $F$  为其对应的生成函数

1.  $cH \rightarrow cF$
2.  $H_1 + H_2 \rightarrow F_1 + F_2$
3.  $0, 0, 0, \dots + H \rightarrow x^k F$
4.  $iH(H_1, 2H_2, \dots) \rightarrow F'$
5. 令  $G_n = \sum_{i+j=n} H_{1i} \cdot H_{2j}$  那么  $G \rightarrow F_1 \cdot F_2$

一面介绍两种重要的生成函数即: 多重集合的  $n$  组合级数的生成函数

根据泰勒级数

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

我们可以解  $h_n$  表示

$$e_1 + e_2 + \dots + e_k = n$$

的非负整数解的个数。

其生成函数为

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n} x^n = \frac{1}{(1-x)^k}$$

**例 1.6.3.** 设  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n$  的整数解个数, 其中  $x_1$  是偶数,  $x_2$  是 5 的倍数,  $x_3 \leq 4, x_4 \leq 1$

解:

$$\begin{aligned}
g(x) &= (1 + x^2 + x^4 + \cdots)(1 + x^5 + \cdots)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(1 + x) \\
&= \frac{1}{1 - x^2} \frac{1}{1 - x^5} \frac{1 - x^5}{1 - x} (1 + x) \\
&= \frac{1}{(1 - x)^2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{n} x^n
\end{aligned}$$

故为  $n+1$ .

我们得到几个小结论:

1. 限制  $\geq k$ , 可以乘  $x^k$
2. 限制  $\leq k$ , 少写几项
3. 是  $k$  的倍数, 整体代换

### 指数生成函数

无穷数列  $h_0, h_1, \cdots$  的指数生成函数为  $g(x) = h_0 + h_1 \frac{x}{1!} + h_2 \frac{x^2}{2!} + \cdots$

下面给出一类常用的指数生成函数, 即多重集合的  $n$  排列数的生成函数.

**定理 1.6.4.** 设  $S$  是多重集合  $\{n_1 a_1 \cdots n_k a_k\}$ , 其中  $n_i \geq 0$ , 那么数列的指数生成函数为

$$g(x) = f_{n_1}(x) f_{n_2}(x) \cdots f_{n_k}(x)$$

其中

$$f_{n_i}(x) = \sum_{k=0}^{n_i} \frac{x^k}{k!}$$

**例 1.6.5.** 用红, 白, 蓝, 绿色给  $1 \times n$  棋盘染色, 其中要求红色为偶数, 白色是奇数, 求方案数

解:

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right)^2 \left( 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots \right) \left( x + \frac{x^3}{3!} + \cdots \right) \\
 &= e^{2x} \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \\
 &= \frac{e^{4x} - 1}{4} \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} 4^n \frac{x^n}{n!} - \frac{1}{4} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} 4^{n-1} \frac{x^n}{n!}
 \end{aligned}$$

故为  $4^{n-1}$

1. 对于偶数限制此项为

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

2. 奇数限制

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

对于求解线性齐次递推关系这里不做介绍

## 1.7 卡特兰数和第二类斯特林数

### 1.7.1 卡特兰数

折线图

只有两类线段  $(a,b)-(a+1,b+1)$  或  $(a,b)-(a+1,b-1)$

**结论 1.7.1.**  $A_0(a_0, b_0), A_n(a_n, b_n)$  能用折线连接的充要条件是

$$|b_n - b_0| \leq a_n - a_0 = n \text{ 且 } 2 \mid (|b_n - b_0| + n)$$

连接这两点的折线有

$$\binom{n}{\frac{n+b_n-b_0}{2}}$$

条.

卡特兰数:

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$

递推式

$$C_n = \sum_{k=1}^n C_{k-1} C_{n-k} = \frac{1}{n+1} (4n-2) C_{n-1}$$

Catalan 数列  $C_n$  可以应用于以下问题:

## 1.7.2 斯特林数

第二类斯特林数

$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ : 表示将  $n$  个不同的球放到  $k$  个相同的盒子中的方案数, 且不能出现空盒。

有递推式:

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}$$

通项公式:

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} = \frac{1}{m!} \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \binom{n}{i} (m-i)^n$$

生成函数:

$$\sum_{i \geq k} \left\{ \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right\} x^i = \frac{x^k}{\prod_{j=1}^k (1-jx)}$$

第一类斯特林数

$\left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$ : 表示  $n$  个不同的人坐  $k$  张圆桌的方案数。

有递推式:

$$\left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = (n-1) \left[ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right] + \left[ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right]$$

### 1.7.3 球盒模型

有  $n$  个球,  $m$  个盒子。

球是否相同, 盒子是否相同, 是否允许空盒子。

1. 不同, 不同, 空

$$m^n$$

2. 不同, 不同, 不空

$$m! \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}$$

3. 不同, 同, 空

$$\sum_{i=0}^m \left\{ \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right\}$$

4. 不同, 同, 不空

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}$$

5. 同, 不同, 空

$$\binom{n+m-1}{n}$$

6. 同, 不同, 不空,

$$\binom{n-1}{m-1}$$

7. 同, 同, 空

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$$

的  $x^n$  的系数。

8. 同, 同, 不空

$$\frac{x^m}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$$

的  $x^n$  的系数。

9. 把最多  $m$  个球放入  $n$  个不同的盒子里, 允许空的方案为

$$\binom{n+m}{m}$$

## 第二章 数论

### 2.1 整除

结论 2.1.1. 令  $a, b, c$  为整数, 那么有:

$$\gcd(a + cb, b) = \gcd(a, b)$$

定义 2.1.2.  $a, b, m, n \in \mathbb{Z}$ , 称  $ma + nb$  为  $a, b$  的线性组合

定理 2.1.3. 裴蜀定理:

如果  $a, b$  均为整数, 则有整数  $m$  和  $n$ , 使得

$$ma + nb = \gcd(a, b)$$

其中该等式又被称为裴蜀等式,  $m, n$  被称为裴蜀数.

可以用扩展欧几里得算法求出  $ma + nb = \gcd(a, b)$  的特解, 然后有通解

$$\begin{cases} m = m_0 + k \frac{b}{\gcd(a, b)} \\ n = n_0 - k \frac{a}{\gcd(a, b)} \end{cases}$$

注意到

$$a(m + bu) + b(n - au) = \gcd(a, b)$$

故满足等式的  $m, n$  有无穷多对.

引理 2.1.4. 两个不全为 0 的整数  $a, b$  的最大公因数是其线性组合中最小的正整数.

证明. 不妨设  $d$  是  $a, b$  线性组合中最小的正整数. 考虑带余除法:

$$a = dq + r \text{ 从而有 } r = a - dq = a - q(ma + nb) = (1 - qm)a - qnb$$

因此  $d|a$ , 同理  $d|b$ , 故  $d$  为公因数.

不妨设  $e = \gcd(a, b)$ , 那么  $d|e$ , 又  $e|(ma + nb)$ , 即  $e|d$

故  $e = d$  □

**定理 2.1.5.** 如果  $a, b$  是整数, 那么所有  $a, b$  的线性组合所构成的集合与所有  $\gcd(a, b)$  的倍数所构成的集合相同. 换言之, 所有  $a, b$  的线性组合, 都是  $\gcd(a, b)$  的倍数.

