

## XCPC 算法模板和结论 (补充)

October 4, 2025

# Contents

1	几何	2
1.1	极角排序	2
1.2	旋转卡壳	2
1.3	切比雪夫距离	3
2	树	4
2.1	树的重心	4
2.2	树的直径	4
2.3	$O(1)$ LCA	4
3	数学	6
3.1	卷积	6
3.2	复数域高斯消元	9
3.3	积和式	9
3.4	多项式封装	9
3.5	异或线性基	15
4	数据结构	16
4.1	线段树二分	16
4.2	线段树维护区间gcd	18
4.3	对顶堆	19
4.4	手写Bitset	20
4.5	笛卡尔树	21
5	trick	23
5.1	枚举子集	23
5.2	求所有因数	23
6	杂项	24
6.1	格雷码	24
6.2	pbds	24
6.3	哈希表	24
7	动态规划	25
7.1	树上背包	25
7.1.1	dfs序优化	25
7.1.2	多叉转二叉优化	25
7.2	最长单调子序列	26
8	图论	27
8.1	dijkstra求有向图最小瓶颈路 (AI, 未验证)	27
8.2	tarjan有重边找桥	29
9	语法	30
9.1	复数	30
10	网络流	32
10.1	SPFA费用流	32
10.2	网络流封装 (已验证)	34

# Chapter 1

## 几何

### 1.1. 极角排序

```
1 #include <bits/stdc++.h>
2 using ld = long double;
3 const ld PI = acos(-1);
4 const ld EPS = 1e-7;
5 const ld INF = numeric_limits<ld>::max();
6 #define cc(x) cout << fixed << setprecision(x);
7
8 template <class T>
9 struct Point { // 在C++17下使用 emplace_back 绑定可能会导致CE!
10     T x, y;
11     Point(T x_ = 0, T y_ = 0) : x(x_), y(y_) {} // 初始化
12     template <class U>
13     operator Point<U>() { // 自动类型匹配
14         return Point<U>(U(x), U(y));
15     }
16     Point &operator+=(Point p) & { return x += p.x, y += p.y, *this; }
17     Point &operator+=(T t) & { return x += t, y += t, *this; }
18     Point &operator-=(Point p) & { return x -= p.x, y -= p.y, *this; }
19     Point &operator-=(T t) & { return x -= t, y -= t, *this; }
20     Point &operator*=(T t) & { return x *= t, y *= t, *this; }
21     Point &operator/=(T t) & { return x /= t, y /= t, *this; }
22     Point operator-() const { return Point(-x, -y); }
23     friend Point operator+(Point a, Point b) { return a += b; }
24     friend Point operator+(Point a, T b) { return a += b; }
25     friend Point operator-(Point a, Point b) { return a -= b; }
26     friend Point operator-(Point a, T b) { return a -= b; }
27     friend Point operator*(Point a, T b) { return a *= b; }
28     friend Point operator*(T a, Point b) { return b *= a; }
29     friend Point operator/(Point a, T b) { return a /= b; }
30     friend bool operator<(Point a, Point b) {
31         return equal(a.x, b.x) ? a.y < b.y - EPS : a.x < b.x - EPS;
32     }
33     friend bool operator>(Point a, Point b) { return b < a; }
34     friend bool operator==(Point a, Point b) { return !(a < b) && !(b < a); }
35     friend bool operator!=(Point a, Point b) { return a < b || b < a; }
36     friend auto &operator>>(istream &is, Point &p) { return is >> p.x >> p.y; }
37     friend auto &operator<<(ostream &os, Point p) {
38         return os << "(" << p.x << ", " << p.y << ")";
39     }
40 };
41
42 using Points = vector<Point<int>>;
43
44 double theta(auto p) { return atan2(p.y, p.x); }
45 void psort(Points &ps, Point<int> c = {0, 0}) {
46     sort(ps.begin(), ps.end(),
47         [&](auto p1, auto p2) { return theta(p1 - c) < theta(p2 - c); });
48 }
```

### 1.2. 旋转卡壳

```
1 #include <bits/stdc++.h>
2
3 template <class T>
4 pair<vector<Point<T>>, T> maxInscribedQuadrilateral(vector<Point<T>> &p) {
5     int n = (int)p.size();
6     // 至少需要4个顶点
7     if (n < 4) return {{}, 0};
8     // 计算三角形的双倍面积（绝对值）
```

```

9   auto area2 = [&](int i, int j, int k) {
10       T dx1 = p[j].x - p[i].x;
11       T dy1 = p[j].y - p[i].y;
12       T dx2 = p[k].x - p[i].x;
13       T dy2 = p[k].y - p[i].y;
14       return abs(dx1 * dy2 - dy1 * dx2);
15   };
16
17   // 找最低且最左顶点 (a0), 最高且最右顶点 (c0)
18   int a0 = 0, c0 = 0;
19   for (int i = 1; i < n; i++) {
20       if (p[i].y < p[a0].y || (p[i].y == p[a0].y && p[i].x < p[a0].x)) a0 = i;
21       if (p[i].y > p[c0].y || (p[i].y == p[c0].y && p[i].x > p[c0].x)) c0 = i;
22   }
23
24   int a = a0, b = a0, c = c0, d = c0;
25   T maxArea = 0;
26   int bestA = a, bestB = b, bestC = c, bestD = d;
27
28   // 旋转卡尺主循环
29   while (true) {
30       // 移动 b 指针, 使 A-B-C 三角形面积最大
31       while (true) {
32           int nb = (b + 1) % n;
33           if (area2(a, nb, c) > area2(a, b, c))
34               b = nb;
35           else
36               break;
37       }
38       // 移动 d 指针, 使 C-D-A 三角形面积最大
39       while (true) {
40           int nd = (d + 1) % n;
41           if (area2(c, nd, a) > area2(c, d, a))
42               d = nd;
43           else
44               break;
45       }
46       // 计算四边形面积 (注意这里 area2 返回双倍面积)
47       T areaQuad = (area2(a, b, c) + area2(a, c, d)) * T(0.5);
48       if (areaQuad > maxArea) {
49           maxArea = areaQuad;
50           bestA = a;
51           bestB = b;
52           bestC = c;
53           bestD = d;
54       }
55       // 判断旋转方向: 比较移动 C 后与移动 A 后的面积
56       int a_next = (a + 1) % n;
57       int c_next = (c + 1) % n;
58       // 如果 area2(a, a_next, c_next) <= area2(a, a_next, c), 则移动 A, 否则移动 C
59       if (area2(a, a_next, c_next) <= area2(a, a_next, c)) {
60           a = a_next;
61       } else {
62           c = c_next;
63       }
64       // 退出条件: 回到初始对换位置
65       if (a == c0 && c == a0) break;
66   }
67
68   vector<Point<T>> quad = {p[bestA], p[bestB], p[bestC], p[bestD]};
69   return {quad, maxArea};
70 }

```

### 1.3. 切比雪夫距离

$$d(A, B) = \max(|x_a - x_b|, |y_a - y_b|)$$

1. 曼哈顿坐标系是通过切比雪夫坐标系旋转45度后, 再缩小到原来的一半得到的。
2. 将一个点  $(x, y)$  的坐标变为  $(x + y, x - y)$  后, 原坐标系中的曼哈顿距离等于新坐标系中的切比雪夫距离。
3. 将一个点  $(x, y)$  的坐标变为  $(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2})$  后, 原坐标系中的切比雪夫距离等于新坐标系中的曼哈顿距离。

## Chapter 2

# 树

## 2.1. 树的重心

计算以无根树每个点为根节点时的最大子树大小，这个值最小的点称为无根树的重心。

一些性质:

1. 某个点是树的重心等价于它最大子树大小不大于整棵树大小的一半。
2. 树至多有两个重心。如果树有两个重心，那么它们相邻。此时树一定有偶数个节点，且可以被划分为两个大小相等的分支，每个分支各自包含一个重心。
3. 树中所有点到某个点的距离和中，到重心的距离和是最小的；如果有两个重心，那么到它们的距离和一样。反过来，距离和最小的点一定是重心。
4. 往树上增加或减少一个叶子，如果原节点数是奇数，那么重心可能增加一个，原重心仍是重心；如果原节点数是偶数，重心可能减少一个，另一个重心仍是重心。
5. 把两棵树通过一条边相连得到一棵新的树，则新的重心在较大的一棵树一侧的连接点与原重心之间的简单路径上。如果两棵树大小一样，则重心就是两个连接点。

利用性质1, 可以很快的找到重心。

## 2.2. 树的直径

若树上所有边边权均为正，则树的所有直径中点重合

由此可以知道找出 (端点) 字典序最大的直径的方法：从任意顶点出发：找到离它最远其字典序最大的点。然后从这个点出发找离他最远且字典序最大的点。这条直径就是答案。

## 2.3. $O(1)$ LCA

预处理  $O(n \log n)$

```
1 #include <bits/stdc++.h>
2
3 vector<int> g[N];
4 int len[N], dep[N], mxs[N], eord[N << 1], fp[N], idx, fa[N];
5 void dfs(int x, int pre) {
6     fa[x] = pre;
7     dep[x] = dep[pre] + 1;
8     mxs[x] = 1;
9     eord[++idx] = x;
10    if (fp[x] == 0) fp[x] = idx;
11    for (auto& y : g[x]) {
12        if (y == pre) continue;
13        dfs(y, x);
14        eord[++idx] = x;
15        mxs[x] = max(mxs[x], mxs[y] + 1);
16    }
17 }
18 int f[N << 1][35];
19 void init() {
20     for (int i = 1; i <= idx; ++i) f[i][0] = eord[i];
21     for (int len = 1; len < 30; ++len) {
22         for (int l = 1; l <= idx; ++l) {
23             int r = l + (1ll << len) - 1;
24             if (r > idx) break;
25             f[l][len] =
26                 min(f[l][len - 1], f[l + (1ll << len - 1)][len - 1],
27                   [&](const int& x, const int& y) { return dep[x] < dep[y]; });
28         }
29     }
30 }
31 int lca(int x, int y) {
32     int L = fp[x], R = fp[y];
33     if (L > R) swap(L, R);
34     int len = __lg(R - L + 1);
35     // cout<<L<<" "<<R<<"\n" ;
36     return min(f[L][len], f[R - (1 << len) + 1][len],
```

```
37     [&](const int& x, const int& y) { return dep[x] < dep[y]; });  
38 }
```

