

Nanotechnologie zur Nutzung von Vakuumenergie

Inhalt

Motivation	1
Perpetuum Mobiles.....	2
Das Quantenvakuum	6
Existenz virtueller Teilchen	7
Photon-Photon Streuung:.....	7
Teilchenbeschleuniger:	8
Quantenchromodynamik schließt S-Matrix Ansätze aus:.....	8
Virtuelle Teilchen prognostizierten Pionen:	9
Vakuumpolarisation:.....	11
Unruh-Strahlung:.....	12
Nützlichkeit:.....	13
Dynamischer Casimir-Effekt:	15
Evaneszenz:.....	15
Verstärkung von Quantenfluktuationen	16
Theorie des Quantenvakuums.....	18
Plancksche Nullpunktenergie:	18
Kirchhoffs Strahlungsgesetz:	18
Stefan-Boltzmann Gesetz:.....	19
Rayleigh-Jeans Gesetz:.....	20
Plancks erste Theorie:	22
Plancks zweite Theorie:	23

Moderner Beweis des Planckschen Strahlungsgesetzes:.....	23
Einstein und Stern's Nullpunktenergie:.....	23
Einstein-Hopf Modell:	23
Einstein und Sterns Nullpunktenergie:.....	23
Fluktuationen:.....	23
A und B Koeffizienten und spontane Emission:.....	23
Harmonischer Oszillator:	24
Manipulation von Nullpunkt-Schwingungen im harmonischen Oszillator:.....	25
Feldmoden:.....	25
Quantisierung des elektromagnetischen Felds:	26
Feld im freien Raum:	26
Notwendigkeit des Vakuumfeldes:	26
Wärmestrahlung:.....	38
Thermisches Equilibrium:.....	38
Spontane Emission vs. Absorption:	38
Effekte des Quantenvakuums:.....	39
Virtuelle Teilchen:	39
Casimir Effekt.....	40
Casimirs Herleitung:.....	41
Basel-Problem:.....	41
Allgemeine Euler-Maclaurin Approximation:	50
Casimirs Parallelepiped:	53
Eine moderne Herleitung:.....	62
Casimir und van der Waals Kräfte:	62
Nullpunkt Energie der Oberflächenmoden:.....	62

Nicht-ideale Leiterplatten:.....	62
Lifshitz und Barash-Ginzburg Theorien:	62
Quellentheorie nach Schwinger:.....	62
Cut-Off Frequenz-Unabhängigkeit der Casimir Energie:.....	65
Casimir-Kraft in kompressiven Medien:	66
Streuungsansatz und Einfluss von Materialeigenschaften, Temperatur und Geometrie:	66
Numerische Methoden zur Berechnung von Casimir Wechselwirkungen:	66
Können die Hauptsätze der Thermodynamik umgangen werden?.....	66
Energieerhaltung.....	67
Stochastische Elektrodynamik	69
Fluktuations-Dissipations-Theorem	77
Lineare Antworttheorie:	78
Streumatrix:	78
Kubo Gleichung:	79
Quantenfluktuations-Dissipations-Theorem:	79
Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik.....	81
Energieextraktion aus einem Quanten-Wärmereservoir	81
Carnot-Prozess:.....	81
Photonengas-Carnot Wärmekraftmaschine:	81
Überschreitung des Carnot-Limits:.....	81
Energieextraktion aus Vakuumfluktuationen	82
1. Nicht-lineare Extraktion:.....	82
2. Mechanische Extraktion:	82
3. Gasfluss durch Casimir-Spalten:	82

Evaneszenz und Tunneleffekt.....	83
Totalreflexion:.....	84
Evaneszente Wellen sind virtuell:.....	86
Eindimensionales Stufenpotenzial:	89
Stromdichte:	93
Rechteckpotenzial und Tunneleffekt:.....	93
Rechteckbarriere:	93
Potenzialgraben:.....	93
Andere Potenziale:	94
Tunnelungszeit:	94
Gruppen- und Signalgeschwindigkeit:.....	95
Reflektionszeit-Operator und minimale Tunnelzeit:	95
Tunnelungszeit evaneszenter Photonen:	95
Quantenuhren:	95
Realistischere Tunnelmodelle:	95
Quanten-Münchhausen Effekt:	95
Tunneleffekt mit Medium-Anregungskopplung	96
Quantendiffusion mit Phonon-Kopplung.....	96
Quantendiffusion mit Elektron-Kopplung	96
Asymmetrischer Tunneleffekt:	96
Beweis von Landaus Hypothese:.....	97
Massenschwerpunkt:.....	101
Schwache Asymmetrie:.....	101
Ausnutzung von Asymmetrie.....	101
Verstärkung der Tunnelrate durch Spiegelplatten.....	111
Verschiebung des Grundzustands in Casimir-Spalten.....	117

Materialüberlegungen.....	117
Falsifizierung der Hypothese.....	123
1. Stabilität über große Zeitintervalle	123
2. Flächenabhängigkeit.....	125
3. Leiteranordnungsabhängigkeit.....	128
4. Fertigungsschritte.....	129
5. Leckströme	130
6. Umgebungsstrahlung	131
7. Thermoelektrische Effekte in den Elektroden.....	132
8. Thermoelektrische Effekte in den Messgeräten.....	133
9. Feldeffekte	134
Fehlerminimierung.....	134
Stichprobenmanipulation	135
Spektroskopische Ellispometrie Analyse.....	135
Kosmische Strahlung	135
Magnetfelder.....	136
Piezoelektrizität.....	136
Radioaktivität	138
Johnson Rauschen.....	138
Wärmetransfer durch Quantenfluktuationen.....	139
Theoretisches Modell	139
Nano-Resonator:	139
Hohlraum QED:.....	139
Hot Carrier Generierung durch Quantenfluktuationen:.....	140
Plasmonen:	140
Oberflächenplasmonresonanzspektroskopie:	142

Oberflächen-Plasmonen im Casimir Effekt:	150
Plasmonenzerfall und Hot Carrier Entstehung:	155
Modellierung:	155
Herstellung	156
Methoden der Mikrofertigung.....	156
Oxidation von Silizium:.....	156
Beschichtungstechnik:	157
Epitaxie:.....	160
Lithografie:	167
Ätztechnik:.....	175
Wafer-Spülung:.....	180
Metallisierung und Kontakte:	181
Schaltungsmontage und Kontaktierverfahren:.....	181
Herstellung mit Germanium Maske.....	182
Vorbereitung:	182
Dioden Herstellung:	184
Fotolithografie	185
Ausblick	190
Skalierung:.....	190
Globale Erwärmung:.....	191
Nanotechnologie:.....	191
Forschungsausblick:	192
Fazit	192
Literaturverzeichnis	194

Motivation

Es ist eine berechtigte Frage, wieso man sich dafür entscheiden würde, Vakuumenergie nutzbar machen zu wollen. Es ist allgemeiner wissenschaftlicher Konsens, dass ein solches Unterfangen zum Scheitern verurteilt ist. Es war reiner Zufall, dass ich 2022 auf Veröffentlichungen von Garrett Moddel gestoßen bin, die meine Neugier und meine Hoffnung, dass es vielleicht doch möglich sein könnte, Vakuumenergie zu nutzen, wieder weckten. Das rationale Argument dafür, dass es unverantwortlich sein könnte, diese Forschung besonders als Nanotechnologe nicht zu ernst zu nehmen, entspricht dem aus der KI-Forschung bekannten Fall von „Pascals Mugging“. Blaise Pascal argumentierte, dass es rational sei, an Gott zu glauben, da die möglichen Gewinne, die man durch den Glauben an Gott erzielen könnte (zum Beispiel ewiges Leben im Himmel), so enorm sind, dass sie die möglichen Kosten des Glaubens überwiegen, selbst wenn die Wahrscheinlichkeit des göttlichen Seins sehr gering ist.

Dieses Konzept der Abwägung von Wahrscheinlichkeit und potenziellem Nutzen führte zur Idee von Pascals Mugging. Stellen Sie sich vor, Sie werden von einem Fremden auf der Straße konfrontiert, der behauptet, ein Wesen aus einer anderen Dimension zu sein. Dieses Wesen behauptet, dass es die Macht hat, unermessliche Freuden oder Schmerzen zu verursachen, aber es benötigt eine bestimmte Geldsumme von Ihnen, um seine Kräfte zu nutzen. Das Wesen argumentiert, dass die Konsequenzen so enorm sind, dass selbst wenn die Wahrscheinlichkeit, dass es die Wahrheit sagt, extrem gering ist, die potenziellen Auswirkungen dennoch so wichtig sind, dass Sie ihm das Geld geben sollten.

Diese Art von Situation stellt uns vor ein ethisches Dilemma. Selbst wenn die Wahrscheinlichkeit, dass das Wesen die Wahrheit sagt, extrem niedrig ist, könnten die potenziellen Konsequenzen so bedeutend sein, dass es vernünftig erscheint, das Geld zu geben, nur um das Risiko unvorstellbarer Schäden zu vermeiden.

Pascals Mugging fordert uns heraus, über die traditionelle Rationalität hinauszugehen und zu erkennen, dass es Dinge gibt, die so wichtig sind, dass wir sie auch dann in Betracht ziehen sollten, wenn ihre Wahrscheinlichkeit gering ist. Ein Beispiel ist für eine solche Wette wäre die Erforschung Künstlicher Intelligenz. Es ist möglich, dass Künstliche Intelligenz einen unglaublichen Mehrwert für die Menschheit erzielen wird, aber viele Forscher hielten es lange für unmöglich, dass sich starke KI entwickeln lässt. Ich behaupte, dass im Gebiet der Vakuumenergie womöglich eine ähnliche Wette zutrifft. Zwar ist die Wahrscheinlichkeit, dass Vakuumenergie nutzbar gemacht werden kann, sehr gering, aber sofern auch nur eine geringe Chance besteht, dass dies möglich ist, sollte man zumindest einmal die Möglichkeiten untersuchen. Hinzu kommt noch, dass die Menschheit sich in der Krise der globalen Erwärmung befindet und alternative Energieressourcen braucht. Es scheint zwar durch das exponentielle Wachstum der Märkte erneuerbarer Energie möglich, Klimaneutralität zu erreichen, aber es gibt einige bekannte Kipppunkte des Klimasystems der Erde, die womöglich kippen, bevor wir das Ziel erreicht haben. Neue Energiequellen zu finden, ist daher nicht nur eine wissenschaftliche Angelegenheit, sondern auch eine moralische Angelegenheit. Das gilt insbesondere dann, wenn eine neue Technologie auf völlig triviale Weise hergestellt und skaliert werden kann und existierende Industrien verwendet werden können, um die Massenproduktion solcher Geräte zu beginnen. Daher habe ich hier zumindest vor, das Thema Vakuumenergie einmal näher zu betrachten und insbesondere die von Moddel et al. entworfene MIM-Casimir-Engine.

Perpetuum Mobiles

Ein Perpetuum Mobile ist eine Maschine, die sich selbst für immer antreiben kann. Versuche, eine solche Maschine zu bauen, gab es in der Menschheitsgeschichte immer wieder. Zuerst wurden mechanische Perpetua mobilia anvisiert, dann hydrotechnische, dann magnetisch betriebene Maschinen. Da

sich gezeigt hat, dass keine dieser Maschinen wirklich ewig funktionieren kann, hat man sie danach kategorisiert, aus welchem Grund sie nicht funktionieren.

Man unterscheidet drei Arten von Perpetua mobilia:

1. Perpetuum mobile erster Art: Diese verletzen den ersten Hauptsatz der Thermodynamik, die Energieerhaltung, und können somit in isolierten Systemen nicht funktionieren. In dieser Kategorie befinden sich die meisten klassischen Perpetua mobilia. Im 19. Jahrhundert formulierte Julius Robert von Mayer und Rudolf Clausius den Energieerhaltungssatz und jegliche Arbeiten an Perpetua mobilia wurde zu einem Thema der Pseudowissenschaft und Verschwörungstheoretiker. Denn mit diesem Gesetzen wurde klar, dass es gegen die Natur der Physik verstößt, ein Perpetuum mobile zu erschaffen. Aber anstatt aufzugeben, versuchten Erfinder nun den ersten Hauptsatz einzuhalten, aber den zweiten zu brechen.
2. Perpetuum mobile zweiter Art: Diese verletzen den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik. Sie versuchen Arbeit aus Umgebungswärme zu gewinnen. Mit anderen Worten, sie versuchten negative Entropie zu nutzen. Aber solche Maschinen versagen, weil die Umwandlung von Arbeit in Wärme ein irreversibler Prozess ist. Ein Beispiel ist der Maxwell'sche Dämon.
3. Perpetuum mobile dritter Art: Solche verletzen weder den ersten noch den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik, sondern versuchen lediglich sich selbst am Laufen zu halten. Ein Beispiel wäre unser Sonnensystem, das sich scheinbar unaufhörlich dreht. Aber selbst solche Systeme sind lediglich sehr langwierige Prozesse, die irgendwann zum Stillstand kommen müssen. Bei großen Himmelskörpern sorgen dafür beispielsweise Gravitationswellen und bei kleineren Körpern quantenmechanische Schwingungen, die dafür sorgen, dass selbst ideale Systeme irgendwann nicht mehr aufrecht erhalten werden können.

Was der Vertrauenswürdigkeit dieses Gebiets weiter schädigte, waren Spekulationen zur sogenannten Freien Energie, womit nicht der aus der Chemie bekannte Begriff, sondern ein angebliches Energiefeld gemeint ist, das überall vorliegen würde und angezapft werden könnte. Man berief sich dafür auf Nikola Teslas Arbeiten, der Raumenergie aus dem Weltraum nutzen wollte und dazu Patente anmeldete. Wie sich aber herausstellt, handelt es sich dabei um Überlegungen zu Photozellen, die Sonnenenergie in elektrischen Strom umwandeln sollten. Verschwörungstheoretiker hielten dennoch daran fest, dass freie Energie existieren würde und aufgrund wirtschaftlicher Interessen unterdrückt würde. In der Quantenmechanik wurde im 20. Jahrhundert die Nullpunktenergie eingeführt. Man stellte fest, dass ein harmonischer Oszillator selbst im geringsten Energiezustand noch eine Energie $E = \frac{\omega\hbar}{2}$ aufwies. In der Quantenfeldtheorie entspricht dies der Vakuumenergie, die das Vakuum im Equilibrium besitzt. Diese Entdeckungen befeuerten die pseudowissenschaftlichen Debatten weiter und führten zu verschiedenen Gedankenexperimenten Vakuumenergie nutzbar zu machen. Aber Vakuumenergie ist wie gesagt eine Equilibrium Zustand. In der Quantenmechanik ist die Nullpunktenergie der niedrigste mögliche Zustand, den das System einnehmen kann. Es gibt also keine Möglichkeit Energie aus dem Vakuum zu beziehen, denn es gibt keinen niedrigeren möglichen Energiezustand den das System einnehmen könnte. In Analogie zur Thermodynamik kann man sich vorstellen, dass das Quantenvakuum mit seinen Fluktuationen wie in einem thermodynamischen Gleichgewicht vorliegt. Einzelne Teilchen können in diesem Gleichgewicht durchaus mal hohe Energien haben und es liegt tatsächlich insgesamt sehr viel Energie im Vakuum verborgen, aber wie in der Thermodynamik lässt sich Energie nur nutzen, wenn man ein Ungleichgewicht erzeugt. Ein solches Ungleichgewicht, so fand Hendrik Casimir 1948 durch theoretische Überlegungen heraus, kann durch zwei Metallplatten erzeugt werden, die sehr nahe aneinander gebracht werden. Daher kam es schnell zu Theorien darüber, wie man durch den Casimir Effekt verschiedene Science-Fiction Ideen umsetzen könnte, wie ein Warp-Blase. Was man jedoch übersah war, dass eine solche Blase tatsächlich negative Energie benötigte, aber

der Casimir Effekt lediglich für eine Verringerung der Vakuumenergie sorgte und nicht dafür, dass das Vakuum negative Energien annahm.

Da es diese lange pseudowissenschaftliche Vorgeschichte zum Thema der unendlichen Energiequellen und auch zur Vakuumenergie gibt, wird das Thema in der Wissenschaft meistens gar nicht mehr ernsthaft betrachtet. Es gibt zwar weiterhin kleine Teams, die beispielsweise an Experimenten zur kalten Fusion arbeiten, aber der Konsens ist, dass diese Experimente zum Scheitern verurteilt sind, weil sie die Energieerhaltung verletzen würden.

Arthur Eddington sagte beispielsweise einmal:

„Falls Ihnen jemand zeigt, dass Ihre Lieblingstheorie des Universums nicht mit den Maxwell-Gleichungen übereinstimmt – Pech für die Maxwell-Gleichungen. Falls die Beobachtungen ihr widersprechen – nun ja, diese Experimentatoren bauen manchmal Mist. Aber wenn Ihre Theorie nicht mit dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik übereinstimmt, dann kann ich Ihnen keine Hoffnung machen; ihr bleibt nichts übrig als in tiefster Schande zu kollabieren.“

Und Albert Einstein schrieb:

„Eine Theorie ist desto eindrucksvoller, je größer die Einfachheit ihrer Prämissen ist, je verschiedenartigere Dinge sie verknüpft und je weiter ihr Anwendungsbereich ist. Deshalb der tiefe Eindruck, den die klassische Thermodynamik auf mich machte. Es ist die einzige physikalische Theorie allgemeinen Inhalts, von der ich überzeugt bin, dass sie im Rahmen der Anwendbarkeit ihrer Grundbegriffe niemals umgestoßen wird“.

Aus all diesen Gründen kann man sich vorstellen, dass nur wenige Wissenschaftler an der Erforschung der Vakuumenergie zur Energienutzung forschen, da es sehr einfach ist, sie in dieselbe Schublade wie die verschiedenen „Freie Energie“ Enthusiasten zu stecken. Man wird also sehr wahrscheinlich seinem Ruf schaden und kann keine gute Finanzierung erwarten.

Ich möchte allerdings aufzeigen, dass es in den letzten Jahren doch interessante Forschungsbeiträge gibt, die darauf hinweisen, dass es vielleicht möglich sein könnte, die Hauptsätze der Thermodynamik zu umgehen. Dazu verwendet man die Gesetze der Quantenmechanik. Die Quantenmechanik ist die fundamentalste Theorie der Realität, die wir besitzen. Wenn sie es erlaubt, irgendwie Energie aus dem Nichts zu nutzen, können womöglich die thermodynamischen Hauptsätze außer Kraft gesetzt werden, weil sie auch erst aus der Quantenphysik hervorgehen. Bevor wir dazu kommen, müssen wir erstmal die Grundlagen klären und uns mit den Effekten beschäftigen, die eine Casimir Engine ausnutzen könnte.

Das Quantenvakuum

Der Casimir Effekt war ein bedeutender Fortschritt in der Erforschung der Vakuumenergie, da somit zumindest die theoretische Basis zur realen Erforschung der Vakuumenergie erbracht wurde. Leider ergeben sich mehrere unterschiedliche Wege, den Casimir Effekt theoretisch zu erklären, weshalb ein großer Spielraum für Interpretation bleibt und nicht klar formuliert werden kann, ob Vakuumenergie tatsächlich real ist oder nur ein Konzept, das aus der speziellen Beschreibung physikalischer Phänomene, heraus entsteht, die wir heute verwenden. Auf einem klassischen Weg lässt sich der Casimir Effekt über elektrodynamische Beziehungen herleiten und über den quantenmechanischen Weg ist eine Berechnung durch Vakuumfluktuationen im Rahmen der Renormalisierung möglich. Beides soll genauer beleuchtet werden, aber für einen einfachen Einstieg soll vorerst ein vereinfachendes Bild benutzt werden, um den Effekt zu demonstrieren.

Das Vakuum, so kann man aus den Gleichungen der Quantenphysik ableiten, ist nicht vollkommen leer. Die Heisenbergsche Unschärferelation dictiert, dass aus der Ort-Impuls Unschärfe auch eine Zeit-Energie Unschärfe ähnlicher Größenordnung hervorgeht. Daher können, so die Annahme, für sehr kurze Zeitintervalle geringer Unschärfe, Energiepakete sehr großer Un-

schärfe erzeugt werden, die demnach hohe Energien in Form von kurzlebigen Teilchen erzeugen können. Auch in der Theorie nach der zweiten Quantisierung existieren solche sehr kurzlebigen Teilchen und sollen durch sogenannte virtuelle Teilchen erzeugt werden. Man nennt virtuelle Teilchen virtuell, da sie in Experimenten nicht gemessen werden können und rein formal als theoretisches Konzept genutzt werden, das sich jedoch als so nützlich und präzise erwiesen hat, dass die Existenz virtueller Teilchen kaum angezweifelt werden kann. Es soll an dieser Stelle kurz gezeigt werden, warum davon auszugehen ist, dass virtuelle Teilchen tatsächlich existieren.

Existenz virtueller Teilchen

Es ist zuerst einmal klarzustellen, dass wir immer noch nicht wirklich wissen, ob virtuelle Teilchen existieren. Es gibt aber viele Hinweise, die darauf hindeuten, und Versuchsvorschläge, die zum Verständnis der Quantenfluktuationen beitragen sollen.

Photon-Photon Streuung:

Beispielsweise haben Forscher verschiedener deutscher Institute 2023 vorgeschlagen, Photon-Photon Streuung zu durch Hochenergie-Laser zu untersuchen, da Photonen in der Quantenelektrodynamik manchmal durch virtuelle Teilchen interagieren können. Die Streuung von realen Photonen an virtuellen Teilchen wird Delbrück-Streuung genannt. Die Streuung von realen Photonen an realen Photonen wird Halpern-Streuung genannt. Letzterer Effekt wurde auch bereits festgehalten, aber noch nicht eindeutig nachgewiesen. Das vorgeschlagene Experiment soll am XFEL durchgeführt werden, wo Elektronen im Beschleuniger leicht abgelenkt werden, um Röntgenstrahlung zu erzeugen. [1], [2]

Ein Hochenergie Laser wird dann auf das Röntgenphoton gezielt und soll dessen Polarisation ändern. Ein Polarisationsfilter sperrt alle nicht-polarisierten Röntgenstrahlen und lässt alle polarisierten durch. Allerdings ist das Ereignis so selten, dass ein zweiter Laser verwendet wird, um den Röntgenstrahl auch in Fällen der Wechselwirkung abzulenken. So wird die Wahrscheinlichkeit erhöht, die Messungen nicht fehlzuinterpretieren. Wenn alles so funktioniert, wie vorhergesagt, kann mit diesem Experiment der Einfluss virtueller Teilchen auf Photonen gezeigt werden, womit die Realität virtueller Teilchen belegt würde. Experimente sollen nach 2024 beginnen.