**定理 2.1.6.** 如果  $a, b$  是不全为 0 的整数, 那么正整数  $d$  是  $a, b$  的最大公因数, 当且仅当 1.  $d|a, d|b$  2. 若  $c|a, c|b$ , 那么  $c|d$

**定义 2.1.7.** 令  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为不全为 0 的整数, 如果  $d$  为他们公因子中最大的一个, 则称  $d$  为  $a_1, a_2, \dots, a_n$  的最大公因数. 记为  $\gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) = d$

**定理 2.1.8.**

$$\gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) = \gcd(a_1, a_2, \dots, \gcd(a_{k-1}, a_k), \dots, a_n)$$

**定义 2.1.9.** 我们称  $a_1, a_2, \dots, a_n$  互素如果  $\gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$

**定义 2.1.10.** 我们称  $a_1, a_2, \dots, a_n$  两两互素, 如果任意两个数互素

**定理 2.1.11.** 若  $\gcd(a, m) = 1, \gcd(b, m) = 1$ , 则  $\gcd(ab, m) = 1$

若  $\gcd(a, b) = 1$ , 则  $\gcd(a^k, b^l) = 1$

**定理 2.1.12.** 设正整数  $a, b$  之积是一个整数的  $k(k \geq 2)$  次幂. 若  $\gcd(a, b) = 1$ . 则  $a, b$  都是整数的  $k$  次幂. 一般地: 设正整数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  之积是一个正整数的  $k$  次幂. 若  $a_1, a_2, \dots, a_n$  两两互素, 则  $a_1, a_2, \dots, a_n$  都是整数的  $k$  次幂.



## 引理 2.1.13.

$$\gcd(a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k) = \gcd^k(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

**推论 2.1.14.** 裴蜀定理可以推广到  $n$  个整数的情形: 设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是不全为零的整数, 则存在整数  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 使得  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = \gcd(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 。其逆定理也成立: 设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是不全为零的整数,  $d > 0$  是  $a_1, a_2, \dots, a_n$  的公因数, 若存在整数  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 使得  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = d$ , 则  $d = \gcd(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 。

**推论 2.1.15.** 对自然数  $a, b$  和整数  $n$ ,  $a$  与  $b$  互素, 考察不定方程:  $ax + by = n$  其中  $x$  和  $y$  为自然数。如果方程有解, 称  $n$  可以被  $a, b$  表示。记  $C = ab - a - b$ 。由  $a$  与  $b$  互素,  $C$  必然为奇数。则有结论: 对任意的整数  $n$ ,  $n$  与  $C - n$  中有且仅有一个可以被表示。即: 可表示的数与不可表示的数在区间  $[0, C]$  对称 (关于  $C$  的一半对称)。0 可被表示,  $C$  不可被表示; 负数不可被表示, 大于  $C$  的数可被表示。

**推论 2.1.16.** 二元一次不定方程有非负整数解的条件

$a, b > 0$ , 若  $ax + by = n, (a, b) = 1$ , 则  $n > ab - a - b$  时有解, 解的个数为  $\left\lfloor \frac{n}{ab} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{ab} \right\rfloor + 1$

## 结论 2.1.17.

$$\gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) = \gcd(a_1, a_2 - a_1, \dots, a_n - a_{n-1})$$

## 一些小结论

1. 在  $[1, 18]$  的范围下, 一个数最多与连续 7 个数不互质.
2. 一个数能被 4 整除, 当且仅当末尾两位能被 4 整除

3. 一个数能被 25 整除, 当且仅当末尾两位能被 25 整除
4. 一个数能被 8 整除, 当且仅当末尾三位能被 8 整除
5. 一个数能被 125 整除, 当且仅当末尾三位能被 125 整除
6. 一个数能被 3 整除, 当且仅当各位数之和能被 3 整除
7. 一个数能被 9 整除, 当且仅当各位数之和能被 9 整除
8. 能被 7 整除的数的特征: a. 抹去个位数 b. 减去原个位数的 2 倍 c. 其差能被 7 整除。
9. 能被 11 整除的数的特征: a. 抹去个位数 b. 减去原个位数 c. 其差能被 11 整除。或: 奇数位上的数字和与偶数位上的数和相减, 其差能被 11 整除

## 2.2 同余

以下所有参数未特殊说明, 均为默认整数, 模数默认正整数

### 2.2.1 同余

**定义 2.2.1.** 设  $m$  是正整数, 若  $m|(a-b)$ , 则称  $a$  和  $b$  模  $m$  同余. 记作  $a \equiv b \pmod{m}$

性质

1.  $a \equiv b \pmod{m} \iff \exists k(k \in \mathbb{Z}), a = b + kz$
2.  $a \equiv a \pmod{m}$
3.  $a \equiv b \pmod{m} \rightarrow b \equiv a \pmod{m}$
4.  $a \equiv b \pmod{m}, b \equiv c \pmod{m} \rightarrow a \equiv c \pmod{m}$
5.  $a \equiv b \pmod{m}, c \equiv d \pmod{m} \rightarrow a + c \equiv b + d \pmod{m}, a - c \equiv b - d \pmod{m}, ac \equiv bd \pmod{m}$
6.  $a^n \equiv b^n \pmod{m}$
7.  $ac \equiv bc \pmod{m}, d = \gcd(c, m) \rightarrow a \equiv b \pmod{m/d}$

$$8. a \equiv b \pmod{m}, n|m \rightarrow a \equiv b \pmod{n}$$

$$9. a \equiv b \pmod{m}, a \equiv b \pmod{n} \rightarrow a \equiv b \pmod{\text{lcm}(m, n)}$$

**定义 2.2.2.** 设模为  $n$ , 则根据余数可将所有的整数分为  $n$  类, 把所有与整数  $a$  模  $n$  同余的整数构成的集合叫做模  $n$  的一个剩余类, 记作  $[a]$ . 并把  $a$  叫作剩余类  $[a]$  的一个代表元。

**定义 2.2.3.** 从模  $n$  的每个剩余类中各取一个数, 得到一个由  $n$  数组成的集合, 叫做模  $n$  的一个完全剩余系。

**结论 2.2.4.** 若  $r_1, r_2, \dots, r_m$  是模  $m$  的一个完全剩余系, 且正整数  $a$  满足  $\gcd(a, m) = 1$ , 则对任何整数  $b, ar_i + b$  也为一个完全剩余类。

证明. 若不然, 则存在  $ar_i + b \equiv ar_j + b \pmod{m} \iff ar_i \equiv ar_j \pmod{m} \iff m|a(r_i - r_j) \iff m|a_i - a_j \iff r_i \equiv r_j \pmod{m}$  与条件矛盾. 故得证  $\square$

**结论 2.2.5.**  $a_1, a_2, \dots, a_m$  是模  $m$  的一个完全剩余系,  $b_1, b_2, \dots, b_n$  是模  $n$  的一个完全剩余系, 且  $\gcd(n, m) = 1$  那么  $na_i + mb_j$  是模  $mn$  的一个完全剩余系

证明. 首先由乘法原理知道有  $mn$  个数, 那么只需证两两不同余即可

若不然则对于  $(a, b) \neq (a', b')$   $na + mb \equiv na' + mb' \pmod{mn} \iff mn|n(a - a') + m(b - b') \iff m|(a - a'), n|(b - b') \iff a \equiv a' \pmod{m}, b \equiv b' \pmod{n}$  与条件矛盾. 故得证.  $\square$

**定义 2.2.6.** 简化剩余系也称既约剩余系或缩系, 是  $m$  的完全剩余系中与  $m$  互素的数构成的子集, 如果模  $m$  的一个剩余类里所有数都与  $m$  互素, 就把它叫做与模  $m$  互素的剩余类. 在与模  $m$  互素的全体剩余类中, 从每一个类中各任取一个数作为代表组成的集合, 叫做模  $m$  的一个简化剩余系。