# Chapter 3

## 数学

### 3.1. 卷积

SOSDP

$$G(K) = \sum_{L \subseteq K} F(L) \quad (K \subseteq U)$$

求所有的  $G(K)$  狄利克雷前缀和

$$G(n) = \sum_{d|n} F(d)$$

狄利克雷后缀和

$$G(d) = \sum_{d|n} F(n)$$

卷积

$$H(\mathcal{S}) = \sum_{I \cup \mathcal{J} = \mathcal{S}} F(I)G(\mathcal{J})$$

子集卷积

$$H_i = \sum_{jork=i, j \text{ and } k=0} F_j G_k$$

```
1 template <class T>
2 struct Convo {
3     // 快速幂
4     long long qpow(long long a, long long b) const {
5         long long res = 1;
6         while (b) {
7             if (b & 1) res = res * a % mod;
8             a = a * a % mod;
9             b >>= 1;
10        }
11        return res;
12    }
13
14    // SOS 前缀和
15    void sos_prefix(vector<T>& f, int n) {
16        int N = 1 << n;
17        for (int i = 0; i < n; ++i) {
18            for (int mask = 0; mask < N; ++mask) {
19                if (mask & (1 << i)) {
20                    f[mask] = (f[mask] + f[mask ^ (1 << i)]) % mod;
21                }
22            }
23        }
24    }
25
26    // SOS 逆
27    void sos_inverse(vector<T>& f, int n) {
28        int N = 1 << n;
29        for (int i = 0; i < n; ++i) {
30            for (int mask = 0; mask < N; ++mask) {
31                if (mask & (1 << i)) {
32                    f[mask] = (f[mask] - f[mask ^ (1 << i)] + mod) % mod;
33                }
34            }
35        }
36    }
37 }
```

```

34     }
35 }
36 // SOS 后缀和
37 void sos_suffix(vector<T>& f, int n) {
38     int N = 1 << n;
39     for (int i = 0; i < n; ++i) {
40         for (int mask = 0; mask < N; ++mask) {
41             if (!(mask & (1 << i))) {
42                 f[mask] = (f[mask] + f[mask | (1 << i)]) % mod;
43             }
44         }
45     }
46 }
47 // SOS 后缀逆
48 void sos_suffix_inverse(vector<T>& f, int n) {
49     int N = 1 << n;
50     for (int i = 0; i < n; ++i) {
51         for (int mask = 0; mask < N; ++mask) {
52             if (!(mask & (1 << i))) {
53                 f[mask] = (f[mask] - f[mask | (1 << i)] + mod) % mod;
54             }
55         }
56     }
57 }
58
59 // 线性筛及 Möbius
60 vector<int> primes, mu;
61 vector<bool> is_comp;
62 void init_sieve(int N) {
63     mu.assign(N + 1, 1);
64     is_comp.assign(N + 1, false);
65     for (int i = 2; i <= N; ++i) {
66         if (!is_comp[i]) {
67             primes.push_back(i);
68             mu[i] = -1;
69         }
70         for (int p : primes) {
71             if ((long long)i * p > N) break;
72             is_comp[i * p] = true;
73             mu[i * p] = (i % p == 0 ? 0 : -mu[i]);
74             if (i % p == 0) break;
75         }
76     }
77 }
78 // Dirichlet 前缀和
79 void dirichlet_prefix(vector<T>& F, int n) {
80     for (int p : primes) {
81         if (p > n) break;
82         for (int i = 1; i * p <= n; ++i) {
83             F[i * p] = (F[i * p] + F[i]) % mod;
84         }
85     }
86 }
87 // Dirichlet 前缀逆
88 void dirichlet_prefix_inverse(vector<T>& G, int n) {
89     for (int i = (int)primes.size() - 1; i >= 0; --i) {
90         int p = primes[i];
91         if (p > n) continue;
92         for (int j = 1; j * p <= n; ++j) {
93             G[j * p] = (G[j * p] - G[j] + mod) % mod;
94         }
95     }
96 }
97 // Dirichlet 后缀和
98 void dirichlet_suffix(vector<T>& F, int n) {
99     for (int p : primes) {
100         if (p > n) break;
101         for (int i = n / p; i >= 1; --i) {
102             F[i] = (F[i] + F[i * p]) % mod;
103         }
104     }
105 }
106 // Dirichlet 后缀逆
107 void dirichlet_suffix_inverse(vector<T>& H, int n) {
108     for (int i = (int)primes.size() - 1; i >= 0; --i) {
109         int p = primes[i];
110         if (p > n) continue;
111         for (int j = n / p; j >= 1; --j) {
112             H[j] = (H[j] - H[j * p] + mod) % mod;
113         }
114     }
115 }

```



```

116
117 // OR 卷积
118 void OR(vector<T>& F, vector<T>& G, int n) {
119     sos_prefix(F, n);
120     sos_prefix(G, n);
121     int N = 1 << n;
122     for (int i = 0; i < N; ++i) F[i] = (long long)F[i] * G[i] % mod;
123     sos_inverse(F, n);
124 }
125 // AND 卷积
126 void AND(vector<T>& F, vector<T>& G, int n) {
127     sos_suffix(F, n);
128     sos_suffix(G, n);
129     int N = 1 << n;
130     for (int i = 0; i < N; ++i) F[i] = (long long)F[i] * G[i] % mod;
131     sos_suffix_inverse(F, n);
132 }
133 // GCD 卷积
134 void GCD(vector<T>& F, vector<T>& G, int n) {
135     dirichlet_suffix(F, n);
136     dirichlet_suffix(G, n);
137     for (int i = 1; i <= n; ++i) F[i] = (long long)F[i] * G[i] % mod;
138     dirichlet_suffix_inverse(F, n);
139 }
140 // LCM 卷积
141 void LCM(vector<T>& F, vector<T>& G, int n) {
142     dirichlet_prefix(F, n);
143     dirichlet_prefix(G, n);
144     for (int i = 1; i <= n; ++i) F[i] = (long long)F[i] * G[i] % mod;
145     dirichlet_prefix_inverse(F, n);
146 }
147 // 子集卷积
148 void SUBSET(vector<T>& A, vector<T>& B, int n) {
149     int N = 1 << n;
150     vector<vector<T>>> f(n + 1, vector<T>(N)), g(n + 1, vector<T>(N));
151     for (int mask = 0; mask < N; ++mask) {
152         int pc = __builtin_popcount(mask);
153         f[pc][mask] = A[mask];
154         g[pc][mask] = B[mask];
155     }
156     for (int i = 0; i <= n; ++i) {
157         sos_prefix(f[i], n);
158         sos_prefix(g[i], n);
159     }
160     vector<vector<T>>> h(n + 1, vector<T>(N));
161     for (int mask = 0; mask < N; ++mask) {
162         for (int i = 0; i <= n; ++i) {
163             long long sum = 0;
164             for (int j = 0; j <= i; ++j) {
165                 sum += (long long)f[j][mask] * g[i - j][mask] % mod;
166             }
167             h[i][mask] = sum % mod;
168         }
169     }
170     for (int i = 0; i <= n; ++i) sos_inverse(h[i], n);
171     for (int mask = 0; mask < N; ++mask)
172         A[mask] = h[__builtin_popcount(mask)][mask];
173 }
174
175 // FWT 异或卷积
176 void FWT(vector<T>& F, int n, bool inverse = false) {
177     int N = 1 << n;
178     for (int len = 1; len < N; len <= 1) {
179         for (int i = 0; i < N; i += len << 1) {
180             for (int j = 0; j < len; ++j) {
181                 T u = F[i + j], v = F[i + j + len];
182                 F[i + j] = (u + v) % mod;
183                 F[i + j + len] = (u - v + mod) % mod;
184             }
185         }
186     }
187     if (inverse) {
188         long long inv = qpow(N, mod - 2);
189         for (int i = 0; i < N; ++i) F[i] = (long long)F[i] * inv % mod;
190     }
191 }
192 // 异或卷积接口
193 void XOR(vector<T>& F, vector<T>& G, int n) {
194     FWT(F, n, false);
195     FWT(G, n, false);
196     int N = 1 << n;
197     for (int i = 0; i < N; ++i) F[i] = (long long)F[i] * G[i] % mod;

```

```

198     FWT(F, n, true);
199 }
200 };

```

## 3.2. 复数域高斯消元

```

1  #include <bits/stdc++.h>
2  using cd = complex<long double>;
3  cd ar[10][10];
4  const double eps = 1e-8;
5  int gauss(int n) {
6      int c, r;
7      for (c = 0, r = 0; c < n; ++c) {
8          int t = r;
9          for (int i = r; i < n; ++i) {
10             if (std::abs(ar[i][c]) > std::abs(ar[t][c])) t = i;
11         }
12         if (std::abs(ar[t][c]) < eps) continue;
13         for (int j = c; j < n + 1; ++j) std::swap(ar[t][j], ar[r][j]);
14         for (int j = n; j >= c; --j) ar[r][j] /= ar[r][c];
15         for (int i = r + 1; i < n; ++i) {
16             if (std::abs(ar[i][c]) > eps) {
17                 for (int j = n; j >= c; --j) {
18                     ar[i][j] -= ar[r][j] * ar[i][c];
19                 }
20             }
21         }
22         r++;
23     }
24     if (r < n) {
25         for (int i = r; i < n; ++i) {
26             bool allZero = true;
27             for (int j = 0; j < n; ++j) {
28                 if (std::abs(ar[i][j]) > eps) {
29                     allZero = false;
30                     break;
31                 }
32             }
33             if (allZero && std::abs(ar[i][n]) > eps) return 2;
34         }
35         return 1;
36     }
37     for (int i = n - 1; i >= 0; --i) {
38         for (int j = i + 1; j < n; ++j) {
39             ar[i][n] -= ar[i][j] * ar[j][n];
40         }
41     }
42     return 0;
43 }

```

## 3.3. 积和式

一个  $n \times n$  矩阵  $A = (a_{i,j})$  的积和式定义为

$$\text{perm}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$$

也就是说，对所有排列  $\sigma$  把对应位置的乘积求和。

形式上与行列式相似，但行列式在每项前有置换符号  $\text{sgn}(\sigma)$ ，而积和式不带符号。

因此两者在代数与计算性质上有明显不同（例如交换两行不改变积和式、但会改变行列式的符号）。积和式是多线性的，且对行（或列）置换不变。

对于二分图，把左、右两侧各  $n$  个顶点的邻接矩阵记为  $A$ ，则  $\text{perm}(A)$  等于该二分图中**完美匹配**的数目（每个排列对应一种匹配，非边对应项为 0）。

对有向图，邻接矩阵的积和式等于该图的**圈覆盖**（vertex-disjoint cycle cover）的数目。

$2 \times 2$  矩阵  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  的积和式为  $ad + bc$ 。

全 1 的  $n \times n$  矩阵的积和式就是棋盘上放置  $n$  个互不攻击的车（rook）的排列数（与置换的计数相关）。

特别地，对于二分图完美匹配计数问题，模 2 下其数目同余于行列式的值。

## 3.4. 多项式封装

```

1  #include <bits/stdc++.h>
2  using namespace std;
3
4  typedef long long LL;
5  template <unsigned umod>

```

```

6 struct modint {
7     static constexpr int mod = umod;
8     unsigned v;
9     modint() : v(0) {}
10    template <class T, enable_if_t<is_integral<T>::value>* = nullptr>
11    modint(T x) {
12        x %= mod;
13        if (x < 0) x += mod;
14        v = x;
15    }
16    modint(const string& str) {
17        v = 0;
18        size_t i = 0;
19        if (str.front() == '-') i += 1;
20        while (i < str.size()) {
21            assert(isdigit(str[i]));
22            v = (v * 10ull % umod + str[i] - '0') % umod;
23            i += 1;
24        }
25        if (str.front() == '-' && v) v = umod - v;
26    }
27    modint operator+() const { return *this; }
28    modint operator-() const { return modint() - *this; }
29    friend int raw(const modint& self) { return self.v; }
30    friend istream& operator>>(istream& is, modint& self) {
31        string str;
32        is >> str;
33        self = str;
34        return is;
35    }
36    friend ostream& operator<<(ostream& os, const modint& self) {
37        return os << raw(self);
38    }
39    modint& operator+=(const modint& rhs) {
40        v += rhs.v;
41        if (v >= umod) v -= umod;
42        return *this;
43    }
44    modint& operator-=(const modint& rhs) {
45        v -= rhs.v;
46        if (v >= umod) v += umod;
47        return *this;
48    }
49    modint& operator*=(const modint& rhs) {
50        v = static_cast<unsigned>(1ull * v * rhs.v % umod);
51        return *this;
52    }
53    modint& operator/=(const modint& rhs) {
54        static constexpr size_t ilim = 1 << 20;
55        static modint inv[ilim + 10];
56        static int sz = 0;
57        assert(rhs.v);
58        if (rhs.v > ilim) return *this *= qpow(rhs, mod - 2);
59        if (!sz) inv[1] = sz = 1;
60        while (sz < (int)rhs.v) {
61            for (int i = sz + 1; i <= sz << 1; i++) inv[i] = -mod / i * inv[mod % i];
62            sz <<= 1;
63        }
64        return *this *= inv[rhs.v];
65    }
66    template <class T>
67    friend modint qpow(modint a, T b) {
68        modint r = 1;
69        for (; b >>= 1, a *= a;
70            if (b & 1) r *= a;
71        return r;
72    }
73    friend modint operator+(modint lhs, const modint& rhs) { return lhs += rhs; }
74    friend modint operator-(modint lhs, const modint& rhs) { return lhs -= rhs; }
75    friend modint operator*(modint lhs, const modint& rhs) { return lhs *= rhs; }
76    friend modint operator/(modint lhs, const modint& rhs) { return lhs /= rhs; }
77    friend bool operator==(const modint& lhs, const modint& rhs) {
78        return lhs.v == rhs.v;
79    }
80    friend bool operator!=(const modint& lhs, const modint& rhs) {
81        return lhs.v != rhs.v;
82    }
83 };
84
85 typedef modint<998244353> mint;
86 // 返回大于等于 x 的最小 2 的幂
87 int glim(const int& x) { return 1 << (32 - __builtin_clz(x - 1)); }