Teilchenbeschleuniger:

Weitere Indizien dafür, dass virtuelle Teilchen tatsächlich Teilchen sind, geben uns Experimente der Teilchenphysik. Wenn Protonen aufeinander geschossen werden, würde man als Physiker womöglich als erstes erwarten, dass ihre Bestandteile, nämlich Gluonen und Quarks zu beobachten sind. Tatsächlich sind jedoch viele verschiedene Teilchensorten, was Teilchenphysiker als „Teilchenzoo“ bezeichnet haben, zu beobachten. Auch wenn virtuelle Teilchen niemals an sich gemessen werden können, kann nur durch sie das reale Verhalten messbarer Teilchen in vielen Experimenten vorhergesagt werden. [3]

Quantenchromodynamik schließt S-Matrix Ansätze aus:

Ein alternativer Ansatz zur Erklärung von Quantenphänomenen, den wir später etwas genauer besprechen werden und der versucht, ohne ein Vakuumfeld auszukommen, das in der Quantenelektrodynamik notwendig ist, nennt sich S-Matrix Ansatz oder Quellentheorie. Dieser Ansatz wurde von Schwinger entwickelt und liefert unter Einhaltung bestimmter Operatoranordnungen dieselben Ergebnisse wie die Quantenelektrodynamik, obwohl

hier kein Vakuumfeld und somit keine Vakuumfluktuationen angenommen werden müssen. Das hört sich erstmal vielversprechend an, wenn man die Existenz virtueller Teilchen widerlegen will, aber so gut das Verfahren auch für die Quantenelektrodynamik funktioniert, kollabiert es, wenn wir die Quantenchromodynamik betrachten. Die Quantenchromodynamik wird zur Beschreibung der starken Wechselwirkung in Atomkernen verwendet, wo Gluonen und Quarks wechselwirken, um Protonen und Neutronen zusammenzuhalten. In dieser Theorie gibt es sogenannte Farbladungen, die zu den klassischen elektrischen Ladungen hinzukommen. So gibt es rote, grüne und blaue Quarks und deren Antiteilchen, die anti-rot, anti-grün und anti-blau sind. Farbladungen können allerdings nicht isoliert vorkommen, sondern existieren in einem Confinement (Farb-Einschluss). Die messbaren Teilchenkonfigurationen sind deshalb hauptsächlich Mesonen (Quark und Antiquark) und Baryonen (drei Quarks). Der S-Matrix Ansatz kann mit solchen Einschlüssen nicht umgehen, weshalb er in der Quantenchromodynamik fallen gelassen wurde. Es sollte daher angenommen werden, dass die Quellentheorie zwar quantenelektrodynamische Beobachtungen beschreiben kann, aber keine fundamentale Theorie ist, die beschreibt, was wirklich vor sich geht. Ansonsten sollte sie auch in anderen Bereichen der Physik erfolgreich eingesetzt werden können. Der Ansatz virtueller Teilchen kann jedoch in der Quantenchromodynamik erfolgreich eingesetzt werden, weshalb dieser noch nicht als fundamentale Theorie falsifiziert wurde.

[4]

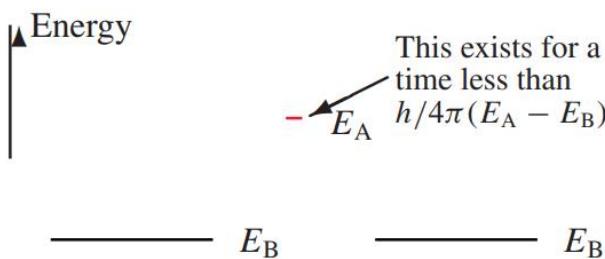
Virtuelle Teilchen prognostizierten Pionen:

Wenn wir uns tatsächlich vorstellen, dass virtuelle Teilchen existieren, dann ist die Konsequenz ihrer Existenz, dass reale Teilchen für sehr kurze nicht messbare Zeitintervalle höhere Energien annehmen können. Wenn man einen Energiezustand E_A und einen Zustand E_B misst, dann ist das Unterscheidungskriterium, dass der Fehler in der Messung $\Delta E \leq E_A - E_B$ ist, denn

wenn der Fehler ΔE größer ist, würde der Fehlerbalken bei einer Messung von E_A über den Wert von E_B hinausragen, weshalb E_B ebenfalls gemessen worden sein könnte. Es wird dann unmöglich zu sagen, welche der beiden Energiewerte tatsächlich gemessen wurde. Die Heisenbergsche Unschärferelation für die Energie-Zeit-Uncertainty besagt nun $\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} = \frac{\hbar}{4\pi}$, sodass

$$\Delta t \geq \frac{\hbar}{4\pi(E_A - E_B)},$$

wobei $\hbar = \frac{h}{2\pi}$.



Wenn ein Teilchen auf dem Energieniveau E_A für ein kürzeres Zeitintervall als $\frac{h}{4\pi(E_A - E_B)}$ verharrt, werden wir diese Abweichung niemals messen. Dieser kurz existierende Energiezustand ist allerdings kein virtuelles Teilchen, sondern existiert für ein reales Teilchen. Es ist nur so, dass dieser Energiezustand nicht gemessen werden kann und durch virtuelle Teilchen erzeugt wurde. Wenn es sich aber um ein reales Teilchen handelt, das diesen Zustand annehmen soll, dann ist mit dem Energiezustand auch einer Energie von $\Delta E = mc^2$ verbunden, sodass

$$\Delta t \geq \frac{\hbar}{4\pi mc^2}.$$

Nehmen wir an, das reale Teilchen im Energiezustand E_A ist ein Photon, dann kann es sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen. Damit kann es in seiner begrenzten Lebensdauer einen Weg $R = c\Delta t = \frac{h}{4\pi mc}$ zurücklegen. Dieses Ergebnis gibt uns den maximalen Wechselwirkungsradius eines solchen Teilchens an. Für die starke Wechselwirkung in Atomkernen wurde der Wechselwirkungsbereich auf etwa $10^{-15} m$ bestimmt, sodass $m \approx 0,18 \cdot 10^{-27} kg$. Und man behalte im Hinterkopf, dass wir hier über reale Teilchen,

nicht virtuelle Teilchen reden. Diese Teilchen mit einer Masse von $0,18 \cdot 10^{-27} kg$ sollten durch Vakuumfluktuationen entstehen und die als Überträger der starken Wechselwirkung dienen. [5]

Tatsächlich beobachtete man 1947 erstmals ein Teilchen, das etwa dieser Masse entsprach ($\sim 0,12 \cdot 10^{-27} kg$) und tatsächlich genau die Eigenschaften hatte, die man erwarten würde. Man nannte es Pion, wobei es verschiedene Pionen (π^+, π^-, π^0) gibt. Es hat eine sehr kurze Lebensdauer und existiert in Atomkernen, wo es die starke Kernkraft vermittelt, um beispielsweise Protonen zusammenzuhalten. Es ist zwar heute klar, dass Protonen nicht aus Pionen, sondern aus Quarks bestehen, aber für bestimmte Energiebereiche sind Pionen-Wechselwirkungen eine sehr gute Approximation und sind die dominanten Teilchen, die Nukleonen zusammenhalten.

Ein anderer Effekt des Vakuums auf reale Teilchen ist die sogenannte Vakuumpolarisation.

Vakuumpolarisation:

Vakuumpolarisation basiert darauf, dass sich tatsächlich im Vakuum positiv und negativ geladene Teilchen bilden können, die sich direkt wieder auslöschen. Durch die Existenz ihrer Ladung wird das Vakuum jedoch kurzzeitig polarisiert, was sich in Experimenten zeigen sollte. Wenn eine reale Ladung in ein Vakuum eingeführt wird, bildet sich eine Wolke aus Vakuumfluktuationen um die Ladung herum. Wenn wir davon ausgehen, dass diese Vakuumfluktuationen auch aus Teilchen-Antiteilchen Paaren bestehen, dann sind die Fluktuationen selbst eine Art Dipol, der sich entlang der Feldlinien der realen Ladung ausrichten wird. Das Vakuum hat sich polarisiert. Man kann zeigen, dass Vakuumfluktuationen auf diese Weise eine abschirmende Wirkung haben und Messwerte verändern, wie in der Lamb-Verschiebung nachgewiesen werden konnte.

[6]

Unruh-Strahlung:

William Unruh entwickelte 1976 mit Hilfe von Vorarbeiten durch Wolfgang Rindler das Konzept der Unruh-Strahlung. Er betrachtete ein gleichmäßig beschleunigtes Bezugssystem. Man kann sich die gleichmäßige Beschleunigung eines sogenannten Rindler-Raumschiffs vorstellen, die eine Hyperbel im Raumzeitdiagramm darstellt. Dies sei kurz vereinfacht gezeigt, indem

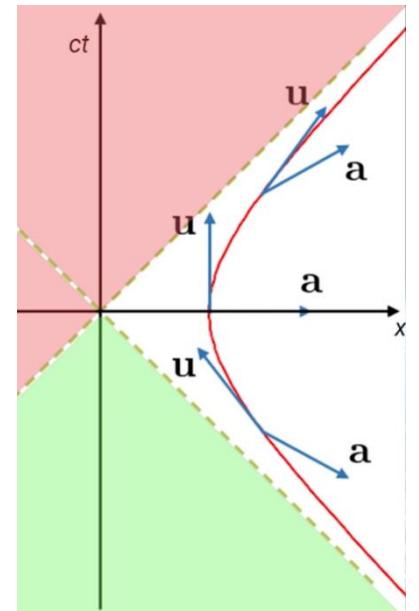
$$\frac{d(\gamma \cdot v)}{dt} = g,$$

wobei $\gamma = \sqrt{1 + \left(\frac{p}{mc}\right)^2}$ der bekannte Lorentz-Faktor der speziellen Relativitätstheorie ist. Unter linearen Bedingungen erhält man

$$\begin{aligned} \int g dt &= \int d(\gamma \cdot v) = g \cdot t = \gamma \cdot v \\ \Rightarrow v &= \frac{g \cdot t}{\sqrt{1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{g \cdot t}{\sqrt{1 + \left(\frac{gt}{c}\right)^2}} = \frac{dx}{dt}. \end{aligned}$$

Nach Trennung der Variablen und Integration erhält man die Hyperbel

$$x(t) = \frac{c^2}{g} \sqrt{1 + \left(\frac{gt}{c}\right)^2}.$$

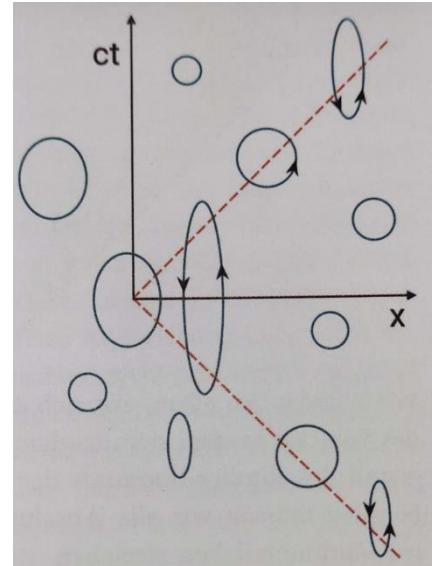


Wenn sich eine Informationsquelle im Koordinatenursprung befindet, kann sich Information maximal mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten, weshalb der weiße Bereich im Bild niemals die Information erhalten kann. Das Rindler Raumschiff wird niemals von der Informationsquelle erfahren können. Obwohl sich das Raumschiff nicht mit Lichtgeschwindigkeit bewegt, entkommt es durch einen gewissen Vorsprung dem Licht, das ihm mit Lichtgeschwindigkeit folgt. Es bildet sich effektiv ein Rindler-Horizont. Ähnlich wie am Ereignishorizont eines Schwarzen Lochs, wo effektiv Hawking-Strahlung emittiert wird, indem virtuelle Teilchen-Antiteilchen-Paare aufgetrennt wer-

den, entstehen auch für die beschleunigten Beobachter im Rindler-Raumschiff reale Teilchen aus Vakuumfluktuationen. Dadurch nimmt das Vakuum eine Temperatur

$$T = \frac{\hbar}{2\pi ck} a$$

an, wobei a die Beschleunigung des Raumschiffs ist. Im Bild links dargestellt ist eine Verbildlichung des Effekts. Virtuelle Teilchen sind für den unbewegten Beobachter wie Schleifen, die entstehen und wieder vergehen. Für den beschleunigten Beobachter können sich die Schleifen am Rindler-Horizont jedoch nicht mehr schließen, sodass sie dem Beobachter im Rindler-Raumschiff wie reale Teilchen vorkommen. Aus virtuellen Teilchen sind reale Teilchen geworden. Dieser Effekt sowie die erwähnte Hawking-Strahlung, sollten als klares Indiz dafür angesehen werden, dass virtuelle Teilchen tatsächlich existieren, denn wie sonst könnten sie in reale Teilchen umgewandelt werden.



Es sei jedoch erwähnt, dass die Messung des Unruh-Effekts derzeit und auf absehbare Zeit unmöglich ist, da für eine Temperaturerhöhung um 1 Kelvin bereits eine Beschleunigung von relativistische Geschwindigkeiten in weniger als einem Mikrometer erforderlich wäre. Die beste Möglichkeit, den Effekt nachzuweisen, ist daher an Schwarzen Löchern. [7]

Nützlichkeit:

In der Literatur werden einige weitere Argumente für die Existenz von virtuellen Teilchen angeführt:

Gregg Jaeger argumentiert beispielsweise [8]

„dass die einflussreichsten Argumente gegen die Existenz virtueller Teilchen, aber nicht anderer Teilchen, scheitern, weil sie entweder Argumente gegen die Existenz von Teilchen im Allgemeinen sind, anstatt virtueller Teilchen per se, oder abhängig von der Anwendung klassischer Intuitionen auf Quantensysteme sind, oder einfach nicht relevant sind. Mehrere Gründe werden dann angeführt, um virtuelle Teilchen als real zu betrachten, wie ihr beschreibender, erklärender und prognostischer Wert, und eine klarere Charakterisierung der Virtualität - eine in Bezug auf Zwischenzustände -, die auch über die Störungstheorie hinaus gilt, wird vorgestellt. Es wird auch darauf hingewiesen, dass sie in der Rolle der Kraftvermittler dazu dienen, eine Fernwirkung zwischen interagierenden Teilchen zu verhindern. Aus diesen Gründen wird geschlussfolgert, dass virtuelle Teilchen genauso real sind wie andere Quantenteilchen.“

Auf einfachste Weise wäre zu formulieren, dass Teilchen irgendwie interagieren müssen. Es scheint ausgeschlossen, dass Prozesse ohne irgendeinen kausalen Prozess Einfluss aufeinander haben. Wenn ein Elektron auf ein anderes Elektron trifft, muss irgendein Prozess ablaufen, sodass die Elektronen sich abstoßen und so verhalten, wie in Experimenten beobachtet. Die Elektronen müssen sich irgendwie gegenseitig spüren, da sie sonst nicht ihr Verhalten ändern würden. Dieser Prozess, der in der Quantenelektrodynamik durch Feynman-Propagatoren dargestellt wird, wird als virtuelles Teilchen bezeichnet. Auch wenn es sich womöglich nicht um ein Teilchen handelt, so wie man sich normalerweise Teilchen vorstellt, verwenden wir für diesen Prozess den Namen „virtuelles Teilchen“.

Eine weitere experimentelle Erwägung, virtuelle Photonen nachzuweisen, bietet sich über den Aharonov-Bohm Effekt. [9]

Aber man kann zeigen, dass eine semi-klassische Betrachtung des Aharonov-Bohm Effekts die gleichen theoretischen Vorhersagen liefert wie eine quantenelektrodynamische Analyse. Es scheint daher allgemein schwierig zu sein, in der Festkörperphysik virtuelle Teilchen nachzuweisen, da klassische Me-

thoden meist die gleichen Ergebnisse liefern, wie wir auch beim Casimir Effekt sehen werden. Dennoch ist es eine Schwäche anderer Theorien, Wechselwirkungen von Teilchen ohne echte Wechselwirkung erklären zu müssen, während virtuelle Teilchen diesen Aspekt der Wechselwirkung erklären können.

Dynamischer Casimir-Effekt:

[10]

[11]

Evaneszenz:

Als nächsten wenden wir uns dem theoretischen Modell zu und werden daraus die Realität virtueller Teilchen bekräftigen. Lange Zeit hielt man evaneszente Wellen für ein mathematisches Werkzeug ohne physikalische Bedeutung. Es zeigte sich jedoch, dass man durch Platzierung eines optisch dichten Materials hinter das optisch dünnere Material, in welchem Totalreflexion auftritt, die evaneszente Welle eingefangen werden kann und dann doch transmittiert wird. Dieser Effekt wurde auch optischer Tunneleffekt genannt. Dabei wird eine evaneszente Welle, also ein rein virtuelles Phänomen, in eine reale Welle umgewandelt. Nimtz listet verschiedene Eigenschaften evaneszenter Wellen, die mit virtuellen Teilchen übereinstimmen:

1. Evaneszente Moden mit einer imaginären Wellenzahl k verletzen die Einstein-Beziehung, d.h. $W^2 \neq (\hbar k)^2 c^2$, wobei W , k und c die Gesamtenergie, die Wellenzahl und die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum sind.
2. Ein evaneszentes Feld interagiert nicht mit realen Feldern aufgrund des Brechungsindexunterschieds. Felder können nur Energie übertragen, wenn für die Reflexion $R < 1$ gilt. Wenn n_1 den imaginären Brechungsindex einer evaneszenten Region und n_2 den Brechungsindex

des dielektrischen Mediums, das einen Empfänger repräsentiert, darstellt, dann entspricht das Quadrat des Betrags $R = |r|^2 = \frac{|n_2 - n_1|^2}{|n_1 + n_2|^2}$ und es findet eine totale Reflexion statt. Dieses Ergebnis ähnelt dem von freien Ladungsträgern. Unterhalb der Plasmawellenfrequenz werden beispielsweise Radiowellen vollständig von der Ionosphäre reflektiert.

3. Um ein Teilchen im exponentiellen Schwanz der Tunnelwahrscheinlichkeit zu beobachten, muss es innerhalb einer Entfernung von ungefähr $\Delta x \approx \frac{1}{\kappa} = 1/ik$ lokalisiert sein. Daher muss sein Impuls Δp unsicher sein, sodass $\Delta p > \frac{\hbar}{\Delta x} \approx \hbar\kappa = 2m(U_0 - W_{kin})$. Das Teilchen mit der Energie W_{kin} kann sich daher nur in der nicht-klassischen Region befinden, wenn ihm eine Energie $\Delta W = U_0 - W_{kin}$ gegeben wird, die es in den klassisch erlaubten Bereich erhöht.
4. Nicht-Lokalität tritt auf, wenn $t(T) = t(R)$ gilt, d.h. die Barrierenreflexions- und Transmissionszeiten von Signalen sind gleich.

Nimtz argumentiert für die Existenz von virtuellen Teilchen, da alle Eigenschaften virtueller Photonen aus der Quantenelekrodynamik bereits durch verschiedene Experimente mit evaneszenten Moden nachgewiesen wurden.

[12]

[13]

[14]

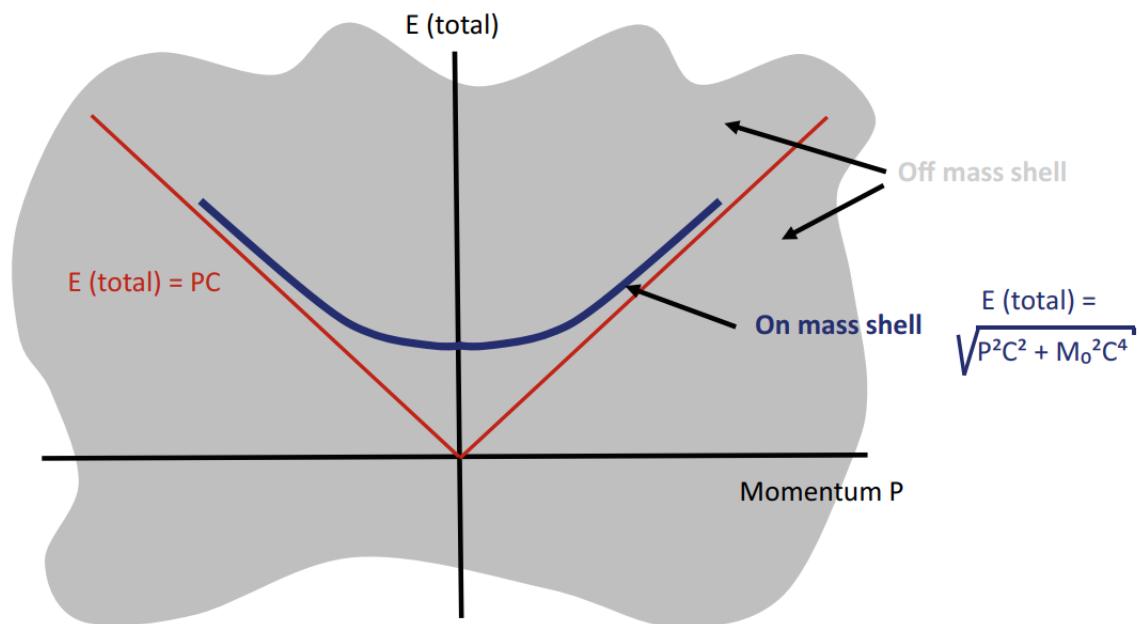
Verstärkung von Quantenfluktuationen

[15]

[16]

...

Wenn nun im Vakuum virtuelle Teilchen existieren, dann ist die Energie des Vakuums nie wirklich Null. Virtuelle Teilchen gehorchen schließlich nicht der Energie-Impuls Beziehung, $E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$ sondern sie halten sich in einem normalerweise klassisch unmöglichen Zustand negativer kinetischer Energie auf. Wenn sich aber Gesamtenergie zu $E = T + V$ ergibt, kann die potenzielle Energie mithilfe virtueller Teilchen größer werden als die Gesamtenergie E eigentlich erlaubt. Dies ist eine Folge der Heisenbergschen Unschärferelation, weil T und V unscharf sind und Teilchen daher keine exakte kinetische oder potenzielle Energie besitzen. In der Quantenfeldtheorie nennt man diese Eigenschaft von virtuellen Teilchen off-Shell, da sie sich nicht auf der Masseschale befinden, die von der Energie-Impuls Beziehung vorgegeben wird. Sie können im Gegensatz zu realen Photonen also eine Ruhemasse besitzen.



