Iterative methods for solving Dirichlet difference problems in a rectangle for the Poisson equation

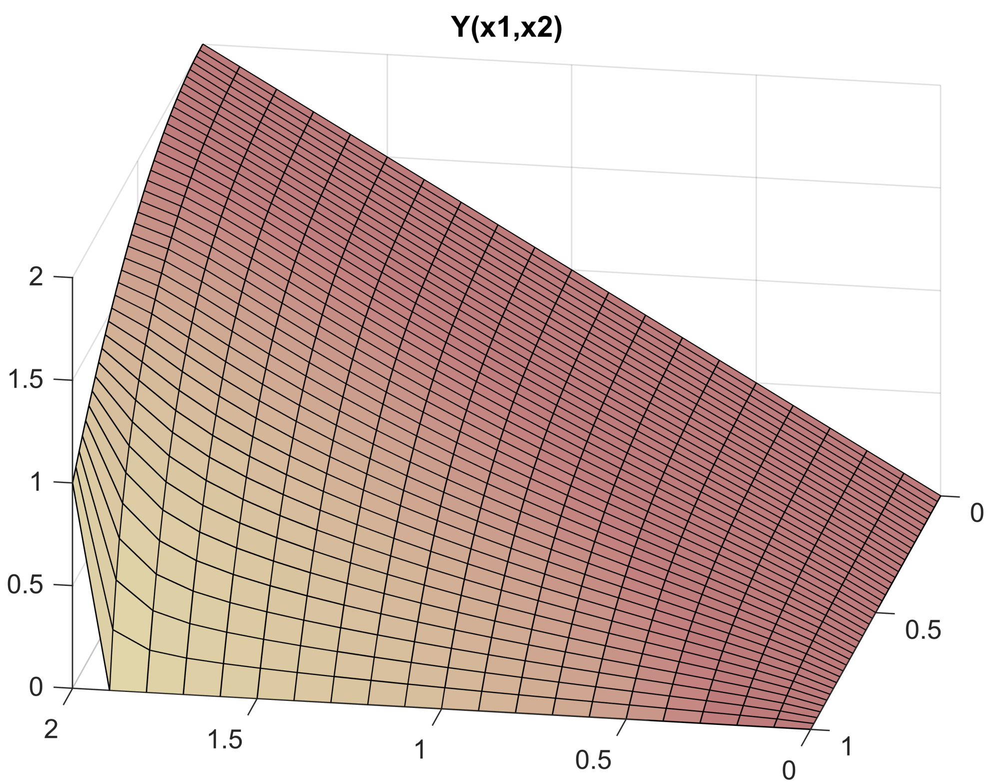
Taks 1

п.1. Програмне забезпечення для розв'язання модельної задачі (8.1), (8.2*) модифікувати для розв'язання задачі індивідуального завдання та побудувати графік наближеного розв'язку.