**结论 2.2.7.** 若  $r_1, r_2, \dots, r_m$  是模  $m$  的一个缩系, 且正整数  $a$  满足  $\gcd(a, m) = 1$ , 则  $ar_i$  也为一个缩系.

证明. 由完系性质 1 可知其两两不同余, 故只需证明其与均  $m$  互质即可. 因为  $\gcd(r_i, m) = 1, \gcd(a, m) = 1 \Rightarrow \gcd(ar_i, m) = 1$  得证  $\square$

**结论 2.2.8.**  $a_1, a_2, \dots, a_m$  是模  $m$  的一个缩系,  $b_1, b_2, \dots, b_n$  是模  $n$  的一个缩系, 且  $\gcd(n, m) = 1$  那么  $na_i + mb_j$  是模  $mn$  的一个缩系

证明. 只需证明其是所有与  $mn$  互质的剩余类.

$$\begin{aligned} \gcd(a_i, m) = 1, \gcd(b_j, n) = 1, \gcd(n, m) = 1 \\ \Rightarrow \gcd(na_i, m) = 1, \gcd(mb_j, n) = 1 \\ \Rightarrow \gcd(na_i + mb_j, n) = 1, \gcd(na_i + mb_j, m) = 1 \\ \Rightarrow \gcd(na_i + mb_j, mn) = 1 \end{aligned}$$

若将  $a_i, b_j$  扩展成完系, 若  $\gcd(na_i + mb_j, mn) = 1 \Rightarrow \gcd(na_i + mb_j, m) = 1, \gcd(na_i + mb_j, n) = 1 \Rightarrow \dots$  逆着证回去即可.  $\square$

## 2.2.2 线性同余方程

**定义 2.2.9.** 形如  $ax \equiv b \pmod{m}$  的同余式称为一元线性同余方程

**定理 2.2.10.**  $\gcd(a, m) = d, d \nmid b$ , 则无解, 否则恰好有  $d$  个模  $m$  不同余的解.

证明. 若  $d \nmid b$ , 则  $ax \equiv b \pmod{m} \iff ax - ym = b$ , 根据贝祖定理显然无解.

若  $d \mid b$ , 则显然有无穷多组解, 我们设其中一组特解为  $x_0, y_0$

其通解为  $x = x_0 + (m/d)t, y = y_0 + (a/d)t$

设  $x_1 = x_0 + (m/d)t_1, x_2 = x_0 + (m/d)t_2$

$x_1 \equiv x_2 \pmod{m} \iff t_1 \equiv t_2 \pmod{d}$

所以有  $d$  个不同于的解.  $\square$

**定义 2.2.11.**  $\gcd(a, m) = 1, ax \equiv 1 \pmod{m}$  则称该同余方程的一个解为  $a$  模  $m$  的逆, 记为  $a^{-1}$ . 显然  $\gcd(a^{-1}, m) = 1$

**定理 2.2.12.** 设  $p$  为素数, 正整数  $a = a^{-1}$ , 当且仅当  $a \equiv \pm 1 \pmod{p}$ .

证明.  $a \equiv \pm 1 \pmod{p} \iff a^2 \equiv 1 \pmod{p}$  反过来. 有

$$a^2 \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow p | (a^2 - 1) \Rightarrow p | (a + 1) p | (a - 1) \Rightarrow a \equiv \pm 1 \pmod{p} \quad \square$$

**定理 2.2.13.** 威尔逊定理

若  $p$  是素数, 则  $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$

证明.  $p=2$  显然成立.

否则对于  $1 \leq a \leq p-1$ , 可以找到其逆元与之配对, 且除 1 和  $p-1$  都能两两配对.

$$\text{故 } (p-1)! \equiv p-1 \equiv -1 \pmod{p} \quad \square$$

**定理 2.2.14.** 威尔逊定理逆定理

若  $n \geq 2$  是正整数, 且  $(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$  则  $n$  为质数

证明. 若不然, 设  $n$  为合数, 则其必存在小于  $n$  的素因子  $p$

所以有  $(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}, p|n \Rightarrow (n-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ ,

但是  $(n-1)! \equiv 0 \pmod{p}$

而  $n > 1$  矛盾. 故得证.  $\square$

**定理 2.2.15.** 费马小定理

如果  $p$  是一个素数,  $a$  是正整数且  $a$  不是  $p$  的倍数, 则  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ .

证明. 因为  $\gcd(a, p) = 1$

所以  $\prod_{i=1}^{p-1} ia \equiv \prod_{i=1}^{p-1} i \pmod{p} \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$  得证.  $\square$

**定义 2.2.16.** 欧拉函数

对于正整数  $n$ , 小于等于  $n$  且与  $n$  互质的正整数的个数, 称为欧拉函数, 记作  $\phi(n)$

**定理 2.2.17.** 设  $m$  是一个正整数,  $a$  是一个正整数且  $\gcd(a, m) = 1$ ,  $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$

证明. 设  $r_1, r_2, \dots, r_{\phi(m)}$ , 是不超过  $m$  的模  $m$  的一个缩系.

那么  $ar_1, ar_2, \dots, ar_{\phi(m)}$  也是一个缩系

故  $ar_1 ar_2 \dots ar_n \equiv r_1 r_2 \dots r_n \pmod{m} \iff a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$

得证. □

**定义 2.2.18.** 同余方程组是指一组形如下面的方程的集合:

$$\begin{cases} a_1 \equiv b_1 \pmod{m_1} \\ a_2 \equiv b_2 \pmod{m_2} \\ \vdots \\ a_n \equiv b_n \pmod{m_n} \end{cases}$$

其中,  $a_i$  和  $b_i$  是整数,  $m_i$  是正整数。这组方程要求对于每个  $i$ ,  $a_i$  除以  $m_i$  的余数等于  $b_i$  除以  $m_i$  的余数, 即  $a_i$  与  $b_i$  在模  $m_i$  下同余。解同余方程组就是要找到满足所有这些条件的整数解。

**例 2.2.19.**

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{3} \\ x \equiv 2 \pmod{5} \\ \vdots \\ x \equiv 3 \pmod{7} \end{cases}$$

我们可以使用迭代法 (逐级满足法) 解决. 由第一个式子得  $x = 3t + 1$  然后带入  $3t + 1 \equiv 2 \pmod{5} \iff t \equiv 4 \pmod{5}$  以此类推. 但是这只能解决一些简单的问题, 下面我们给出一般地解法.

**定理 2.2.20.** 中国剩余定理 (CRT)

设  $m_1, m_2, \dots, m_r$  是两两互素的正整数, 则同余方程

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \vdots \\ x \equiv a_r \pmod{m_r} \end{cases}$$

有模  $m_1 m_2 \dots m_r$  的唯一解

$$x = \sum_{i=1}^r a_i M_i M_i^{-1}$$

其中

$$M_i = \frac{1}{m_i} \prod_{j=1}^r m_j, \quad M_i M_i^{-1} \equiv 1 \pmod{m_i}$$

证明. 先证明  $x$  是方程组的解.

对于任意一个方程有,

$$x \equiv a_k M_k M_k^{-1} \equiv a_k \pmod{m_k}, \text{ 显然成立.}$$

下证唯一性.

