Multistep methods for solving the Cauchy problem for the ODE

Taks 1

п.1. Отримати інформацію про методи Адамса для кількості **трьох** точок в шаблоні S (рівномірна сітка з кроком h) в таблиці, аналогічній Таб.3.1.

Явний метод на 3-х точках:

інтерполяційний поліном - $F(t) = f(t_{n-1}) + (t - t_{n-1})[(t - t_{n-2})f(t_{n-3}) - (t - t_{n-3})f(t_{n-2})]/((t_{n-1} - t_{n-2})(t_{n-1} - t_{n-3}))$

розрахункова формула - $y_n = y_{n-1} + h/12 * (23f(x_{n-1}, y_{n-1}) - 16f(x_{n-2}, y_{n-2}) + 5f(x_{n-3}, y_{n-3}))$

похибка - $O(h^3)$

Неявний метод на 3-х точках:

інтерполяційний поліном - $F(t) = f(t_n) + (t - t_n)[(t - t_{n-1})f(t_{n-2}) - (t - t_{n-2})f(t_{n-1})]/((t_n - t_{n-1})(t_n - t_{n-2}))$

розрахункова формула - $y_n = y_{n-1} + h/12 * (5f(x_n, y_n) + 8f(x_{n-1}, y_{n-1}) - f(x_{n-2}, y_{n-2}))$

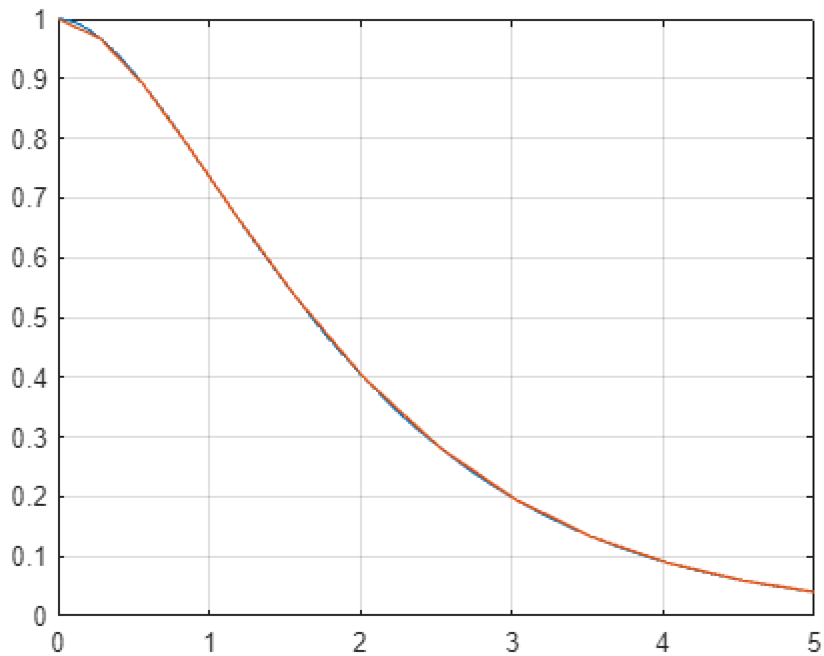
похибка - $O(h^3)$

Taks 2

п.2. Розв'язати задачу Коші (3.8) на відрізку (0, 5] з h=0.01 без автоматичного вибору кроку, використовуючи неявний метод Адамса порядку $O(h^2)$. Порівняти точний і отриманий Вами наближений розв'язок.

$$\begin{cases} u'(x) = \exp(-x) - u(x), \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

```
x0 = 0; xn = 5; h = 0.01; y0 = 1;
dfunc = @(x, u)(exp(-x) - u);

fig = figure;

[X, Y] = explicitAdamsMethod(dfunc, x0, xn, y0, h);
plot(X, Y);

hold on;

[X, Y] = ode23(dfunc, [x0, xn], 1);
plot(X, Y);

grid on;
hold off;
```



Taks 3

<u>п.3.</u> Перевірити виконання *умови коренів* для різницевого методу порядку $O(h^3)$

$$\begin{cases} \dfrac{11y_n - 18y_{n-1} + 9y_{n-2} - 2y_{n-3}}{6h} = f(x_n, y_n), \\ y_1 \equiv u_0, y_2, y_3; n = 4,5,\dots,N. \end{cases}$$

```
% 11q^3 - 18q^2 + 9q - 2 - характеристичне рівняння
```

Input interpretation

solve	$11q^3 - 18q^2 + 9q - 2 = 0$

Results | Approximate forms | Step-by-step solution

$q = 1$

$q = \frac{1}{22}(7 - i\sqrt{39})$

$q = \frac{1}{22}(7 + i\sqrt{39})$

Root plot

тож умова коренів $|q_i| \le 1$-не виконується (беремо по 1 кругу комлексної площини. Самрський, Чисельні методи, ст.240)