[17]

Theorie des Quantenvakuums

Plancksche Nullpunktenergie:

Die erste historische Formulierung der Nullpunktenergie resultierte aus den Forschungen zu Schwarzen Körpern bzw. planckschen Strahler durch Max Planck. Das Schwarzkörper Problem ist in der Quantenmechanik sehr bekannt, da es das Feld praktisch begründete. Aber wir wollen es hier doch noch einmal herleiten.

Kirchhoffs Strahlungsgesetz:

1860 untersuchte Kirchhoff die allgemeine Beziehung zwischen der emittierenden und absorbierenden Stärke von Körpern bei konstanter Temperatur. Es wird ein Hohlraumstrahler im thermischen Gleichgewicht mit Strahlung konstanter Frequenz bestrahlt. Der Körper absorbiert einen Teil dieser Strahlung. Um das thermische Gleichgewicht zu erhalten, muss er die gesamte absorbierte Energiemenge bei denselben Frequenzen wieder ausstrahlen. Der Absorptionsgrad α'_v gibt den Bruchteil der spektralen Bestrahlungsdichte an, der absorbiert wird. Wenn ein Körper nun bestrahlt wird, sendet der Körper eine Strahlungsleistung, die gleichgroß ist wie die Strahlungsleistung, die auf ihn einwirkt. Die ausgesendete Strahlungsleistung nennt sich spektrale Strahldichte $L_{\Omega,v}$ und die auf den Körper treffende Strahlungsleistung nennt sich spektrale Bestrahlungsdichte $K_{\Omega,v}$. Es gilt also

$$L_{\Omega,v} = K_{\Omega,v} \Leftrightarrow \alpha'_v L_{\Omega,v} = \alpha'_v K_{\Omega,v}.$$

Für einen idealen Strahler gilt $L_{\Omega,v} = L_{\Omega,v}^0$. Der spektrale Emissionsgrad ist durch $\varepsilon'_v = \frac{L_{\Omega,v}}{L_{\Omega,v}^0}$ gegeben, sodass dieser für ideale Strahler 1 wird. Wir gehen nun von einem idealen Strahler aus, weshalb

$$\alpha'_v L_{\Omega,v}^0 = \alpha'_v K_{\Omega,v}.$$

$\alpha'_v K_{\Omega,v}$ ist die absorbierte Strahlungsleistung, die im thermischen Gleichgewicht der emittierten Strahlungsleistung $L_{\Omega,v}$ entsprechen muss, sodass

$$L_{\Omega,v} = \alpha'_v L_{\Omega,v}^0 \Leftrightarrow \alpha'_v = \frac{L_{\Omega,v}}{L_{\Omega,v}^0}.$$

Man sieht daher auch, dass im thermischen Gleichgewicht $\alpha'_v = \varepsilon'_v$ gilt. Da ein Körper nicht mehr absorbieren kann als ihm gegeben wird, muss $\alpha'_v \leq 1$ sein, womit der ideale Hohlraumstrahler bzw. der Schwarze Körper zum idealen Referenzstrahler wurde. Wenn man nun die Temperatur und Frequenz variiert, ergibt sich eine universelle Funktion $F(v, T)$ für das Strahlungsspektrum schwarzer Körper.

Stefan-Boltzmann Gesetz:

Einen Schritt zur Lösung für diese Funktion machte Boltzmann 1884, als er festhielt, dass isotrope Bestrahlung einen Strahlungsdruck $\frac{u}{3}$ auf perfekt reflektierende Oberflächen ausübt, wobei u die Energiedichte ist. Diese Beziehung folgt aus der kinetischen Gastheorie. In geschlossenen Systemen bei konstanter Temperatur gilt aus der Thermodynamik bekannt

$$dU = \delta Q + \delta W \Leftrightarrow \delta Q = dU + pdV.$$

Wenn wir nun einen Strahlungsdruck auf einen Kolben wirken lassen, expandiert die Kammer, sodass Wärme generiert werden muss, damit die Temperatur konstant bleibt. Die Energiedichte kann angegeben werden durch $u = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T$, da $U = u(T)V$, was sich folgendermaßen zeigen lässt:

Wir wissen, dass $U(T, V) = u(T)V$, wobei $u(T)$ die Energiedichte nur von der Temperatur abhängt. Somit folgt

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \frac{\partial(u(T) \cdot V)}{\partial V} = \frac{\partial u(T)}{\partial V}V + \frac{\partial V}{\partial V}u(T) = 0 \cdot V + 1 \cdot u(T) = u(T).$$

Der erste Term $\frac{\partial u(T)}{\partial V} = 0$ wird Null, gerade weil $u(T)$ nicht vom Volumen abhängt. Als nächstes nutzen wir die Definition der Entropie $dS = \frac{\delta Q}{T} \Leftrightarrow \delta Q = TdS$, sodass

$$TdS = dU + pdV \Leftrightarrow T \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p \left(\frac{\partial V}{\partial V}\right)_T,$$

wobei wir lediglich alle Terme nach der Volumenänderung ableiten. Das Volumen der Kammer wird durch das Licht expandiert, es ändert sich jedoch nichts an der Temperatur. Aus den Maxwell-Beziehungen folgt $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$, sodass

$$T \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p = u(T) + p.$$

Der Strahlungsdruck kann nun durch die von Maxwell und Boltzmann ermittelte Beziehung $p = \frac{u}{3}$ ersetzt werden:

$$T \left(\frac{\partial \left(\frac{u}{3} \right)}{\partial T} \right)_V = \frac{T}{3} \left(\frac{\partial (u)}{\partial T} \right)_V u + \frac{u}{3} = \frac{4}{3} u.$$

Wir multiplizieren beide Seiten mit 3 und erhalten

$$\begin{aligned} T \left(\frac{\partial (u)}{\partial T} \right)_V &= T \frac{du}{dT} = 4u \Leftrightarrow \frac{dT}{T} = 4 \frac{du}{u} \Rightarrow \int 4 \frac{du}{u} = \int \frac{dT}{T} \Rightarrow \ln(u) \\ &= 4 \ln(T) + c. \end{aligned}$$

Durch Exponenzieren erhält man

$$e^{\ln(u)} = u = e^{(4 \ln(T) + c)} = (e^{\ln(T)})^4 e^c = bT^4,$$

wobei $b = e^c$. Das Resultat ist das Stefan-Boltzmann Gesetz $u = bT^4$.

Rayleigh-Jeans Gesetz:

Als nächstes betrachten wir ein klassisches strahlendes Elektron, das durch die Larmorformel beschrieben werden kann. Die klassische Formel ist $\frac{dE}{dt} = \frac{e^2 a^2}{6\pi c^3 \epsilon_0}$. Zur Herleitung, siehe [18].

Aus dem SI-Einheiten System ins cgs-System übersetzt, lautet die Formel $P = \frac{dE}{dt} = \frac{2}{3} \frac{e^2 a^2}{c^3}$. Nehmen wir an, dass Elektronen in Atomen durch eine elastische Rückstellkraft um den Atomkern oszillieren, ist $a = -\omega_0^2 x$ die Beschleuni-

gung des Elektrons und $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ die Umlauffrequenz. In die Larmorformel eingesetzt ergibt sich

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2}{3} \frac{e^2(-\omega_0^2 x)^2}{c^3} = \frac{2}{3} \frac{e^2 (4\pi^2 \nu_0^2 x)^2}{c^3} = \frac{32}{3} \frac{e^2 \pi^4 \nu_0^4 x^2}{c^3}.$$

Das Virialtheorem der klassischen Mechanik schreibt vor, dass in harmonischen Oszillatoren die durchschnittliche potenzielle Energie gleich der durchschnittlichen kinetischen Energie. Die potenzielle Energie ist gegeben durch $V = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$, sodass die innere Gesamtenergie $U = T + V = 2T = m\omega_0^2 x^2$ ist. Im Gleichgewicht entspricht die ausgestrahlte Energie von Elektronen der aufgenommenen Energie, die durch $\frac{dE}{dt} = \frac{\pi e^2}{3m} \rho(\nu_0)$ beschrieben wird (Herleitung siehe Peter Milonni (The Quantum Vacuum, Appendix A)). Somit gilt

$$\frac{\pi e^2}{3m} \rho(\nu_0) = \frac{32}{3} \frac{e^2 \pi^4 \nu_0^4 x^2}{c^3} \Leftrightarrow \rho(\nu_0) = \frac{8\pi\nu_0^2}{c^3} m\omega_0^2 x^2 = \frac{8\pi\nu_0^2}{c^3} U.$$

Das Äquipartitionstheorem der Thermodynamik verlangt, dass $U = kT$ im thermischen Gleichgewicht, sodass die Rayleigh-Jeans Verteilung

$$\rho(\nu_0) = \left(\frac{8\pi\nu_0^2}{c^3} \right) kT$$

folgt oder allgemein $\rho(\nu) = \left(\frac{8\pi\nu^2}{c^3} \right) kT$. Problem dieser Theorien war jedoch, dass die Integrale der Energiedichte über die Frequenz divergierten, was als Ultraviolett-Katastrophe bekannt wurde. Während das Rayleigh-Jeans Gesetz für große Wellenlängen eine gute Annäherung lieferte, versagte es bei kleinen Wellenlänge. Umgekehrt verhielt es sich mit einem von Wilhelm Wien festgestellten Zusammenhang, der bei großen Wellenlängen von den realen Messungen abwich, während es für kleinere Wellenlängen gute Näherungen lieferte. Die Wienverteilung kann mit

$$\rho(\lambda) = \alpha \lambda^{-5} e^{-\beta/\lambda T}$$
 angegeben werden.

Kommen wir nun zu Plancks Theorie.

Plancks erste Theorie:

Ein Resultat, das Planck in seiner Untersuchung von Hohlraumstrahlern erbracht hatte, war die Abhängigkeit der Entropie von der Durchschnittsenergie U in elementaren Radiatoren, was wir heute als Moleküle bezeichnen würden:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = -\frac{A}{U'}$$

wobei A eine Konstante jedes spezifischen Moleküls ist. Es folgt bei der bekannten Relation $\frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T}$ und Separation der Variablen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial U} \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right) &= \frac{\partial}{\partial U} \left(\frac{1}{T} \right) = -\frac{A}{U} \Leftrightarrow \frac{d}{dU} \left(\frac{1}{-AT} \right) = \frac{1}{U} \Leftrightarrow \frac{1}{-AT} = \frac{1}{U} dU \\ &\Rightarrow \int \frac{1}{U} dU = \ln(U) = \int \frac{1}{-AT} dU = \frac{1}{-AT} + c \Rightarrow U = e^{-\frac{1}{AT} + c} \\ &= e^{-\frac{1}{AT}} e^c = B e^{-\frac{1}{AT}}. \end{aligned}$$

Wenn wir dies ins Rayleigh-Jeans Gesetz einsetzen, erhalten wir $\rho(v) = \left(\frac{8\pi v^2}{c^3}\right) B e^{-\frac{1}{AT}} = f(v) e^{-\frac{1}{AT}}$, wobei $f(v)$ irgendeine Funktion von v ist. Man kann nun $f(v)$ so wählen, dass die Theorie mit dem Wienschen Gesetz übereinstimmt. Das Problem war nur, dass das Wiensche Gesetz ebenfalls fehlerhaft war. Nachdem verschiedene Abweichungen vom Wienschen Gesetz gemessen wurden, entwarf Planck eine Anpassung seiner bisherigen Theorie. Er schlug eine Interpolation $\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = -\frac{A}{U(B+U)}$ vor. Aus dieser ergibt sich mithilfe der Anwendung von $\frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T}$ und dem Wienschen Verschiebungsgesetz

$$\rho(\lambda) = \frac{\alpha \lambda^{-5}}{e^{\beta/\lambda T} - 1}.$$

Plancks zweite Theorie:

Moderner Beweis des Planckschen Strahlungsgesetzes:

Einstein und Stern's Nullpunktenergie:

Einstein-Hopf Modell:

Einstein und Sterns Nullpunktenergie:

Fluktuationen:

A und B Koeffizienten und spontane Emission:

Harmonischer Oszillator:

Die Hamilton-Funktion des harmonischen Oszillators in der Quantenmechanik entspricht den klassischen Fall

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2q^2,$$

wobei q und p die Orts- und Impulsoperatoren im Hilbertraum sind. Es gelten nach Korrespondenzprinzip die Heisenberggleichungen

$$\begin{aligned}\dot{q} &= -\frac{i}{\hbar}[q, H] \\ \dot{p} &= -\frac{i}{\hbar}[p, H]\end{aligned}$$

entsprechend den Poisson Ausdrücken $\dot{q} = \{q, H\} = -\frac{\partial H}{\partial p}$, $\dot{p} = \{p, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q}$.

Man definiert den nicht-Hermiteschen Leiteroperator

$$a = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p - im\omega q)$$

und den adjungierten Leiteroperator

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p + im\omega q)$$

gerade so, dass sie die Eigenschaft $[a, a^\dagger] = 1$ haben und in den Hamilton-Operator eingesetzt $H = \frac{1}{2}\hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$ ergeben. Dies kann auf unterschiedliche Weise erzielt werden, weshalb man häufig auch eine andere Definition der Leiteroperatoren durch

$$\begin{aligned}a &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}q + i\frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}p, \\ a^\dagger &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}q - i\frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}p\end{aligned}$$

findet. Wir wollen kurz zeigen, dass diese Definitionen die gewünschten Beziehungen erfüllen:

$$\begin{aligned}
a^\dagger a &= \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} q - i \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}} p \right) \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} q + i \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}} p \right) \\
&= \frac{m\omega}{2\hbar} q^2 + \frac{p^2}{m\hbar\omega} + \frac{i}{2\hbar} (qp - pq) \\
&= \frac{1}{\hbar\omega} \left[\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 + \frac{i\omega}{2} [q, p] \right] = \frac{1}{\hbar\omega} \left[H + \frac{i\omega}{2} (i\hbar) \right] \\
&= \frac{1}{\hbar\omega} \left[H - \frac{\hbar\omega}{2} \right] \Rightarrow H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[a, a^\dagger] &= aa^\dagger - a^\dagger a \\
&= \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} q + i \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}} p \right) \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} q - i \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}} p \right) \\
&\quad - \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} q - i \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}} p \right) \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} q + i \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}} p \right) = \frac{i}{\hbar} (pq - qp) \\
&= -\frac{i}{\hbar} [q, p] = -\frac{i}{\hbar} i\hbar = 1.
\end{aligned}$$

Die Eigenwerte des harmonischen Operators ergeben sich aus dem Besetzungszahloperator $N = a^\dagger a$, wobei die Eigenzustände $|n\rangle$ und Eigenwerte n durch die Beziehung

$$N|n\rangle = n|n\rangle$$

berechnet werden.

Manipulation von Nullpunkt-Schwingungen im harmonischen Oszillator:

[19]

Feldmoden:

Quantisierung des elektromagnetischen Felds:

Feld im freien Raum:

Notwendigkeit des Vakuumfeldes:

Milonni hat gezeigt, dass das Vakuumfeld eine Notwendigkeit in der Quantenfeldtheorie ist, womit Ansätze, die das Vakuumfeld ausklammern wollen, ultimativ höchstens gute Beschreibungen, aber nicht fundamentale Erklärungen physikalischer Phänomene liefern können. [20]

Die Vakuumenergie über alle möglichen Schwingungsmoden stellen wir wieder durch $\sum_k \frac{\hbar\omega_k}{2}$ dar, wobei die Summe für große Volumen übergeht zu

$$\sum_k (\dots) \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \iiint dk_x dk_y dk_z (\dots).$$

Dies ist möglich, weil die Zustände im k-Raum bei großen Volumen sehr dicht beieinander liegen [21]. $\frac{\hbar\omega_k}{2}$ benutzen wir als Zustandsdichte im Vakuum. Wir setzen ein und erhalten

$$\frac{1}{V} \sum_k \frac{\hbar\omega_k}{2} = \frac{2}{(2\pi)^3} \iiint d^3k \frac{\hbar\omega_k}{2},$$

wobei wir den Faktor 2 durch die zwei möglichen Spin-Ausrichtungen erhalten [22]. Flächen konstanter Energie bilden im k-Raum Kugeloberflächen, sodass

$$\frac{2}{(2\pi)^3} \iiint d^3k \frac{\hbar\omega_k}{2} = \frac{2}{(2\pi)^3} 4\pi k^2 \Delta k \frac{\hbar\omega_k}{2}.$$

$4\pi k^2$ ist die Kugeloberfläche mit Radius k und Δk die Dicke der Kugelfläche. Die Dicke lässt sich über alle k auch als $\int dk$ angeben, sodass

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \sum_k \frac{\hbar\omega_k}{2} &= \frac{2}{8\pi^3} 4\pi k^2 \int dk k^2 \frac{\hbar\omega_k}{2} = \frac{1}{\pi^2} \int dk k^2 \frac{\hbar\omega_k}{2} = \frac{1}{\pi^2} \int \frac{d\omega}{c} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{\hbar\omega_k}{2} \\ &= \frac{\hbar}{2\pi^2 c^3} \int d\omega \omega^3. \end{aligned}$$

Die Nullpunktenergiedichte in einem Frequenzbereich von ω_1 bis ω_2 ist dann

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega \rho_0(\omega) = \frac{\hbar}{8\pi^2 c^3} (\omega_2^4 - \omega_1^4),$$

sodass $\rho_0(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^3}$, was uns bereits unter Einsteins und Sterns Nullpunktenergie begegnet ist. Diese Energie ist bereits bei kleiner Bandbreite ziemlich groß. Im Bereich von 400 bis 700 nm Wellenlänge (optischer Bereich) erhält man etwa 22 Joule pro Kubikmeter Energiedichte.

Wir betrachten nun die Konsequenz des Vakuumfeldes auf einen oszillierenden linearen Dipol. Die entsprechende Hamiltonfunktion ist

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) + \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2 + H_F,$$

wo $H_F = \sum_k \frac{\hbar\omega_k}{2}$ der Wechselwirkungsterm mit dem Vakuum ist und $\frac{1}{2} m\omega^2 x^2$ die Oszillation. In der nicht-relativistischen Quantenmechanik gibt es zwei gängige Darstellungen, die ursprünglich von Schrödinger und Heisenberg entwickelt wurden. Im Schrödinger-Bild wird die Zeitentwicklung der Zustandsvektoren eines Systems betrachtet, während im Heisenberg-Bild die Zeitentwicklung der Operatoren betrachtet wird. Beide Bilder sind im Endeffekt äquivalent. Wir werden hier kurz das Heisenberg-Bild besprechen und nehmen an, dass uns bereits die Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle$$

bekannt ist. Es gilt $|\psi(t)\rangle = \sum_j a_j(t) |E_j\rangle$, wobei a_j Wahrscheinlichkeitsamplituden und E_j die Eigenenergien sind. Wir setzen ein und stellen um

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_j a_j(t) |E_j\rangle = -\frac{i}{\hbar} H \sum_j a_j(t) |E_j\rangle \Leftrightarrow \sum_j \left(\dot{a}_j(t) + a_j(t) \frac{i}{\hbar} H \right) |E_j\rangle = 0.$$

Daher muss für $E_j \neq 0$ folgen, dass

$$\dot{a}_j(t) + a_j(t) \frac{i}{\hbar} H = 0 \Leftrightarrow \frac{da_j}{dt} = -\frac{i}{\hbar} H a_j(t) \Rightarrow a_j(t) = a_j(0) e^{-\frac{i}{\hbar} H t}.$$

Somit gilt $|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} H t} |\psi(0)\rangle$ für die Zeitentwicklung des Kets. Für die Zeitentwicklung des Bras ergibt sich entsprechend $\langle \psi(t) | = \langle \psi(0) | \left(e^{-\frac{i}{\hbar} H t} \right)^\dagger = \langle \psi(0) | e^{\frac{i}{\hbar} H t}$, da der adjungierte Operator des Hamilton-Operators wieder der Hamilton-Operator ist und ansonsten einfach die komplexe Konjugation gebildet wird. Daraus lässt sich nun folgender Erwartungswert für einen beliebigen Operator A bilden:

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle = \left[\langle \psi(0) | e^{\frac{i}{\hbar} H t} \right] A \left[e^{-\frac{i}{\hbar} H t} | \psi(0) \rangle \right] \\ &= \langle \psi(0) | e^{\frac{i}{\hbar} H t} A e^{-\frac{i}{\hbar} H t} | \psi(0) \rangle = \langle \psi(0) | A(t) | \psi(0) \rangle. \end{aligned}$$

Dabei definiert man $A(t) = e^{\frac{i}{\hbar} H t} A e^{-\frac{i}{\hbar} H t}$, womit nun ein zeitabhängiger Operator gewonnen wurde, anstelle der zeitabhängigen Zustandsfunktionen. Damit sei gezeigt, dass das Schrödinger-Bild äquivalent zum Heisenberg-Bild ist.