若  $x_1, x_2$  为方程组的 2 个解, 则有  $x_1 \equiv x_2 \pmod{m_k} \iff m_k | (x_1 - x_2) \iff M | (x_1 - x_2) \iff x_1 \equiv x_2 \pmod{M}$  □

**定理 2.2.21.** 拉格朗日定理

$p$  为素数,  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  ( $p \nmid a_n$ ) 是模  $p$  意义下的整系数多项式方程, 则同余方程  $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$  在模  $p$  意义下至多有  $n$  个不同的解.

**推论 2.2.22.** 若超过  $n$  个解, 则  $p \mid a_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ), 即  $f(x)$  是模  $p$  意义下的零多项式

**推论 2.2.23.** 若  $n \leq p$  则同余式  $f(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \equiv 0 \pmod{p}$  有  $n$  个解的充要条件是  $x^p - x$  除以  $f(x)$  所得的余式的一切系数都是  $p$  的倍数

这里介绍一个比较重要的多项式, 常用于构造

$$f(x) = \prod_{i=1}^{p-1} (x - i) - (x^{p-1} - 1)$$

**定理 2.2.24.** *wolstenholme* 定理

若  $p$  为大于 3 的素数, 则

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{k} \equiv 0 \pmod{p^2}$$

## 2.3 乘性函数

**定义 2.3.1.** 算术函数

定义在所有正整数上的函数称为算数函数.

**定义 2.3.2.** 乘性函数

若  $\gcd(m, n) = 1$ , 均有  $f(mn) = f(m)f(n)$ , 则称  $f$  为乘性函数.

**结论 2.3.3.** 若  $f$  为乘性函数,  $n = \prod_{i=1}^k p_i^{a_i}$  为一个素因数分解. 则  $f(n) = \prod_{i=1}^k f(p_i^{a_i})$  由定义显然成立.

**定义 2.3.4.** 和函数

$f$  为一个算术函数,  $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$  称为  $f$  的和函数

**定义 2.3.5.** 欧拉函数

$\phi(n) = \sum_{i=1}^n [\gcd(i, n) = 1]$ , 称为欧拉函数.

**结论 2.3.6.** 设  $p$  是素数,  $\phi(p^a) = p^a - p^{a-1}$

证明. 由定义,  $\phi(p^a) = \sum_{i=1}^{p^a} [\gcd(i, p^a) = 1] = \sum_{i=1}^{p^a} 1 - [\gcd(i, p^a) \neq 1] = p^a - \sum_{i=1}^{p^a} [\gcd(i, p^a) \neq 1]$ , 这样的  $i$  显然只有  $p$  的倍数, 有  $p^{a-1}$  个, 证毕.  $\square$

**结论 2.3.7.** 欧拉函数是乘性函数



证明. 若  $\gcd(m, n) = 1$  由缩系的定义知道, 显然模  $m$  的缩系有  $\phi(m)$  个数, 模  $n$  的缩系有  $\phi(n)$  个数, 由缩系的一个性质知模  $mn$  的缩系有  $\phi(m)\phi(n)$  个数. 故  $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$   $\square$

**结论 2.3.8.**  $n > 2, \phi(n)$  为偶数

**结论 2.3.9.**

$$\phi(n) = n \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

证明. 容斥原理可证明这里用乘性函数的性质证明

$$\begin{aligned} \phi(n) &= \prod_{i=1}^k \phi(p_i^{a_i}) \\ &= \prod_{i=1}^k (p_i^{a_i} - p_i^{a_i-1}) \\ &= \prod_{i=1}^k p_i^{a_i} \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \\ &= n \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \end{aligned}$$

$\square$

**结论 2.3.10.** 欧拉函数的和函数

$$F(n) = \sum_{d|n} \phi(d) = n$$

**结论 2.3.11.** 定义  $C_d$  为 1 到  $n$  中与  $n$  最大公因数为  $d$  的集合容易证明其是 1 到  $n$  构成的正整数集合的一个划分. 而  $C_d$  中有  $\phi(n/d)$  个元素, (若  $a \in C_d$  则  $\gcd(a/d, n/d) = 1$ ), 故  $n = \sum_{d|n} C_d = \sum_{d|n} \phi(n/d) = \sum_{d|n} \phi(d)$  得证.

**定义 2.3.12.** 狄利克雷卷积

$f, g$  为算数函数, 定义狄利克雷积为

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$$

实际上这整数上一章的卷积在整除关系上的定义

性质

1.  $f * g = g * f$
2.  $(f * g) * h = f * (g * h)$
3.  $f * (g + h) = f * g + f * h$

这里的算数函数就是  $f(1, x) \in \mathcal{F}$

故有逆元的条件是  $f(1) \neq 0$

**定理 2.3.13.** 如果  $f, g$  是乘性函数, 则  $f * g$  也是乘性函数

**定理 2.3.14.** 若  $F = f * g, h$  是  $g$  的逆函数, 那么  $f = F * h$

**定理 2.3.15.** 乘性函数的和函数也是乘性函数

**定义 2.3.16.** 因子和与因子个数函数

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d$$

$$\tau(n) = \sum_{d|n} 1$$

**结论 2.3.17.** 因子和与因子个数函数均为乘性函数

**结论 2.3.18.** 设  $n = \prod_{i=1}^k p_i^{a_i}$

$$\sigma(n) = \prod_{j=1}^k \frac{p_j^{a_j+1} - 1}{p_j - 1}$$

$$\tau(n) = \prod_{j=1}^k (a_j + 1)$$

**定义 2.3.19.** 莫比乌斯函数

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & (n = 1) \\ (-1)^r, & (n = \prod_{i=1}^r p_i) \\ 0, & (other) \end{cases}$$

定理 2.3.20.  $f = F * \mu$

## 第三章 求和

一些记号

调和数 (harmonic number)

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

基本公式

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{1 \leq k \leq n} a^{n-k} b^{k-1}$$

### 3.1 递归问题 RECURRENT PROBLEMS

#### 3.1.1 repertoire method

例

$$f(1) = \alpha$$

$$f(2n) = 2f(n) + \beta$$

$$f(2n+1) = 2f(n) + \gamma$$

知

$$f(n) = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma$$

通过对  $f(n)$  赋值或  $(\alpha, \beta, \gamma)$  赋值, 求解。

在参数较少的情况下, 可以将一些相同参数, 分别设为独立参数, 更容易找到有解的情况。

### 3.1.2 约瑟夫问题

形如

$$\begin{aligned} f(j) &= \alpha_j, & 1 \leq j < d \\ f(dn + j) &= cf(n) + \beta_j, & 0 \leq j < d, n \geq 1 \end{aligned}$$

有

$$f((b_m b_{m-1} \dots b_0)_d) = (\alpha_{b_m} \beta_{b_{m-1}} \dots \beta_{b_0})_c$$

