Projective and variational methods

Taks 1

<u>*Завдання для самостійної роботи:*</u>

Отримати чисельно-аналітичний розв'язок крайової задачі (4.10) (параметр ***D***=[0,1,g,0,1,d] для всіх ***K***) з точністю $eps = 1E-4$ за допомогою методу:

1. колокації;
2. Бубнова-Гальоркіна;
3. Рітца.

Зобразити отримані наближені розв'язки на одному рисунку.

Розв'язати крайову задачу (4.10)

$$\begin{cases} u''(x) - p(x)u(x) = -f(x), \\ p(x) \geq 0, \ x \in (a,b); \\ d_1 u'(a) + d_2 u(a) = -d_3, \\ d_4 u'(b) + d_5 u(b) = d_6. \end{cases}$$

8	$g \cdot \arccos(x)$	$1 + g \cdot x \cdot \sin(1 + x^2)$	-1	1	[1,1,1,1,d,1]

```
clear;

% код взяв з відповідного заняття
% підправив деякі моменти та додав коментарі
% до ключових етапів (описату саму ідею метода)

a = -1; b = 1;
D = [0, 1, 1, 0, 1, 17];
eps = 10^(-4);

p = @(x)(acos(x));
f = @(x)(1 + x .* sin(1 + x^2));
```

Основна ідея мет.кол. - переводимо BVP в еквівалентну алгебр.сист та вирішуємо вже її

Як відбувається ця побудова алгебраїчної системи:

Для кожної точки x(j) у цьому дискретизованому просторі код будує алгебраїчну систему, представлену матрицею коефіцієнтів A та вектором B.

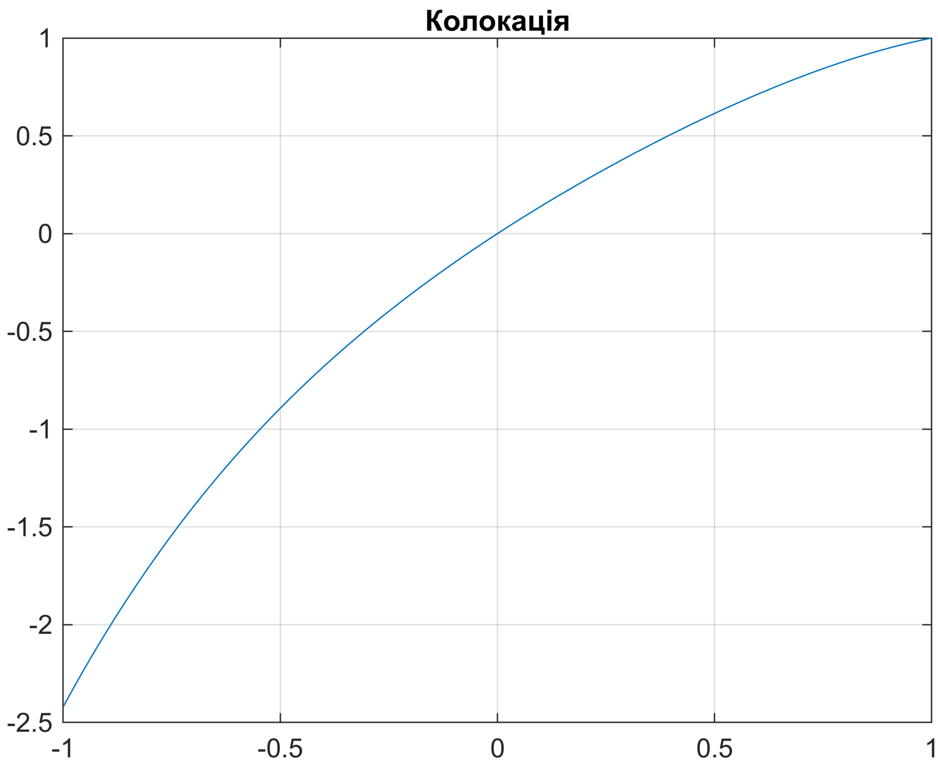
Ця система виводиться з вихідного диференціального рівняння та умов колокації (які в даному випадку, здається, представлені функціями pfun(xj) та ffun(xj)).