```

```

88 // 返回 x 尾部连续 0 的个数。
89 int bitctz(const int& x) { return __builtin_ctz(x); }
90 struct poly : vector<mint> {
91     poly() {}
92     explicit poly(int n) : vector<mint>(n) {}
93     poly(const vector<mint>& vec) : vector<mint>(vec) {}
94     // 列表初始化
95     poly(initializer_list<mint> il) : vector<mint>(il) {}
96     mint operator()(const mint& x) const;
97     poly& cut(int lim);
98     void ntt(int op);
99 };
100 // 输入多项式系数
101 istream& operator>>(istream& is, poly& a) {
102     for (auto& x : a) is >> x;
103     return is;
104 }
105 // 输出一个多项式
106 ostream& operator<<(ostream& os, const poly& a) {
107     bool flag = false;
108     for (auto& x : a) {
109         if (flag)
110             os << " ";
111         else
112             flag = true;
113         os << x;
114     }
115     return os;
116 }
117 // 单点求值
118 mint poly::operator()(const mint& x) const {
119     const auto& a = *this;
120     mint res = 0;
121     for (int i = (int)a.size() - 1; i >= 0; i--) {
122         res = res * x + a[i];
123     }
124     return res;
125 }
126 // 截断到lim
127 poly& poly::cut(int lim) {
128     resize(lim);
129     return *this;
130 }
131
132 void poly::ntt(int op) {
133     static bool wns_flag = false;
134     static vector<mint> wns;
135     if (!wns_flag) {
136         wns_flag = true;
137         for (int j = 1; j <= 23; j++) {
138             wns.push_back(qpow(mint(3), raw(mint(-1)) >> j));
139         }
140     }
141     vector<mint>& a = *this;
142     int n = a.size();
143     for (int i = 1, r = 0; i < n; i++) {
144         r ^= n - (1 << (bitctz(n) - bitctz(i) - 1));
145         if (i < r) std::swap(a[i], a[r]);
146     }
147     vector<mint> w(n);
148     for (int k = 1, len = 2; len <= n; k <= 1, len <= 1) {
149         mint wn = wns[bitctz(k)];
150         for (int i = raw(w[0] = 1); i < k; i++) w[i] = w[i - 1] * wn;
151         for (int i = 0; i < n; i += len) {
152             for (int j = 0; j < k; j++) {
153                 mint x = a[i + j], y = a[i + j + k] * w[j];
154                 a[i + j] = x + y, a[i + j + k] = x - y;
155             }
156         }
157     }
158     if (op == -1) {
159         mint iz = mint(1) / n;
160         for (int i = 0; i < n; i++) a[i] *= iz;
161         reverse(a.begin() + 1, a.end());
162     }
163 }
164 // 牛顿迭代, vec是多项式, func是计算的函数
165 poly concalc(int n, vector<poly> vec,
166             const function<mint(vector<mint>>& func) {
167     int lim = glim(n);
168     int m = vec.size();
169     for (auto& f : vec) f.resize(lim), f.ntt(1);

```

```

170     vector<mint> tmp(m);
171     poly ret(lim);
172     for (int i = 0; i < lim; i++) {
173         for (int j = 0; j < m; j++) tmp[j] = vec[j][i];
174         ret[i] = func(tmp);
175     }
176     ret.ntt(-1);
177     return ret;
178 }
179
180 poly getInv(const poly& a, int lim) {
181     poly b{1 / a[0]};
182     for (int len = 2; len <= glim(lim); len <= 1) {
183         poly c = vector<mint>(a.begin(), a.begin() + min(len, (int)a.size()));
184         b = concalc(len < 1, {b, c}, [](vector<mint> vec) {
185             return vec[0] * (2 - vec[0] * vec[1]);
186         }).cut(len);
187     }
188     return b.cut(lim);
189 }
190
191 poly operator+=(poly& a, const poly& b) {
192     if (a.size() < b.size()) a.resize(b.size());
193     for (size_t i = 0; i < b.size(); i++) a[i] += b[i];
194     return a;
195 }
196
197 poly operator-=(poly& a, const poly& b) {
198     if (a.size() < b.size()) a.resize(b.size());
199     for (size_t i = 0; i < b.size(); i++) a[i] -= b[i];
200     return a;
201 }
202
203 poly operator*=(poly& a, const mint& k) {
204     if (k == 1) return a;
205     for (size_t i = 0; i < a.size(); i++) a[i] *= k;
206     return a;
207 }
208 poly operator/=(poly& a, const mint& k) { return a *= 1 / k; }
209
210 poly operator<<=(poly& a, const int& k) {
211     // multiple by x^k
212     a.insert(a.begin(), k, 0);
213     return a;
214 }
215
216 poly operator>>=(poly& a, const int& k) {
217     // divide by x^k
218     a.erase(a.begin(), a.begin() + min(k, (int)a.size()));
219     return a;
220 }
221 poly operator*(const poly& a, const poly& b) {
222     if (a.empty() || b.empty()) return {};
223     int rlen = a.size() + b.size() - 1;
224     int len = glim(rlen);
225     if (1ull * a.size() * b.size() <= 1ull * len * bitctz(len)) {
226         poly ret(rlen);
227         for (size_t i = 0; i < a.size(); i++)
228             for (size_t j = 0; j < b.size(); j++) ret[i + j] += a[i] * b[j];
229         return ret;
230     } else {
231         return concalc(len, {a, b},
232             [](vector<mint> vec) { return vec[0] * vec[1]; });
233     }
234 }
235
236 poly operator/(poly a, poly b) {
237     if (a.size() < b.size()) return {};
238     int rlen = a.size() - b.size() + 1;
239     reverse(a.begin(), a.end());
240     reverse(b.begin(), b.end());
241     a = (a * getInv(b, rlen)).cut(rlen);
242     reverse(a.begin(), a.end());
243     return a;
244 }
245 poly operator-(poly a, const poly& b) { return a -= b; }
246 poly operator%(const poly& a, const poly& b) {
247     return (a - (a / b) * b).cut(b.size() - 1);
248 }
249 poly operator*=(poly& a, const poly& b) { return a = a * b; }
250 poly operator/=(poly& a, const poly& b) { return a = a / b; }
251 poly operator%=(poly& a, const poly& b) { return a = a % b; }

```

```

252 poly operator+(poly a, const poly& b) { return a += b; }
253 poly operator*(poly a, const mint& k) { return a *= k; }
254 poly operator*(const mint& k, poly a) { return a *= k; }
255 poly operator/(poly a, const mint& k) { return a /= k; }
256 poly operator<<(poly a, const int& k) { return a <<= k; }
257 poly operator>>(poly a, const int& k) { return a >>= k; }
258 // 形式导数
259 poly getDev(poly a) {
260     a >>= 1;
261     for (size_t i = 1; i < a.size(); i++) a[i] *= i + 1;
262     return a;
263 }
264 // 不定积分
265 poly getInt(poly a) {
266     a <<= 1;
267     for (size_t i = 1; i < a.size(); i++) a[i] /= i;
268     return a;
269 }
270 // 对数函数
271 poly getLn(const poly& a, int lim) {
272     assert(a[0] == 1);
273     return getInt(getDev(a) * getInv(a, lim)).cut(lim);
274 }
275 // 指数函数
276 poly getExp(const poly& a, int lim) {
277     assert(a[0] == 0);
278     poly b{1};
279     for (int len = 2; len <= glim(lim); len <= 1) {
280         poly c = vector<mint>(a.begin(), a.begin() + min(len, (int)a.size()));
281         b = concalc(len << 1, {b, getLn(b, len), c}, [](vector<mint> vec) {
282             return vec[0] * (1 - vec[1] + vec[2]);
283         }).cut(len);
284     }
285     return b.cut(lim);
286 }
287 // 快速幂
288 poly qpow(const poly& a, string k, int lim) {
289     size_t i = 0;
290     while (i < a.size() && a[i] == 0) i += 1;
291     if (i == a.size() || (i > 0 && k.size() >= 9) ||
292         1ull * i * raw(mint(k)) >= 1ull * lim)
293         return poly(lim);
294     lim -= i * raw(mint(k));
295     return getExp(getLn(a / a[i] >> i, lim) * k, lim) *
296         qpow(a[i], raw(modint<mint::mod - 1>(k)))
297         << i * raw(mint(k));
298 }
299 poly qpow(const poly& a, LL k, int lim) {
300     size_t i = 0;
301     while (i < a.size() && a[i] == 0) i += 1;
302     if (i == a.size() || (i > 0 && k >= 1e9) || 1ull * i * k >= 1ull * lim)
303         return poly(lim);
304     lim -= i * k;
305     return getExp(getLn(a / a[i] >> i, lim) * k, lim) *
306         qpow(a[i], raw(modint<mint::mod - 1>(k)))
307         << i * k;
308 }
309
310 mint sqrt(const mint& c) {
311     static const auto check = [](mint c) {
312         return qpow(c, (mint::mod - 1) >> 1) == 1;
313     };
314     if (raw(c) <= 1) return 1;
315     if (!check(c)) throw "No solution!";
316     static mt19937 rng{random_device{}}();
317     mint a = rng();
318     while (check(a * a - c)) a = rng();
319     typedef pair<mint, mint> number;
320     const auto mul = [=](number x, number y) {
321         return make_pair(x.first * y.first + x.second * y.second * (a * a - c),
322             x.first * y.second + x.second * y.first);
323     };
324     const auto qpow = [=](number a, int b) {
325         number r = {1, 0};
326         for (; b; b >>= 1, a = mul(a, a))
327             if (b & 1) r = mul(r, a);
328         return r;
329     };
330     mint ret = qpow({a, 1}, (mint::mod + 1) >> 1).first;
331     return min(raw(ret), raw(-ret));
332 }
333 // 开根号

```

```

334 poly getSqrt(const poly& a, int lim) {
335     poly b{sqrt(a[0])};
336     for (int len = 2; len <= glim(lim); len <= 1) {
337         poly c = vector<mint>(a.begin(), a.begin() + min(len, (int)a.size()));
338         b = (c * getInv(b * 2, len) + b / 2).cut(len);
339     }
340     return b.cut(lim);
341 }
342 template <class T>
343 mint divide_at(poly f, poly g, T n) {
344     for (; n; n >= 1) {
345         poly r = g;
346         for (size_t i = 1; i < r.size(); i += 2) r[i] *= -1;
347         f *= r;
348         g *= r;
349         int i;
350         for (i = n & 1; i < (int)f.size(); i += 2) f[i >> 1] = f[i];
351         f.resize(i >> 1);
352         for (i = 0; i < (int)g.size(); i += 2) g[i >> 1] = g[i];
353         g.resize(i >> 1);
354     }
355     return f.empty() ? 0 : f[0] / g[0];
356 }
357
358 template <class T>
359 mint linear_rec(poly a, poly f, T n) {
360     // a[n] = sum_i f[i] * a[n - i]
361     a.resize(f.size() - 1);
362     f = poly{1} - f;
363     poly g = a * f;
364     g.resize(a.size());
365     return divide_at(g, f, n);
366 }
367 poly BM(poly a) {
368     poly ans, lst;
369     int w = 0;
370     mint delta = 0;
371     for (size_t i = 0; i < a.size(); i++) {
372         mint tmp = -a[i];
373         for (size_t j = 0; j < ans.size(); j++) tmp += ans[j] * a[i - j - 1];
374         if (tmp == 0) continue;
375         if (ans.empty()) {
376             w = i;
377             delta = tmp;
378             ans = vector<mint>(i + 1, 0);
379         } else {
380             auto now = ans;
381             mint mul = -tmp / delta;
382             if (ans.size() < lst.size() + i - w) ans.resize(lst.size() + i - w);
383             ans[i - w - 1] -= mul;
384             for (size_t j = 0; j < lst.size(); j++) ans[i - w + j] += lst[j] * mul;
385             if (now.size() <= lst.size() + i - w) {
386                 w = i;
387                 lst = now;
388                 delta = tmp;
389             }
390         }
391     }
392     return ans << 1;
393 }
394
395 poly lagrange(const vector<pair<mint, mint>>& a) {
396     poly ans(a.size()), product{1};
397     for (size_t i = 0; i < a.size(); i++) {
398         product *= poly{-a[i].first, 1};
399     }
400     auto divide2 = [&](poly a, mint b) {
401         poly res(a.size() - 1);
402         for (size_t i = (int)a.size() - 1; i >= 1; i--) {
403             res[i - 1] = a[i];
404             a[i - 1] -= a[i] * b;
405         }
406         return res;
407     };
408     for (size_t i = 0; i < a.size(); i++) {
409         mint denos = 1;
410         for (size_t j = 0; j < a.size(); j++) {
411             if (i != j) denos *= a[i].first - a[j].first;
412         }
413         poly numes = divide2(product, -a[i].first);
414         ans += a[i].second / denos * numes;
415     }