## 3.2 和式 SUMS

用

$$\sum_{P(k)} a_k$$

表示。

### 3.2.1 和式和递归式 SUMS AND RECURRENCES

和式可以表示为递归形式:

$$\begin{aligned} S_0 &= a_0 \\ S_{n+1} &= S_n + a_{n+1} \end{aligned}$$

用 repertoire method 解。

例 3.2.1. 计算

$$\sum_{k=0}^n (a + bn)$$

写成递归式

$$S_0 = \alpha$$

$$S_n = S_{n-1} + \beta n + \gamma$$

其中

$$\alpha = \gamma = a, \beta = b$$

设

$$S_n = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma$$

带入  $1, n, n^2$

解出

$$\begin{cases} A(n) = 1 \\ B(n) = \frac{n(n+1)}{2} \\ C(n) = n \end{cases}$$

故

$$S_n = a + na + \frac{n(n+1)}{2}b$$

递归式可以转化为和式

对于形如

$$a_n T_n = b_n T_{n-1} + c_n$$

的递归式，可以设求和因子 (summation factor)

$$s_n = \frac{\prod_{i=1}^n a_i}{\prod_{i=1}^n b_i} \cdot \frac{b_1}{a_n}$$

然后同时乘上求和因子即可得出

$$T_n = \frac{1}{s_n a_n} \left( s_1 b_1 T_0 + \sum_{k=1}^n c_k s_k \right)$$

注意：求和因子不能为 0

### 3.2.2 和式的处理 MANIPULATION OF SUMS

和式的变换

$$\begin{aligned} \sum_{k \in K} c a_k &= c \sum_{k \in K} a_k \\ \sum_{k \in K} (a_k + b_k) &= \sum_{k \in K} a_k + \sum_{k \in K} b_k \\ \sum_{k \in K} a_k &= \sum_{p(k) \in K} a_{p(k)} \\ \sum_{k \in K} a_k + \sum_{k \in K'} a_k &= \sum_{k \in K \cap K'} a_k + \sum_{k \in K \cup K'} a_k \end{aligned}$$

其中对于  $n \in K$ ，有且仅有一个整数满足  $p(k) = n$

### 3.2.3 扰动法 (perturbation method)

对一个和式记其为  $S_n$ ，将其第一项和最后一项分离出来，用两种方法改写  $S_{n+1}$ 。

类似于算两次法

例 3.2.2. 如求和式

$$S_n = \sum_{0 \leq k \leq n} k 2^k$$

有

$$\begin{aligned} S_n + (n+1)2^{n+1} &= S_{n+1} \\ &= \sum_{0 \leq k \leq n} (k+1)2^{k+1} \\ &= 2S_n + \sum_{0 \leq k \leq n} 2^{k+1} \end{aligned}$$

有

$$\begin{aligned} S_n &= (n+1)2^{n+1} - \sum_{0 \leq k \leq n} 2^{k+1} \\ &= (n+1)2^{n+1} - \frac{2(1-2^{n+1})}{1-2} \\ &= (n-1)2^{n+1} + 2 \end{aligned}$$

### 3.2.4 多重和式 MULTIPLE SUMS

基本性质

$$\sum_j \sum_k a_{j,k} [P(j, k)] = \sum_{P(j,k)} a_{j,k} = \sum_k \sum_j a_{j,k} [P(j, k)]$$

$$\sum_{j \in J} \sum_{k \in K(j)} a_{j,k} = \sum_{k \in K'} \sum_{j \in J'(k)} a_{j,k}$$

$$\sum_{j \in J} a_{f(j)} = \sum_{j \in J, k \in K} a_k [f(j) = k] = \sum_{k \in K} a_k \sum_{j \in J} [f(j) = k]$$

其中  $f: J \rightarrow K$

例 3.2.3. 求

$$S_n = \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{1}{k-j}$$



有

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{1 \leq k \leq n} \sum_{1 \leq j < k} \frac{1}{k-j} \\ &= \sum_{1 \leq k \leq n} \sum_{0 < j \leq k-1} \frac{1}{j} \\ &= \sum_{1 \leq k \leq n} H_{k-1} \end{aligned}$$

不太好做，（可以交换求和次序解）

考虑直接把  $k-j$  当成一个整体。

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{1 \leq j < k+j \leq n} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{1 \leq k \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n-k} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{n-k}{k} \\ &= nH_n - n \end{aligned}$$

有

$$\sum_{0 \leq k < n} H_k = nH_n - n$$

思考：

对含  $k+f(j)$  的二重和式，可以考虑用  $k-f(j)$  替换  $k$ ，并先对  $j$  求和比较好。

几何观点：按对角线求和。

## 3.2.5 一般性的方法 GENERAL METHODS

以

$$S_n = \sum_{0 \leq k \leq n} k^2$$

为例

归纳法

如果注意到

$$S_n = \frac{n(n + \frac{1}{2})(n + 1)}{3}$$

就可以使用数学归纳法

扰动法

观察

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq k \leq n} k^2 + (n + 1)^2 &= S_{n+1} \\ &= \sum_{1 \leq k \leq n+1} k^2 \\ &= \sum_{0 \leq k \leq n} (k + 1)^2 \\ &= \sum_{0 \leq k \leq n} k^2 + 2 \sum_{0 \leq k \leq n} k + n + 1 \end{aligned}$$

虽然没有成功，但注意到我们，成功地解出了

$$\sum_{0 \leq k \leq n} k$$

考虑对

$$T_n = \sum_{0 \leq k \leq n} k^3$$

操作, 有

$$\begin{aligned}
 T_n + (n+1)^3 &= T_{n+1} \\
 &= \sum_{1 \leq k \leq n+1} k^3 \\
 &= \sum_{0 \leq k \leq n} (k+1)^3 \\
 &= T_n + 3S_n + 3 \sum_{0 \leq k \leq n} k + n + 1
 \end{aligned}$$

得到

$$\begin{aligned}
 3S_n &= (n+1)^3 - 3 \frac{n(n+1)}{2} - (n+1) \\
 &= (n+1) \left( n^2 + \frac{1}{2}n \right) \\
 &= n \left( n + \frac{1}{2} \right) (n+1)
 \end{aligned}$$

成套方法

有

$$R_0 = d$$

$$R_n = R_{n-1} + an^2 + bn + c$$

其解的一般形式为

$$R_n = aA(n) + bB(n) + cC(n) + dD(n)$$

设  $R_n = 1, n, n^2, n^3$

解得

$$\begin{cases} A(n) = \frac{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3} \\ B(n) = \frac{1}{2}(n^2 + n) \\ C(n) = n \\ D(n) = 1 \end{cases}$$

故

$$R_n = A(n)$$

事实上对 (a,b,c,d) 赋值更简单。

### 微积分法

求

$$\begin{aligned} S_n - \int_0^n x^2 dx &= \sum_{1 \leq k \leq n} \left( k^2 - \int_{k-1}^k x^2 dx \right) \\ &= \sum_{1 \leq k \leq n} \left( k - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n}{3} \end{aligned}$$

### 展开和收缩

转化为二重和式，以简化通项。

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{1 \leq k \leq n} k^2 \\ &= \sum_{1 \leq k \leq n} k \sum_{1 \leq j \leq k} 1 \\ &= \sum_{1 \leq j \leq n} \sum_{j \leq k \leq n} k \\ &= \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{(j+n)(n-j+1)}{2} \\ &= \frac{n^3 + n^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{2} S_n \end{aligned}$$

### 有限微积分

有  $k^2 = k^2 + k^1$

故

$$\begin{aligned}
 \sum_{0 \leq k \leq n} k^2 &= \sum_{0 \leq k < n+1} k^2 + k^1 \\
 &= \left( \frac{k^3}{3} + \frac{k^2}{2} \right) \Big|_0^{n+1} \\
 &= \left( \frac{(n+1)^3}{3} + \frac{(n+1)^2}{2} \right) \\
 &= \frac{(n+1)(n+\frac{1}{2})n}{3}.
 \end{aligned}$$