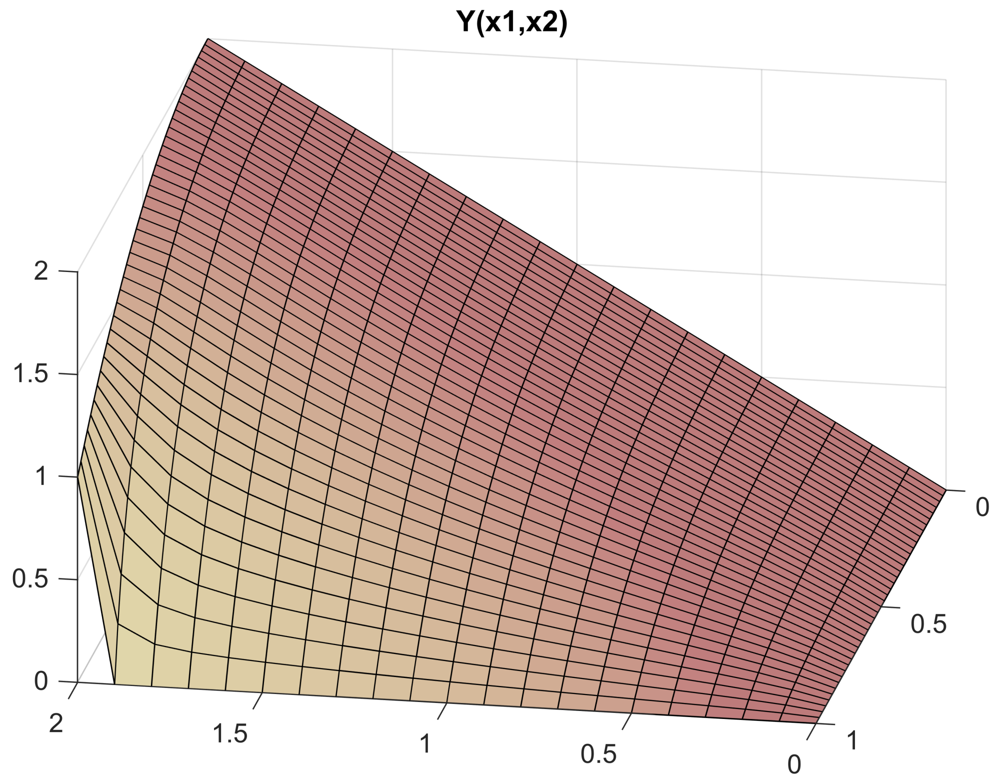
8	2	1	$x_2 \exp(x_1 + x_2)$	x_1	0	0	$2 - 2x_2$

```
% параметри задачі і точність ІП :
L = [2, 1]; N = [21, 41]; eps = 1e-8;
% п.1 ІП - метод змінних напрямків (МЗН) з вибором
%        оптимальних параметрів (ОП) по Жордану
[n, x, y, Y] = mznopj(L, N, eps, @t82_f, @t82_mx, @t82_my);
```

```
% побудова графіка наближеного розв'язку :
Uview(x, y, Y, 'Y');
```



```
% п.2 ІП - позмінно-трикутний метод (ПТМ) з
%         чебишовським набором параметрів (ЧНП)
[n, x, y, Y] = ptmopch(L, N, eps, @t82_f, @t82_mx, @t82_my);
% побудова графіка наближеного розв'язку :
Uview(x, y, Y, 'Y');
```




```
function f = t82_f(x1, x2)
    % функція f(x1,x2) :
    f = x2 .* exp(x1 + x2);
end

function m = t82_mx(x)
    % функція  мю(x,y) для y = 0, L(2):
    m = [x, 0];
end

function m = t82_my(y)
    % функція  мю(x,y) для x=0, L(1):
    m = [0, 2 - y * y];
end

function  z = Uview(x, y, U, name)
    [Yy, Xx] = meshgrid(y, x);
```

```
    surfl(Xx, Yy, U);
    z = 1;
    title(strcat(name,'(x1,x2)'));
    colormap(pink), view(190,30)
end


function [n, x, y, Y] = mznopj(L, N, eps, f, mx, my)
    % Розв'язування задачі Діріхле в прямокутнику
    %    П U dП = (0 <= x <= L(1) & 0 <= y <= L(2))
    % для рівняння Пуассона за допомогою різницевої схеми з використанням
    % методу змінних напрямків і вибором оптимальних параметрів по Жордану.
    %     U"xx + U"yy = -f(x,y),  (x,y) є П,
    %       U(x,y) = мю(x,y),  (x,y) є dП.
    % Вхідні дані :
    %   L - вектор опису прямокутника;
    %   N - вектор опису кількості точок сітки;
    % eps - точність (0<eps<1) ітераційного процесу;
    %   f - опис функції f(x,y);
    %  mx - опис функцій мю(x,y), для границь y=0, L(2);
    %  my - опис функцій мю(x,y), для границь x=0, L(1).