Nun lässt sich aus dieser Darstellung auch eine sogenannte Heisenberggleichung ableiten. Dazu muss $\frac{dA(t)}{dt}$ bestimmt werden. Hierfür verwenden wir die Taylor-Entwicklung der Exponentialfunktion

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \Rightarrow e^{\frac{i}{\hbar} H t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{\hbar} H t \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{\hbar} t \right)^n H^n.$$

Dann ergibt sich für die zeitliche Ableitung

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} e^{\frac{i}{\hbar} H t} &= \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{\hbar} t \right)^n H^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H^n}{n!} \frac{d}{dt} \left(\frac{i}{\hbar} t \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H^n}{n!} n \frac{i}{\hbar} \left(\frac{i}{\hbar} t \right)^{n-1} \\
&= H \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H^{n-1}}{(n-1)!} \left(\frac{i}{\hbar} t \right)^{n-1} = H \frac{i}{\hbar} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H^n}{n!} \left(\frac{i}{\hbar} t \right)^n = H \frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} H t}.
\end{aligned}$$

Im Endeffekt erhält man das gleiche Ergebnis, wie beim Ableiten einer herkömmlichen e-Funktion. Wir haben jedoch eine formale Ableitung durchgeführt, um sicherzugehen, dass sich daran nichts ändern, obwohl wir es hier mit einem Operator H in Form einer Matrix zu tun haben. Gleichermassen gilt

$$\frac{d}{dt} e^{-\frac{i}{\hbar} H t} = -\frac{i}{\hbar} H e^{-\frac{i}{\hbar} H t}.$$

Somit folgt

$$\begin{aligned}
\frac{dA(t)}{dt} &= \left(\frac{d}{dt} e^{\frac{i}{\hbar} H t} \right) A e^{-\frac{i}{\hbar} H t} + e^{\frac{i}{\hbar} H t} A \left(\frac{d}{dt} e^{-\frac{i}{\hbar} H t} \right) \\
&= H \frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} H t} A e^{-\frac{i}{\hbar} H t} - e^{\frac{i}{\hbar} H t} A \frac{i}{\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar} H t} H = \frac{i}{\hbar} (H A(t) - A(t) H) \\
&= \frac{i}{\hbar} [H, A(t)] = -\frac{i}{\hbar} [A(t), H].
\end{aligned}$$

$[H, A(t)]$ ist der Kommutator. Wir können für $A(t)$ beliebige zeitabhängige Observablen einsetzen, sodass

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -\frac{i}{\hbar} [x(t), H] \\
\dot{p} &= -\frac{i}{\hbar} [p(t), H].
\end{aligned}$$

p sei hier der kanonische Impuls $p = m \dot{x} + \frac{e}{c} \vec{A}$, wobei \vec{A} hier das magnetische Vektorpotenzial ist. Für den oszillierende Dipol ergeben sich die Heisenberggleichungen

$$\begin{aligned}
-\frac{i}{\hbar} [x(t), H] &= \frac{1}{m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right), \\
-\frac{i}{\hbar} [p(t), H] &= \frac{1}{2m} \nabla \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 - m \omega_0^2 \vec{x}.
\end{aligned}$$

Hierbei nutzen wir die Hamilton-Gleichungen, die kurz für die klassische Hamiltonfunktion hergeleitet werden sollen. Es gelte $H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$, dann können wir nach dem Ort ableiten:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{dV}{dx} = -F = -\dot{p} \Leftrightarrow -\frac{\partial H}{\partial x} = \dot{p}.$$

Und nach dem Impuls abgeleitet gilt

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} = v = \dot{x}.$$

Dies lässt sich auf die generelle Hamiltonfunktion $H = \sum_i (p_i \dot{x}_i) - L$ verallgemeinern, wobei $L = T - V = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} d\dot{x}_i + \frac{\partial L}{\partial x_i} dx_i \right)$ die Langrangefunktion ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} \delta H &= \sum_i (p_i d\dot{x}_i + \dot{x}_i dp_i) - \delta L = \sum_i \left(p_i d\dot{x}_i + \dot{x}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} d\dot{x}_i - \frac{\partial L}{\partial x_i} dx_i \right) \\ &= \sum_i \left(p_i d\dot{x}_i + \dot{x}_i dp_i - p_i d\dot{x}_i - \frac{\partial L}{\partial x_i} dx_i \right) \\ &= \sum_i \left(\dot{x}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial x_i} dx_i \right), \end{aligned}$$

wobei wir $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = p_i$ verwendet haben. Das totale Differential der Hamiltonfunktion lautet

$$\delta H(x_i, p_i) = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial x_i} dx_i \right),$$

weshalb nach Koeffizientenvergleich

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{x}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial x_i} = -\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\dot{p}_i.$$

Dieses Resultat verwenden wir für den Dipol, sodass

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 + H_F \right) = \frac{1}{m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) = \dot{\vec{x}}$$

und

$$-\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\nabla \left(\frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 + H_F \right) = \frac{1}{2m} \nabla \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 - m \omega_0^2 \vec{x}$$

$$= \dot{\vec{p}}.$$

Mit den Identitäten der Vektoranalysis erhält man

$$\dot{\vec{p}} = \frac{1}{2m} \nabla \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 - m \omega_0^2 \vec{x} = -\frac{1}{m} \left[\left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \cdot \nabla \right] \left(-\frac{e}{c} \vec{A} \right) - \frac{1}{m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \times$$

$$\nabla \times \left(-\frac{e}{c} \vec{A} \right) - m \omega_0^2 \vec{x} = \frac{e}{c} (\vec{x} \cdot \nabla) \vec{A} + \frac{e}{c} (\vec{x} \times \vec{B}) - m \omega_0^2 \vec{x}. [20]$$

Dies ist der kanonische Impuls. Aus der Definition des kanonischen Impulses erhalten wir umgestellt und abgeleitet

$$m \ddot{\vec{x}} = \dot{\vec{p}} - \frac{e}{c} \dot{\vec{A}} = \frac{e}{c} (\vec{x} \cdot \nabla) \vec{A} + \frac{e}{c} (\vec{x} \times \vec{B}) - m \omega_0^2 \vec{x} - \frac{e}{c} \dot{\vec{A}}$$

$$= -\frac{e}{c} [\dot{\vec{A}} - (\vec{x} \cdot \nabla) \vec{A}] + \frac{e}{c} (\vec{x} \times \vec{B}) - m \omega_0^2 \vec{x}$$

$$= e \vec{E} + \frac{e}{c} (\vec{x} \times \vec{B}) - m \omega_0^2 \vec{x},$$

wobei $-\frac{\dot{\vec{A}} - (\vec{x} \cdot \nabla) \vec{A}}{c} = \vec{E}$. Dieses Ergebnis ist die Lorentz-Kraft auf oszillierende Dipole. Für nicht-relativistische Geschwindigkeiten kann die magnetische Kraft vernachlässigt werden, sodass

$$m \ddot{\vec{x}} + m \omega_0^2 \vec{x} \approx e \vec{E} \approx ie \sum_{k,\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{V}} [a_{k,\lambda}(t) - a_{k,\lambda}^\dagger(t)] \vec{e}_{k,\lambda},$$

da letzteres unsere elektrische Feldstärke im freien Raum war.

Die Heisenberggleichung dazu, die ebenfalls aus der Hamiltonfunktion gewonnen werden kann, ist nun

$$\begin{aligned}
\dot{a}_{k,\lambda} &= -\frac{i}{\hbar} [a_{k,\lambda}, H] \\
&= -i\omega a_{k,\lambda} - \frac{1}{i\hbar mc} \frac{e}{c} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega}} \vec{p} \vec{e}_{k,\lambda} \\
&\quad + \frac{1}{i\hbar mc^2} \frac{e^2}{c} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega}} \sum_{k',\lambda'} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega'}} \vec{e}_{k,\lambda} \vec{e}_{k',\lambda'} \\
&= -i\omega a_{k,\lambda} + \frac{i}{\hbar mc} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega}} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \vec{e}_{k,\lambda} \\
&= -i\omega a_{k,\lambda} + ie \sqrt{\frac{2\pi}{V\hbar\omega}} \dot{\vec{x}} \vec{e}_{k,\lambda}.
\end{aligned}$$

Die entsprechende formale Lösung der Feldgleichung ist

$$a_{k,\lambda}(t) = a_{k,\lambda}(0) \cdot e^{-i\omega t} + ie \sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega V}} \int_0^t dt' \vec{e}_{k,\lambda} \cdot \dot{\vec{x}}(t') e^{i\omega(t'-t)}.$$

Dieses Ergebnis oben eingesetzt, ergibt

$$\begin{aligned}
\ddot{\vec{x}} + \omega_0^2 \vec{x} &\approx \frac{ie}{m} \sum_{k,\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{V}} [a_{k,\lambda}(t) - a_{k,\lambda}^\dagger(t)] \vec{e}_{k,\lambda} \\
&= \frac{ie}{m} \sum_{k,\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{V}} \left[a_{k,\lambda}(0) \cdot e^{-i\omega t} + ie \sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega V}} \int_0^t dt' \vec{e}_{k,\lambda} \right. \\
&\quad \left. \cdot \dot{\vec{x}}(t') e^{i\omega(t'-t)} \right. \\
&\quad \left. - \left(a_{k,\lambda}^\dagger(0) \cdot e^{i\omega t} - ie \sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega V}} \int_0^t dt' \vec{e}_{k,\lambda} \cdot \dot{\vec{x}}(t') e^{i\omega(t'-t)} \right) \right] \vec{e}_{k,\lambda}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{ie}{m} \sum_{k,\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{V}} \left[(a_{k,\lambda}(0) \cdot e^{-i\omega t} - a_{k,\lambda}^\dagger(0) \cdot e^{i\omega t}) \right. \\
&\quad \left. + 2 \left(ie \sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega V}} \int_0^t dt' \vec{e}_{k,\lambda} \cdot \dot{\vec{x}}(t') e^{i\omega(t'-t)} \right) \right] \vec{e}_{k,\lambda} \\
&= \frac{ie}{m} \sum_{k,\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{V}} (a_{k,\lambda}(0) \cdot e^{-i\omega t} - a_{k,\lambda}^\dagger(0) \cdot e^{i\omega t}) \vec{e}_{k,\lambda} \\
&\quad + \frac{ie}{m} \sum_{k,\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{V}} \left[2 \left(ie \sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega V}} \int_0^t dt' \vec{e}_{k,\lambda} \cdot \dot{\vec{x}}(t') e^{i\omega(t'-t)} \right) \right] \vec{e}_{k,\lambda} \\
&= \frac{ie}{m} \sum_{k,\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{V}} (a_{k,\lambda}(0) \cdot e^{-i\omega t} - a_{k,\lambda}^\dagger(0) \cdot e^{i\omega t}) \vec{e}_{k,\lambda} \\
&\quad + \frac{ie}{m} \sum_{k,\lambda} \frac{2\pi}{V} \left[2 \left(ie \int_0^t dt' \vec{e}_{k,\lambda} \cdot \dot{\vec{x}}(t') e^{i\omega(t'-t)} \right) \right] \vec{e}_{k,\lambda} \\
&= \frac{e}{m} \vec{E}_0(t) + \frac{e}{m} \vec{E}_{RR}(t),
\end{aligned}$$

wobei

$$\vec{E}_0(t) = i \sum_{k,\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{V}} (a_{k,\lambda}(0) \cdot e^{-i\omega t} - a_{k,\lambda}^\dagger(0) \cdot e^{i\omega t}) \vec{e}_{k,\lambda}$$

und

$$\begin{aligned}
\vec{E}_{RR}(t) &= -\frac{4\pi e}{V} \sum_{k,\lambda} \left(\int_0^t dt' \vec{e}_{k,\lambda} \cdot \dot{\vec{x}}(t') e^{i\omega(t'-t)} \right) \vec{e}_{k,\lambda} \\
&= \frac{4\pi e}{V} \sum_{k,\lambda} \int_0^t dt' [\vec{e}_{k,\lambda} \cdot \dot{\vec{x}}(t')] \vec{e}_{k,\lambda} \cos(\omega t' - \omega t).
\end{aligned}$$

$\vec{E}_{RR}(t)$ ist der sogenannte Strahlungsrückwirkungs-Term (Radiation Reaction). Es handelt sich dabei um ein Quellenfeld, das durch den Dipol erzeugt wird und auf den Dipol einwirkt. $\vec{E}_0(t)$ dagegen ist einen quellenfreies Feld, das zwar auf den Dipol einwirkt, aber aus dem Vakuum heraus entsteht. Es wird daher als Vakuumfeld bezeichnet, obwohl es sich dabei eigentlich nur

um den Heisenberg-Operator handelt, der auf das Feld wirkt. Es ist wichtig hier zu verstehen, dass wir hier kein äußeres Feld angelegt haben, aber dennoch ein äußeres Feld in den Gleichungen der Quantenmechanik herauskommt. Das äußere Feld ist $\vec{E}_0(t)$, dessen Wirkung man niemals verhindern kann. In der klassischen Elektrodynamik existiert dieses Vakuumfeld nicht.

Bevor wir das Vakuumfeld weiter betrachten, wollen wir kurz das Dipol-Quellenfeld vereinfachen, da wir das Ergebnis später nochmal benötigen. Für das Kontinuum-Limit lässt sich wieder, wie oben

$$\sum_k (\dots) \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \iiint d^3k (\dots)$$

verwenden, sodass

$$\vec{E}_{RR}(t) = -\frac{4\pi e}{V} \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k \sum_{\lambda} \int_0^t dt' [\vec{e}_{k,\lambda} \cdot \dot{\vec{x}}(t')] \vec{e}_{k,\lambda} \cos(\omega t' - \omega t).$$

Es gilt die Identität $\dot{\vec{x}} = (\vec{k} \cdot \dot{\vec{x}})\vec{k} + \sum_{\lambda} (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{e}_{k,\lambda}) \vec{e}_{k,\lambda} \Leftrightarrow \sum_{\lambda} (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{e}_{k,\lambda}) \vec{e}_{k,\lambda} = \dot{\vec{x}} - (\vec{k} \cdot \dot{\vec{x}})\vec{k}$ und man erhält

$$\begin{aligned} \vec{E}_{RR}(t) &= -\frac{e}{2\pi^2} \int_0^t dt' \cos(\omega t' - \omega t) \int_0^{\infty} dk k^2 \\ &\quad \times \int d\Omega_k \left(\dot{\vec{x}}(t') - (\vec{k} \cdot \dot{\vec{x}}(t')) \vec{k} \right), \end{aligned}$$

wobei wir nun über feste Winkel $\int d\Omega_k$ über \vec{k} integrieren. Letzterer Term sei

$$\int d\Omega_k \left(\dot{\vec{x}}(t') - (\vec{k} \cdot \dot{\vec{x}}(t')) \vec{k} \right) = \left(4\pi - \frac{4\pi}{3} \right) \dot{\vec{x}}(t'),$$

wodurch

$$\begin{aligned} \vec{E}_{RR}(t) &= -\frac{e}{2\pi^2} \left(4\pi - \frac{4\pi}{3} \right) \int_0^t dt' \dot{\vec{x}}(t') \int_0^{\infty} dk k^2 \cos(\omega t' - \omega t) \\ &= \left(-\frac{6e}{3\pi} + \frac{2e}{3\pi} \right) \int_0^t dt' \dot{\vec{x}}(t') \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{c} \frac{\omega^2}{c^2} \cos(\omega t' - \omega t) \\ &= -\frac{4e}{3\pi c^3} \int_0^t dt' \dot{\vec{x}}(t') \int_0^{\infty} d\omega \omega^2 \cos(\omega t' - \omega t) \end{aligned}$$

$= \frac{4e}{3c^3} \int_0^t dt' \dot{\vec{x}}(t') \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \delta(t' - t) = \frac{4e}{3c^3} \left[-\ddot{\vec{x}}(t) \delta(0) + \frac{1}{2} \ddot{\vec{x}}(t) \right]$ für $t > 0$. Für das letzte Resultat muss zwei Mal partiell integriert werden.

Es gilt nach Deltafunktions-Regeln $\delta(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\omega = \frac{1}{\pi\hbar} \int_0^\infty dE$, sodass

$$\begin{aligned} \vec{E}_{RR}(t) &= \frac{4e}{3c^3} \left[-\ddot{\vec{x}}(t) \delta(0) + \frac{1}{2} \ddot{\vec{x}}(t) \right] = \frac{2e}{3c^3} \ddot{\vec{x}}(t) - \frac{4e}{3c^3 \pi \hbar} \ddot{\vec{x}}(t) \int_0^\infty dE \\ &= \frac{2e}{3c^3} \ddot{\vec{x}}(t) - \frac{\delta m}{e} \ddot{\vec{x}}(t), \end{aligned}$$

wobei $\delta m = \frac{4e^2}{3c^3 \pi \hbar} \int_0^\infty dE$ die sogenannte elektromagnetische Masse ist. Dieses Resultat der Strahlungsrückwirkung in die Dipolgleichung eingesetzt, ergibt

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{x}} + m\omega_0^2 \vec{x} &= e\vec{E}_0(t) + e\vec{E}_{RR}(t) = e\vec{E}_0(t) + \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\vec{x}}(t) - \delta m \ddot{\vec{x}}(t) \Leftrightarrow \\ (m + \delta m)\ddot{\vec{x}} + m\omega_0^2 \vec{x} &= e\vec{E}_0(t) + \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\vec{x}}(t). \end{aligned}$$

Die elektromagnetische Masse trägt zur effektiven Masse des Dipols bei. Wenn wir $m + \delta m$ als die beobachtbare Masse m definieren, erhalten wir

$$\vec{E}_{RR}(t) = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\vec{x}}(t).$$

Dadurch erhält man die formal zu klassischen Oszillatorgleichung im E-Feld äquivalente Gleichung

$$\ddot{\vec{x}}(t) + \omega_0^2 \vec{x}(t) - \tau \ddot{\vec{x}}(t) = \frac{e}{m} \vec{E}_0(t),$$

wobei $\tau = \frac{2e^2}{3mc^3}$. Nur haben wir in diesem Fall gar kein E-Feld angelegt, was uns erneut darauf zurückführt, dass selbst im Vakuum ein äußeres E-Feld auf den Dipol wirkt. Der Erwartungswert des Vakuumfeldes ist stets Null, aber die Energiedichte divergiert ins Unendliche:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi} \langle \vec{E}_0^2(t) \rangle &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k,\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{V}} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{V}} \langle a_{k,\lambda}(0) a_{k,\lambda}^\dagger(0) \rangle = \frac{1}{4\pi} \sum_{k,\lambda} \frac{2\pi\hbar\omega}{V} \\ &= \frac{1}{V} \sum_{k,\lambda} \frac{\hbar\omega}{2} = \int_0^\infty d\omega \rho_0(\omega).\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis hatten wir oben bereits hergeleitet und gesehen, dass es divergiert. Die wichtige Erkenntnis hierbei ist jedoch, dass man es nun nicht mehr mit der Nullpunkt-Feldenergie H_F zu tun hat, wie wir sie oben eingeführt haben. H_F hat überhaupt keine Auswirkung auf die Heisenberggleichungen, da es sich um eine Konstante handelt, die beim Ableiten einfach verschwindet. Daher ist es möglich, die Nullpunkt-Energie in den Berechnungen einfach wegzulassen. Bedeutet das, die Vakuumenergie hat keinen Einfluss auf reale Phänomene? Womöglich. Aber das Vakuum taucht trotzdem in Form des Vakuumfeldes wieder auf, auch wenn man H_F weglässt. Die Unendlichkeiten, die man durch das Vernachlässigen von $H_F = \sum_k \frac{\hbar\omega_k}{2}$ aus der Theorie entfernen wollte, kommen durch $\langle \vec{E}_0^2(t) \rangle = 4\pi \int_0^\infty d\omega \rho_0(\omega)$ wieder zurück.

Milonni bewies sogar, dass das freie Vakuumfeld notwendig ist, damit die Quantenelektrodynamik logisch konsistent ist, da es die kanonische Kommutator-Relation über die Zeitentwicklung hinweg aufrechthält. Die Vertauschungsrelation wird durch die Unitarität der Zeitentwicklung gefordert:

$$\begin{aligned}[x(t), p(t)] &= [U^\dagger(t)x(0)U(t), U^\dagger(t)p(0)U(t)] = U^\dagger(t)[x(0), p(0)]U(t) \\ &= i\hbar U^\dagger(t)U(t) = i\hbar.\end{aligned}$$

In einfacher Weise lässt sich das anhand der Approximation der Bewegungsgleichung für geringe Dämpfung veranschaulichen. Dann kann

$\ddot{\vec{x}}(t) \approx -\omega_0^2 \vec{x}(t)$ und $\ddot{\vec{x}}(t) \approx -\omega_0^2 \dot{\vec{x}}(t)$ approximiert werden, weshalb

$$\ddot{\vec{x}}(t) + \omega_0^2 \vec{x}(t) - \tau \ddot{\vec{x}}(t) \approx \ddot{\vec{x}}(t) + \tau \omega_0^2 \dot{\vec{x}}(t) + \omega_0^2 \vec{x}(t) \approx \frac{e}{m} \vec{E}_0(t).$$

Wäre in diesem Fall $\vec{E}_0(t) = 0$, würde der Operator $\vec{x}(t)$ eine exponentielle Dämpfung erfahren und der Kommutator $[x(t), p(t)]$ für $t \gg \frac{1}{\tau\omega_0^2}$ gegen

Null gehen. Nur mithilfe des Vakuumfeldes wird sichergestellt, dass der Kommutator stets $i\hbar$ bleibt. Formal ergibt sich dieses Ergebnis aus

$$[x(t), p(t)] = x(t)p(t) - p(t)x(t) = x(t) \left(m\dot{x} + \frac{e}{c} A_x \right) - \left(m\dot{x} + \frac{e}{c} A_x \right) x(t) = \left(x(t)m\dot{x} - m\dot{x}x(t) \right) + \left(x(t)\frac{e}{c}A_x - \frac{e}{c}A_x x(t) \right) = [x(t), m\dot{x}(t)] + \left[x(t), \frac{e}{c}A_x(t) \right] = [x(t), m\dot{x}(t)], \text{ wobei } \left[x(t), \frac{e}{c}A_x(t) \right] = 0, \text{ weil zeitgleiche Teilchen- und Feldoperatoren kommutieren. Wir lösen die Bewegungsgleichung}$$

$$\ddot{\vec{x}}(t) + \omega_0^2 \vec{x}(t) - \tau \ddot{\vec{x}}(t) = \frac{e}{m} \vec{E}_0(t)$$

und erhalten unter Verwendung von $[a_{k,\lambda}(0), a_{k,\lambda}^\dagger(0)] = \delta_{k,k'}^3 \delta_{\lambda,\lambda'}$ sowie des Kontinuum-Limits

$$[x(t), p(t)] = [x(t), m\dot{x}(t)] = \left(\frac{i\hbar e^2}{2\pi^2 mc^3} \right) \left(\frac{8\pi}{3} \right) \int_0^\infty \frac{d\omega \cdot \omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \tau^2 \omega^6}.$$

Mithilfe des Residuensatzes kann man daraus ableiten, dass

$$\begin{aligned} [x(t), p(t)] &= \left(\frac{2i\hbar e^2}{3\pi mc^3} \right) \omega_0^3 \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + \tau^2 \omega_0^6} = \frac{2i\hbar e^2 \omega_0^3}{3\pi mc^3} \left(\frac{\pi}{\tau \omega_0^3} \right) \\ &= \frac{2i\hbar e^2 \omega_0^3}{3\pi mc^3} \left(\frac{3\pi mc^3}{2e^2 \omega_0^3} \right) = i\hbar. \end{aligned}$$

So haben wir allein unter Verwendung des Vakuumfeldes die zeitliche Erhaltung der Kommutator-Relation erhalten.