Далі просто вирішуємо через A \ B. Та записуємо шуканий поліном.

```
run(@mm_coloc, "Колокація", p, f, a, b, D, eps);
```

```
P =
```

$$\frac{1894153979357407\,x^5}{144115188075855872} - \frac{1843185812447727\,x^4}{9007199254740992} + \frac{4566578196953605\,x^3}{18014398509481984} - \frac{2275664880160357\,x^2}{4503599627370496} + \frac{1625}{112}$$



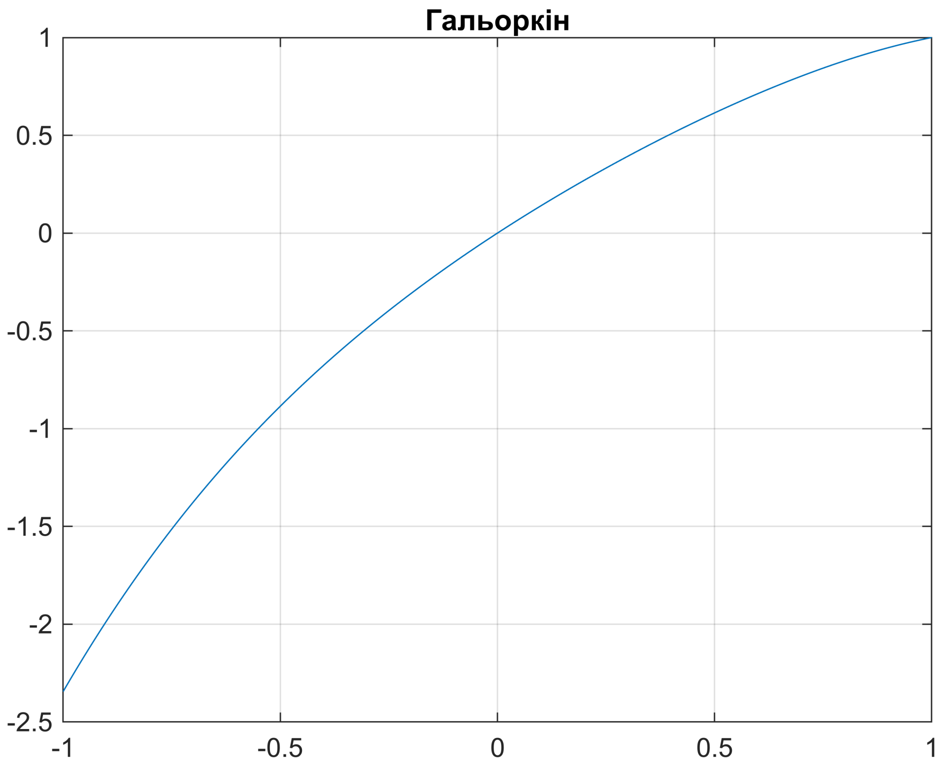
Ідея методу Галеркіна полягає у виборі набору базисних функцій, якими може бути будь-який набір лінійно незалежних функцій, що охоплюють простір потенційних розв'язків. Наближений розв'язок диференціального рівняння виражається у вигляді лінійної комбінації цих базисних функцій.

Коефіцієнти лінійної комбінації вибираються таким чином, щоб залишок (різниця між лівою і правою частинами диференціального рівняння, оцінена при наближеному розв'язку) був ортогональним до кожної з базисних функцій. Все це робиться з єдиною метою - отримати можливість розв. проблему чисельно

```
run(@mm_galer, "Гальоркін", p, f, a, b, D, eps);
```

```
P =
```

$$-\frac{6293335226415241\,x^4}{36028797018963968} + \frac{4135656985505749\,x^3}{18014398509481984} - \frac{560000733986227\,x^2}{1125899906842624} + \frac{812044402530109\,x}{562949953421312}$$