```

```

416     return ans;
417 }

```

## 3.5. 异或线性基

时间复杂度  $O(n \log \max a)$  异或问题, 同时又可以找到“子集”“子序列”等字眼, 或者是图论中的某条路径的异或和时, 就可以往线性基方向想了。我们可以利用异或线性基实现:

1. 判断一个数能否表示成某数集子集的异或和;
2. 求一个数表示成某数集子集异或和的方案数;
3. 求某数集子集的最大/最小/第  $k$  大/第  $k$  小异或和; (注意01Tire是求点对区间的第 $k$ 大异或对)
4. 求一个数在某数集子集异或和中的排名。

```

1  /*异或线性基
2  *求数集子集异或和第k小 (k从0开始计数)
3  */
4  struct Basis {
5      vector<u64> B;
6      int cntz=0;//0的个数
7      bool ok=false;
8      void insert(u64 x) {
9          for (auto b:B) x=min(x,x^b);
10         for (auto& b: B) b=min(b,b^x);
11         if (x) B.push_back(x);
12         else cntz++;
13     }
14     void _min() {
15         sort(B.begin(),B.end());
16         for (int i=1;i<B.size();++i) {
17             for (int j=i-1;j>=0;--j) {
18                 B[i]=min(B[i],B[i]^B[j]);
19             }
20         }
21     }
22     //第k小的异或和
23     u64 query(int k,bool overphi) { //第k小, 包含空集?(k从0开始数)
24         if (!ok)_min(),ok=true;
25         if (!overphi and !cntz) k++;
26         if (k>=(1ll<<(B.size()))) return -1;
27         int res=0;
28         for (int i=0;i<B.size();++i) {
29             if ((k>>i)&1) res^=B[i];
30         }
31         return res;
32     }
33
34     u64 querymx() {
35         return query((1ll<<(B.size()))-1,1);
36     }
37
38     void print() {
39         for (int i=0;i<B.size();++i) cout<<B[i]<<" ";
40         cout<<"\n";
41     }
42
43     //线性基的合并 (双log)
44     void operator+=(Basis& _B) {
45         for (auto &b:_B.B) this->insert(b);
46     }
47     friend Basis operator+(Basis& b1,Basis& b2) {
48         Basis res=b1;
49         for (auto& b:b2.B)res.insert(b);
50         return res;
51     }
52 };

```

模板题: 最大异或和:<https://www.luogu.com.cn/record/204660302>



## Chapter 4

# 数据结构

### 4.1. 线段树二分

```
1  /*
2  线段树 (LazySegmentTree)
3  左闭右开
4  */
5  template <class Info, class Tag>
6  struct LazySegmentTree {
7      int n; // n+1
8      vector<Info> info;
9      vector<Tag> tag;
10     // init begin
11     LazySegmentTree() : n(0) {}
12     LazySegmentTree(int n_, Info v_ = Info()) {
13         init(n_ + 1, v_); // 下标从1开始
14     }
15     template <class T>
16     LazySegmentTree(vector<T> init_) {
17         init(init_);
18     }
19     void init(int n_, Info v_ = Info()) { init(vector(n_, v_)); }
20     template <class T>
21     void init(vector<T> init_) {
22         n = init_.size();
23         info.assign(4 << __lg(n), Info());
24         tag.assign(4 << __lg(n), Tag());
25         std::function<void(int, int, int)> build = [&](int p, int l, int r) {
26             if (r - l == 1) {
27                 info[p] = init_[l];
28                 return;
29             }
30             int m = (l + r) / 2;
31             build(2 * p, l, m);
32             build(2 * p + 1, m, r);
33             pull(p);
34         };
35         build(1, 1, n);
36     }
37     // init end
38     // up
39     void pull(int p) { info[p] = info[2 * p] + info[2 * p + 1]; }
40     // 修改
41     void apply(int p, const Tag &v, int len) {
42         info[p].apply(v, len);
43         tag[p].apply(v);
44     }
45     // down
46     void push(int p, int len) {
47         apply(2 * p, tag[p], len / 2);
48         apply(2 * p + 1, tag[p], len - len / 2);
49         tag[p] = Tag();
50     }
51     // 单点修改
52     void modify(int p, int l, int r, int x, const Info &v) {
53         if (r - l == 1) {
54             info[p] = v;
55             return;
56         }
57         int m = (l + r) / 2;
58         push(p, r - l);
59         if (x < m) {
60             modify(2 * p, l, m, x, v);
```

```

61     } else {
62         modify(2 * p + 1, m, r, x, v);
63     }
64     pull(p);
65 }
66 void modify(int p, const Info &v) { modify(1, 1, n, p, v); }
67 // 区间查询
68 Info rangeQuery(int p, int l, int r, int x, int y) {
69     if (l >= y || r <= x) {
70         return Info();
71     }
72     if (l >= x && r <= y) {
73         return info[p];
74     }
75     int m = (l + r) / 2;
76     push(p, r - 1);
77     return rangeQuery(2 * p, l, m, x, y) + rangeQuery(2 * p + 1, m, r, x, y);
78 }
79 Info rangeQuery(int l, int r) { return rangeQuery(1, 1, n, l, r); }
80
81 // 区间修改
82 void rangeApply(int p, int l, int r, int x, int y, const Tag &v) {
83     if (l >= y || r <= x) {
84         return;
85     }
86     if (l >= x && r <= y) {
87         apply(p, v, r - 1);
88         return;
89     }
90     int m = (l + r) / 2;
91     push(p, r - 1);
92     rangeApply(2 * p, l, m, x, y, v);
93     rangeApply(2 * p + 1, m, r, x, y, v);
94     pull(p);
95 }
96 void rangeApply(int l, int r, const Tag &v) {
97     return rangeApply(1, 1, n, l, r, v);
98 }
99
100 // 线段树二分
101 template <class F>
102 int findFirst(int p, int l, int r, int x, int y, F &&pred) {
103     if (l >= y || r <= x) {
104         return -1;
105     }
106     if (l >= x && r <= y && !pred(info[p])) {
107         return -1;
108     }
109     if (r - l == 1) {
110         return l;
111     }
112     int m = (l + r) / 2;
113     push(p, r - 1);
114     int res = findFirst(2 * p, l, m, x, y, pred);
115     if (res == -1) {
116         res = findFirst(2 * p + 1, m, r, x, y, pred);
117     }
118     return res;
119 }
120 // 第一个满足条件F的位置
121 template <class F>
122 int findFirst(int l, int r, F &&pred) {
123     return findFirst(1, 1, n, l, r, pred);
124 }
125 template <class F>
126 int findLast(int p, int l, int r, int x, int y, F &&pred) {
127     if (l >= y || r <= x) {
128         return -1;
129     }
130     if (l >= x && r <= y && !pred(info[p])) {
131         return -1;
132     }
133     if (r - l == 1) {
134         return l;
135     }
136     int m = (l + r) / 2;
137     push(p, r - 1);
138     int res = findLast(2 * p + 1, m, r, x, y, pred);
139     if (res == -1) {
140         res = findLast(2 * p, l, m, x, y, pred);
141     }
142     return res;
143 }

```

```

143 //最后一个满足条件F的位置
144 template <class F>
145 int findLast(int l, int r, F &&pred) {
146     return findLast(1, 1, n, l, r, pred);
147 }
148 };
149
150 struct Tag {
151     int x = 0;
152     void apply(const Tag &t) & { x += t.x; }
153 };
154
155 struct Info {
156     int sum = 0, mx=-iinf, mi=iinf;
157     void apply(const Tag &t, int len) & {
158         sum += t.x * len;
159         mx +=t.x;
160         mi +=t.x;
161     }
162 };
163 // merge
164 Info operator+(const Info &a, const Info &b) {
165     Info res={};
166     res.sum=a.sum+b.sum;
167     res.mx=max(a.mx,b.mx);
168     res.mi=min(a.mi,b.mi);
169     return res;
170 }

```

## 4.2. 线段树维护区间gcd

$$\gcd_{i=l}^r = \gcd(a_l, \gcd_{i=l+1}^r(a[i] - a[i-1]))$$

这意味着我们无须维护区间加，只要做差分数组并维护单点加就可以了。

```

1 int mygcd(int a,int b) {
2     return __gcd(abs(a),abs(b));
3 }
4 template<class T>
5 struct Segt {
6     struct node {
7         int l,r;
8         T w;// gcd
9         T sum;
10    };
11    vector<T> w;
12    vector<node> t;
13    Segt(){}
14    Segt(int n) {init(n);}
15    Segt(vector<int> in) {
16        int n=in.size()-1;
17        w.resize(n+1);
18        for (int i=1;i<=n;++i) {
19            w[i]=in[i];
20        }
21        init(in.size()-1);
22    }
23    #define GL k<<1
24    #define GR k<<1|1
25    void init(int n) {
26        t.resize(4*n +1);
27        auto build=[&](auto self ,int l, int r,int k=1) {
28            if (l==r) {
29                t[k]={l,r,w[l],w[l]};
30                return ;
31            }
32            t[k]={l,r,0,0};
33            int mid=(l+r)/2;
34            self(self,l,mid,GL);
35            self(self,mid+1,r,GR);
36            pushup(k);
37        };
38        build(build,1,n);
39    }
40    void pushup(int k) {
41        auto pushup=[&](node& p,node& l, node &r) {
42            p.w=mygcd(l.w,r.w);
43            p.sum=l.sum+r.sum;

```

```

44     };
45     pushup(t[k],t[GL],t[GR]);
46 }
47 void add(int pos,T val,int k=1) {
48     if (t[k].l==t[k].r) {
49         t[k].w+=val;
50         t[k].sum+=val;
51         return ;
52     }
53     int mid=(t[k].l+t[k].r)/2;
54     if (pos<=mid) add(pos,val,GL);
55     else add(pos,val,GR);
56     pushup(k);
57 }
58 // 单点赋值, 不用管sum
59 void upd(int pos,T val,int k=1) {
60     if (t[k].l==t[k].r) {
61         t[k].w=val;
62         return ;
63     }
64     int mid=(t[k].l+t[k].r)/2;
65     if (pos<=mid) upd(pos,val,GL);
66     else upd(pos,val,GR);
67     pushup(k);
68 }
69 T askgcd(int l,int r,int k=1) {
70     if (l<=t[k].l and t[k].r<=r) return t[k].w;
71     int mid=(t[k].l+t[k].r)/2;
72     T ans=0;
73     if (l<=mid) ans=mygcd(ans,askgcd(l,r,GL));
74     if (mid<r) ans=mygcd(ans,askgcd(l,r,GR));
75     return ans;
76 }
77 T asksum(int l,int r,int k=1) {
78     if (l<=t[k].l and t[k].r<=r) return t[k].sum;
79     int mid=(t[k].l+t[k].r)/2;
80     T ans=0;
81     if (l<=mid) ans+=asksum(l,r,GL);
82     if (mid<r) ans+=asksum(l,r,GR);
83     return ans;
84 }
85 };
86
87 void solve() {
88     int n,m;cin>>n>>m;
89     vector<int> a(n+1);
90     for (int i=1;i<=n;++i) cin>>a[i];
91     for (int i=n;i--i) a[i]-=a[i-1];
92     Segt<int> sgt(a);
93     for (int i=1;i<=m;++i) {
94         char op;cin>>op;
95         if (op=='C') { // 区间修改
96             int l,r,d;cin>>l>>r>>d;
97             sgt.add(l,d);
98             if (r<n) sgt.add(r+1,-d);
99         } else { // 区间查询
100             int l,r;cin>>l>>r;
101             cout<<mygcd(sgt.asksum(l,l),sgt.askgcd(l+1,r))<<"\n";
102         }
103     }
104 }

```

## 4.3. 对顶堆

```

1 using namespace std;
2 struct Maxheap {
3     int n;
4     vector<int> w;
5     Maxheap(auto &_init):w(_init) {
6         n=static_cast<int>(_init.size())-1;
7         w.resize(n+1);
8         for (int i=1;i<=n;++i) up(i);
9     }
10    void up(int x) {
11        while (x>1 and w[x]>w[x/2]) swap(w[x],w[x/2]),x/=2;
12    }
13    void down(int x) {
14        while (x*2<=n) {
15            int t=x*2;
16            if (t+1<=n and w[t+1]>w[t]) t++;
17            if (w[x]>w[t]) return ;

```

```

18     swap(w[x],w[t]);
19     x=t;
20 }
21 }
22 };

```

对顶堆可以动态维护一个序列上的中位数, 或者第 $k$ 大的数( $k$ 的值可能变化).

