1 Матанализ от Виноградова

1.1

Пусть $M \in \mathbb{M}_{kn}^{(1)}$, $E \in \mathbb{A}_M$.

1. Если множество E малое, U — стандартная окрестность, $E \subset U$, φ — параметризация U, то полагают
$$\mu_M E = \int_{\varphi^{-1}(E)} \sqrt{\mathcal{D}_\varphi} \mathrm{d}\mu_k.$$
2. Если $E = \bigcup\limits_{\nu} E_\nu$, где E_ν — дизъюнктные малые измеримые множества, то полагают
$$\mu_M E = \sum_{\nu} \mu_M E_\nu.$$

Функция μ_M называется *мерой на многообразии* M.

1.2

Определение. Ряд вида
$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \tag{1}$$
где $c_k, z, z_0 \in \mathbb{C}$, называется *степенным рядом.* Числа c_k называются его *коэффициентами*, а z_0 — центром. Если $a_k, x, x_0 \in \mathbb{R}$, то ряд
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \tag{2}$$
называется *вещественным степенным рядом.*

Определение. Величина $R \in [0, +\infty]$ называется *радиусом сходимости* степенного ряда, если

1. для всех z, таких что $|z - z_0| < R$, степенной ряд сходится
2. для всех z, таких что $|z - z_0| > R$, степенной ряд расходится

2 Большое задание от доктора Тренча

2.1

Let $u(x,t) = v(x,t) + q(x)$; then $u_t = v_t$ and $u_{xx} = v_{xx} + q''$, so
$$\begin{gathered} v_t = v_{xx} + q'' + \pi^2 \sin \pi x, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ v(0,t) = -q(0), \quad v_x(1,t) = -\pi - q'(1), \quad t > 0, \\ v(x,0) = 2 \sin \pi x - q(x), \quad 0 \le x \le 1. \end{gathered} \tag{A}$$

We want $q''(x) = -\pi^2 \sin \pi x$, $q(0) = 0$, $q'(1) = -\pi$; $q'(x) = \pi \cos \pi x + a_2$; $q'(1) = -\pi \Rightarrow a_2 = 0$; $q'(x) = \pi \cos \pi x$; $q(x) = \sin \pi x + a_1$; $q(0) = 0 \Rightarrow a_1 = 0$; $q(x) = \sin \pi x$. Now (A) reduces to
$$\begin{gathered} v_t = v_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ v(0,t) = 0, \quad v_x(1,t) = 0, \quad t > 0, \\ v(x,0) = \sin \pi x, \quad 0 \le x \le 1. \end{gathered}$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_n &= 2\int_0^1 \sin \pi x \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2}\,dx = \int_0^1 \left[\frac{\cos(2n-3)\pi x}{2} - \frac{\cos(2n+1)\pi x}{2}\right] dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(2n-3)\pi x/2}{(2n-3)} - \frac{\sin(2n+1)\pi x/2}{(2n+1)}\right]\Bigg|_0^1 \\
&= (-1)^n \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n+1}\right] = (-1)^n \frac{8}{\pi}\frac{1}{(2n+1)(2n-3)};
\end{aligned}
$$

$S_M(x) = \dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n-3)} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2}$. From Definition 12.1.4,

$$
v(x,t) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n-3)} e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2}.
$$

Therefore, $u(x,t) = \sin \pi x + \dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n-3)} e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2}$.

3 Маленькие задания от доктора Тренча

3.1

$t \sin \omega t \leftrightarrow \dfrac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$ and $t \cos \omega t \leftrightarrow \dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$, so $H(s) = \dfrac{2\omega s(s^2-\omega^2)}{(s^2+\omega^2)^4}$.

3.2

Substituting $x = t - \tau$ yields $\displaystyle\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = -\int_t^0 f(x)g(t-x)(-\,dx) = \int_0^t f(x)g(t-x)\,dx = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$.

3.3

$e^t \leftrightarrow \dfrac{1}{s-1}$ and $\sin at \leftrightarrow \dfrac{a}{s^2+a^2}$, so $H(s) = \dfrac{a}{(s-1)(s^2+a^2)}$.