### 3.2.6 有限微积分

类似微分算子  $D$

$$Df(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

定义差分算子  $\Delta$

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$$

定义下降阶乘幂 (falling factorial power)

$$x^{\underline{m}} = x(x-1) \cdots (x-m+1) \quad (m \geq 0 \in \mathbb{Z})$$

和上升阶乘幂 (rising factorial power)

$$x^{\overline{m}} = x(x+1) \cdots (x+m-1) \quad (m \geq 0 \in \mathbb{Z})$$

注意到:  $n! = n^{\underline{n}} = 1^{\overline{n}}$

有

$$\Delta(x^{\underline{m}}) = mx^{\underline{m-1}}$$

类比积分, 我们定义不定和式 (indefinite sum)

$$\sum g(x) \delta x$$

满足

$$g(x) = \Delta f(x) \iff \sum g(x) \delta x = f(x) + C$$

其中  $C$  为满足  $p(x+1) = p(x)$  的任意一个函数  $p(x)$ 。

有限微积分有确定的和式 (sum)

$$\sum_a^b g(x) \delta x = f(x)|_a^b = f(b) - f(a)$$

有以下性质

$$\begin{aligned} \sum_a^b g(x) \delta x &= \sum_{a \leq k < b} g(x) \quad a \leq b \\ \sum_a^b g(x) \delta x &= - \sum_b^a g(x) \delta x \\ \sum_a^b + \sum_b^c &= \sum_a^c \end{aligned}$$

并且阶乘幂满足二项式定理

负指数的下降阶乘幂定义如下

$$x^{\overline{-m}} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+m)} \quad m > 0$$

从而有以下性质

$$x^{\overline{m+n}} = x^{\overline{m}}(x-m)^{\overline{n}}$$

$$\sum_a^b x^{\overline{m}} \delta x = \left. \frac{x^{\overline{m+1}}}{m+1} \right|_a^b, \quad (m \neq -1)$$

若  $m = -1$  则为  $H_b - H_a$

$f = \sum g$	$\Delta f = g$	$f = \sum g$	$\Delta f = g$
$x^0 = 1$	0	$2^x$	$2^x$
$x^1 = x$	1	$c^x$	$(c-1)c^x$
$x^2 = x(x-1)$	$2x$	$\frac{c^x}{c-1}$	$c^x$
$x^m$	$mx^{m-1}$	$cu$	$c\Delta u$
$\frac{x^{m+1}}{m+1}$	$x^m$	$u+v$	$\Delta u + \Delta v$
$H_x$	$x^{-1} = \frac{1}{x+1}$	$uv$	$u\Delta v + Ev\Delta u$

## 分部求和 (summation by parts)

有

$$\Delta(u(x)v(x)) = u(x)\Delta v(x) + Ev(x)\Delta u(x)$$

其中, **E** 为移位算子 (shift operator)  $Ef(x) = f(x+1)$

简记为

$$\Delta(uv) = u\Delta v + Ev\Delta u$$

从而有

$$\sum u\Delta v = uv - \sum Ev\Delta u$$

如

例 3.2.4.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n k2^k &= \sum_0^{n+1} x2^x \delta x \\
 &= \sum_0^{n+1} x\delta 2^x \\
 &= (n+1)2^{n+1} - \sum_0^{n+1} 2^{x+1} \delta x \\
 &= (n+1)2^{n+1} - 2^{n+2} + 2 \\
 &= (n-1)2^{n+1} + 2
 \end{aligned}$$

例 3.2.5.

$$\begin{aligned}
 \sum_{0 \leq k < n} k H_k &= \sum_0^n x H_x \delta x \\
 &= \frac{1}{2} \left( \sum_0^n H_x \delta x^2 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( x^2 H_n - \sum_0^n x \delta x \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( x^2 H_n - \frac{n^2}{2} \right) \\
 &= \frac{n^2}{2} \left( H_n - \frac{1}{2} \right)
 \end{aligned}$$

### 3.2.7 无限和式 INFINITE SUMS

容易发现

$$\sum_{k \geq 0} x^k = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & 0 \leq x < 1 \\ \infty, & x \geq 1 \end{cases}$$

交错和

$$\sum_{k \in K} a_k = \sum_{k \in K} a_k^+ - \sum_{k \in K} a_k^-$$

设  $A^+ = \sum_{k \in K} a_k^+$ , 类似定义  $A^-$

- 若均有限的值, 则称为绝对收敛。
- 若  $A^+ = \infty$ , 而后者为有限的值, 则称发散于  $+\infty$ , 反之发散于  $-\infty$
- 否则不做定义。

只要我们处理的是刚才所定义的绝对收敛的和式, 这一章里的所有操作都完全成立.



对复数分实部和虚部计算即可。

## 第四章 概率论

### 4.1 基本概念和公式

对概率运算规定一些简单的基本法则：

1. 设  $A$  是随机事件，则  $0 \leq P(A) \leq 1$ ,
2. 设  $\Omega$  为必然事件，则  $P(\Omega) = 1$ ,
3. 若事件  $A$  和  $B$  不相容，则  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ,

可推广至无穷：

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

4. 一般情况下， $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ ， $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$
5.  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
6.  $P(A - B) = P(A) - P(AB)$

#### 定理 4.1.1. 全概率公式

设  $B_1, B_2, \dots, B_n$  是样本空间  $\Omega$  中的两两不相容的一组事件，即  $B_i B_j = \phi$ ,  $i \neq j$ ，且满足  $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$ ，则称  $B_1, B_2, \dots, B_n$  是样本空间  $\Omega$  的一个分割（又称为完备事件群，英文为 *partition*）。设  $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$  是样本空间  $\Omega$

的一个分割,  $A$  为  $\Omega$  的一个事件, 则

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)$$

#### 定理 4.1.2. 贝叶斯公式

设  $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$  是样本空间的一个分割,  $A$  为  $\Omega$  中的一个事件,  $P(B_i) > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $P(A) > 0$ , 则

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^n P(A|B_j)P(B_j)}$$

用于因果转换.

#### 定义 4.1.3. 事件的独立性

设  $A, B$  是随机试验中的两个事件, 若满足  $P(AB) = P(A)P(B)$ , 则称事件  $A$  和  $B$  相互独立。

判断事件的独立, 应该是从实际出发, 如果能够判断事件  $B$  的发生与否对事件  $A$  的发生与否不产生影响, 则事件  $A, B$  即为独立。

设  $\tilde{A}$  表示事件  $A$  发生和不发生之一,  $\tilde{B}$  表示事件  $B$  发生和不发生之一。有独立性的定义可推至  $P(\tilde{A}\tilde{B}) = P(\tilde{A})P(\tilde{B})$  (一共有四个等式)。可推广至:

$$P(\tilde{A}_1\tilde{A}_2\dots\tilde{A}_n) = P(\tilde{A}_1)\dots P(\tilde{A}_n)$$

上面有  $2^n$  个等式。

独立一定相容

## 重要公式与结论

$$(1) P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$(2) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$(3) P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

$$(4) P(A - B) = P(A) - P(AB)$$

$$(5) P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB), P(A) = P(AB) + P(A\bar{B}),$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(\bar{A}B) = P(AB) + P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B)$$

$$(6) P(\bar{A}_1|B) = 1 - P(A_1|B), P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1A_2|B)$$

$$P(A_1A_2|B) = P(A_1|B)P(A_2|A_1B)$$

$$(7) A_1, A_2, \dots, A_n \quad P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i), P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n (1 - P(\bar{A}_i))$$

随机变量 (Random variable): 值随机会而定的变量, 研究随机试验的一串事件。可按维数分为一维、二维至多维随机变量。按性质可分为离散型随机变量以及连续型随机变量。

分布 (Distribution): 事件之间的联系, 用来计算概率。

示性函数 (Indication function):  $I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \text{反之} \end{cases}$ , 事件  $A$  有随机变量

$I_A$  表示出来,  $I_A$  称为事件  $A$  的示性函数。

**定义 4.1.4. 概率函数:**

设  $X$  为一随机变量, 其全部可能值为  $\{a_1, a_2, \dots\}$ , 则  $p_i = P(X = a_i), i = 1, 2, \dots$  称为  $X$  的概率函数。

**定义 4.1.5. 概率分布函数:**

定义: 设  $X$  为一随机变量, 则函数

$$F(X) = P(X \leq x) \quad (-\infty < x < \infty)$$

称为  $X$  的分布函数。(注: 这里并未限定  $X$  为离散型的, 它对任何随机变量都有定义。)

性质:

$F(x)$  是单调非降的: 当  $x_1 < x_2$  时, 有  $F(x_1) \leq F(x_2)$ .