对顶堆由一个大根堆与一个小根堆组成, 小根堆维护大值即前 $k$ 大的值 (包含第 $k$ 个), 大根堆维护小值即比第 $k$ 大数小的其他数。

维护: 当小根堆的大小小于 $k$ 时, 不断将大根堆堆顶元素取出并插入小根堆, 直到小根堆的大小等于 $k$ ; 当小根堆的大小大于 $k$ 时, 不断将小根堆堆顶元素取出并插入大根堆, 直到小根堆的大小等于 $k$ ;

插入元素: 若插入的元素大于等于小根堆堆顶元素, 则将其插入小根堆, 否则将其插入大根堆, 然后维护对顶堆;

查询第 $k$ 大元素: 小根堆堆顶元素即为所求;

删除第 $k$ 大元素: 删除小根堆堆顶元素, 然后维护对顶堆;

变化 $k$ : 根据新的 $k$ 值直接维护对顶堆。

时间复杂度  $O(\log n)$

```

1  #include <bits/stdc++.h>
2  using namespace std;
3  struct mset {
4      const int kInf = 1e9 + 2077;
5      multiset<int> less, greater;
6      void init() {
7          less.clear(), greater.clear();
8          less.insert(-kInf), greater.insert(kInf);
9      }
10     void adjust() {
11         while (less.size() > greater.size() + 1) {
12             multiset<int>::iterator it = (--less.end());
13             greater.insert(*it);
14             less.erase(it);
15         }
16         while (greater.size() > less.size()) {
17             multiset<int>::iterator it = greater.begin();
18             less.insert(*it);
19             greater.erase(it);
20         }
21     }
22     void add(int val_) {
23         if (val_ <= *greater.begin())
24             less.insert(val_);
25         else
26             greater.insert(val_);
27         adjust();
28     }
29     void del(int val_) {
30         multiset<int>::iterator it = less.lower_bound(val_);
31         if (it != less.end()) {
32             less.erase(it);
33         } else {
34             it = greater.lower_bound(val_);
35             greater.erase(it);
36         }
37         adjust();
38     }
39     int get_middle() { return *less.rbegin(); }
40 };

```

## 4.4. 手写Bitset

```

1  u64 mi[200];
2  // for (int i = 0; i < 64; i++) mi[i] = (1ULL << i);
3  struct Bit {
4      vector<u64> bit;
5      int len;
6
7      Bit(int sz = 0) {
8          len = (sz + 63) >> 6;
9          bit.assign(len, 0);
10     }
11
12     #define I inline
13     I void reset() { fill(bit.begin(), bit.end(), 0); }
14     Bit() { fill(bit.begin(), bit.end(), 0); }
15     I void set1(int x) { bit[x >> 6] |= mi[x & 63]; }
16     I void set0(int x) { bit[x >> 6] &= ~mi[x & 63]; }
17     I void flip(int x) { bit[x >> 6] ^= mi[x & 63]; }
18     bool operator[](int x) { return (bit[x >> 6] >> (x & 63)) & 1; }
19     #define re register

```

```

20 Bit operator~(void) const {
21     Bit res;
22     for (re int i = 0; i < len; i++) res.bit[i] = ~bit[i];
23     return res;
24 }
25 Bit operator&(const Bit &b) const {
26     Bit res;
27     for (re int i = 0; i < len; i++) res.bit[i] = bit[i] & b.bit[i];
28     return res;
29 }
30 Bit operator|(const Bit &b) const {
31     Bit res;
32     for (re int i = 0; i < len; i++) res.bit[i] = bit[i] | b.bit[i];
33     return res;
34 }
35 Bit operator^(const Bit &b) const {
36     Bit res;
37     for (re int i = 0; i < len; i++) res.bit[i] = bit[i] ^ b.bit[i];
38     return res;
39 }
40 void operator&=(const Bit &b) {
41     for (re int i = 0; i < len; i++) bit[i] &= b.bit[i];
42 }
43 void operator|=(const Bit &b) {
44     for (re int i = 0; i < len; i++) bit[i] |= b.bit[i];
45 }
46 void operator^=(const Bit &b) {
47     for (re int i = 0; i < len; i++) bit[i] ^= b.bit[i];
48 }
49 Bit operator<<(const int t) const {
50     Bit res;
51     int high = t >> 6, low = t & 63;
52     u64 last = 0;
53     for (register int i = 0; i + high < len; i++) {
54         res.bit[i + high] = (last | (bit[i] << low));
55         if (low) last = (bit[i] >> (64 - low));
56     }
57     return res;
58 }
59 Bit operator>>(const int t) const {
60     Bit res;
61     int high = t >> 6, low = t & 63;
62     u64 last = 0;
63     for (register int i = len - 1; i >= high; i--) {
64         res.bit[i - high] = last | (bit[i] >> low);
65         if (low) last = bit[i] << (64 - low);
66     }
67     return res;
68 }
69 void operator<<=(const int t) {
70     int high = t >> 6, low = t & 63;
71     for (register int i = len - high - 1; ~i; i--) {
72         bit[i + high] = (bit[i] << low);
73         if (low && i) bit[i + high] |= bit[i - 1] >> (64 - low);
74     }
75     for (register int i = 0; i < high; i++) bit[i] = 0;
76 }
77 };

```

## 4.5. 笛卡尔树

常用于数数题。笛卡尔树是一种二叉树，每一个节点由一个键值二元组  $(k, w)$  构成。要求  $k$  满足二叉搜索树的性质，而  $w$  满足堆的性质。

如果笛卡尔树的  $k, w$  键值确定，且  $k$  互不相同， $w$  也互不相同，那么这棵笛卡尔树的结构是唯一的。

$k$  有序的话，可以线性建树。

```

1 // stk 维护笛卡尔树中节点对应到序列中的下标
2 for (int i = 1; i <= n; i++) {
3     int k = top; // top 表示操作前的栈顶, k 表示当前栈顶
4     while (k > 0 && w[stk[k]] > w[i]) k--; // 维护右链上的节点
5     if (k) rs[stk[k]] = i; // 栈顶元素. 右儿子 := 当前元素
6     if (k < top) ls[i] = stk[k + 1]; // 当前元素. 左儿子 := 上一个被弹出的元素
7     stk[++k] = i; // 当前元素入栈
8     top = k;
9 }

```

性质

1. 以  $u$  为根的子树是一段连续的区间（由BST性质），且  $u$  是这段区间的最小值，且不能再向两端延伸使得最小值不变（即，这一段区间是极长的）
2. 在  $u$  左右子树里任选两个点，两点间的区间最小值必定是  $w_u$

3. a,b间的区间最小值为:  $w_{LCA(a,b)}$

## Chapter 5

# trick

### 5.1. 枚举子集

用于循环枚举子集，注意枚举不了空集

```
1 for(int j=st;j;j=(j-1)&st)
```

st, 为要枚举子集的集合, j为子集

本质是将每一位设为0, 1后枚举后面的。

时间复杂度  $O(3^n)$

### 5.2. 求所有因数

利用类似筛法的原理

```
1 for (int i = 1; i <= MX; ++i) {  
2     for (int j = i; j <= MX; j += i) {  
3         d[j].push_back(i);  
4     }  
5 }
```

时间复杂度  $O(n \log n)$



## Chapter 6

### 杂项

#### 6.1. 格雷码

构造格雷码

$$G(n) = n \oplus \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

格雷码构造原数

$$n_{k-i} = \oplus_{0 \leq j \leq i} g_{k-j}$$

#### 6.2. pbds

```
1 #include<ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
2 #include<ext/pb_ds/tree_policy.hpp> //用tree
3 #include<ext/pb_ds/hash_policy.hpp> //用hash
4 #include<ext/pb_ds/trie_policy.hpp> //用trie
5 #include<ext/pb_ds/priority_queue.hpp> //用priority_queue
```

#### 6.3. 哈希表

```
1 #include <ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
2 #include <ext/pb_ds/hash_policy.hpp>
3 const int RANDOM = time(NULL);
4 struct MyHash {int operator() (int x) const {return x ^ RANDOM;}};
5 template <class T1, class T2>
6 struct std::tr1::hash <std::pair <T1, T2> > {
7     size_t operator() (std::pair <T1, T2> x) const {
8         std::tr1::hash <T1> H1; std::tr1::hash <T2> H2;
9         return H1(x.first) ^ H2(x.second); // 你自定义的 hash 函数。
10     }
11 };
```

直接当没有 `emplace()`, `cbegin()`, `cend()` `unordered_map` 用就好了。

## Chapter 7

# 动态规划

## 7.1. 树上背包

### 7.1.1 dfs序优化

```
1 #include <bits/stdc++.h>
2 using namespace std;
3 int n, m, v[100010];
4 vector<int> G[100010], f[100010];
5 int siz[100010], awa[100010], len;
6 void dfs(int pos) {
7     siz[pos] = 1;
8     for (auto i : G[pos]) {
9         dfs(i);
10        siz[pos] += siz[i];
11    }
12    awa[++len] = pos;
13 }
14 // 前i个点, 代价j, 最大价值。
15 int main() {
16     cin >> n >> m;
17     for (int i = 1; i <= n; i++) {
18         int u;
19         cin >> u >> v[i];
20         G[u].emplace_back(i);
21     }
22     dfs(0);
23     f[0].resize(m + 1);
24     for (int i = 1; i <= n; i++) {
25         f[i].resize(m + 1);
26         for (int j = 1; j <= m; j++) {
27             f[i][j] = max(f[i - 1][j - 1] + v[awa[i]], f[i - siz[awa[i]]][j]);
28         }
29     }
30     cout << f[n][m];
31     return 0;
32 }
```

### 7.1.2 多叉转二叉优化

具体方法就是不断递归，找到根节点，把它与最左边的子节点之间的边保留，其他全部断掉。然后从这个保留的孩子开始，连一条链到所有断开的点。

```
1 #include <bits/stdc++.h>
2 #define NO 100009
3 using namespace std;
4 int n, m, v[100010], lc[100010], rc[100010];
5 int siz[100010];
6 vector<int> G[100010], f[100010];
7 void dfs(int pos) {
8     if (pos == NO) return;
9     dfs(lc[pos]);
10    dfs(rc[pos]);
11    for (int i = 1; i <= min(m, siz[pos]); i++) {
12        f[pos][i] = f[rc[pos]][i];
13        // 不需要 ...[i] => ...[min(i, siz[rc[pos]])]
14        // 原因是如果i>siz[rc[pos]]，就说明把右节点分配满，
15        // 也有剩余的课可以加到pos和pos的左子节点
16        // 这个语句就相当于没用了
17        int lj, rj;
18        rj = min(i - 1, siz[lc[pos]]);
19        // 左节点最多分配siz[lc[pos]] 个
20        lj = max(0, i - 1 - siz[rc[pos]]);
21        // 右节点最多分配siz[rc[pos]] 个
```

```

22     // 而右节点个数是i-1-j,
23     // 所以j最大枚举到i-1-siz[rc[pos]]
24     for (int j = lj; j <= rj; j++) {
25         // 左 j个    右 i-1-j个
26         int l = f[lc[pos]][j];
27         int r = f[rc[pos]][i - 1 - j];
28         f[pos][i] = max(f[pos][i], l + r + v[pos]);
29     }
30 }
31 }
32 void conv(int pos) {
33     siz[pos] = 1;
34     int prei = -1;
35     for (auto i : G[pos]) {
36         if (prei == -1)
37             lc[pos] = i;
38         else
39             rc[prei] = i;
40         prei = i;
41         conv(i);
42     }
43 }
44 void cntsiz(int pos) {
45     if (pos == NO) return;
46     cntsiz(lc[pos]);
47     cntsiz(rc[pos]);
48     siz[pos] = 1 + siz[lc[pos]] + siz[rc[pos]];
49 }
50 int main() {
51     cin >> n >> m;
52     m++;
53     for (int i = 1; i <= n; i++) {
54         int u;
55         cin >> u >> v[i];
56         G[u].emplace_back(i);
57     }
58     for (int i = 0; i <= n; i++) f[i].resize(m + 1), lc[i] = rc[i] = NO;
59     f[NO].resize(m + 1);
60     conv(0);    // 转二叉
61     cntsiz(0);  // 计算大小
62     dfs(0);
63     cout << f[0][m];
64     return 0;
65 }