Im hier betrachteten Beispiel ist ein oszillierender Dipol an das elektromagnetische Feld gekoppelt, was zu einer dissipativen Kraft $F_{RR} = eE_{RR}$ führt, die man Strahlungsrückwirkung bezeichnet. Gleichzeitig existiert eine fluktuirende Komponente E_0 in Form des Vakuumfeldes. Es wurde gezeigt, dass bei gegebener Strahlungsrückwirkung immer auch Vakuumfluktuationen existieren müssen, damit die kanonische Kommutator-Relation über die Zeittwicklung hinweg erhalten bleibt. Dies ist eine Spezialform des Fluktuations-Dissipations-Theorems, dass zu jedem System, das mit einem Wärmereservoir

verknüpft ist, dieses Wärmereservoir im System stets Fluktuationen erzeugen muss. In diesem Sinne ist das Vakuum als Wärmereservoir interpretierbar.

Dass die Vertauschungsrelation für einen an das Vakuumfeld gekoppelten harmonischen Oszillator erhalten bleibt, impliziert, dass die Nullpunkt-Energie eines harmonischen Oszillators ebenfalls eine Erhaltungsgröße ist, die sich nicht verändern kann. Es ist somit unmöglich, dem Vakuum Energie zu entziehen. Auch wenn das Vakuum also ein Wärmereservoir ist, kann man dieses Reservoir nur für Fluktuationen gebrauchen, aber nicht, um Arbeit zu verrichten. Es ist jedoch nicht ausgeschlossen, dass Fluktuationen genutzt werden können, um bestimmte dissipative Kräfte zu erzeugen, die dann Energie verrichten. Das impliziert jedoch nicht, dass Vakuumenergie verwendet wurde, sondern lediglich Vakuumfluktuationen zu einer gewissen Verschiebung realer Energie beitragen können. Darauf werden wir später zurückkommen.

Wärmestrahlung:

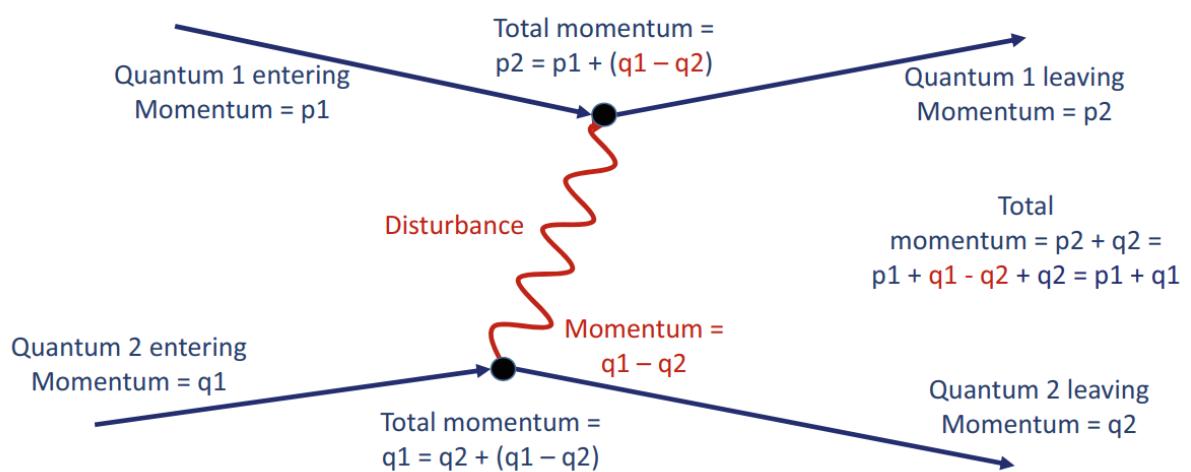
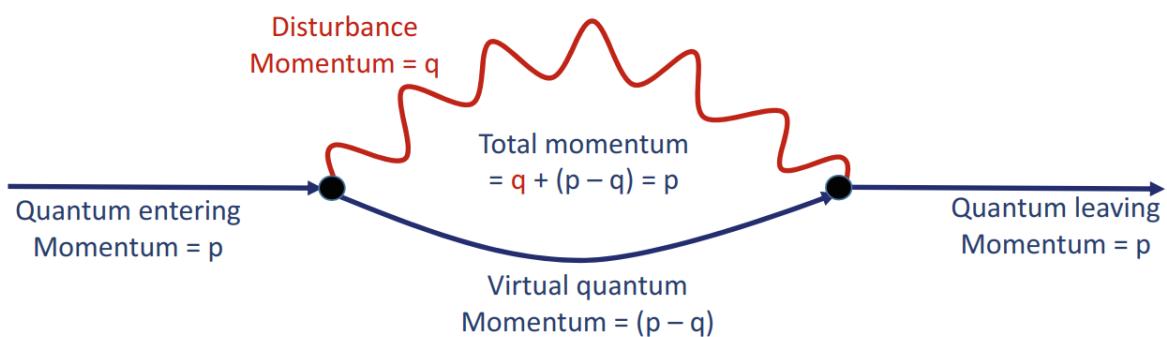
[23]

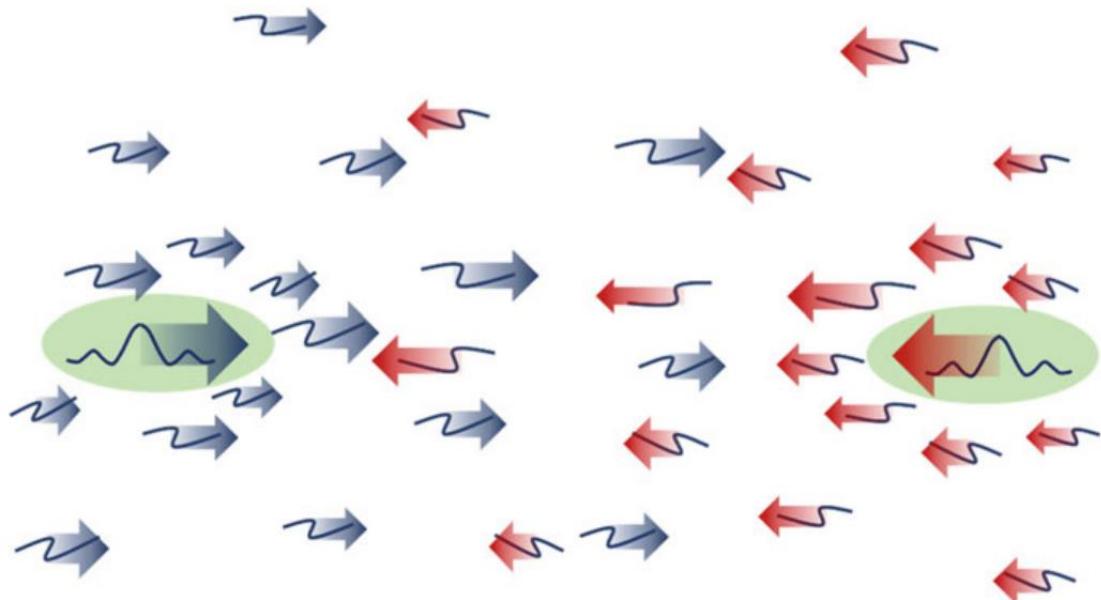
Thermisches Equilibrium:

Spontane Emission vs. Absorption:

Effekte des Quantenvakuums:

Virtuelle Teilchen:





[17]

Casimir Effekt

Das Konzept, dass Energie nur als Differenz zwischen zwei Zuständen gemessen werden kann, ist aus der Chemie bekannt, aber auch hier anzuwenden. Man kann sich vorstellen, dass ein Potential der Vakuumenergie existiert, das für uns einen Nullpunkt darstellt, jedoch tatsächlich unendlich tief ist. Es lassen sich praktisch unendliche Energiereserven im Vakuum vermuten, die jedoch nach aktuellem Stand der Physik nicht angezapft werden können. Wenn man sich die Vakuumenergie als Potential vorstellt, könnte man vermuten, dass es Wege gibt, um eine Vertiefung in das Potential einzubauen und auf diesem Weg Vakuumenergie nutzbar zu machen. Der Casimir Effekt ist exakt solch eine Vertiefung im Potential des Vakuums. Werden zwei Leiterplatten sehr eng nebeneinander platziert, sodass quantenmechanische Effekte relevant werden, werden die möglichen Energiezustände zwischen Platten eingeschränkt, während außerhalb der Platten be-

liebige Energiezustände angenommen werden können. Virtuelle Teilchen müssen innerhalb der Platten stehende Wellen bilden. Das führt zu einer real messbaren Druckdifferenz im Raum zwischen den Platten im Vergleich zum Raum außerhalb der Platten. Die Leiterplatten werden dadurch mit der sogenannten Casimir Kraft zusammengedrückt. Dies ist der Casimir Effekt, der scheinbar Vakuumenergie ausnutzt, um Platten zu bewegen. Jedoch konnte bislang keine Möglichkeit gefunden werden, die Kraft des Casimir Effekts als Energiequelle nutzbar zu machen.

Casimirs Herleitung:

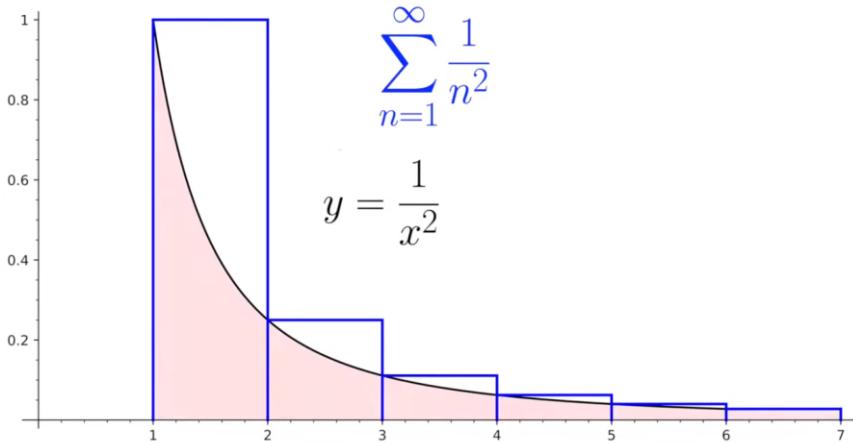
Der Vollständigkeit halber werden wir etwas Vorarbeit leisten und eine wichtige Approximationsmethode kennenlernen, die womöglich auch an anderen Stellen bei der mathematischen Auswertung von Problemen nützlich sein kann. Wer sich für den mathematischen Beweis weniger interessiert als für die technischen Überlegungen, kann diesen Teil getrost überspringen.

Basel-Problem:

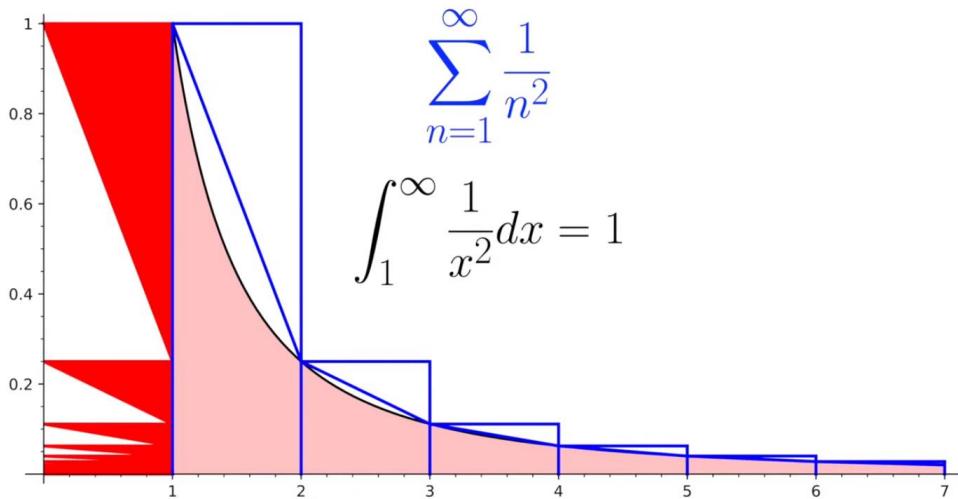
Wir werden zuerst die Euler-Maclaurin Approximation herleiten. Bei dieser Approximation geht es um eine Möglichkeit, eine Summe von Funktionswerten durch die Werte der Ableitungen an den Summationsgrenzen zu bestimmen, aber man kann sie auch zur numerischen Approximation von bestimmten Integralen verwenden. Wir betrachten zur Motivation, wie Euler es tat, das sogenannte Basel-Problem, das darin bestand, herauszufinden, wie die Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

ausgerechnet werden könnte. Euler überlegte sich, dass er die Summe als eine Fläche von Rechtecken darstellen könnte:



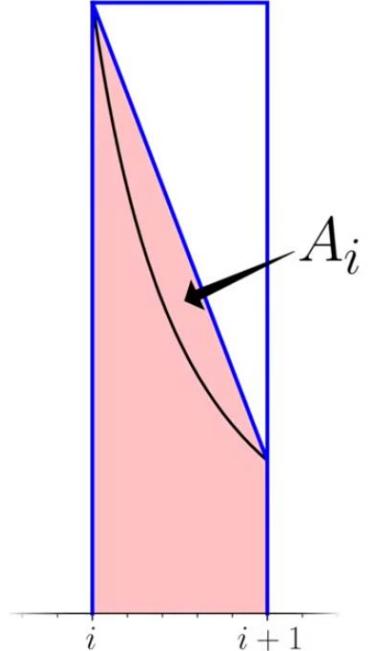
Einerseits lässt sich die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$ unter die Quadrate legen und die Fläche unter dieser Funktion ist einfach das Integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \left[\frac{-1}{x} \right]_1^\infty = \frac{-1}{\infty} - \frac{-1}{1} = 1$. Außerdem ergeben sich, wenn wir wollen, für die oberen Flächen über der $\frac{1}{x^2}$ Funktion Dreiecke mit einer Kathete mit Länge 1 und einer Kathete mit der Höhe h_i . Die Fläche der Dreiecke ist also $A_i = \frac{1 \cdot h_i}{2}$. Um die Gesamtfläche zu bestimmen, addieren wir alle Dreiecke $\sum_{n=1}^{\infty} A_i = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_i}{2}$. Wir wissen allerdings, dass sich die Höhen aller Dreiecke zu 1 addieren:



Somit muss $\sum_{n=1}^{\infty} A_i = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} h_i = \frac{1}{2}$ sein. Unsere bisherige Approximation für das Basel-Problem ist nun

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2} + R,$$

wobei R ein Rest aus kleinen komischen Flächen ist, die noch zu bestimmen sind. Wir können diese Fläche durch das rote Trapez abzüglich der Fläche unter der $\frac{1}{x^2}$ Funktion berechnen. Die Trapezfläche ist $A_{Ti} = \frac{f(i) + f(i+1)}{2}$. Die Restflächenstücke pro Rechteck sind dann $A_i = A_{Ti} - \int_i^{i+1} f(x)dx = \frac{f(i) + f(i+1)}{2} - \int_i^{i+1} f(x)dx$. Wir setzen hier eine beliebige Funktion $f(x)$ ein, weil Euler erkannte, dass dieses Verfahren womöglich verallgemeinert angewandt werden kann. Die einzige Bedingung ist, dass die bestimmten Funktionswerte an den Stellen i bekannt ist. Unsere neue Approximation sieht nun wie folgt aus:



[24]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2} + A_1 + A_2 + A_3 + \dots$$

Wir betrachten zuerst einmal $A_0 = \frac{f(0) + f(1)}{2} - \int_0^1 f(x)dx$ auch wenn es in der betrachteten Reihe kein A_0 gibt. Wir wenden auf $\int_0^1 f(x)dx$ partielle Integration an, wobei wir $g'(x) = 1$ setzen. Es gilt nach partieller Integrationsregel $f(1) \cdot g(1) - f(0) \cdot g(0) - \int_0^1 f'(x)g(x) dx = \int_0^1 f(x)g'(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$. Wenn $g'(x) = 1$, dann ist $g(x) = x + c$, wobei wir $c = -\frac{1}{2}$ wählen, da sich dann ein gewünschter Effekt ergibt. Wir können c jedoch beliebig verändern ohne die Gültigkeit der hier gemachten Schritte zu unterminieren. Für das Integral gilt nun

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)dx &= f(1) \cdot g(1) - f(0) \cdot g(0) - \int_0^1 f'(x)g(x) dx \\ &= f(1) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) - f(0) \cdot \left(0 - \frac{1}{2}\right) - \int_0^1 f'(x)g(x) dx \\ &= \frac{f(1) + f(0)}{2} - \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) f'(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow A_0 &= \frac{f(0) + f(1)}{2} - \left(\frac{f(1) + f(0)}{2} - \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx \right) \\ &= \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx.\end{aligned}$$

Wir haben es also geschafft, durch clevere Wahl von $c = -\frac{1}{2}$ die Trapezfläche zu kürzen. Nun wiederholen wir den Prozess der partiellen Integration, wobei nun aber $g'(x) = x - \frac{1}{2}$, sodass

$$\begin{aligned}A_0 &= \left[\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + c \right) f'(x) \right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 f''(x) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + c \right) dx \\ &= \left(\frac{1^2}{2} - \frac{1}{2} + c \right) f'(1) - \left(\frac{0^2}{2} - \frac{0}{2} + c \right) f'(0) \\ &\quad - \int_0^1 f''(x) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + c \right) dx \\ &= cf'(1) - cf'(0) - \int_0^1 f''(x) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + c \right) dx.\end{aligned}$$

Um nun das Integral verschwinden zu lassen, wählen wir $c = \frac{1}{12}$, da

$$\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \right) dx = 0.$$

Wir haben wir angenommen, dass $f''(x) = k$ ebenfalls eine Konstante ist, die wir einfach aus dem Integral herausziehen können, sodass sie das Ergebnis des Integrals nicht beeinflusst. Dies ist der Fall, wenn $f(x)$ eine quadratische Funktion. Nun erhalten wir

$$A_0 = \frac{f'(1) - f'(0)}{12} - \int_0^1 f''(x) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \right) dx.$$

Es wird nun ersichtlich, worin das Verfahren besteht, das hier iterativ angewandt wird. Es wird ein Operator D^{-1} eingeführt, der gerade dazu führt, dass das Integral eines Polynoms Null wird. Präziser gesagt, wählt der Operator eine Konstante c , sodass $\int_0^1 P(x) dx = 0$, wobei $P(x) = \int p(x) dx = D^{-1}p(x)$. $P(x)$ ist das Ergebnis der partiellen Integration. Führen wir eine weitere par-

tielle Integration aus, um den Operator dort anzuwenden, bevor wir das allgemeine Theorem ableiten:

Wir integrieren partiell $\int_0^1 f''(x) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \right) dx = \left[f''(x) \cdot D^{-1} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \right) \right]_0^1 - \int_0^1 f'''(x) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \right) dx$, wobei

$$D^{-1} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \right) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12} + c \Rightarrow \int_0^1 D^{-1} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \right) dx = \\ \int_0^1 \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12} + c \right) dx = \left[\frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{24} + cx \right]_0^1 = \frac{1}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + c = c = 0.$$

Damit $\int_0^1 P(x) dx = \int_0^1 D^{-1} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \right) dx = 0$ wird, muss hier $c = 0$ sein.

Also ist der nächste Term in unserer Iteration $\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12}$ und die nächste Formel

$$\left[f''(x) \cdot \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12} \right]_0^1 - \int_0^1 f'''(x) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \right) dx = \\ - \int_0^1 f'''(x) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \right) dx.$$

Wir erhalten allgemein eine Formel der Form

$$A_0 = BT_1 + BT_2 + BT_3 + \dots + BT_{k-1} + (-1)^{k+1} \int_0^1 V_k(x) f^{(k)}(x) dx.$$

Um V_{k+1} zu erhalten, müssen wir nur wieder partiell integrieren. Wir benutzen unseren Operator $D^{-1}V_k(x) = V_{k+1}(x)$, sodass

$$\int_0^1 V_k(x) f^{(k)}(x) dx = \left[V_k(x) f^{(k)}(x) \right]_0^1 - \int_0^1 V_{k+1}(x) f^{(k+1)}(x) dx = \\ f^{(k)}(1)V_{k+1}(1) - f^{(k)}(0)V_{k+1}(0) - \int_0^1 V_{k+1}(x) f^{(k+1)}(x) dx.$$

Eingesetzt ergibt sich

$$A_0 = BT_1 + BT_2 + BT_3 + \dots + BT_{k-1} + (-1)^{k+1} \left(f^{(k)}(1)V_{k+1}(1) - f^{(k)}(0)V_{k+1}(0) \right) - (-1)^{k+1} \int_0^1 V_{k+1}(x) f^{(k+1)}(x) dx.$$

Wir haben den neuen Term $BT_k = (-1)^{k+1} \left(f^{(k)}(1)V_{k+1}(1) - f^{(k)}(0)V_{k+1}(0) \right)$ erhalten. Dies gilt für alle weiteren BT_k für alle weiteren k . Die allgemeine Formel lautet also

$$\begin{aligned}
A_0 &= \sum_{i=1}^{k-1} BT_i - (-1)^k \int_0^1 V_k(x) f^{(k)}(x) dx \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \left[(-1)^{i+1} \left(f^{(i)}(1)V_{i+1}(1) - f^{(i)}(0)V_{i+1}(0) \right) \right] \\
&\quad + (-1)^{k+1} \int_0^1 V_k(x) f^{(k)}(x) dx,
\end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass $-(-1)^k = (-1)^1(-1)^k(-1)^{k+1}$. Natürlich verschwindet der letzte Term $(-1)^{k+1} \int_0^1 V_k(x) f^{(k)}(x) dx$, wenn $f(x)$ eine Funktion kleineren Grades als k ist. Für größere V_k werden die Werte schnell sehr groß, weil sie mit der Fakultät skalieren. Üblicherweise benutzt man deshalb zur besseren Übersicht $B_k = k! V_k$, sodass man erhält:

$$\begin{aligned}
V_0 &= 1 \Rightarrow B_1 = 1 \\
V_1 &= x - \frac{1}{2} \Rightarrow B_1 = x - \frac{1}{2} \\
V_2 &= \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \Rightarrow B_1 = x^2 - x + \frac{1}{6} \\
V_3 &= \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12} \Rightarrow B_1 = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x \\
V_4 &= \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{24} + \frac{1}{720} \Rightarrow B_1 = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30} \\
V_5 &= \frac{x^5}{120} - \frac{x^4}{48} + \frac{x^3}{72} + \frac{x}{720} \Rightarrow B_1 = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{x}{6} \\
&\dots
\end{aligned}$$