当  $x \rightarrow \infty$  时,  $F(x) \rightarrow 1$ ; 当  $x \rightarrow -\infty$  时,  $F(x) \rightarrow 0$ .

离散型随机变量分布函数:

对于离散型随机变量,  $F(X) = P(X \leq x) = \sum_{\{i|a_i \leq x\}} p_i, \quad p_i = P(X = i) = F(i) - F(i-1)$ 。

1. 连续型随机变量: 设  $X$  为一随机变量, 如果  $X$  不仅有无限个而且有不可数个值, 则称  $X$  为一个连续型随机变量。

**定义 4.1.6. 概率密度函数:**

设连续型随机变量  $X$  有概率分布函数  $F(x)$ , 则  $F(x)$  的导数  $f(x) = F'(x)$  称为  $X$  的概率密度函数。

性质

1. 对于所有的  $-\infty < x < +\infty$ , 有  $f(x) \geq 0$ ;

2.  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ ;

3. 对于任意的  $-\infty < a \leq b < +\infty$ , 有  $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$ .

注:

1. 对于任意的  $-\infty < x < +\infty$ , 有  $P(X = x) = \int_x^x f(u)du = 0$ .
2. 假设有总共一个单位的质量连续地分布在  $a \leq x \leq b$  上, 那么  $f(x)$  表示在点  $x$  的质量密度且  $\int_c^d f(x)dx$  表示在区间  $[c, d]$  上的全部质量。

定义 4.1.7. 概率分布函数:

设  $X$  为一连续型随机变量, 则

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u)du, \quad -\infty < x < +\infty$$

## 4.2 重要公式与结论

二项分布  $X \sim B(n, p)$  的期望为  $np$ , 方差为  $np(1-p)$

均匀分布  $X \sim U(a, b)$  的期望为  $\frac{a+b}{2}$ , 方差为  $\frac{1}{12}(b-a)^2$

定义 4.2.1. 边缘分布:

因为  $X$  的每个分量  $X_i$  都是一维随机变量, 故它们都有各自的分布  $F_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), 这些都是一维分布, 称为随机向量  $X$  或其分布  $F$  的边缘分布。

离散随机变量:

$$\begin{aligned} p_X(x_i) &= P(X = x_i) \\ &= \sum_j^m P(X = x_i, Y = y_j) \\ &= \sum_j^m p_{ij} = p_{i\cdot}, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_Y(y_i) &= P(Y = y_i) \\
 &= \sum_i^m P(X = x_i, Y = y_j) \\
 &= \sum_i^m p_{ij} = p_{j\cdot}, \quad j = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned}$$

连续随机变量:

为求某分量  $X_i$  的概率密度函数, 只需把  $f(x_1, \dots, x_n)$  中的  $x_i$  固定, 然后对  $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$  在  $-\infty$  到  $\infty$  之间做定积分, 如

$$(X, Y) \sim f(x, y) f_X(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) dv f_Y(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) du$$

**定义 4.2.2.** 离散型随机变量的条件分布: 设  $(X, Y)$  为二维离散型随机变量, 对于给定的事件  $\{Y = y_j\}$ , 其概率  $P(Y = y_j) > 0$ , 则称

$$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{j\cdot}}, \quad i = 1, 2, \dots$$

为在给定  $Y = y_j$  的条件下  $X$  的条件分布律。类似的, 称

$$P(Y = y_i | X = x_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}, \quad j = 1, 2, \dots$$

为在给定  $X = x_j$  的条件下  $Y$  的条件分布律。

连续型随机变量的条件分布: 设  $(X, Y)$  为二维连续型随机变量, 对于给定条件  $Y = y$  下的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}, \quad f_Y(y) > 0.$$

类似的, 在  $X = x$  下的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}, \quad f_X(x) > 0.$$

可推广

**定义 4.2.3. 随机变量的独立性**

称随机变量  $X_1, \dots, X_n$  相互独立,

**1. 离散型随机变量**

则联合分布律等于各自的边缘分布律的乘积, 即

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \dots P(X_n = x_n)$$

其中  $(x_1, \dots, x_n)$  为  $(X_1, \dots, X_n)$  的值域中的任意一点。

2. 连续型随机变量

则联合密度等于各自的边缘密度的乘积, 即

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n), \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in R^n$$

**3. 一般地**

设  $X_1, \dots, X_n$  为  $n$  个随机变量, 如果它们的联合分布函数等于各自边缘分布函数的乘积, 即

$$F(X_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \dots F_n(x_n), \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in R^n$$

则称随机变量  $X_1, \dots, X_n$  相互独立。

以下内容才是重点!!!!

以下内容才是重点!!!!

以下内容才是重点!!!!

**4.2.1 数学期望（均值）与方差****定义 4.2.4. 数学期望**

设随机变量  $X$  只取有限个可能值  $a_1, \dots, a_m$ , 其概率分布为  $P(X = a_i) = p_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ).

则  $X$  的数学期望记作  $EX$  或  $E(X)$ , 定义为  $E(X) = a_1p_1 + a_2p_2 + \dots + a_mp_m$ .

数学期望也常称为均值, 即指以概率为权的加权平均。



1. 离散型变量的数学期望:  $E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i p_i$ . (当级数绝对收敛, 即  $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| p_i < \infty$ )

2. 连续型变量的数学期望:  $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ . (当  $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$ )

性质

1. 若干个随机变量之和的期望等于各变量的期望值和, 即

$$E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n).$$

2. 若干个独立随机变量之积的期望等于各变量的期望之积, 即

$$E(X_1 X_2 \dots X_n) = E(X_1) E(X_2) \dots E(X_n).$$

3. 设随机变量  $X$  为离散型, 有分布  $P(X = a_i) = p_i (i = 1, 2, \dots)$ ; 或者为连续型, 有概率密度函数  $f(x)$ . 则

$$E(g(x)) = \sum_i g(a_i) p_i \quad (\text{当 } \sum_i |g(a_i)| p_i < \infty \text{ 时})$$

或

$$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx \quad (\text{当 } \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f(x) dx < \infty \text{ 时})$$

4. 若  $c$  为常数, 则  $E(cX) = cE(X)$ .

#### 定义 4.2.5. 条件数学期望

随机变量  $Y$  的条件期望就是它在给定的某种附加条件下的数学期望。

$E(Y|x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y|x) dy$ . 它反映了随着  $X$  取值  $x$  的变化  $Y$  的平均变化的情况如何。

在统计上, 常把条件期望  $E(Y|x)$  作为  $x$  的函数, 称为  $Y$  对  $X$  的回归函数。

性质: 1.  $E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} E(Y|x) f_X(x) dx$ .

2.  $E(Y) = E[E(Y|X)]$ .