```

## 7.2. 最长单调子序列

```

1  #include <iostream>
2  #include <vector>
3  using namespace std;
4
5  int main() {
6      int n;
7      vector<int> a(n + 1);
8      vector<int> stk(n + 10);
9      int top = 0, ans = 0;
10     vector<int> pre(n + 1);
11     // 最长不上升子序列
12     for (int i = 1; i <= n; ++i) {
13         auto pos = lower_bound(stk.begin() + 1, stk.begin() + 1 + top, a[i],
14                                [&](int u, int v) { return u >= v; }) -
15             stk.begin();
16         if (pos > top) top++;
17         stk[pos] = a[i];
18         ans = max(ans, top);
19         // 序列恢复
20         if (top > 1) pre[i] = stk[top - 1];
21     }
22     cout << ans << "\n";
23     top = 0, ans = 0;
24     // 最长上升子序列
25     for (int i = 1; i <= n; ++i) {
26         auto pos =
27             lower_bound(stk.begin() + 1, stk.begin() + 1 + top, a[i]) - stk.begin();
28         if (pos > top) top++;
29         stk[pos] = a[i];
30         ans = max(ans, top);
31     }
32 }

```

## Chapter 8

# 图论

### 8.1. dijkstra求有向图最小瓶颈路（AI, 未验证）

$O(nm \log n)$

```
1 #include <bits/stdc++.h>
2 using namespace std;
3 using pii = pair<int, int>;
4 const int INF = 1e9;
5
6 int main() {
7     ios::sync_with_stdio(false);
8     cin.tie(nullptr);
9     int n, m;
10    if (!(cin >> n >> m)) return 0;
11    vector<vector<pair<int, int>>> G(n);
12    for (int i = 0; i < m; i++) {
13        int u, v, w;
14        cin >> u >> v >> w;
15        --u;
16        --v;
17        G[u].push_back({v, w});
18    }
19    // result matrix
20    vector<vector<int>> res(n, vector<int>(n, INF));
21    for (int s = 0; s < n; s++) {
22        // Dijkstra-like for minimax
23        vector<int> dist(n, INF);
24        dist[s] = 0;
25        priority_queue<pair<int, int>, vector<pair<int, int>>,
26            greater<pair<int, int>>>
27            pq;
28        pq.push({0, s});
29        while (!pq.empty()) {
30            auto [d, u] = pq.top();
31            pq.pop();
32            if (d != dist[u]) continue;
33            for (auto &e : G[u]) {
34                int v = e.first, w = e.second;
35                int cand = max(dist[u], w);
36                if (cand < dist[v]) {
37                    dist[v] = cand;
38                    pq.push({dist[v], v});
39                }
40            }
41        }
42        // store
43        for (int v = 0; v < n; ++v) res[s][v] = dist[v];
44    }
45
46    // 输出
47    for (int i = 0; i < n; i++) {
48        for (int j = 0; j < n; j++) {
49            if (res[i][j] == INF)
50                cout << -1;
51            else
52                cout << res[i][j];
53            if (j + 1 < n) cout << ' ';
54        }
55        cout << '\n';
56    }
57    return 0;
58 }
```

如果边比较少，图比较稀疏，可用堆优化掉log。

$O(n(m + K))$

```

1 // compile: g++ -O2 -std=c++17 bucket_allpairs_discrete.cpp -o bucket_allpairs
2 #include <bits/stdc++.h>
3 using namespace std;
4 using pii = pair<int, int>;
5 const int INF = 1e9;
6
7 int main() {
8     ios::sync_with_stdio(false);
9     cin.tie(nullptr);
10    int n, m;
11    if (!(cin >> n >> m)) return 0;
12    struct Edge {
13        int u, v;
14        long long w;
15    };
16    vector<Edge> edges;
17    edges.reserve(m);
18    vector<long long> vals;
19    for (int i = 0; i < m; ++i) {
20        int u, v;
21        long long w;
22        cin >> u >> v >> w;
23        --u;
24        --v;
25        edges.push_back({u, v, w});
26        vals.push_back(w);
27    }
28    if (n == 0) return 0;
29    // special: if no edges
30    if (m == 0) {
31        for (int i = 0; i < n; i++) {
32            for (int j = 0; j < n; j++) {
33                if (i == j)
34                    cout << 0;
35                else
36                    cout << -1;
37                if (j + 1 < n) cout << ' ';
38            }
39            cout << '\n';
40        }
41        return 0;
42    }
43
44    // 离散化权值到 rank [1..K]
45    sort(vals.begin(), vals.end());
46    vals.erase(unique(vals.begin(), vals.end()), vals.end());
47    int K = (int)vals.size();
48    // map weight -> rank (1..K)
49    auto rank_of = [&](long long w) -> int {
50        int idx = int(lower_bound(vals.begin(), vals.end(), w) - vals.begin());
51        return idx + 1; // ranks start from 1
52    };
53
54    // build graph with ranked weights
55    vector<vector<pair<int, int>>> G(n);
56    for (auto &e : edges) {
57        int r = rank_of(e.w);
58        G[e.u].push_back({e.v, r});
59    }
60
61    // bucketed (Dial-like) single-source minimax Dijkstra
62    auto bottleneck_from = [&](int s) {
63        // dist in [0..K], where 0 means source itself (no edges)
64        vector<int> dist(n, INT_MAX);
65        dist[s] = 0;
66        vector<vector<int>> buckets(K + 1); // 0..K
67        vector<int> head(K + 1, 0);
68        buckets[0].push_back(s);
69        int cur = 0;
70        while (true) {
71            while (cur <= K && head[cur] >= (int)buckets[cur].size()) ++cur;
72            if (cur > K) break;
73            int u = buckets[cur][head[cur]++];
74            if (dist[u] != cur) continue; // lazy skip
75            for (auto &ed : G[u]) {
76                int v = ed.first, wr = ed.second;
77                int cand = max(dist[u], wr);
78                if (cand < dist[v]) {
79                    dist[v] = cand;

```

```

80         if (cand <= K) buckets[cand].push_back(v);
81         // cand should always be <=K (weights ranks are within 1..K)
82     }
83 }
84 }
85 return dist;
86 };
87
88 // 全源求解并输出 (输出原始权值; dist==0 且 i==s 表示 0; dist==INF
89 // 表示不可达)
90 vector<int> dist;
91 for (int s = 0; s < n; ++s) {
92     dist = bottleneck_from(s);
93     for (int t = 0; t < n; ++t) {
94         if (s == t)
95             cout << 0;
96         else if (dist[t] == INT_MAX)
97             cout << -1;
98         else {
99             int r = dist[t];
100             // r in 1..K
101             cout << vals[r - 1];
102         }
103         if (t + 1 < n) cout << ' ';
104     }
105     cout << '\n';
106 }
107 return 0;
108 }

```

在稠密图,  $n \leq 2000$ , 可以用bitset优化传递闭包。

## 8.2. tarjan有重边找桥

```

1
2 int low[MAXN], dfn[MAXN], idx;
3 bool isbridge[MAXN];
4 vector<int> G[MAXN];
5 int cnt_bridge;
6 int father[MAXN];
7
8 void tarjan(int u, int fa) {
9     bool flag = false;
10    father[u] = fa;
11    low[u] = dfn[u] = ++idx;
12    for (const auto &v : G[u]) {
13        if (!dfn[v]) {
14            tarjan(v, u);
15            low[u] = min(low[u], low[v]);
16            if (low[v] > dfn[u]) {
17                isbridge[v] = true;
18                ++cnt_bridge;
19            }
20        } else {
21            if (v != fa || flag)
22                low[u] = min(low[u], dfn[v]);
23            else
24                flag = true;
25        }
26    }
27 }

```

# Chapter 9

## 语法

### 9.1. 复数

#### 引入与类型

```
1 // 头文件与常用别名
2 #include <complex>
3 using std::complex;
4 using cd = complex<double>;
5 using cf = complex<float>;
6 using cld = complex<long double>;
```

#### 构造与访问

- 构造:

```
1 cd z1(1.0, 2.0); // 实部 1, 虚部 2
2 cd z2 = {3.0, -1.5}; // 列表初始化
3 cd z3 = cd(4.0); // 虚部为 0
```

- 访问/修改实部与虚部:

```
1 double a = z1.real(); // 成员函数读取实部
2 double b = z1.imag(); // 成员函数读取虚部
3 std::real(z1); // free function, 等价 z1.real()
4 std::imag(z1); // free function, 等价 z1.imag()
5 z1.real() = 5.0; // 可写 (修改实部)
```

#### 四则运算与标量混合

- 支持 + - \* /, 既有 complex op complex 也有 complex op scalar。

```
1 cd s = z1 + z2;
2 cd p = z1 * cd(0,1); // 乘以 i
3 cd d = z1 / 2.0; // 除以标量
```

#### 常用数学函数 (<complex>)

- 模长、模平方、相位:

```
1 double r = std::abs(z); // |z|
2 double r2 = std::norm(z); // |z|^2, 避免开根号的高效计算
3 double theta = std::arg(z); // 相位 (弧度)
```

- 共轭、极坐标、投影:

```
1 cd conjz = std::conj(z); // 复共轭
2 cd fromPolar = std::polar(r,theta); // 从极坐标构造 r*e^{i theta}
3 cd projz = std::proj(z); // 投影到黎曼球面 (处理无穷)
```

- 复数版本的初等/超越函数:

```
1 std::exp(z); std::log(z); std::sqrt(z); std::pow(z, w);
2 std::sin(z); std::cos(z); std::tan(z);
3 std::sinh(z); std::cosh(z); std::asin(z); std::acos(z); std::atan(z);
```

## I/O 与比较

- 流支持:

```
1 std::cout << z; // 输出格式依实现 (常见形式 "(real,imag)")
2 std::cin  >> z; // 读取, 格式由实现决定
```

- 比较: 不要用 == 做严格相等判断 (浮点误差)。

```
1 bool approx_equal = (std::abs(z1 - z2) < 1e-9);
```

## 性能与数值注意事项

- 若只需模的平方, 优先使用 `std::norm(z)`, 比 `std::abs(z)*std::abs(z)` 更快且更稳定。
- 判断是否为 0 时应使用容差 `eps`:

```
1 if (std::abs(z) < eps) { /* 视为 0 */ }
```

- `std::complex<T>` 使用模板参数 `T` (float/double/long double), 根据精度与性能需求选择合适类型。
- 对于列主元或比较大小时, 通常用 `std::abs` (模) 比较大小。

## 常见小例子

### 用复数表示二维向量并旋转

```
1 // 旋转复数 (2D 向量) by angle theta:
2 cd v = {1.0, 0.0};
3 cd rotated = v * std::polar(1.0, theta);
```

### 在高斯消元中使用 `std::complex<double>`

```
1 // 假设增广矩阵 ar 为 complex<double>:
2 cd ar[MAXN][MAXN+1]; // 每行长度为 n+1
3 // 判主元、交换、消元时可直接使用 std::abs, std::conj 等
```

## 额外提示

- `std::abs` 返回的是模 (非平方), 内部对极端情况有一定数值稳定性的处理, 但仍需注意大/小量级混合的问题。
- 在数值线性代数中, 若频繁调用共轭、模等, 注意避免不必要的临时对象以减少开销 (视编译器做内联优化情况)。
- 如果需要可移植的输出格式, 自己实现格式化 (例如 `printf("%.12g + %.12gi", z.real(), z.imag())`) 会更稳定一致。