    % Вихідні дані:
    %   n - кількість кроків ітераційного процесу;
    %   x - сітка по x;
    %   y - сітка по y;
    %   Y - сіткова функція наближеного розв'язку U(x,y).
    % параметри різницевої схеми:
    Nx = N(1); Nx1 = Nx - 1; x = linspace(0, L(1), Nx); hx = x(2) - x(1);
    Ny = N(2); Ny1 = Ny - 1; y = linspace(0, L(2), Ny); hy = y(2) - y(1);

    % формування граничних умов і початкового наближення :
    Y = zeros(Nx, Ny);
    for k2 = 1 : Ny
        z = my(y(k2)); Y(1,k2) = z(1); Y(Nx,k2) = z(2);
    end
    for k1 = 2 : Nx1
        z = mx(x(k1)); Y(k1,1) = z(1); Y(k1,Ny) = z(2);
    end
    clear z

    % обчислення оптимальних ітераційних параметрів :
    hhx = 1 ./ (hx .* hx); hhy = 1 ./ (hy .* hy);
    p = 4 .* hhx; ka = 4 .* hhy; t = 0.5 .* pi;
    r = t .* hx ./ L(1); t = t .* hy ./ L(2);
    d1 = sin(r); d1 = p .* d1 .* d1;
    d2 = sin(t); d2 = ka .* d2 .* d2;
    D1 = cos(r); D1 = p .* D1 .* D1;
    D2 = cos(t); D2 = ka .* D2 .* D2;
    ka = (D1 - d1)./(D2 + d1); t = ka .* (D2 - d2);
    t = sqrt(t ./ (D1 + d2)); eta = (1 - t) ./ (1 + t);
```

```
    ka = ka .* D2 ./ D1; p = (ka - t) ./ (ka + t);
    r = D1 - D2 + (D1 + D2) .* p;
    r = 0.5 .* r ./ (D1 .* D2);
    q = r + (1 - p) ./ D1;
    n = fix(log(4./eps).*log(4./eta)./(pi.*pi));
    tet = eta .* eta; tet = 0.0625.*(1 + 0.5.*tet).*tet;
    ka = 2 .* n; eta = 0.5 + tet;

    % формування складових матриць СЛАР :
    Ax = zeros(Nx, 1); Cx = ones(Nx, 1); Bx = Ax; Fx = Ax;
    Ay = zeros(Ny, 1); Cy = ones(Ny, 1); By = Ay; Fy = Ay;
    for j = 1 : n
        % знаходження компоненти w ітераційних параметрів :
        t = (2.*j - 1) ./ ka; d1 = eta .* (1 + tet.^t);
        d2 = 1 + tet.^(1-t) + tet.^(1+t);
        d2 = tet.^(0.5.*t) .* d2; w = d1./d2;

        % знаходження наближеного розв'язку Y для (j+1/2) :
        tau = (q .* w + r)./(1 + w .* p); YJ = Y;
        d1 = tau .* hhx; d2 = 1 + 2 .* d1;
        D1 = tau .* hhy; D2 = 1 - 2 .* D1;

        for k1 = 2 : Nx1
            Ax(k1) = d1; Cx(k1) = d2; Bx(k1) = d1;
        end

        for k2 = 2 : Ny1
            yy = y(k2);
            Fx(1) = Y(1,k2); Fx(Nx) = Y(Nx,k2);
            for k1 = 2 : Nx1
                z = D1 .* (YJ(k1,k2-1) + YJ(k1,k2+1)) + D2 .* YJ(k1,k2);
                Fx(k1) = z + tau .* f(x(k1), yy);
            end
            % розв'язок СЛАР, знаходження Y(:,k2) :
            [YY, alfa]  =  m_progn(Ax, Cx, Bx, Fx);
            Y(:,k2) = YY';
        end
        clear YY alfa

        % знаходження наближеного розв'язку Y для (j+1) :
        tau = (q .* w - r)./(1 - w .* p); YJ = Y;
        d1 = tau .* hhy; d2 = 1 + 2 .* d1;
        D1 = tau .* hhx; D2 = 1 - 2 .* D1;
        for k2 = 2 : Ny1
            Ay(k2) = d1; Cy(k2) = d2; By(k2) = d1;