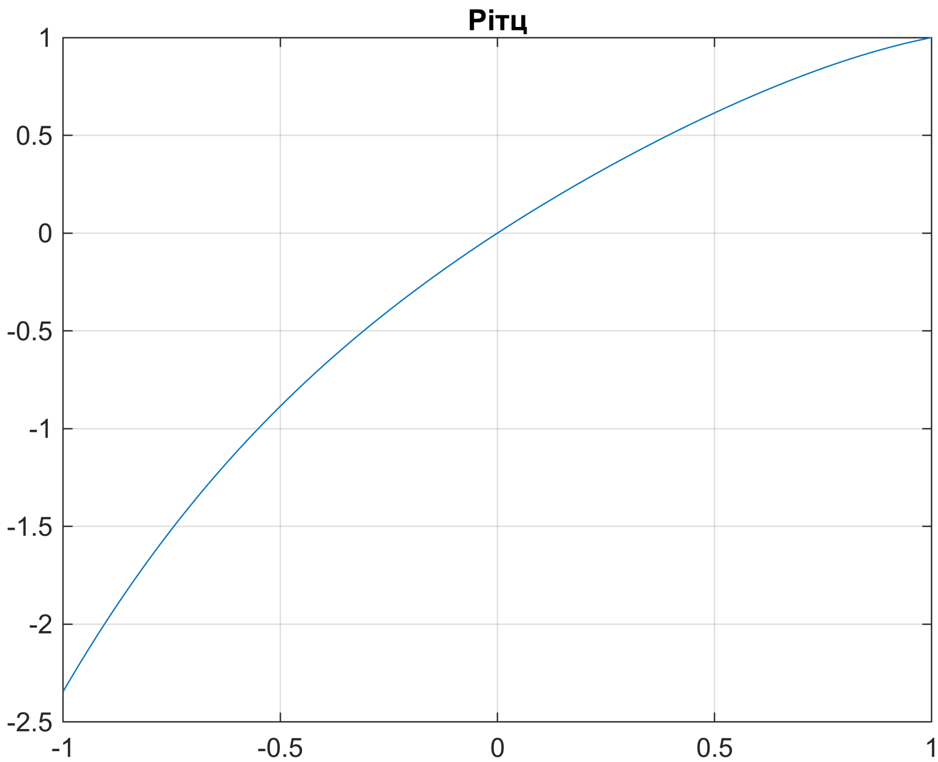


Як і метод Гальоркіна, метод Рітца також представляє розв'язок як лінійну комбінацію базисних функцій. Однак коефіцієнти в цій комбінації підбираються так, щоб мінімізувати наш лінійний оператор (наш Φ в описі (книга)).

```
run(@mm_ritz, "Рітц", p, f, a, b, D, eps);
```

```
P =
```

