Linear algebra Q

p111.3

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \\ x_1+2x_2+4x_3+2x_4=2 \\ 3x_1-x_2-ax_3+15x_4=3 \\ x_1-5x_2-10x_3+12x_4=b \end{cases}$$

a,b取值 方程无解、有唯一解、有无穷解；有无穷解时求其通解

$$A|b=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -a & 15 & 3 \\ 1 & -5 & -10 & 12 & b \end{bmatrix} \quad A|b=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-a & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & b+5 \end{bmatrix}$$

$$\text{当}\begin{cases} a=2 \\ b\neq 1 \end{cases}\text{时，}R(A)=3,R(A|b)=4,R(A)<R(A|b)$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A|b=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & b+5 \end{bmatrix}$$

方程组无解

$$\text{当}a\neq 2\text{时，}R(A)=4,R(A|b)=4,R(A)=R(A|b)=n$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2-a & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad A|b=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-a & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & b+5 \end{bmatrix}$$

方程组有唯一解

$$\text{当}\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}\text{时，}R(A)=3,R(A|b)=3,R(A)=R(A|b)<n$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A|b=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

方程组有无穷解