        end

        for k1 = 2 : Nx1
            xx = x(k1);
            Fy(1) = Y(k1,1); Fy(Ny) = Y(k1,Ny);
```

```
            for k2 = 2 : Ny1
                z = D1 .* (YJ(k1-1,k2) + YJ(k1+1,k2)) + D2 .* YJ(k1,k2);
                Fy(k2) = z + tau .* f(xx, y(k2));
            end

            % розв'язок СЛАР, знаходження Y(k1,:) :
            [YY, alfa]  =  m_progn(Ay, Cy, By, Fy);
            Y(k1,:) = YY';
        end
        clear YY alfa
    end
end




function [n, x, y, Y] = ptmopch(L, N, eps, f, mx, my)
    % Розв'язування задачі Діріхле в прямокутнику
    %    П U dП = (0 <= x <= L(1) & 0 <= y <= L(2))
    % для рівняння Пуассона за допомогою різницевої схеми з використанням
    % позмінно-трикутного методу з чебишовським набором параметрів (ЧНП).
    %     U"xx + U"yy = -f(x,y),  (x,y) є П,
    %       U(x,y) = мю(x,y),  (x,y) є dП.
    % Вхідні дані :
    %   L - вектор опису прямокутника;
    %   N - вектор опису кількості точок сітки;
    % eps - точність (0<eps<1) ітераційного процесу;
    %   f - опис функції f(x,y);
    %  mx - опис функцій мю(x,y), для границь y=0, L(2);
    %  my - опис функцій мю(x,y), для границь x=0, L(1).
    % Вихідні дані:
    %   n - кількість кроків ітераційного процесу;
    %   x - сітка по x;
    %   y - сітка по y;
    %   Y - сіткова функція наближеного розв'язку U(x,y).
    % параметри різницевої схеми:
    Nx = N(1); Nx1 = Nx - 1; x = linspace(0, L(1), Nx); hx = x(2) - x(1);
    Ny = N(2); Ny1 = Ny - 1; y = linspace(0, L(2), Ny); hy = y(2) - y(1);
    % формування граничних умов і початкового наближення :
    Y = zeros(Nx, Ny); YJ = Y;
    for k2 = 1 : Ny
        z = my(y(k2)); Y(1,k2) = z(1); Y(Nx,k2) = z(2);
    end
    for k1 = 2 : Nx1
        z = mx(x(k1)); Y(k1,1) = z(1); Y(k1,Ny) = z(2);
    end
    clear z

    % обчислення оптимальних ітераційних параметрів :
    hhx = 1 ./ (hx .* hx); hhy = 1 ./ (hy .* hy);
```

```
    p = 4 .* hhx; ka = 4 .* hhy; t = 0.5 .* pi;
    r = t .* hx ./ L(1); t = t .* hy ./ L(2);
    d = sin(r); d = p .* d .* d;
    D = sin(t); D = ka .* D .* D; d = d + D; D = p + ka;
    ka = d ./ D; d2 = sqrt(ka); d1 = 0.5 .* d ./ (1 + d2);
    d2 = 0.25 .* d ./ d2; w = 2./ sqrt(d .* D); t = d1 ./ d2;
    r = (1 - t) ./ (1 + t); q = 2 ./ (d1 + d2);
    n = fix(0.5.*log(2./eps)./sqrt(2.*sqrt(ka)));
    M = optchset(n); % стійкий набір множини ЧНП
    d1 = w .* hhx; d2 = w .* hhy;
    d = 1 ./ (1 + d1 + d2); D = -2 .* (hhx + hhy);
    for j = 1 : n
        tau = q ./ (1 + r .* M(j));   % ітераційний параметр
        for k2 = 2 : Ny1
            yy = y(k2);
            for k1 = 2 : Nx1
                z = hhx .* (Y(k1-1,k2) + Y(k1+1,k2));
                p = hhy .* (Y(k1,k2-1) + Y(k1,k2+1));