Man kann nun die Definitionen $B_k = k! V_k$, $B_{k+1} = (k+1)! V_{k+1}$ und $V_{k+1} = D^{-1}V_k$ nutzen, um $B_{k+1} = (k+1)! D^{-1}V_k$ und $V_k = \frac{1}{k!}B_k$ zu erhalten. Ineinander eingesetzt ist dann $B_{k+1} = (k+1)! D^{-1}\left(\frac{1}{k!}B_k\right) = \frac{(k+1)!}{k!}D^{-1}B_k = (k+1)D^{-1}B_k$. Wir schreiben die Formel für unsere Fläche um:

$$\begin{aligned}
A_0 &= \sum_{i=1}^{k-1} \left[(-1)^{i+1} \left(f^{(i)}(1) \frac{B_{i+1}(1)}{(i+1)!} - f^{(i)}(0) \frac{B_{i+1}(0)}{(i+1)!} \right) \right] + \\
&\quad \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \int_0^1 B_k(x) f^{(k)}(x) dx.
\end{aligned}$$

Die Polynome $B_k(x)$ sind sogenannte Bernoulli Polynome.

k	$B_k(x)$	$B_k(0)$	$B_k(1)$
0	1	1	1
1	$x - \frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	$x^2 - x + \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
3	$x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$	0	0
4	$x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$	$-\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{30}$
5	$x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x$	0	0
6	$x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{42}$
7	$x^7 - \frac{7}{2}x^6 + \frac{7}{2}x^5 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{6}x$	0	0

[24]

Für $\int_0^1 B_{k-1}(x) dx$ gilt wegen $B_{k+1} = (k+1)D^{-1}B_k$:

$$\int_0^1 B_{k-1}(x) dx = (k-1) \int_0^1 D^{-1}B_{k-2}(x) dx = 0.$$

Dies ist per Definition Null, weil der D^{-1} Operator das Integral Null werden lässt. Es folgt aber auch

$$B_{k+1} = (k+1)D^{-1}B_k \Leftrightarrow D^{-1}B_k = \frac{B_{k+1}}{k+1}.$$

Da es sich bei B_k um Polynome handelt, ist $D^{-1}B_k$ also einfach die Stammfunktion von B_k . In diesem Fall lässt sich $\int_0^1 B_{k-1}(x) dx = \frac{B_k(1)}{k} - \frac{B_k(0)}{k} = 0$ schreiben, was nur erfüllt ist, wenn $B_k(1) = B_k(0)$. Daher lassen sich die beiden Reihen für $B_k(1)$ und $B_k(0)$ vereinen und wir erhalten eine Reihe mit den sogenannten Bernoulli-Zahlen b_k :

k	$B_k(x)$	b_k
0	1	1
1	$x - \frac{1}{2}$	$\pm \frac{1}{2}$
2	$x^2 - x + \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
3	$x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$	0
4	$x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$	$-\frac{1}{30}$
5	$x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x$	0
6	$x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}$	$\frac{1}{42}$
7	$x^7 - \frac{7}{2}x^6 + \frac{7}{2}x^5 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{6}x$	0

k	b_k	k	b_k	k	b_k
0	1	9	0	18	$\frac{43867}{798}$
1	$\pm \frac{1}{2}$	10	$\frac{5}{66}$	19	0
2	$\frac{1}{6}$	11	0	20	$-\frac{174611}{330}$
3	0	12	$-\frac{691}{2730}$	21	0
4	$-\frac{1}{30}$	13	0	22	$\frac{854513}{138}$
5	0	14	$\frac{7}{6}$	23	0
6	$\frac{1}{42}$	15	0	24	$-\frac{236364091}{2730}$
7	0	16	$-\frac{3617}{510}$	25	0
8	$-\frac{1}{30}$	17	0		

[24]

Wir können in unseren Gleichungen also alle $B_k(1)$ und $B_k(0)$ durch b_k ersetzen:

$$\begin{aligned}
A_0 &= \sum_{i=1}^{k-1} \left[(-1)^{i+1} \left(f^{(i)}(1) \frac{b_{i+1}}{(i+1)!} - f^{(i)}(0) \frac{b_{i+1}}{(i+1)!} \right) \right] \\
&\quad + \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \int_0^1 B_k(x) f^{(k)}(x) dx \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \left[(-1)^{i+1} \frac{b_{i+1}}{(i+1)!} \left(f^{(i)}(1) - f^{(i)}(0) \right) \right] \\
&\quad + \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \int_0^1 B_k(x) f^{(k)}(x) dx.
\end{aligned}$$

Außerdem beobachten wir, dass $b_i = 0$ für alle ungeraden i . Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{b_2}{2!} (f'(1) - f'(0)) + \frac{b_4}{4!} (f'''(1) - f'''(0)) + \dots \\
&\quad + \frac{b_{2k}}{(2k)!} (f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)) + \frac{1}{(2k)!} \int_0^1 B_k(x) f^{(2k)}(x) dx \\
&\approx \frac{b_2}{2!} (f'(1) - f'(0)) + \frac{b_4}{4!} (f'''(1) - f'''(0)) + \dots \\
&\quad + \frac{b_{2k}}{(2k)!} (f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)).
\end{aligned}$$

Wir gehen davon aus, dass $\frac{1}{(2k)!} \int_0^1 B_k(x) f^{(2k)}(x) dx$ vernachlässigbar klein wird, für hohe k . Das ist unsere Flächenformel für das Flächenelement A_0 . Um nun auf das Basel-Problem zurückzukommen, setzen wir $f_{+i}(x) = f(x+i)$, sodass $f_{+i}(0) = f(i)$ und $f_{+i}(1) = f(i+1)$. Daraus folgt, dass im Baselproblem die Flächenelemente

$$A_i = \frac{f(i) + f(i+1)}{2} - \int_i^{i+1} f(x) dx = \frac{f_{+i}(0) + f_{+i}(1)}{2} - \int_i^{i+1} f_{+i}(x) dx$$

durch unsere hier hergeleitete Approximation beschrieben werden können. Für unsere verschiedenen Ableitungen in der Approximation gilt daher

$A_i \approx \frac{b_2}{2!} (f'(i+1) - f'(i)) + \frac{b_4}{4!} (f'''(i+1) - f'''(i)) + \dots + \frac{b_{2k}}{(2k)!} (f^{(2k-1)}(i+1) - f^{(2k-1)}(i))$ und wir erhalten in das Basel-Problem eingesetzt

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= 1 + \frac{1}{2} \\
+ A_1 &\approx b_2 \frac{f'(2) - f'(1)}{2!} + b_4 \frac{f'''(2) - f'''(1)}{4!} + \dots + b_{2k} \frac{f^{(2k-1)}(2) - f^{(2k-1)}(1)}{(2k)!} \\
+ A_2 &\approx b_2 \frac{f'(3) - f'(2)}{2!} + b_4 \frac{f'''(3) - f'''(2)}{4!} + \dots + b_{2k} \frac{f^{(2k-1)}(3) - f^{(2k-1)}(2)}{(2k)!} \\
+ A_3 &\approx b_2 \frac{f'(4) - f'(3)}{2!} + b_4 \frac{f'''(4) - f'''(3)}{4!} + \dots + b_{2k} \frac{f^{(2k-1)}(4) - f^{(2k-1)}(3)}{(2k)!} \\
+ A_4 &\approx b_2 \frac{f'(5) - f'(4)}{2!} + b_4 \frac{f'''(5) - f'''(4)}{4!} + \dots + b_{2k} \frac{f^{(2k-1)}(5) - f^{(2k-1)}(4)}{(2k)!} \\
&+ \dots
\end{aligned}$$

[24]

Dies sieht auf den ersten Blick nach einer komplizierten Formel aus, aber man wird feststellen, dass die Terme in A_1 mit negativen Vorzeichen in A_2 auftauchen, sodass sich die meisten Terme aufheben. Es bleibt am Ende

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{b_2}{2!} f'(1) - \frac{b_4}{4!} f'''(1) - \dots - \frac{b_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(1) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^k A_i = 1 + \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^k \frac{b_{2i}}{(2i)!} f^{(2i-1)}(1).
\end{aligned}$$

Die Funktion, die hier verwendet wurde, ist natürlich $f(x) = \frac{1}{x^2}$, weshalb für die k -te Ableitung $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k(k+1)!}{x^{k+2}}$ gilt, sodass $f^{(k)}(1) = (-1)^k(k+1)!$. Führt man die Berechnung durch, erhält man $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \approx 1,644934 \dots$, was Euler als $\frac{\pi^2}{6}$ identifizierte.

Allgemeine Euler-Maclaurin Approximation:

Allgemein lässt sich schreiben $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots = S_0 c_0 + S_1 c_1 + S_2 c_2 + S_3 c_3 + \dots$. Man setzt hier für die S_i die Potenzreihen

$$S_i = \sum_{k=1}^n k^i$$

ein und verwendet Bernoullis Theorem. Es gilt $S_i = 1^i + 2^i + 3^i + \dots + n^i$ und wir wählen entsprechend der oben präsentierten Form $S_i = f(x) = x^i = f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) = \sum_{k=1}^n f(k)$. Für die Summen S_i gilt nach Bernoulii

$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{1}{1}(1b_0n) \\ S_1 &= \frac{1}{2}(1b_0n^2 + 2b_1n) \\ S_2 &= \frac{1}{3}(1b_0n^3 + 3b_1n^2 + 3b_2n) \\ S_3 &= \frac{1}{4}(1b_0n^4 + 4b_1n^3 + 6b_2n^2 + 4b_4n) \\ S_4 &= \frac{1}{5}(1b_0n^5 + 5b_1n^4 + 10b_2n^3 + 10b_3n^2 + 5b_4n) \\ &\dots \end{aligned}$$

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned} f(x) &= S_0c_0 + S_1c_1 + S_2c_2 + S_3c_3 + \dots = \\ b_0nc_0 + \frac{b_0n^2}{2}c_1 + \frac{b_0n^3}{3}c_2 + \frac{b_0n^4}{4}c_3 + \frac{b_0n^5}{5}c_4 + \dots \\ + \frac{2b_1n}{2}c_1 + \frac{3b_1n^2}{3}c_2 + \frac{4b_1n^3}{4}c_3 + \frac{5b_1n^4}{5}c_4 + \dots \\ + \frac{3b_2n}{3}c_2 + \frac{6b_2n^2}{4}c_3 + \frac{10b_2n^3}{5}c_4 + \dots \\ + \frac{4b_3n}{4}c_3 + \frac{10b_3n^2}{5}c_4 + \dots \\ &= b_0 \left(nc_0 + \frac{n^2}{2}c_1 + \frac{n^3}{3}c_2 + \frac{n^4}{4}c_3 + \frac{n^5}{5}c_4 + \dots \right) \\ + b_1 \left(\frac{2n}{2}c_1 + \frac{3n^2}{3}c_2 + \frac{4n^3}{4}c_3 + \frac{5n^4}{5}c_4 + \dots \right) \\ + b_2 \left(\frac{3n}{3}c_2 + \frac{6n^2}{4}c_3 + \frac{10n^3}{5}c_4 + \dots \right) \end{aligned}$$

$$+ b_3 \left(\frac{4n}{4} c_3 + \frac{10n^2}{5} c_4 + \dots \right) + \dots \\ = b_0 \int_0^n f(t) dt + b_1 (f(n) - f(0)) + \dots$$

wobei wir die zwei letzten betrachteten Terme unten noch ausgespart haben, weil wir zuerst erkennen müssen, dass $f(n) - c_0 = f(n) - f(0)$ und

$$\frac{3n}{3} c_2 + \frac{6n^2}{4} c_3 + \frac{10n^3}{5} c_4 + \dots = \frac{f'(n) - f'(0)}{2!},$$

$$\frac{4n}{4} c_3 + \frac{10n^2}{5} c_4 + \dots = \frac{f''(n) - f''(0)}{3!} \text{ usw.}$$

$\Rightarrow f(x) = \sum_{k=1}^n f(k) = b_0 \int_0^n f(t) dt + b_1 (f(n) - f(0)) + b_2 \left(\frac{f'(n) - f'(0)}{2!} \right) + b_3 \left(\frac{f''(n) - f''(0)}{3!} \right) + b_4 \left(\frac{f'''(n) - f'''(0)}{4!} \right) + \dots = \int_0^n f(t) dt + \frac{1}{2} (f(n) - f(0)) + \sum_{i=1}^k \frac{b_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(1),$ wobei wir wieder alle ungeraden Terme gestrichen haben, weil die Bernoulli-Zahlen dort Null werden. Und das ist die allgemeine Euler-Maclaurin Approximation:

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \int_0^n f(t) dt + \frac{(f(n) - f(0))}{2} + \sum_{i=1}^k \frac{b_{2k}}{(2k)!} (f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(0)) \\ = \int_1^n f(t) dt + \frac{(f(n) + f(1))}{2} + \sum_{i=1}^k \frac{b_{2k}}{(2k)!} (f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(0)).$$

So ermöglicht die Euler-Maclaurin Formel eine Approximation der Summe von Funktionswerten durch die Werte der Ableitungen der Funktion an den Summationsgrenzen. Andererseits kann man sie auch in Integralform formulieren, um ein bestimmtes Integral durch einzelne Werte zu approximieren. In dem Fall ist die Euler-Maclaurin Formel

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{f(1) - f(0)}{2} - \sum_{i=1}^k \frac{b_{2i}}{(2i)!} (f^{(2i-1)}(1) - f^{(2i-1)}(0)) \\ - \frac{b_{2k+2}}{(2k+2)!} f^{(2k+2)}(\xi),$$

wobei $\xi \in]0,1[$. Es wird b_{2i} benutzt, um zu zeigen, dass es sich um gerade Bernoulli-Zahlen handelt, das eine gerade natürliche Zahl durch 2 geteilt weiterhin eine natürliche Zahl ergibt.

Casimirs Parallelepiped:

Man stelle sich eine Box mit den Seitenlängen L_x, L_y, L_z vor, wobei $L_x = L_y = L$. Das Volumen ist $V = L^2 L_z$. Für einen perfekten Leiter gilt an den Rändern der Box $E_t = 0$, dass die tangentiale Komponente des elektrischen Feldes verschwindet, da sich alle Ladung gleichverteilen, bis keine tangentiale Komponente mehr existiert. Man betrachtet als allgemeine Lösung der Helmholtz-Gleichung die elektromagnetische Welle

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_+ e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} + \vec{E}_- e^{-i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}.$$

Wir betrachten hier jede Komponente einzeln und wählen die zeitunabhängige Darstellung, sodass

$$E_x(x) = E_{x+} e^{i(k_x x)} + E_{x-} e^{-i(k_x x)}$$

In x-Richtung muss die Welle eine stehende Welle zwischen $x = 0$ und $x = L$ sein, weshalb $E_x(0) = E_{x+} e^{i(k_x 0)} + E_{x-} e^{-i(k_x 0)} = 0 \Leftrightarrow E_{x+} e^{i(k_x 0)} = -E_{x-} e^{-i(k_x 0)} \Rightarrow E_{x+} = -E_{x-} \Rightarrow E_x(x) = E_{x+} (e^{i(k_x x)} - e^{-i(k_x x)}) = E_0 (e^{i(k_x x)} - e^{-i(k_x x)})$.

Und mit diesem Resultat $E_x(L) = E_0 (e^{i(k_x L)} - e^{-i(k_x L)}) = 0$, was dann der Fall ist, wenn $k_x L = n\pi$, wobei $n \in \mathbb{N}$. Dann ergibt sich nämlich

$$E_x(L) = E_0 (e^{i(n\pi)} - e^{-i(n\pi)}) = \begin{cases} E_0(-1 - (-1)) = 0 & \text{für ungerade } n \\ E_0(1 - (1)) = 0 & \text{für gerade } n \end{cases}.$$

Das gleiche Prozedere ergibt sich in den anderen Raumrichtungen, sodass

$$k_x = \frac{n_x \pi}{L}, k_y = \frac{n_y \pi}{L}, k_z = \frac{n_z \pi}{L_z}$$

mit $n_x, n_y, n_z \in \mathbb{N}$. Es gilt per Definition $\omega = kc$ und da hier $k = |\vec{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$ folgt $\omega = \pi c \sqrt{\frac{n_x^2}{L^2} + \frac{n_y^2}{L^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2}}$. Wir definieren nun eine

Modenfunktion, die die entsprechenden elektromagnetischen Moden beschreiben soll:

$$\vec{A}(\vec{k}\vec{r}) = \overrightarrow{A_x}(\vec{k}\vec{r}) + \overrightarrow{A_y}(\vec{k}\vec{r}) + \overrightarrow{A_z}(\vec{k}\vec{r}),$$

sodass die Transversalitätsbedingung durch $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ ausgedrückt werden kann. Wenn die Moden in Form einer Lösung der Helmholtz-Gleichung dargestellt werden können, muss für sie gelten

$$\nabla \cdot \vec{A} = k_x A_x + k_y A_y + k_z A_z = \frac{\pi}{L} (n_x A_x + n_y A_y) + \frac{\pi}{L_z} (n_z A_z) = 0.$$

Daraus folgt, dass wir zwei Polarisationen haben. Das bedeutet, es existieren zwei Wellen für jeden Wellenzahl, was auch unserer Annahme von oben entspricht, in welcher E_+ die einfallende und E_- die reflektierte Welle in unserer Linearkombination waren. Dies gilt aber nur wenn $n_x, n_y, n_z \neq 0$ und nicht, wenn eine dieser Zahlen Null ist. Wenn eine der Zahlen n_x, n_y, n_z bzw. wenn ein k_i Null ist, haben wir nur eine Polarisation. Durch die zwei Polarisatoren, müssen wir doppelt über alle Moden summieren. Wenn wir die Gesamtenergie alle Nullpunktenergie-Moden in der Box erhalten wollen, summieren wir

$$\begin{aligned} 2 \cdot \sum_{n_x, n_y, n_z} \frac{1}{2} \hbar \omega &= \sum_{n_x, n_y, n_z} \hbar c \sqrt{\frac{\pi^2 n_x^2}{L^2} + \frac{\pi^2 n_y^2}{L^2} + \frac{\pi^2 n_z^2}{L_z^2}} \\ &= \hbar c \sum_{n_x=0}^{\infty} \sum_{n_y=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi^2 n_x^2}{L^2} + \frac{\pi^2 n_y^2}{L^2}} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n_z=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi^2 n_x^2}{L^2} + \frac{\pi^2 n_y^2}{L^2} + \frac{\pi^2 n_z^2}{L_z^2}} \right]. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir über alle n_x und n_y summiert und den Fall $n_z = 0$ aus der Summe über alle n_z separiert, da für diesen, wie erklärt, nur eine Polarisation vorliegt, sodass nicht mit 2 multipliziert wird. Da x und y für Casimir-Platten sehr groß gegenüber z sind, wenn z die Richtung ist, die

den Abstand der Casimir Platten misst, können wir die Summen durch Integrale ersetzen:

$$\langle E \rangle = \hbar c \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi^2 n_x^2}{L^2} + \frac{\pi^2 n_y^2}{L^2}} + \sum_{n_z=1}^\infty \sqrt{\frac{\pi^2 n_x^2}{L^2} + \frac{\pi^2 n_y^2}{L^2} + \frac{\pi^2 n_z^2}{L_z^2}} dn_x dn_y.$$

Wir wählen nun eine Polarkoordinatendarstellung, nachdem wir eine Substitution der x und y Terme mit $dk_x dk_y$ vorgenommen haben. Von oben erhalten wir $k_{x,y} = \frac{n_{x,y}\pi}{L} \Rightarrow dn_{x,y} = \frac{L}{\pi} dk_{x,y}$. Wir setzen ein

$$\langle E \rangle = \hbar c \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{2} \sqrt{k_x^2 + k_y^2} + \sum_{n_z=1}^\infty \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \frac{\pi^2 n_z^2 L}{L_z^2}} dk_x \frac{L}{\pi} dk_x.$$

In Polarkoordinaten integrieren wir über $dr d\varphi$, wobei $r^2 = k_x^2 + k_y^2$ und $dk_x dk_y = r dr d\varphi$. Wir integrieren nun über $0 \leq r \leq \infty$ und $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, da nur im ersten Quadranten die Bedingung erfüllt ist, dass alle Werte positiv sind, wie es für die Energie nötig ist. Dadurch erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \frac{L^2}{\pi^2} \hbar c \int_0^\infty \left[\left(\frac{1}{2} \sqrt{r^2} + \sum_{n_z=1}^\infty \sqrt{r^2 + \frac{\pi^2 n_z^2}{L_z^2}} \right) \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} r dr \\ &= \frac{L^2 \pi}{\pi^2 2} \hbar c \int_{r=0}^\infty \left(\frac{1}{2} \sqrt{r^2} + \sum_{n_z=1}^\infty \sqrt{r^2 + \frac{\pi^2 n_z^2}{L_z^2}} \right) r dr \end{aligned}$$

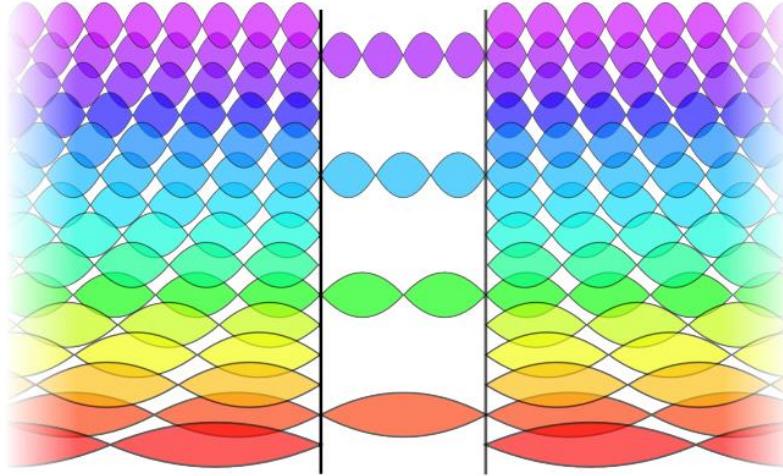
Die Reihe divergiert natürlich ins Unendliche und das Integral divergiert noch schneller, was aber kein Problem ist und auch physikalisch etwas Sinn ergibt. Wenn an jedem Punkt im kontinuierlichen Raum angenommen wird, dass ein harmonischer Oszillator im Grundzustand schwingt, dann wird die Energie natürlich über alle Punkte hinweg unendlich. Um nun trotzdem weiterrechnen zu können, wird dieses unendlich hohe Potenzial einfach als Nullpunkt definiert, da man in der Thermodynamik sowieso nicht mit absoluten Energien rechnen kann. Es ist aber anzumerken, dass in der Realität

durchaus nicht feststeht, ob der Raum kontinuierlich ist. Es gibt verschiedene Theorien, wie die Schleifenquantengravitation, die Kausale Mengentheorie und andere, die eine Raumzeitkörnung beschreiben, die einige Probleme der heutigen Physik, wie die Ultraviolett-Katastrophe des Feynman-Integrals des quantisierten Gravitation verhindern könnte. Allgemein nennt man eine solche Theorie eine Gittertheorie. Diese Raumzeitkörnung könnte durch die Planck-Länge gegeben sein, es sind aber auch Modelle mit feinerer Raumzeitkörnung vorstellbar. Sollte die Raumzeit tatsächlich nicht kontinuierlich, sondern diskret sein, wäre die Vakuumenergie nicht unendlich groß, aber dennoch für alle praktischen Anwendungen als unendlich zu approximieren.