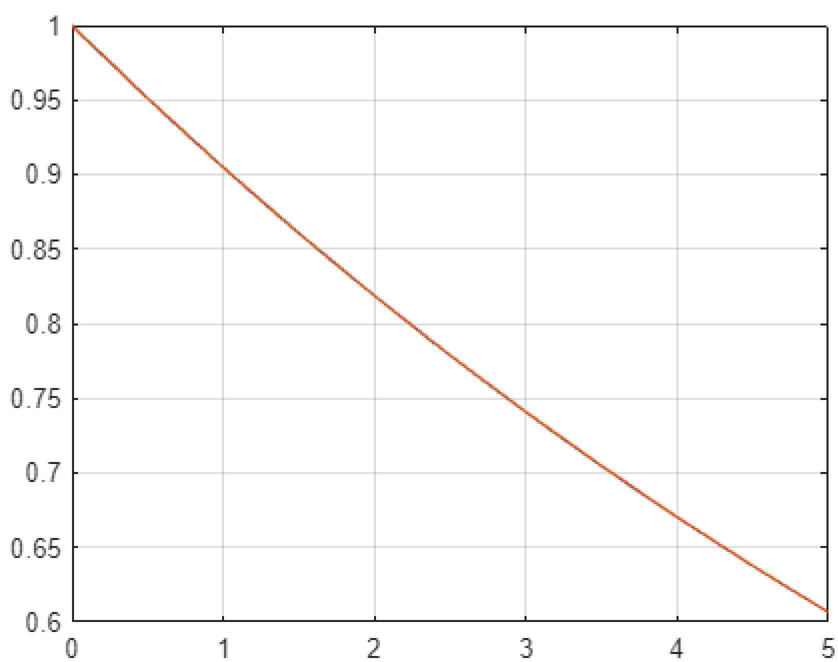
Taks 4

п.4. Розв'язати задачу Коші

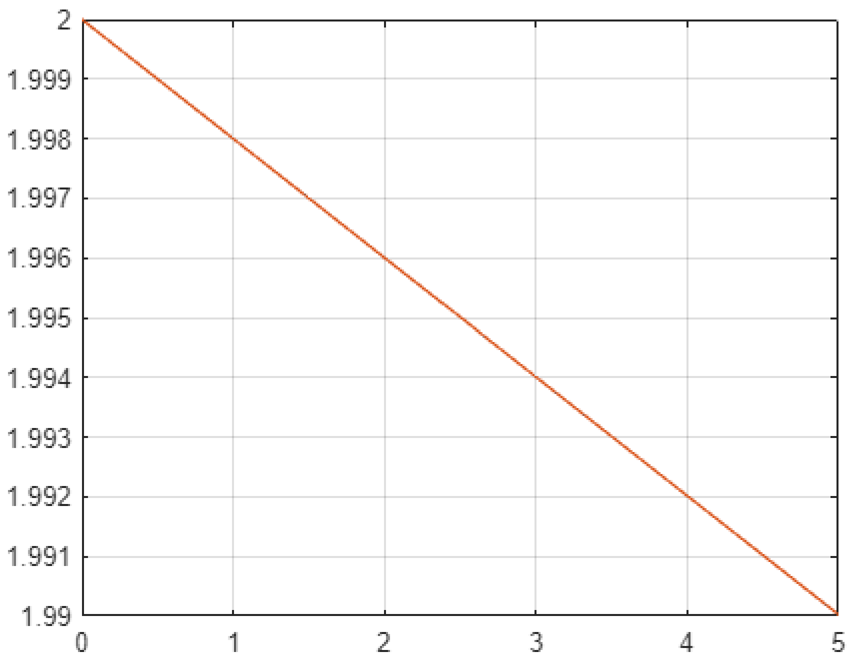
$$\begin{cases} u_1'(x) + a_1 u_1(x) = 0, \\ u_2'(x) + a_2 u_2(x) = 0, \\ u_1(0) = 1, \ u_2(0) = 2. \end{cases}$$

з параметрами $a_1 = 0.1, \ a_2 = 1e3$ на відрізку (0, 5], використовуючи стандартну функцію MATLAB ***ode23s***. Порівняти точний $\vec{U}(x) = \{u_1(0)\exp(-a_1 x), \ u_2(0)\exp(-a_2 x)\}$ і наближений розв'язок.

```
a1 = 0.1; a2 = 10^(-3);
x0 = 0; xn = 5; y01 = 1; y02 = 2;

dfunc = @(x, u)([-a1*u(1); -a2*u(2)]);

[X1, Y1] = explicitAdamsMethod2Dim(dfunc, x0, xn, [y01; y02], h);
[X2, Y2] = ode23s(dfunc, [x0, xn], [y01; y02]);

plot(X1, Y1(1,:));
hold on;
plot(X2, Y2(:,1));
grid on;
hold off;
```



```
plot(X1, Y1(2,:));
hold on;
plot(X2, Y2(:,2));
grid on;
hold off;
```




```
function [X, Y] = explicitAdamsMethod(func, x0, xn, y0, h)
    X = x0:h:xn;
    Y = zeros(length(X), 1);
    Y(1) = y0;

    k1 = h*func(X(1), Y(1));
    k2 = h*func(X(1) + h/2, Y(1) + k1/2);
    k3 = h*func(X(1) + h/2, Y(1) + k2/2);
    k4 = h*func(X(1), Y(1) + k3);
    Y(2) = Y(1) + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6;

    for i = 2:length(X)-1
        Y(i + 1) = Y(i) + h/2 * (3*func(X(i), Y(i)) - func(X(i - 1), Y(i - 1)));
    end
end
```

```
function [X, Y] = explicitAdamsMethod2Dim(func, x0, xn, y0, h)
```

```
    X = x0:h:xn;
    Y = zeros(2, length(X));
    Y(:,1) = y0;

    k1 = h*func(X(1), Y(:,1));
    k2 = h*func(X(1) + h/2, Y(:,1) + k1/2);
    k3 = h*func(X(1) + h/2, Y(:,1) + k2/2);
    k4 = h*func(X(1), Y(:,1) + k3);
    Y(:,2) = Y(:,1) + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6;

    for i = 2:length(X)-1
        Y(:,i+1) = Y(:,i) + h/2 * (3*func(X(i), Y(:,i)) - func(X(i - 1), Y(:,i-1)));
    end
end
```