                z = z + p + D .* Y(k1,k2) + f(x(k1), yy);
                p = d1 .* YJ(k1-1,k2) + d2 .* YJ(k1,k2-1);
                YJ(k1,k2) = (p  + z) .* d;
            end
        end

        for k1 = Nx1 : -1 : 2
            xx = x(k1);
            for k2 = Ny1 : -1 : 2
                z = d1.*YJ(k1+1,k2) + d2.*YJ(k1,k2+1);
                YJ(k1,k2) = (z + YJ(k1,k2)).*d;
            end
        end

        for k1 = 2: Nx1
            for k2 = 2 : Ny1
                Y(k1,k2) = Y(k1,k2) + tau .* YJ(k1,k2);
            end
        end
    end
end


function [T] = optchset(n)
    % Побудова множини оптимальних Чебишовських параметрів
    % Вхідні  дані:
    %  n - кількість чисел множини;
    % Вихідні дані:
    %  T - оптимальний набір параметрів.
    %
    T = nchset(n); b = pi ./ (2.*n); T = -cos(b .* T);
end
```

```
function [T] = nchset(n)
    % Побудова множини T(i) непарних чисел для
    %  оптимальних Чебишовських параметрів
    % Вхідні дані:
    %  n - кількість чисел;
    % Вихідні дані:
    %  T - числова множина.
    P(1) = n; r = n; k=1;
    while r~=1
        k = k + 1;
        if mod(r, 2) == 0
        r = r ./ 2;
        else
        r = r - 1;
        end
        P(k) = r;
    end

    T(1) = 1; kT = 1;
    for j = k - 1 : -1 : 1
        t = r; r = P(j);
        if 2 .* t == r
            m = 2 .* r;
            if j ~= 1
                if P(j-1) == r + 1
                    m = m + 2;
                end
            end
            for i = t : -1 : 1
                i2 = 2 .* i; e = T(i);
                T(i2 - 1) = e; T(i2) = m - e;
            end
            kT = kT .* 2;
        else
            kT = kT + 1; T(kT) = r;
        end
    end
end


function [y, alfa]  =  m_progn(a, c, b, f)
    n = length(c); n1 = n - 1;
    % пряма прогонка:
    alfa = zeros(1, n); y = alfa;
    beta = alfa; ka = ones(1, n); te = alfa;
    C = c(1); A = a(2); F = f(1); Q = f(2);
    for k = 1 : n1
        j = k + 1;
```

```
        if abs(C) >= abs(b(k))
            alfa(j) = b(k) ./ C; beta(j) = F ./ C;
            C = c(j) - A .* alfa(j); F = Q + A .* beta(j);
            te(j) = ka(k); ka(j) = j;
            if k ~= n1
                j = j + 1; A = a(j); Q = f(j);
            end
        else
            alfa(j) = C ./ b(k); beta(j) = -F ./ b(k);
            C = c(j) .* alfa(j) - A; F = Q - c(j) .* beta(j);
            te(j) = j; ka(j) = ka(k);
            if k ~= n1
                j1 = j; j = j + 1;
                A = a(j) .* alfa(j1); Q = f(j) + a(j) .* beta(j1);
            end
        end
    end
    % зворотня прогонка:
    y(ka(n)) =F ./ C;
    for k=n1 : -1 : 1
        j = k + 1; y(te(j)) = alfa(j) .* y(ka(j)) + beta(j);
    end
end
```