Im Folgenden werden wir $\frac{1}{2}\sqrt{r^2 + \sum_{n_z=1}^{\infty} \sqrt{r^2 + \frac{\pi^2 n_z^2}{L_z^2}}}$ abkürzen und

$$\sum_{n_z=(0)1}^{\infty} \sqrt{r^2 + k_z^2}$$

schreiben, wobei $n_z = (0)1$ die Fälle unterscheiden soll, in denen $n_z = 0$, wo der Faktor $\frac{1}{2}$ eingefügt werden muss, und in denen $n_z \geq 1$, wo die Summenterme so vorliegen, wie angegeben, ohne den zusätzlichen Vorfaktor $\frac{1}{2}$. Wir wollen nun die Vakuumenergiedifferenz zwischen einem Zustand mit $L_z \rightarrow \infty$ und dem hier betrachteten Zustand für sehr kleine Plattenabstände betrachten. Ersteres entspricht dem Fall zwei sehr entfernter Spiegel und approximiert daher alle Moden im freien Raum. Auch diese müssen allerdings noch die Transversalitätsbedingungen einhalten, wie im folgenden Bild gezeigt:



[25]

Genau wie bereits für die x und y Terme wird für $L_z \rightarrow \infty$ die Summe zu einem Integral

$$\begin{aligned}\langle E \rangle_{fR} &= \frac{L^2 \pi}{\pi^2 2} \hbar c \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\sqrt{r^2 + k_z^2} \right) r dr d n_z \\ &= \frac{L^2 \pi}{\pi^2 2} \hbar c \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\sqrt{r^2 + k_z^2} \right) r dr \frac{L_z}{\pi} dk_z,\end{aligned}$$

wobei $\langle E \rangle_{fR}$ die Nullpunkt-Energie des freien Raums ist und $\Delta E = \langle E \rangle - \langle E \rangle_{fR}$ die Energiedifferenz zwischen Casimir-Spalt und freiem Raum:

$$\begin{aligned}\Delta E &= \frac{L^2 \pi}{\pi^2 2} \hbar c \left[\int_{r=0}^\infty \left(\sum_{n_z=(0)1}^\infty \sqrt{r^2 + k_z^2} \right) r dr \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\sqrt{r^2 + k_z^2} \right) r dr \frac{L_z}{\pi} dk_z \right].\end{aligned}$$

Es wird eine weitere Substitution mit $u = \frac{L_z^2}{\pi^2} r^2$ durchgeführt, sodass $\frac{du}{dr} = \frac{2L_z^2}{\pi^2} r \Leftrightarrow dr = \frac{\pi^2}{2L_z^2} \frac{1}{r} du$, $dn_z = dn = \frac{L_z}{\pi} dk_z \Leftrightarrow dk_z = \frac{\pi}{L_z} dn$ und $k_z^2 = \frac{\pi^2 n^2}{L_z^2}$.

Wir bezeichnen nun n_z als n . Es resultiert

$$\begin{aligned}
\Delta E &= \frac{L^2 \pi}{\pi^2 2} \hbar c \left[\int_{u=0}^{\infty} \left(\sum_{n=(0)1}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi^2}{L_z^2} u + \frac{\pi^2}{L_z^2} n^2} \right) r \frac{\pi^2}{2L_z^2} \frac{1}{r} du \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left(\sqrt{\frac{\pi^2}{L_z^2} u + \frac{\pi^2}{L_z^2} n^2} \right) r \frac{\pi^2}{2L_z^2} \frac{1}{r} du \frac{L_z}{\pi} \frac{\pi}{L_z} dn \right] \\
&= \frac{L^2 \pi}{\pi^2 2} \hbar c \left[\int_{u=0}^{\infty} \left(\sum_{n=(0)1}^{\infty} \frac{\pi}{L_z} \sqrt{u + n^2} \right) \frac{\pi^2}{2L_z^2} du \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\pi}{L_z} \sqrt{u + n^2} \frac{\pi^2}{2L_z^2} dudn \right] \\
&= L^2 \hbar c \frac{\pi^2}{4L_z^3} \left[\int_{u=0}^{\infty} \left(\sum_{n=(0)1}^{\infty} \sqrt{u + n^2} \right) du - \int_{n=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} \sqrt{u + n^2} dudn \right]
\end{aligned}$$

Auch diese Energiedifferenz divergiert, aber kann dadurch eingeschränkt werden, dass reale Leiterplatten nicht für alle Frequenzen perfekte Leiter sind, sodass für hohe Frequenzen die Transversalitätsbedingung nicht mehr gilt. Ein Leiter hat die Plasmafrequenz $\omega_p = \frac{Nq^2}{m_e \epsilon_0}$. Diese beschreibt die minimale Schwingungsfrequenz, die Elektronen im Leiter anregen kann. Unterhalb der Plasmafrequenz können die Leiterplatten als ideale reflektierende Grenzschichten dienen, aber darüber kommt es zu Elektronenschwingungen, was effektiv bedeutet, dass die Materialien für Photonen höherer Frequenzen transparenter werden. Um dieses Verhalten mathematisch einzufügen, wählt man eine Cut-Off Funktion $f(k/k_m)$ die für große $k \gg k_m$ bzw. hohe Frequenzen gegen Null geht und für kleine Frequenzen $k \ll k_m$ gegen 1 geht. Es gilt $k = k_m$, dass $f(k/k_m) = f(1) = \frac{1}{2}$. Wir wählen an dieser Stelle eine Stufenfunktion $f(k/k_m) = \begin{cases} 1 & \text{für } k < k_m \\ 1/2 & \text{für } k = k_m \\ 0 & \text{für } k > k_m \end{cases}$.

Wir erhalten

$$\Delta E = L^2 \hbar c \frac{\pi^2}{4L_z^3} \left[\sum_{n=(0)1}^{\infty} \int_0^{\infty} \sqrt{u+n^2} f\left(\frac{\pi\sqrt{u+n^2}}{L_z k_m}\right) du - \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \sqrt{u+n^2} f\left(\frac{\pi\sqrt{u+n^2}}{L_z k_m}\right) dudn \right],$$

wobei (vergleiche oben) $\frac{\pi}{L_z} \sqrt{u+n^2} = \sqrt{r^2 + k_z^2} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = k$.

Das Argument einer solchen Cut-Off Funktion funktioniert in manchen Fällen, wie diesen, in anderen jedoch gibt es manchmal kein gutes physikalisches Argument für den Cut-Off. In diesen Fällen muss für die Regularisierung unspezifizierte Physik angenommen werden oder es müssen andere Formalismen verwendet werden.

Als nächstes substituieren wir $\omega = u + n^2$, mit $\frac{d\omega}{du} = 1$ und für $u = 0 \Rightarrow \omega = n^2$, sodass

$$\Delta E = L^2 \hbar c \frac{\pi^2}{4L_z^3} \left[\sum_{n=(0)1}^{\infty} \int_{n^2}^{\infty} \sqrt{\omega} f\left(\frac{\pi\sqrt{\omega}}{L_z k_m}\right) d\omega - \int_0^{\infty} \int_{n^2}^{\infty} \sqrt{\omega} f\left(\frac{\pi\sqrt{\omega}}{L_z k_m}\right) d\omega dn \right].$$

Nun definieren wir

$$\begin{aligned} F(n) &= \int_{n^2}^{\infty} \sqrt{\omega} f\left(\frac{\pi\sqrt{\omega}}{L_z k_m}\right) d\omega = \left[\frac{2}{3} \omega^{3/2} f\left(\frac{\pi\sqrt{\omega}}{L_z k_m}\right) \right]_{n^2}^{\infty} - \int_{n^2}^{\infty} \sqrt{\omega} f'\left(\frac{\pi\sqrt{\omega}}{L_z k_m}\right) d\omega \\ &= -\frac{2}{3} (n^2)^{3/2} f\left(\frac{\pi n}{L_z k_m}\right) = -\frac{2}{3} n^3 f\left(\frac{\pi n}{L_z k_m}\right), \end{aligned}$$

da $f'\left(\frac{\pi\sqrt{\omega}}{L_z k_m}\right) = 0$. Daraus folgen die Ableitungen

$$\begin{aligned} F'(n) &= -2n^2 f\left(\frac{\pi n}{L_z k_m}\right) - \frac{2}{3} n^3 f'\left(\frac{\pi n}{L_z k_m}\right) = -2n^2 f\left(\frac{\pi n}{L_z k_m}\right) \\ F''(n) &= -4nf\left(\frac{\pi n}{L_z k_m}\right) - 2n^2 f'\left(\frac{\pi n}{L_z k_m}\right) \cdot \left(\frac{\pi}{L_z k_m}\right) = -4nf\left(\frac{\pi n}{L_z k_m}\right) \\ F'''(n) &= -4f\left(\frac{\pi n}{L_z k_m}\right). \end{aligned}$$

Setzen wir ein, ergibt sich $F(0) = 0, F'(0) = 0, F''(0) = 0, F'''(0) = -4$. Man bemerke, dass $f\left(\frac{\pi \cdot 0}{L_z k_m}\right) = 1$, weil für $n = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow k < k_m$. Für $F(\infty)$ hingegen wird $f\left(\frac{\pi \cdot \infty}{L_z k_m}\right) = 0$, sodass auch alle Ableitungen Null werden. Alle weiteren Ableitungen sind einfach Null und können vernachlässigt werden.

Man erhält

$$\Delta E = L^2 \hbar c \frac{\pi^2}{4L_z^3} \left[\frac{1}{2} F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} F(n) - \int_0^{\infty} F(n) dn \right],$$

wobei die letzten zwei Terme durch die Euler-Maclaurin Formel approximiert werden können:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} F(n) - \int_0^{\infty} F(n) dn \\ &= \frac{(F(\infty) - F(0))}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{b_{2n}}{(2n)!} (F^{(2n-1)}(\infty) - F^{(2n-1)}(0)) \\ &= \frac{-F(0)}{2} + \frac{1/6}{2} (F'(\infty) - F'(0)) + \frac{-1/30}{4!} (F'''(\infty) - F'''(0)) \\ &= \frac{-F(0)}{2} + \frac{-4}{720}. \end{aligned}$$

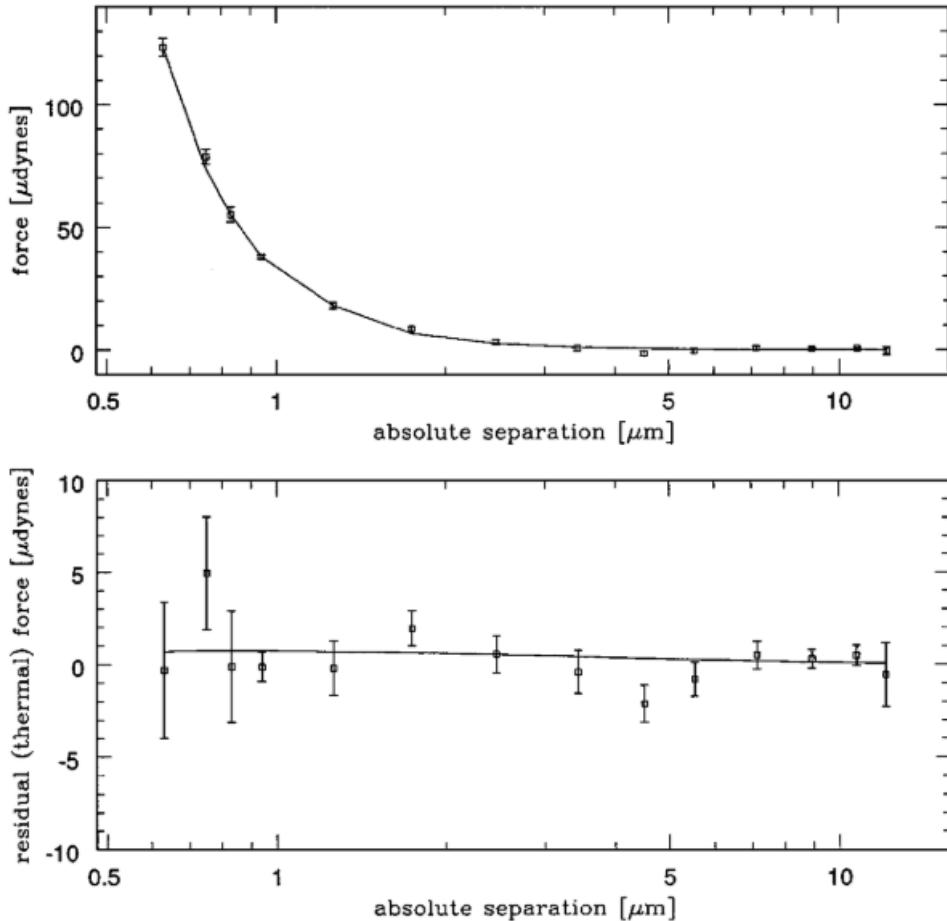
Dies setzen wir ein, um das gewünschte Resultat zu erhalten:

$$\begin{aligned} \Delta E &= L^2 \hbar c \frac{\pi^2}{4L_z^3} \left[\frac{1}{2} F(0) - \frac{F(0)}{2} + \frac{-4}{720} \right] = L^2 \hbar c \frac{\pi^2}{4L_z^3} \left[\frac{-4}{720} \right] = -L^2 \frac{\pi^2 \hbar c}{720 L_z^3} \\ &= -L^2 \frac{\pi^2 \hbar c}{720 d^3}, \end{aligned}$$

wobei $L_z = d$ der Abstand der Casimir Platten ist. Dieses Resultat ist wieder unabhängig von der Cut-Off Funktion. Wir sehen, dass man durchaus mit der Annahme unendlicher Vakuumenergie zu endlichen Energiedifferenzen kommen kann und beobachtbare Phänomene erklären kann. Im erhaltenen Ergebnis ist $L^2 = A$ die Fläche der Casimir Platten, sodass die Energiedichte

$$\frac{\Delta E}{A} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{720 d^3}$$

ergibt. Die Kraft ist dann unmittelbar $F = -\nabla(\Delta E) = -\frac{d}{dz}(\Delta E) = \frac{d}{dz} \frac{L^2 \pi^2 \hbar c}{720 d(z)^3} = -\frac{L^2 \pi^2 \hbar c}{240 d^4}$. Es kommt zu einem Strahlungsdruck $p = \frac{F}{A} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240 d^4}$ und somit zu einem Unterdruck zwischen den Platten, der sie von außen zusammendrückt. Die Bestätigung von Casimirs Theorie erfolgte 1997 durch Lamoreaux mit einem Fehlerbereich von 5% [26].



Eine moderne Herleitung:

[25]

Casimir und van der Waals Kräfte:

[20]

Nullpunkt Energie der Oberflächenmoden:

Nicht-ideale Leiterplatten:

Lifshitz und Barash-Ginzburg Theorien:

Quellentheorie nach Schwinger:

Die Quellentheorie ist theoretisch besonders deshalb interessant, weil sie keine Divergenz Regularisierung oder Renormalisierung benötigt. Hier gibt es ein Quellenfeld J , das an ein Originalfeld ϕ gekoppelt ist. Die Quelle sorgt dabei für die Entstehung und Zerstörung von Teilchen. In diesem Modell ist

das Vakuum tatsächlich ein Nullzustand, wo alle physikalischen Eigenschaften Null werden. Wir betrachten hier die Verbindung zwischen Quellentheorie und Quantenelektrodynamik sowie den Casimir Effekt in der Quellentheorie. [20] Zuerst gehen wir vom klassischen Resultat der Energie E eines Dipols aus

$$E = -\frac{1}{2} \vec{d} \cdot \vec{E},$$

sodass die Polarisierung $\vec{P} = N\vec{d}$ mit N Dipolen in einem Volumen einen Erwartungswert der Energie

$$\langle E \rangle = -\frac{1}{2} \int d^3r \langle \vec{P} \cdot \vec{E} \rangle$$

liefert. Nun ist es wichtig, ein Konzept zu verstehen, das sich Normalordnung nennt. Hierbei geht es um die Anordnung von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren in der Quantenfeldtheorie. Wenn alle Erzeugungsoperatoren links und alle Vernichtungsoperatoren rechts angeordnet werden, erhält man die Normalordnung. Vertauscht man die Anordnung, erhält an die Antinormalordnung. Sofern Operatoren kommutieren, können wir sie vertauschen und in ihrer Normalordnung schreiben. Die Normalordnung ist jedoch in der Hinsicht eine besondere Anordnung, weil dort das Vakuumfeld keinen Einfluss auf die Vakuumerwartungswerte hat. Man beispielsweise zeigen, dass ohne Normalordnung die Quantenfeldtheorie nur richtige Antworten auf die Lamb-Verschiebung liefert, wenn das Vakuumfeld Einfluss auf das elektromagnetische Feld von Atomen hat, während in der Normalordnung kein Vakuumeinfluss mehr nötig ist, um die Lamb-Verschiebung zu erklären. Deshalb ist die Normalordnung in der Quellentheorie wichtig. Wir ordnen daher im Ausdruck der Dipolenergie die elektrische Felderzeugung links und die Feldvernichtung rechts an:

$$\langle E \rangle = -\frac{1}{2} \int d^3r \langle \vec{E}^{(-)} \vec{P} + \vec{P} \vec{E}^{(+)} \rangle,$$

wobei $\vec{E}^{(+)} = \vec{E}_0^{(+)} + \vec{E}_s^{(+)}$, mit $\vec{E}_0^{(+)}$ als Vakuumkomponente und $\vec{E}_s^{(+)}$ als Quellenkomponente des elektrischen Feldes. Wir hatten bereits gezeigt, dass sich das elektrische Feld durch

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = i \sum_{\alpha} \sqrt{2\pi\hbar\omega_{\alpha}} [a_{\alpha}(t)\vec{A}_{\alpha}(\vec{r}) - a_{\alpha}^{\dagger}(t)\vec{A}_{\alpha}^{*}(\vec{r})]$$

dargestellt werden können, wobei $\vec{A}_{\alpha}(\vec{r})$ Modenfunktionen beschreiben.

...

Wie auch bei der Lamb-Verschiebung kommt es beim Casimir Effekt wieder darauf an, dass die Atom-Feld Operatoren kommutieren. Durch diesen Umstand ermöglicht sich eine Erklärung des Casimir Effekts auch ohne Vakuumfeld. Wir wählen hier eine symmetrische Ordnung des Erwartungswerts der Energie von N Dipolen:

$$\langle E \rangle = -\frac{1}{2} \int d^3r \left\langle \frac{1}{2} \vec{P} \cdot [\vec{E}^{(+)} + \vec{E}^{(-)}] + \frac{1}{2} [\vec{E}^{(+)} + \vec{E}^{(-)}] \cdot \vec{P} \right\rangle = \langle E \rangle_V + \langle E \rangle_S,$$

wobei

$$\langle E \rangle_V = -\frac{1}{2} \int d^3r \left\langle \frac{1}{2} \vec{P} \cdot [\vec{E}_0^{(+)} + \vec{E}_0^{(-)}] + \frac{1}{2} [\vec{E}_0^{(+)} + \vec{E}_0^{(-)}] \cdot \vec{P} \right\rangle$$

und

$$\begin{aligned} \langle E \rangle_S &= -\frac{1}{2} \int d^3r \left\langle \frac{1}{2} \vec{P} \cdot [\vec{E}_s^{(+)} + \vec{E}_s^{(-)}] + \frac{1}{2} [\vec{E}_s^{(+)} + \vec{E}_s^{(-)}] \cdot \vec{P} \right\rangle \\ &= -\frac{1}{4} \int d^3r \langle \vec{P} \vec{E}_s + \vec{E}_s \vec{P} \rangle \end{aligned}$$

einmal den Beitrag des Vakuumfeldes und den Beitrag des Quellenfeldes darstellen.

...

Die Schlussfolgerung ist, dass die Erklärung des Casimir Effekt durch das Vakuumfeld nicht notwendig, sondern nur eine präferierte Darstellung des Sachverhalts ist. Es ist genauso gut möglich, den Effekt allein auf reale Quel-

len zurückzuführen. Es kommt einfach nur auf die Anordnung der Feld-Operatoren an. Robert Jaffe merkt jedoch an [27], dass

nach meinem Wissen bislang niemand gezeigt hat, dass die Quellen-theorie oder ein anderer S-Matrix-basierter Ansatz eine vollständige Be-schreibung der QED in allen Ordnungen liefern kann. Bei der QCD scheint Confinement eine unüberwindbare Herausforderung für einen auf der S-Matrix basierenden Ansatz darzustellen, da Quarks und Glu-onen nicht in der physikalischen S-Matrix erscheinen. Selbst wenn man die quantenmechanischen Nullpunkt-kontributionen zur Vaku-umenergie wegargumentieren könnte, bleibt das Problem des sponta-nen Symmetriebruchs bestehen: Kondensate, die Energie tragen, treten bei vielen Energieskalen im Standardmodell auf. Es gibt also gute Gründe, skeptisch gegenüber Versuchen zu sein, die Standardformulie-rung der Quantenfeldtheorie und die Nullpunktenergien, die sie mit sich bringt, zu umgehen

(aus dem Englischen übersetztes Zitat von Jaffe).

[28]

Cut-Off Frequenz-Unabhängigkeit der Casimir Energie:

[29]

Casimir-Kraft in kompressiven Medien:

[29]

Streuungsansatz und Einfluss von Materialeigenschaften, Temperatur und Geometrie:

[30](Kapitel 4 und 5)

Numerische Methoden zur Berechnung von Casimir Wechselwirkungen:

[30] (Kapitel 6)

Können die Hauptsätze der Thermodynamik umgangen werden?