$$-\frac{6293335226415241\,x^4}{36028797018963968}+\frac{4135656985505749\,x^3}{18014398509481984}-\frac{560000733986227\,x^2}{1125899906842624}+\frac{812044402530109\,x}{562949953421312}$$




```
export("Computational methods/Lab6.mlx")
```

```
ans =
'E:\Work\Applied math\Matlab\Lab6.pdf'
```

```
function run(methodFunc, titleStr, p, f, a, b, D, eps)
    Y = methodFunc(p, f, a, b, D, eps);
    X = linspace(a, b, length(Y));

    plot(X, Y);
    title(titleStr);
    grid on;
end
```

```
function Y = mm_coloc(pfun, ffun, a, b, D, e)
    % початкові функції та ініціалізація параметрів
    f0 = [(D(2) - D(1)) ./ b, D(1)];
    n = 1; F = 0; Y = f0;

    while ~F & n <= 15
        % Зберігаємо попередній Y
        YY = Y;
```

```
    n = n + 1;
    N = n + 2;


    x = linspace(0, b, N);
    x = x(2 : N - 1);

    % наша система рівнянь
    A = zeros(n, n);
    B = zeros(n, 1);

    for j = 1 : n
        xj = x(j);
        px = pfun(xj);
        for i = 1 : n
            fi = zeros(i + 2, 1);
            fi(1) = 1;
            fi(2) = -b;

            ddf = polyder(polyder(fi)); % друга похідна
            fi = polysum(ddf, -px .* fi);

            A(j, i) = polyval(fi, xj);

            clear fi ddf pf
        end
        B(j) = -ffun(xj) + px .* polyval(f0, xj);
    end

    % Вирішення СЛР
    c = A \ B;
    clear A B px

    % Перераховуємо Y
    Y = f0;
    for i = 1 : n
        fi = zeros(i + 2, 1);
        fi(1) = 1;
        fi(2) = -b;
        fi = c(i) .* fi;
        Y = polysum(Y, fi);
    end

    clear fi c

    % Просто різниця, щоб перевірити eps
    fi = polysum(Y, -YY);
    F = abs(polyint(0, b, fi)) <= e;
    clear fi
```

```
    end

    % переводимо вектор в символи
    P = poly2sym(Y, sym('x'))
    nx = 201; x = linspace(a, b, nx);

    % та рахуємо
    for i = 1 : nx
        Y(i) = subs(P, x(i));
    end
end


function Y = mm_galer(pfun, ffun, a, b, D, e)
    x = sym('x');
    f0 = [(D(2) - D(1)) ./ b, D(1)];
    f_0 = poly2sym(f0, x);
    df0 = polyder(f0); n = 1;
    F = 0; Y = f0;
    while ~F & n <= 15
        YY = Y;
        n = n + 1;
        A = zeros(n, n);
        B = zeros(n, 1);

        for j = 1 : n

            % fj функції, той самий "розв'язок"
            fj = zeros(j+2, 1);
            fj(1) = 1;
            fj(2) = -b;

            dfj = polyder(fj);    % похідна

            for i = 1 : n
                % 0
                fi = zeros(i+2, 1);
                fi(1) = 1;
                fi(2) = -b;

                dfi = polyder(fi);

                % 1
                z = conv(dfj, dfi); % згортка
                a1 = polyint(0, b, z);

                % 2
                z = conv(fj, fi);
                z = poly2sym(z, x) * pfun(x);
                a2 = i_simpsym(0, b, z, 1e-10, 10000);
```

```
                % 3
                A(j, i) = a1 + a2;

                clear fi dfi z
            end

            % Згортка та інтегрування
            z = conv(df0, dfj);
            a1 = polyint(0, b, z);

            % Рахуємо (ffun - pfun * f_0) * fj та інтегруємо
            z = (ffun(x) - pfun(x) * f_0) * poly2sym(fj, x);
            a2 = i_simpsym(0, b, z, 1e-10, 10000);

            B(j) = a2 - a1;

            clear fj dfj z
        end
        c = A \ B;
        clear A B
        Y = f0;
        for i = 1 : n
            fi = zeros(i+2, 1);
            fi(1) = 1; fi(2) = -b;
            fi=c(i) .* fi;
            Y = polysum(Y, fi);
        end
        clear fi c
        fi = polysum(Y, -YY);
        F = abs(polyint(0, b, fi)) <= e;
        clear fi
    end

    % переводимо вектор в символи
    P = poly2sym(Y, sym('x'))
    nx = 201; x = linspace(a, b, nx);

    % та рахуємо
    for i = 1 : nx
        Y(i) = subs(P, x(i));
    end
end



function Y = mm_ritz(pfun, ffun, a, b, D, e)
    x = sym('x');
    f0 = [(D(2) - D(1)) ./ b, D(1)];
```

```
    f_0 = poly2sym(f0, x);
    df0 = polyder(f0);
    n = 1;
    F = 0;
    Y = f0;
    while ~F & n <= 15
        YY = Y;
        n = n + 1;
        A = zeros(n, n);
        B = zeros(n, 1);
        for j = 1 : n
            fj = zeros(j + 2, 1);
            fj(1) = 1;
            fj(2) = -b;
            dfj = polyder(fj);
            for i = 1 : n
                fi = zeros(i+2, 1);
                fi(1) = 1;
                fi(2) = -b;
                dfi = polyder(fi);
                z = conv(dfj, dfi);
                a1 = polyint(0, b, z);
                z = conv(fj, fi);
                z = poly2sym(z, x) * pfun(x);
                a2 = i_simpsym(0, b, z, 1e-10, 10000);
                A(j, i) = a1 + a2;
                clear fi dfi z
            end
            z = conv(df0, dfj);
            a1 = polyint(0, b, z);
            z = (ffun(x) - pfun(x) * f_0) * poly2sym(fj, x);
            a2 = i_simpsym(0, b, z, 1e-10, 10000);
            B(j) = a2 - a1;
            clear fj dfj z
        end
        c = A \ B;
        clear A B
        Y = f0;
        for i = 1 : n
            fi = zeros(i+2, 1);
            fi(1) = 1;
            fi(2) = -b;
            fi = c(i) .* fi;
            Y = polysum(Y, fi);
        end
        clear fi c
        fi = polysum(Y, -YY);
        F = abs(polyint(0, b, fi)) <= e;
        clear fi
    end
```

```
    % переводимо вектор в символи
    P = poly2sym(Y, sym('x'))
    nx = 201; x = linspace(a, b, nx);

    % та рахуємо
    for i = 1 : nx
        Y(i) = subs(P, x(i));
    end
end




function S = polysum(P, Q)
    % Знаходження S = P+Q, де P, Q  - поліноми

    % compare
    if length(P) < length(Q)
        S = polysum(Q, P);
        return;
    end

    nP = length(P); nQ = length(Q);

    % compute sum
    nS = nP; S = P; j = nS;
    for i = nQ : -1 : 1
        S(j) = S(j) + Q(i); j = j - 1;
    end

    % work with "tail"
    j = 0;
    for i = 1 : nS
        if S(i) ~= 0
            j = 1; break;
        end
    end
    if j
        S = S(i : nS);
    end
end




function  s = polyint(a, b, P)
    % Знаходження визначеного інтеграла від поліному Pn(x)
    n = length(P); n2 = n + 1;
```

```
    s = 0;

    % just sum of p*x^{n+1}
    for i = 1 : n
        j = n2 - i;
        s = s + P(i) ./ j .* (b .^ j - a .^ j);
    end
end



function s = i_simpsym(a, b, f, e, mki)
    % рахуємо визначенний інтеграл через Сімпсона
    % з заданою точністю + макс. згущенням

    hn = 0.5 .* (b - a);
    S1 = subs(f, 'x', a) + subs(f, 'x', b);
    S2 = 0;
    t = 0.5 .* (b + a); S4 = subs(f, 'x', t);
    s = hn .* (S1 + 4 .* S4) ./ 3;
    k = 0; F = 0;
    while ~F & k < mki
        k = k + 1; ho = hn; hn = 0.5 .* hn;
        S2 = S2 + S4; S4 = 0; t = a + hn;
        while t < b
            S4 = S4 + subs(f, 'x', t); t = t + ho;
        end
        ss = hn .* (S1 + 4 .* S4 + 2 .* S2) ./ 3;
        F = abs(ss - s) ./ 15 < e; s = ss;
    end
end
```