# Chapter 10

## 网络流

### 10.1. SPFA费用流

```
1 #include <bits/stdc++.h>
2 using namespace std;
3
4 template <class T>
5 struct MinCostFlow {
6     struct _Edge {
7         int to;
8         T cap;
9         T cost;
10        _Edge(int to_, T cap_, T cost_) : to(to_), cap(cap_), cost(cost_) {}
11    };
12    int n;
13    vector<_Edge> e;
14    vector<vector<int>>> g;
15    vector<T> dis;    // 最短路距离 (SPFA)
16    vector<int> pre;  // 记录到某点的边索引
17    vector<char> inq; // SPFA 是否在队列中
18
19    MinCostFlow() {}
20    MinCostFlow(int n_) { init(n_); }
21
22    void init(int n_) {
23        n = n_;
24        e.clear();
25        g.assign(n, {});
26    }
27
28    void addEdge(int u, int v, T cap, T cost) {
29        g[u].push_back((int)e.size());
30        e.emplace_back(v, cap, cost);
31        g[v].push_back((int)e.size());
32        e.emplace_back(u, 0, -cost);
33    }
34
35    // 使用 SPFA 求 s->t 的最短路 (边权为 cost, 且只考虑 cap>0 的边)
36    bool spfa(int s, int t) {
37        // INF 取为 numeric_limits<T>::max()/4 避免加法溢出
38        const T INF = numeric_limits<T>::max() / 4;
39        dis.assign(n, INF);
40        pre.assign(n, -1);
41        inq.assign(n, 0);
42
43        queue<int> q;
44        dis[s] = 0;
45        q.push(s);
46        inq[s] = 1;
47
48        while (!q.empty()) {
49            int u = q.front();
50            q.pop();
51            inq[u] = 0;
52            for (int idx : g[u]) {
53                const _Edge &ed = e[idx];
54                int v = ed.to;
55                T cap = ed.cap;
56                T cost = ed.cost;
57                if (cap > 0 && dis[v] > dis[u] + cost) {
58                    dis[v] = dis[u] + cost;
59                    pre[v] = idx;
60                    if (!inq[v]) {
```

```

61         q.push(v);
62         inq[v] = 1;
63     }
64 }
65 }
66 }
67 return pre[t] != -1; // 或者 dis[t] < INF
68 }
69
70 pair<T, T> flow(int s, int t) {
71     T flow = 0;
72     T cost = 0;
73     // 不再使用 potentials h, 直接用 SPFA
74     while (spfa(s, t)) {
75         // 找增广量
76         T aug = numeric_limits<T>::max();
77         for (int i = t; i != s; i = e[pre[i] ^ 1].to) {
78             aug = min(aug, e[pre[i]].cap);
79         }
80         // 改变残量网络
81         for (int i = t; i != s; i = e[pre[i] ^ 1].to) {
82             e[pre[i]].cap -= aug;
83             e[pre[i] ^ 1].cap += aug;
84         }
85         flow += aug;
86         // dis[t] 是此次最短路径的代价
87         cost += aug * dis[t];
88     }
89     return make_pair(flow, cost);
90 }
91
92 struct Edge {
93     int from;
94     int to;
95     T cap;
96     T cost;
97     T flow;
98 };
99
100 // 返回原始图的边 (与原实现兼容)
101 vector<Edge> edges() {
102     vector<Edge> a;
103     for (int i = 0; i < (int)e.size(); i += 2) {
104         Edge x;
105         x.from = e[i + 1].to;
106         x.to = e[i].to;
107         x.cap = e[i].cap + e[i + 1].cap; // 原始容量 (被分配前的)
108         x.cost = e[i].cost;
109         x.flow = e[i + 1].cap; // 反向边的容量表示已经流过的量
110         a.push_back(x);
111     }
112     return a;
113 }
114 };

```

spfa初始化。

```

1 void spfa_init_potentials(int s) {
2     const T INF = numeric_limits<T>::max() / 4;
3     h.assign(n, INF);
4     vector<char> inq(n, 0);
5     queue<int> q;
6     h[s] = 0;
7     q.push(s);
8     inq[s] = 1;
9     while (!q.empty()) {
10         int u = q.front(); q.pop();
11         inq[u] = 0;
12         for (int idx : g[u]) {
13             const _Edge &ed = e[idx];
14             int v = ed.to;
15             if (ed.cap > 0 && h[v] > h[u] + ed.cost) {
16                 h[v] = h[u] + ed.cost;
17                 if (!inq[v]) {
18                     q.push(v);
19                     inq[v] = 1;
20                 }
21             }
22         }
23     }
24     // 把不可达的点势设为 0, 避免后续计算中出现 INF
25     for (int i = 0; i < n; ++i) if (h[i] == INF) h[i] = 0;

```

26 }

## 10.2. 网络流封装 (已验证)

由GPT, Gemini, Grok生成, 已通过模板题。

```

1 #include <algorithm>
2 #include <iostream>
3 #include <limits>
4 #include <numeric>
5 #include <queue>
6 #include <vector>
7 using namespace std;
8
9 /**
10  * @brief 网络流封装
11  *
12  * 使用原始对偶算法 (Primal-Dual), 配合 Dijkstra 和势函数。
13  * 同时集成一个普通的最大流 (Dinic) 用于不带费用的最大流场景,
14  * 并把所有“没有 cost 的最大流接口”改为使用普通最大流以获得更好常数与简洁性。
15  *
16  * @tparam T 容量和费用的数据类型 (例如 int, long long)。
17  */
18 template <class T>
19 struct MinCostFlow {
20     // ----- 内部最小费用边结构 (保留用于带费用的算法) -----
21     struct _Edge {
22         int to; // 终点
23         T cap; // 容量 / 当前残量
24         T cost; // 费用 (最大流算法忽略)
25         _Edge(int to_ = 0, T cap_ = 0, T cost_ = 0)
26             : to(to_), cap(cap_), cost(cost_) {}
27     };
28
29     // 对外返回的边信息
30     struct Edge {
31         int from, to;
32         T cap, cost, flow;
33     };
34
35     // 方便的参数结构体
36     struct E_Cap {
37         int u, v;
38         T cap;
39     }; // 仅有容量的边
40     struct E_Cost {
41         int u, v;
42         T cap, cost;
43     }; // 有容量和费用的边
44     struct E_Bound {
45         int u, v;
46         T low, cap;
47     }; // 有流量下界的边
48     struct E_Full {
49         int u, v;
50         T low, cap, cost;
51     }; // 完整信息的边
52
53     int n;
54     vector<_Edge> e; // 用于最小费用流 (也被最大流复用: 仅 cap 字段)
55     vector<vector<int>> g; // 邻接表: 存储边在 e 中的索引 (成对出现: 正向、反向)
56     vector<T> h, dis; // 势函数 / Dijkstra 距离
57     vector<int> pre; // Dijkstra 的前驱 (存储边索引)
58
59     // 为 Dinic 复用的结构体 (减少重复分配)
60     vector<int> level;
61     vector<int> it_ptr;
62
63     const T INF = numeric_limits<T>::max() / 4;
64
65 public:
66     MinCostFlow() : n(0) {}
67     MinCostFlow(int n_) { init(n_); }
68
69     // init 支持期望边数以便预分配
70     void init(int n_, size_t expected_edges = 0) {
71         n = n_;
72         e.clear();
73         if (expected_edges) e.reserve(expected_edges * 2 + 4);
74         g.assign(n, {});
75         if (expected_edges && n > 0) {

```

```

76     size_t avg = max<size_t>(1, expected_edges / (size_t)n);
77     for (int i = 0; i < n; ++i) g[i].reserve(avg + 1);
78 }
79 h.assign(n, 0);
80 dis.assign(n, 0);
81 pre.assign(n, -1);
82 level.assign(n, -1);
83 it_ptr.assign(n, 0);
84 }
85
86 // 加边 (u->v, 容量 cap, 费用 cost)
87 inline void addEdge(int u, int v, T cap, T cost) {
88     g[u].push_back((int)e.size());
89     e.emplace_back(v, cap, cost);
90     g[v].push_back((int)e.size());
91     e.emplace_back(u, (T)0, -cost); // 反向边 (初始 cap=0)
92 }
93
94 // ----- 最小费用流部分 (与之前保持兼容) -----
95
96 // SPFA 初始化势函数 h, 用于处理负权边
97 bool spfa_init_h(int s) {
98     T localINF = INF;
99     std::fill(h.begin(), h.end(), localINF);
100    vector<char> inq(n, 0);
101    vector<int> cnt(n, 0);
102    vector<int> q;
103    q.reserve(n * 2 + 4);
104    int qh = 0;
105    q.push_back(s);
106    inq[s] = 1;
107    cnt[s] = 1;
108    h[s] = 0;
109    while (qh < (int)q.size()) {
110        int u = q[qh++];
111        inq[u] = 0;
112        for (int idx : g[u]) {
113            const _Edge& ed = e[idx];
114            if (ed.cap > 0) {
115                T nv = h[u] + ed.cost;
116                if (h[ed.to] > nv) {
117                    h[ed.to] = nv;
118                    if (!inq[ed.to]) {
119                        inq[ed.to] = 1;
120                        q.push_back(ed.to);
121                        if (++cnt[ed.to] > n) return false; // 检测到负环
122                    }
123                }
124            }
125        }
126    }
127    return true;
128 }
129
130 // Dijkstra 寻找最短增广路 (使用势函数)
131 bool dijkstra(int s, int t) {
132     T localINF = INF;
133     std::fill(dis.begin(), dis.end(), localINF);
134     std::fill(pre.begin(), pre.end(), -1);
135     using P = pair<T, int>;
136     priority_queue<P, vector<P>, greater<P>> pq;
137     dis[s] = 0;
138     pq.emplace((T)0, s);
139     while (!pq.empty()) {
140         auto [d, u] = pq.top();
141         pq.pop();
142         if (d != dis[u]) continue;
143         for (int i : g[u]) {
144             const _Edge& ed = e[i];
145             if (ed.cap <= 0) continue;
146             T nd = d + h[u] - h[ed.to] + ed.cost;
147             if (dis[ed.to] > nd) {
148                 dis[ed.to] = nd;
149                 pre[ed.to] = i;
150                 pq.emplace(nd, ed.to);
151             }
152         }
153     }
154     return dis[t] != localINF;
155 }
156
157 // 求解最小费用最大流 (默认版本, 边权非负)

```

```

158 pair<T, T> flow(int s, int t) {
159     T flow_val = 0;
160     T cost_val = 0;
161     std::fill(h.begin(), h.end(), (T)0);
162     while (dijkstra(s, t)) {
163         for (int i = 0; i < n; ++i) {
164             if (dis[i] != INF) h[i] += dis[i];
165         }
166         T aug = INF;
167         for (int i = t; i != s; i = e[pre[i] ^ 1].to) {
168             aug = min(aug, e[pre[i]].cap);
169         }
170         for (int i = t; i != s; i = e[pre[i] ^ 1].to) {
171             e[pre[i]].cap -= aug;
172             e[pre[i] ^ 1].cap += aug;
173         }
174         flow_val += aug;
175         cost_val += aug * h[t];
176     }
177     return {flow_val, cost_val};
178 }
179
180 // 可处理负权边的 flow (警告: 图中不能有从源点可达的负费用环)
181 pair<T, T> flow_neg(int s, int t) {
182     if (!spfa_init_h(s)) {
183         return {0, -INF}; // 有从源可达的负环, 费用无下界
184     }
185     return flow(s, t);
186 }
187
188 // 获取最终的流网络信息 (基于 e/g: 假定边以成对方式存储)
189 vector<Edge> edges() {
190     vector<Edge> res;
191     res.reserve(e.size() / 2);
192     for (size_t i = 0; i + 1 < e.size(); i += 2) {
193         // forward edge is at i, reverse at i+1
194         res.push_back({e[i + 1].to, e[i].to, e[i].cap + e[i + 1].cap, e[i].cost,
195             e[i + 1].cap});
196     }
197     return res;
198 }
199
200 // ----- 普通最大流 (Dinic) 实现 (复用 e/g 的 cap 字段)
201 // -----
202
203 // 为兼容性: 在当前已使用 addEdge 构建好的图上运行 Dinic, 修改 e 中的 cap &
204 // 反向 cap
205 T maxflow_on_current_graph(int s, int t) {
206     // level / it_ptr 已在 init 时分配
207     auto bfs = [&](void) -> bool {
208         std::fill(level.begin(), level.end(), -1);
209         vector<int> q;
210         q.reserve(n);
211         int qh = 0;
212         q.push_back(s);
213         level[s] = 0;
214         while (qh < (int)q.size()) {
215             int u = q[qh++];
216             for (int idx : g[u]) {
217                 if (e[idx].cap > 0 && level[e[idx].to] == -1) {
218                     level[e[idx].to] = level[u] + 1;
219                     q.push_back(e[idx].to);
220                 }
221             }
222         }
223         return level[t] != -1;
224     };
225
226     function<T(int, T)> dfs = [&](int u, T pushed) -> T {
227         if (u == t || pushed == 0) return pushed;
228         for (int& cid = it_ptr[u]; cid < (int)g[u].size(); ++cid) {
229             int ei = g[u][cid];
230             _Edge& ed = e[ei];
231             if (ed.cap > 0 && level[ed.to] == level[u] + 1) {
232                 T tr = dfs(ed.to, min(pushed, ed.cap));
233                 if (tr > 0) {
234                     ed.cap -= tr;
235                     e[ei ^ 1].cap += tr;
236                     return tr;
237                 }
238             }
239         }
240     };