**定义 4.2.6. 方差与标准差**

设  $X$  为随机变量, 分布为  $F$ , 则  $Var(X) = E(X - EX)^2$  称为  $X$  (或分布  $F$ ) 的方差,

其平方根  $\sqrt{Var(X)}$  (取正值) 称为  $X$  (或分布  $F$ ) 的标准差。

性质: 1.  $Var(X) = E(X^2) - (EX)^2$ .

2. 常数的方差为 0, 即  $Var(c) = 0$ .

3. 若  $c$  为常数, 则  $Var(X + c) = Var(X)$ .

4. 若  $c$  为常数, 则  $Var(cX) = c^2 Var(X)$ .

5. 独立随机变量和的方差等于各变量方差和, 即  $Var(X_1 + \dots + X_n) = Var(X_1) + \dots + Var(X_n)$ .

## 4.3 期望经典问题入门

<https://notes.sshwy.name/Math/Expectation/Classic/#E-%E7%BB%8F%E5%85%B8%E9%A2%98> 重要公式与结论 1. 期望具有线性性

2. 独立事件的期望有

$$E(XY) = EXEY$$

3.

$$E(X) = E(E(X|Y))$$

### 4.3.1 普通

**结论 4.3.1.** 有  $n$  个随机变量  $\langle X_n \rangle$ , 每个随机变量量都是从  $[1, m]$  中随机一个整数,  $\max \langle X_n \rangle$  的期望为

$$m - \frac{1}{m^n} \sum_{i=1}^{m-1} i^n$$

。

证明. 设  $Y = \max \langle X_n \rangle$ , 有

$$\begin{aligned}
 EY &= \sum_{1 \leq i \leq m} P(Y = i)i \\
 &= \sum_{1 \leq i \leq m} i(F_y(i) - F_y(i-1)) \\
 &= \frac{1}{m^n} \left( \sum_{1 \leq i \leq m} i^{n+1} - i \cdot (i-1)^n \right) \\
 &= \frac{1}{m^n} \left( \sum_{1 \leq i \leq m} i^{n+1} - \sum_{0 \leq i \leq m-1} i^{n+1} + i^n \right) \\
 &= \frac{1}{m^n} \left( m^{n+1} - \sum_{0 \leq i \leq m-1} i^n \right) \\
 &= m - \frac{1}{m^n} \sum_{i=1}^{m-1} i^n
 \end{aligned}$$

□

**结论 4.3.2.** 概率为  $p$  的事件期望  $\frac{1}{p}$  次发生.

证明. 设随机变量  $X$  表示其在第  $x$  次发生.

$$\begin{aligned}
 EX &= \sum_{i=1}^{\infty} P(X = i)i \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} P(X = i) \sum_{j=1}^i 1 \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} P(X \geq j) \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} (1-p)^{j-1} \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} (1-p)^j \\
 &= \frac{1}{1 - (1-p)} \\
 &= \frac{1}{p}
 \end{aligned}$$

□

**结论 4.3.3.** 现在红包发了一个  $w$  元的红包, 有  $n$  个人来抢 (均匀分布)。那么请问第  $k$  个人期望抢到  $\frac{w}{2^k}$ .

证明. 设第  $k$  个人抢到  $X$ , 前面的人抢  $Y$ . 有

$$E(X) = E(E(X|Y)) = E\left(\frac{w-Y}{2}\right) = \frac{w}{2} - \frac{1}{2}E(Y)$$

然后容易解出答案.

离散情况这样难以求解, 在取球一节有其他解法

□

**结论 4.3.4.** 赠券收集问题

一个  $n$  面的骰子, 期望  $nH_n$  次能使得每一面都被掷到。

证明.  $t_x$  为设已经出现了  $x-1$  面, 掷出第  $x$  面的次数.

设  $T = \sum t_i$ . 有

$$E(T) = \sum_{i=1}^n E(t_i)$$

由于掷出第  $x$  面的概率为  $\frac{n-x+1}{n}$ , 固

$$\begin{aligned} E(T) &= \sum_{i=1}^n E(t_i) \\ &= \sum_{x=1}^n \frac{n-x+1}{n} \\ &= n \cdot H_n \end{aligned}$$

□

同时他们也是相互独立的.

### 4.3.2 拿球

**结论 4.3.5.** 箱子里有  $n$  个球  $1, 2, \dots, n$ , 你要从里面拿  $m$  次球, 拿了后不放回, 取出的数字之和的期望为  $\frac{m(n+1)}{2}$ 。

证明. 设随机变量  $x_i$ :

$$x_i = \begin{cases} i & , \text{if } i \text{ is chosen} \\ 0 & , \text{if } i \text{ isn't chosen} \end{cases}$$

那么有

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) &= \sum_{i=1}^n E(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{m}{n} i \\ &= \frac{m(n+1)}{2} \end{aligned}$$

发现是否放回不影响期望

□

**结论 4.3.6.** 箱子里有  $n$  个球  $1, 2, \dots, n$ , 你要从里面拿  $m$  次球, 拿了后以  $p_1$  的概率放回,  $p_2$  的概率放回两个和这个相同的球 (相当于增加一个球), 取出的数字之和的期望为  $\frac{m(n+1)}{2}$ 。

证明. 设  $x_i$  为第  $i$  个球的贡献,  $y_i$  为其被拿出来的次数, 那么  $x_i = i \cdot y_i$

$$E\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \sum_{i=1}^n E(y_i) \cdot i$$

因为  $E(y_i) = E(y_j)$ ,  $\sum y_i = m$  得出  $E(y_i) = \frac{m}{n}$  故上式答案为  $\frac{m(n+1)}{2}$

□

### 4.3.3 游走

**结论 4.3.7.** 在一条  $n$  个点的链上游走, 从一端走到另一端的期望步数为  $(n-1)^2$ 。

证明. 假设步数是  $S$ , 求  $S$  的期望。我们定义一个随机变量  $x_i$  表示从  $i$  出发随机游走, 第一次到  $i+1$  的步数。

$$E\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} E(x_i)$$

又

$$EX_{i+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 + EX_i + EX_{i+1})$$

故

$$EX_{i+1} = EX_i + 2$$

□

**结论 4.3.8.** 在一个  $n$  个点的完全图上游走, 从一个点走到另一个点的期望步数为  $n-1$ 。

证明. 由于是完全图, 所以任意两个点为起点和终点的期望步数是相同的. 于是有

$$E = \frac{1}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}(1+E)$$

得到  $E = n-1$

□

**结论 4.3.9.** 在一个  $n$  个点的完全二分图  $K_{n,n}$  上游走, 从一个点走到另一个点的期望步数为  $2n-1$ 。

证明.  $E_1$  表示异侧点的期望,  $E_2$  表示同侧点的期望。

$$E_1 = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}(1+E_2)$$

$$E_2 = 1 + E_1$$

故  $E_1 = 2n-1, E_2 = 2n$

□

**结论 4.3.10.** 在一个  $n$  个点的菊花图上游走, 从一个点走到另一个点的期望步数为  $2n-3$ 。

证明与上类似

#### 4.3.4 解题方法

1. 贡献法,

若不行可以尝试更换计算贡献的东西 (如边-> 点)

## 第五章 杂

### 5.1 最小二乘法

误差的平方和最小

$$L = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2$$

拟合直线  $y = kx + b$

$$\begin{cases} k &= \frac{\sum xy - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x^2 - n\bar{x}^2} \\ b &= \bar{y} - k\bar{x} \end{cases}$$