```

```

240     return (T)0;
241 };
242
243 T flow = 0;
244 while (bfs()) {
245     std::fill(it_ptr.begin(), it_ptr.end(), 0);
246     while (true) {
247         T pushed = dfs(s, INF);
248         if (pushed == 0) break;
249         flow += pushed;
250     }
251 }
252 return flow;
253 }
254
255 // 一个便捷的接口：根据传入的边列表构建图并求最大流（与旧接口保持相同签名）
256 T max_flow(int _n, int s, int t, const vector<E_Cap>& es) {
257     init(_n, es.size());
258     for (const auto& edge : es) addEdge(edge.u, edge.v, edge.cap, 0);
259     return maxflow_on_current_graph(s, t);
260 }
261
262 // ----- 封装接口（把“无费用最大流”相关操作改为使用 Dinic）
263 // -----
264
265 // 1. 无源汇可行流（循环流）
266 // 使用 Dinic 来判断可行性并且保留 e/g 中的流量信息，便于后续读取 edges()
267 bool feasible_circulation(int _n, const vector<E_Bound>& es) {
268     // 仍然在 this (mcf 对象) 上构建图，以便 edges() 能反映流
269     init(_n + 2, es.size());
270     int SS = _n, ST = _n + 1;
271     vector<T> diff(_n, 0);
272
273     for (const auto& edge : es) {
274         diff[edge.u] -= edge.low;
275         diff[edge.v] += edge.low;
276         addEdge(edge.u, edge.v, edge.cap - edge.low, 0);
277     }
278
279     T sup_sum = 0;
280     for (int i = 0; i < _n; ++i) {
281         if (diff[i] > 0) {
282             addEdge(SS, i, diff[i], 0);
283             sup_sum += diff[i];
284         } else if (diff[i] < 0) {
285             addEdge(i, ST, -diff[i], 0);
286         }
287     }
288
289     T flow_val = maxflow_on_current_graph(SS, ST);
290     return flow_val == sup_sum;
291 }
292
293 // 2. 有源汇可行流
294 // 返回 {是否存在, 一个可行的流值}
295 pair<bool, T> feasible_flow(int _n, int s, int t, const vector<E_Bound>& es) {
296     vector<E_Bound> circ_es = es;
297     circ_es.push_back({t, s, 0, INF});
298     if (feasible_circulation(_n, circ_es)) {
299         T res = 0;
300         // 流值为 t->s 的反向边的流量 (edges() 中的 flow 值)
301         for (const auto& ed : this->edges()) {
302             if (ed.from == t && ed.to == s) {
303                 res = ed.flow;
304                 break;
305             }
306         }
307         return {true, res};
308     }
309     return {false, 0};
310 }
311
312 // 3. 有源汇上下界最大流
313 // 返回 {是否存在可行流, 最大流值}
314 // 说明：先判断是否存在满足上下界的可行流（添加 t->s 无限边），若存在则读取
315 // t->s 的流量 flow1，然后在残量图（去掉人工 t->s 边）上用 Dinic 再增广得到
316 // flow2，最终最大流为 flow1 + flow2。
317 pair<bool, T> bounded_max_flow(int _n, int s, int t,
318                                const vector<E_Bound>& es) {
319     // 在一个临时 mcf1 对象上构造并判断可行性（但为了方便后续读取
320     // edges(), 这里直接用当前对象）
321     MinCostFlow<T> mcf1;

```

```

322     vector<E_Bound> circ_es = es;
323     circ_es.push_back({t, s, 0, INF});
324     // 使用 mcf1 的 feasible_circulation (其内部会 init 并运行 Dinic, 并保留
325     // e/g)
326     if (!mcf1.feasible_circulation(_n, circ_es)) {
327         return {false, 0};
328     }
329
330     // 找到 t->s 边的流量 (作为初始 s->t 流)
331     T flow1 = 0;
332     for (const auto& ed : mcf1.edges()) {
333         if (ed.from == t && ed.to == s) {
334             flow1 = ed.flow;
335             break;
336         }
337     }
338
339     // 构建残量图: 将 mcf1 中剩余容量 > 0 的边作为 residual_edges (跳过人工 t->s
340     // 边)
341     vector<E_Cap> residual_edges;
342     residual_edges.reserve(mcf1.e.size() / 2);
343     for (const auto& ed : mcf1.edges()) {
344         if (ed.from < _n && ed.to < _n) {
345             if (ed.from == t && ed.to == s) continue; // 跳过人工边
346             T rem_cap = ed.cap - ed.flow; // 剩余容量
347             if (rem_cap > 0) residual_edges.push_back({ed.from, ed.to, rem_cap});
348         }
349     }
350
351     // 在新图上用 Dinic 再跑一次最大流 (增广 s->t)
352     MinCostFlow<T> mcf2;
353     T flow2 = mcf2.max_flow(_n, s, t, residual_edges);
354
355     return {true, flow1 + flow2};
356 }
357
358 // 4. 有源汇最小流
359 // 返回 {是否存在, 最小流值}
360 pair<bool, T> min_flow(int _n, int s, int t, const vector<E_Bound>& es) {
361     MinCostFlow<T> mcf1;
362     vector<E_Bound> circ_es = es;
363     circ_es.push_back({t, s, 0, INF}); // 添加 t->s 的边构成循环
364
365     bool ok = mcf1.feasible_circulation(_n, circ_es);
366     if (!ok) return {false, 0};
367
368     T flow1 = 0; // 初始可行流 (t->s)
369     for (const auto& ed : mcf1.edges()) {
370         if (ed.from == t && ed.to == s) {
371             flow1 = ed.flow;
372             break;
373         }
374     }
375
376     // 在残量图上, 从 t 到 s 跑最大流, 即可退回最多的流
377     MinCostFlow<T> mcf2;
378     mcf2.init(_n, mcf1.e.size() / 2);
379
380     for (const auto& ed : mcf1.edges()) {
381         // 只考虑原始节点范围内的边
382         if (ed.from < _n && ed.to < _n) {
383             // 跳过我们人为加入的 t->s 边 (否则会误导增广)
384             if (ed.from == t && ed.to == s) continue;
385
386             T forward_rem = ed.cap - ed.flow; // 前向剩余容量 = C - f
387             T backward_rem = ed.flow; // 反向剩余容量 = f (可以退回的流)
388
389             if (forward_rem > 0) mcf2.addEdge(ed.from, ed.to, forward_rem, 0);
390             if (backward_rem > 0) mcf2.addEdge(ed.to, ed.from, backward_rem, 0);
391         }
392     }
393
394     T flow2 = mcf2.maxflow_on_current_graph(t, s);
395     return {true, flow1 - flow2};
396 }
397
398 // 5. 有源汇上下界最小费用可行流
399 // 返回 {是否存在, 流值, 费用值}, 如果有负环则费用为 -INF 表示无下界
400 tuple<bool, T, T> min_cost_feasible_flow(int _n, int s, int t,
401                                         const vector<E_Full>& es) {
402     vector<E_Full> circ_es = es;
403     circ_es.push_back({t, s, (T)0, INF, (T)0});

```

```

404     auto [ok, cost] = min_cost_circulation(_n, circ_es);
405     if (!ok) return {false, (T)0, (T)0};
406     T f = 0;
407     for (const auto& ed : edges()) {
408         if (ed.from == t && ed.to == s) {
409             f = ed.flow;
410             break;
411         }
412     }
413     return {true, f, cost};
414 }
415
416 // 6. 无源汇上下界最小费用可行流
417 // 返回 {是否存在, 费用值}, 如果有负环则费用为 -INF 表示无下界
418 pair<bool, T> min_cost_circulation(int _n, const vector<E_Full>& es) {
419     init(_n + 2, es.size());
420     int SS = _n, ST = _n + 1;
421     vector<T> diff(_n, 0);
422     T base_cost = 0;
423     bool has_neg = false;
424     for (const auto& edge : es) {
425         if (edge.low > edge.cap) return {false, (T)0};
426         diff[edge.u] -= edge.low;
427         diff[edge.v] += edge.low;
428         base_cost += edge.low * edge.cost;
429         if (edge.cap > edge.low) {
430             addEdge(edge.u, edge.v, edge.cap - edge.low, edge.cost);
431             if (edge.cost < 0) has_neg = true;
432         }
433     }
434     T sup_sum = 0;
435     for (int i = 0; i < _n; ++i) {
436         if (diff[i] > 0) {
437             addEdge(SS, i, diff[i], (T)0);
438             sup_sum += diff[i];
439         } else if (diff[i] < 0) {
440             addEdge(i, ST, -diff[i], (T)0);
441         }
442     }
443     pair<T, T> res{(T)0, (T)0};
444     if (has_neg) {
445         res = flow_neg(SS, ST);
446         if (res.second == -INF) return {false, -INF};
447     } else {
448         res = flow(SS, ST);
449     }
450     if (res.first < sup_sum) return {false, (T)0};
451     return {true, base_cost + res.second};
452 }
453
454 // 7. 有负环的费用流 (最小费用最大流, 支持负费用, 可能有负环时计算有限费用)
455 // 返回 {是否存在解, 流值,
456 // 费用值}, 如果无法平衡 (可能由于负环导致无界) 则不存在解
457 tuple<bool, T, T> min_cost_max_flow_neg(int _n, int s, int t,
458                                         const vector<E_Cost>& es) {
459     init(_n + 2, es.size());
460     int SS = _n, ST = _n + 1;
461     vector<T> diff(_n, 0);
462     T base_cost = 0;
463     for (const auto& edge : es) {
464         if (edge.cost >= 0) {
465             addEdge(edge.u, edge.v, edge.cap, edge.cost);
466         } else {
467             if (edge.cap == 0) continue;
468             diff[edge.u] -= edge.cap;
469             diff[edge.v] += edge.cap;
470             base_cost += edge.cap * edge.cost;
471             addEdge(edge.v, edge.u, edge.cap, -edge.cost);
472         }
473     }
474     T sup_sum = 0;
475     for (int i = 0; i < _n; ++i) {
476         if (diff[i] > 0) {
477             addEdge(SS, i, diff[i], (T)0);
478             sup_sum += diff[i];
479         } else if (diff[i] < 0) {
480             addEdge(i, ST, -diff[i], (T)0);
481         }
482     }
483     addEdge(t, s, INF, (T)0);
484     pair<T, T> res1 = flow(SS, ST);
485     if (res1.first < sup_sum) {

```



```
486     return {false, (T)0, (T)0};
487 }
488 size_t last_rev = e.size() - 1;
489 T flow_back = e[last_rev].cap;
490 // 禁用超级源汇相关边
491 for (int idx : g[SS]) {
492     e[idx].cap = 0;
493     e[idx ^ 1].cap = 0;
494 }
495 for (int idx : g[ST]) {
496     e[idx].cap = 0;
497     e[idx ^ 1].cap = 0;
498 }
499 // 禁用 t->s 边
500 size_t ts_fwd = e.size() - 2;
501 e[ts_fwd].cap = 0;
502 e[ts_fwd ^ 1].cap = 0;
503 pair<T, T> res2 = flow(s, t);
504 T total_flow = flow_back + res2.first;
505 T total_cost = base_cost + res1.second + res2.second;
506 return {true, total_flow, total_cost};
507 }
508 };
```

1. 二分图的最大匹配就是在二分图上跑出来的最大流。

2. 我们有最小覆盖数=最大匹配数，最大独立集=总点数-最小覆盖集两个性质。

3. 在一个二分图中，如果删去一条边能够使这个图的最大匹配减小1的话，那么这条边一定在残量网络中满流，并且它所连接的两个点一定不在同一个强连通分量当中。

4. 有一个DAG，要求用尽量少的不相交的简单路径覆盖所有的节点。有最小路径覆盖=原图节点数-新图最大匹配。新图指的是，将原来的点拆成两个点，如果  $u \rightarrow v$ ，那么连接  $u_x \rightarrow v_y$ ，这样得到的二分图的最大匹配。