Bevor wir uns einige vergangene Vorschläge zur Nutzung von Vakuumenergie ansehen, wollen wir zuerst theoretisch erörtern, ob es überhaupt plausibel ist, dass die Hauptsätze der Thermodynamik umgangen werden können. Zuerst einmal ist es wichtig, die richtigen Definitionen für die Hauptsätze der Thermodynamik zu benutzen, weil verschiedene Quellen unterschiedliche Anforderungen stellen. Die klassische Thermodynamik ist eine emergente

Physik, die auf quantenmechanischen Fundamenten basiert. Es ist daher notwendig, wenn wir die Hauptsätze fundamental verstehen wollen, eine quantenphysikalische Definition zu verwenden.

Energieerhaltung

Auch in der Quantenmechanik gilt Energieerhaltung, die daraus folgt, dass ein Teilchen eine Zustandsfunktion hat, die sich durch die Euler-Lagrange Funktion bzw. durch die Hamilton-Funktion beschreiben lässt. Energie wird dadurch definiert, dass in einem System dessen Zustandsfunktion sich mit der Zeit nicht verändert, eine Erhaltungsgröße existiert. Energie ist per definitionem diese Erhaltungsgröße. Dabei ist nicht gemeint, dass sich das System nicht zeitlich verändern darf, sondern dass es egal ist, zu welcher Zeit man einen bestimmten Vorgang beobachtet oder ein bestimmtes Experiment macht. Wenn ich heute oder morgen Licht auf einen Spiegel strahle, in jedem Fall wird das Reflexionsgesetz eingehalten. Formal wird dies durch das Noether-Theorem ausgedrückt und in der Quantenmechanik können wir dazu eine Zustandsfunktion durch $|\psi\rangle$ beschreiben. Dies ist für kontinuierliche Größen die Wellenfunktion, die allgemein ein Zustandsvektor im Hilbertraum ist. Die Ortsmessung ist eine solche quasi-kontinuierliche Größe. Ein Teilchen mit der exakten Position x beschreiben wir durch den Zustandsvektor $|x\rangle$, sodass die Wahrscheinlichkeit ein Teilchen im Zustand $|\psi\rangle$ an der Position x zu finden durch $P(x) = |\langle x|\psi\rangle|^2 = |\psi(x)|^2$ gegeben ist, wobei $\psi(x)$ die Wellenfunktion ist. Wir nutzen den unitären Operator U als symmetrische Transformationsgröße, sodass $\langle x|\psi\rangle = \langle x|U^\dagger U|\psi\rangle$, was bedeutet, dass $U^\dagger U = 1$ bzw. $U^\dagger = U^{-1}$. Der unitäre Operator sorgt dafür, dass die Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(x)$ sich bei räumlicher oder zeitlicher Entwicklung des Systems nicht verändert, was natürlich erfüllt sein muss, wenn Wahrscheinlichkeiten über 1 verboten sein sollen. Wir betrachten nun einen Symmetrieoperator $U: x \rightarrow x + \lambda$ der eine räumliche Verschiebung bzw. Translation erzeugt. Wir können den Erwartungswert, die Wellenfunktion an einer bestimmten Position zu finden, als $\langle\psi|x|\psi\rangle \rightarrow \langle\psi|U^\dagger x U|\psi\rangle =$

$\langle \psi | U^{-1} x U | \psi \rangle$ schreiben, wobei sich das System weiterentwickelt, was durch die unitären Operatoren dargestellt wird. Damit die unitären Operatoren eine räumliche Verschiebung bewirken, muss daher gelten $U^{-1} x U = x + \lambda$. Man definiert $U = 1 - \frac{i}{\hbar} \lambda p$, $U^{-1} = 1 + \frac{i}{\hbar} \lambda p$ für infinitesimale räumliche Translation, wobei p als Impulsoperator definiert wird, weil dieser klassisch ebenfalls die räumliche Translationsinvarianz betrifft. Eingesetzt erhält man

$$U^{-1} x U = \left(1 + \frac{i}{\hbar} \lambda p\right) x \left(1 - \frac{i}{\hbar} \lambda p\right) = x - \frac{i}{\hbar} \lambda x p + \frac{i}{\hbar} \lambda p x - R,$$

wobei wir den Rest R im Infinitesimalen vernachlässigen können. Man erhält $x - \frac{i}{\hbar} \lambda(xp - px) = x - \frac{i}{\hbar} \lambda[x, p] = x + \lambda$ wobei $[x, p]$ der Kommutator von Ort und Impuls ist. Daraus folgt

$$[x, p] = i\hbar.$$

Da der Kommutator für Ort und Impuls nicht verschwindet, ist die zeitliche Anordnung von Messungen wichtig. Wenn der Kommutator verschwindet, können die aus der Anwendung der Operatoren auf die Zustandsfunktion resultierenden Eigenwerte in beliebige Reihenfolge gemessen werden, ohne dass die Messung des einen, die Messung des anderen beeinflusst. Aber für nicht verschwindende Kommutatoren können die beiden Observablen nicht zur gleichen Zeit präzise bestimmt werden.

Gleichermaßen lässt sich nun ein unitärer Operator zur Zeittranslation $U = 1 - \frac{i}{\hbar} t H$ entwerfen, wobei H einfach als Energie definiert wird. Dann folgt für eine beliebige zeit-invariante Größe (wählen wir hier beispielsweise p)

$$U^{-1} p U = \left(1 + \frac{i}{\hbar} t H\right) p \left(1 - \frac{i}{\hbar} t H\right) = p - \frac{i}{\hbar} t p H + \frac{i}{\hbar} t H p = p - \frac{i}{\hbar} t [p, H].$$

Da wir gesagt haben, dass p zeitinvariant sein soll, gilt $\frac{dp}{dt} = -\frac{i}{\hbar} t [p, H] = 0$

$$\Rightarrow [p, H] = 0.$$

Alle Größen, die mit der Energie kommutieren, sind daher zeit-invariant. Versuchen wir noch einen rigoroseren Beweis. [31] Dazu nutzen wir als erstes die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung in Bracket-Notation:

$$\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = -iH|\psi(t)\rangle.$$

Für eine beliebige Observable Q ist dann der Erwartungswert $\langle \psi(t)|Q|\psi(t)\rangle$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{d}{dt} \langle \psi(t)|Q|\psi(t)\rangle &= \langle \dot{\psi}(t)|Q|\psi(t)\rangle + \langle \psi(t)|Q|\dot{\psi}(t)\rangle \\ &= \frac{i}{\hbar} \langle \psi(t)|HQ|\psi(t)\rangle - \frac{i}{\hbar} \langle \psi(t)|QH|\psi(t)\rangle \\ &= \frac{i}{\hbar} \langle \psi(t)|HQ - QH|\psi(t)\rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [H, Q] \rangle = -\frac{i}{\hbar} \langle [Q, H] \rangle.\end{aligned}$$

Wenn Q eine zeit-invariante Größe ist, muss $\frac{d}{dt} \langle Q \rangle = -\frac{i}{\hbar} \langle [Q, H] \rangle = 0$ sein. Eine zeit-invariante Größe ist natürlich eine Erhaltungsgröße. Daher definiert der Kommutator $[Q, H] = 0$ in der Quantenmechanik die Erhaltung. Nach Kommutatorregeln gilt, wenn $[Q, H] = 0$, dass auch $[H, Q] = 0$ ist, weil $[Q, H] = -[H, Q]$. Und es folgt auch, dass $[Q^n, H] = 0$ sein muss. Dass Energie in der Quantenmechanik erhalten bleibt, ist einfach zu sehen, weil

$$[H, H] = HH - HH = 0.$$

Jeder Operator kommutiert mit sich selbst, und sofern ein Operator mit dem Hamilton-Operator kommutiert, handelt es sich um eine Erhaltungsgröße. Die Energie ist deshalb eine Erhaltungsgröße. Wie wir oben gesehen haben, resultiert diese Erhaltung aus der Zeit-Invarianz. Sollte es also irgendwie möglich sein, Energie aus dem Nichts zu kreieren, würde man die zeitliche Symmetrie verletzen und gegen unsere quantenmechanischen Beobachtungen verstößen. Es ist nicht davon auszugehen, dass die Verletzung des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik möglich ist, auch nicht auf Quantenebene.

Stochastische Elektrodynamik

Ein physikalisches Modell, in welchem die Extraktion von Nullpunktenergie nicht den ersten Hauptsatz der Thermodynamik verletzen würde, ist die stochastische Elektrodynamik. Bevor wir dieses Modell betrachten, möchte

hier noch einmal auf die Ultraviolett Katastrophe zurückkommen. Diese wurde zwar durch Planck gelöst, kam aber später mit dem quantenmechanischen Ansatz zum Wärmerauschen wieder. Normalerweise betrachtet man dazu die lokale thermische Bewegung von Ladungen in Widerständen. Wir werden dies zum besseren Verständnis kurz herleiten. [32]

$$\langle v_n^2 \rangle = 4kT\Delta f$$

Das Problem mit dieser spektralen Formel des Wärmerauschens ist, dass wir die Ultraviolett-Katastrophe wieder einführen, dass nämlich für $f \rightarrow \infty$ unendlich große Rauscheffekte erhalten. Nyquist [33] hat bemerkt, dass zur Herleitung des Wärmerauschens das Äquipartitionstheorem angenommen wurde, sodass nach kinetischer Gastheorie $E_{kin} = \frac{1}{2}ikT$ für i Freiheitsgrade und nach Virialsatz für harmonische Schwingungen im Mittel $E = E_{kin} + E_{pot} = 2E_{kin} = ikT$. Pro Freiheitsgrad wurde somit einfach eine gleichverteilte mittlere Energie kT angenommen. In der Quantenstatistik wird die Energie pro Freiheitsgrad jedoch durch $\frac{hf}{e^{hf/kT}-1}$ beschrieben, weshalb er 1928 schlussfolgerte, dass die tatsächliche Fluktuation

$$\langle v_n^2 \rangle = \frac{4Rhf}{e^{hf/kT} - 1} \Delta f$$

sein sollte. Für $f \rightarrow 0$ geht diese Gleichung wieder in das klassische Johnson Rauschen über, was wir durch die Reihenentwicklung der e-Funktion zeigen können. Für die Taylorentwicklung gilt $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$, sodass in linearer Näherung $e^{hf/kT} - 1 = 1 + \frac{hf}{kT} - 1 = \frac{hf}{kT} \Rightarrow \langle v_n^2 \rangle = \frac{\frac{4Rhf}{hf}}{\frac{kT}{kT}} \Delta f = 4RkT\Delta f$. Allerdings führt die Anpassung von Nyquist zu anderen Problemen. Beispielsweise sollte es dann möglich sein, wenn $hf > kT$ (im Terahertz Band) ohne jegliches Rauschen zu kommunizieren. Das ist bereits experimentell widerlegt. Außerdem würde sie für $T = 0$ vorhersagen, dass keine Energie existiert. Das verletzt jedoch die Unschärferelation und unsere bisherigen Untersuchungen des Grundzustandes jedes Quantensystems. Der Fehler versteckt sich darin, dass $\frac{hf}{e^{hf/kT}-1}$, wie wir gesehen hatten, nur das Ergebnis

nis Plancks erster Theorie war, aber eine Korrektur in seiner zweiten Theorie eingeführt wurde, sodass

$$\rho(hf) = \frac{8\pi f^2}{c^3} \left(\frac{hf}{e^{hf/kT} - 1} + \frac{hf}{2} \right).$$

Damit erhalten wir selbst bei $T = 0$ ein gewisses Grundrauschen, aber wir handeln uns erneut eine Ultraviolett-Katastrophe ein, weil

$$\langle v_n^2 \rangle = 4R \left(\frac{hf}{e^{hf/kT} - 1} + \frac{hf}{2} \right) \Delta f$$

über alle Frequenzen integriert wieder unendliche Rauscheffekte erzeugt. Daher scheint die erste Fassung attraktiver und kann als eine Art Renormalisierung betrachtet werden, wie man sie aus der Quantenfeldtheorie kennt. Dass dies gerechtfertigt ist, so wird argumentiert, liegt daran, dass $\frac{hf}{2}$ der Grundzustand des harmonischen Oszillators ist, weshalb es keinen Energiezustand gibt, der tiefer ist und somit Nullpunktenergie nicht irgendwie übertragen werden kann, weil das implizieren würde, dass das Objekt, das die Energie übertragen hat, nun in einem noch tieferen Energiezustand ist, was per Definition unmöglich ist. Bei der Integration kann $\frac{hf}{2}$ also vernachlässigt werden. Dass der Term trotzdem in Textbüchern angegeben wird, kann auf Callen und Welton zurückgeführt werden [34], die den Nullpunktenergieterm in ihrer Theorie zum Quantenrauschen auf natürliche Weise wieder erhielten. Wir werden uns die Theorie hier nicht ansehen, aber es sei erwähnt, dass das Nullpunktenergierauschen, das darin enthalten ist, keine beobachtbare Rauschkomponente ist, da dies erfordern würde, dass Vakuumenergie abgegeben werden kann, was jedoch nicht der Fall ist. Dennoch existieren Fluktuationen, die auch nach Renormalisierung in der Quantenfeldtheorie wieder auftauchen und ein Rauschen für $T = 0$ produzieren. Quantenfluktuationen können dabei keine Rauschleistung erzeugen, denn Nullpunktenergie steht für thermische Prozesse nicht zum Austausch von Energie zur Verfügung, aber können dennoch Rauschen verursachen. Es wird daher standardmäßig argumentiert, dass zwar Vakuumenergie keine realen Konsequenzen hat bzw. nicht zwangsläufig existieren muss, aber dass Vaku-

umfluktuationen existieren und Rauschen verursachen. Eine mögliche Interpretation dieses Resultats ist die Hypothese, dass das Universum von einem gigantischen Energiereservoir durchsetzt ist, das, wie ein thermodynamisches System, stets in Bewegung ist und Schwankungen erzeugt, aber im Endeffekt makroskopisch im Equilibrium vorliegt, sodass keine Energie entnommen werden kann. Man kann sich in diesem Bild virtuelle Teilchen als Teilchen vorstellen, die, ähnlich wie die Moleküle eines Gases, manchmal mehr und manchmal weniger kinetische Energie haben, die sie an andere Teilchen übertragen, aber da die Energie direkt an andere Teilchen mit niedrigeren kinetischen Energien zerstreut wird, lässt sich die Energie nicht nutzen. In einem solchen Modell ist der Grundzustand des quantenmechanischen harmonischen Oszillators nur deshalb nicht Null, weil dies ein thermisches Ungleichgewicht im Vakuum erzeugen würde und virtuelle Teilchen sofort Energie abgeben würden, um das thermische Ungleichgewicht auszugleichen. Könnte man jedoch irgendwie ein Ungleichgewicht in der Vakuumenergie erzeugen, könnte man sie in diesem Modell nutzen, ohne den ersten Hauptsatz der Thermodynamik zu verletzen, denn man kreiert dabei keine Energie aus dem Nichts, sondern entzieht lediglich dem Vakuum Energie. Das sollte natürlich zur Abkühlung des Vakuums führen. Auf der anderen Seite steht ein Modell, in welchem es keine Vakuumenergie gibt, sondern lediglich Vakuumfluktuationen. Auch hier wird die Amplitude natürlich unendlich groß, was jedoch dadurch verhindert werden kann, dass man eine endliche Bandbreite und ein endliches Volumen betrachtet.

Davis, Phillips und Eshraghian konkludieren:

Wir haben die Debatten über die Objektivität des Einflusses der ZPF auf elektrisches Rauschen überprüft. Obwohl in der Literatur die Terminologie nicht einheitlich ist, schlagen wir vor, zur Vermeidung von Verwirrung den nicht extrahierbaren und nicht beobachtbaren Grundzustand als ZPE zu bezeichnen, während die Vakuumfluktuationen selbst als ZPF bezeichnet werden. Wir haben festgestellt, dass die mittlere quadratische Abweichung der ZPF die Form $hf/2$ hat und auch

die ZPE die Form $hf/2$ hat. Dies hat in der Literatur einige Bestürzung verursacht, und wir haben hervorgehoben, dass diese Größen unterschiedlich sind. Die ZPE kann durch Renormierung entfernt werden, während die Effekte der ZPF in einer Reihe von physikalischen Phänomenen beobachtet werden können. Es ist klar, dass Rauschmessungen durch ein $hf/2$ -Gesetz beeinflusst werden, wie experimentell festgestellt wurde, da sonst Kommunikationskanäle oberhalb einer bestimmten Frequenz rauschfrei wären. Es herrscht jedoch eine ungelöste Debatte darüber, ob dies eine reale Rauschleistung darstellt oder eine quantenmechanische Störung einer Messung ist (ohne die Kraft, Steaks zu grillen). Außerdem schlug Senitzky eine dritte Option vor, dass ZPF keine Arbeit verrichten kann, aber die Leistung einer externen Quelle modulieren kann. Alle diese Ansichten haben Probleme: (1) Die Beharrlichkeit auf einem Messartefakt, ohne dass Arbeit verrichtet wird, scheint die Realität anderer beobachteter ZPF-Effekte zu leugnen, (2) ob Leistung produziert oder moduliert wird, wie Senitzky vorschlägt, lässt immer noch das Problem eines potenziell unendlichen Anstiegs um $hf/2$ offen. Es scheint, dass die Vakuumfluktuationen immer noch nicht vollständig verstanden sind. Lösungen könnten entweder aus Entwicklungen in der Quantenphysik kommen oder alternativ besteht die Möglichkeit, das Problem weiterhin aus der Sicht des Rauschens anzugehen. [35], [36], [37]

Nehmen wir an, dass die Schlussfolgerung stimmt, dass Vakuumenergie durch Renormierung vernachlässigt werden kann, und lediglich Vakuumfluktuationen existieren, dann stellt sich die Frage, ob Rauschen tatsächlich einen Beitrag leisten kann, um Energie zu gewinnen. Erst einmal scheint dies von den meisten Wissenschaftlern verneint zu werden, aber Rauscheffekte können durchaus, wie Senitzky anmerkt, reale Energien modulieren. Es ist somit ausgeschlossen, dass der Energieerhaltungssatz durch Vakuumfluktuationen verletzt wird, aber es ist vorstellbar, dass das Vakuumrauschen einen Maxwell'schen Dämon zulässt. In diesem Sinne wäre es möglich, einer Seite

eines Geräts Elektronen zu entziehen, sodass die eine Seite am Ende mehr und die andere weniger Energie hat. Es ist also denke ich durchaus möglich, die in diesem Werk vorgestellten Technologien allein durch Vakuumfluktuationen zu erklären, anstatt sich auf Vakuumenergie berufen zu müssen. Dennoch wollen wir hier eine Theorie besprechen, die mit der Existenz einer echten Vakuumenergie arbeitet, um zu zeigen, dass es auch dann noch möglich ist, den Energieerhaltungssatz einzuhalten, selbst wenn wir scheinbar Energie aus dem Nichts generieren. Denn bisher sind wir natürlich der Frage ausgewichen, wie es sein kann, dass wir Energie aus dem Vakuum erhalten könnten, ohne dass dem Vakuum Energie entzogen wird. Ein Maxwell'scher Dämon würde bedeuten, dass eine Seite unseres Geräts kälter werden sollte bzw. an Energie verlieren sollte, während die andere Energie erhält. Aber das kann in der Casimir Engine nicht der Fall sein, da wir Vakuumfluktuationen nutzen, um einen asymmetrischen Ladungstransport zu generieren. Wir nutzen mit anderen Worten keine reale Energie, sondern Energie, die das Vakuum für kurze Zeit zur Verfügung stellt. Wenn wir keine reale Energie verbrauchen, aber trotzdem reale Energie erhalten, müssen wir dann nicht dem Vakuum Energie entzogen haben. Nein. Denn die Energie der Vakuumfluktuation erscheint nur sehr kurz und verschwindet direkt wieder. Das einzige nutzbare Resultat dieser Fluktuation ist nicht dessen Energie, sondern dessen Rauschwirkung auf ein reales Teilchen, sodass dieses durch eine Barriere tunneln kann. Das Elektron hat nach der Tunnelung nicht mehr die Energie, die es für kurze Zeit aus dem Vakuum entlehnt hat. Es hat lediglich seine Position verändert. Daher handelt es sich nicht um eine Methode zur Extraktion von Vakuumenergie, sondern um einen Maxwell'schen Dämon. Wenn die Frage gestellt wird, woher die Energie kommt, die wir aus dem Gerät entziehen können, müssten wir sagen, dass wir sie aus einer Seite des Geräts entnommen haben und durch einen Maxwell'schen Dämon auf die andere Seite des Geräts transferiert haben. Aber die stochastische Elektrodynamik würde es sogar erlauben, nicht nur Vakuumfluktuationen, sondern Vakuumenergie zu nutzen, ohne den ersten Hauptsatz der Thermodynamik zu verletzen. Hierbei ist folgende Beobachtung wichtig: In Abwesenheit von Quellen, ist

in der klassischen Elektrodynamik das elektromagnetische Feld vollständig abwesend. Statt nun aufgrund unserer Fluktuationsbeobachtungen eine ganz neue Theorie zu entwerfen, können wir auch ein klassisches fluktuierendes Feld mit Energie $\frac{\hbar f}{2}$ pro Schwingungsmodus in die klassische Elektrodynamik einfügen. Es gelten also einfach nur die Maxwell-Gleichungen plus ein Vakuumfeld, dessen Quelle unbekannt ist. Einer solchen hypothetischen Quelle ließe sich Energie entnehmen, womit effektiv die Vakuumenergie abgesenkt würde. Mit dieser Annahme lassen sich in der Tat viele verschiedene Phänomene, wie der Casimir Effekt, die spektrale Energiedichte der Quantentheorie oder der Unruh-Davies Effekt erklären, aber sie scheidet als fundamentale Theorie aus, weil sie eben eine klassische Theorie ist und viele quantenphysikalische Phänomene, die nicht direkt mit der Nullpunktenergie zu tun haben, nicht erklären kann (siehe Milonni). Auch wenn es sich also um ein interessantes Modell handelt, werden wir es hier nicht weiter als Konkurrent zur Quantenelektrodynamik ernst nehmen.

Es wurde oben erwähnt, dass Vakuumfluktuationen nicht unendlich werden, sofern das Volumen und die Bandbreite ihrer Existenz eingeschränkt werden. Wenn wir infolge der hier besprochenen Argumente schlussfolgern, dass Vakuumenergie renormalisiert werden muss und für physikalische Phänomene irrelevant ist, aber Vakuumfluktuationen reale Auswirkungen haben, dann findet sich hier womöglich eine Lösung für viele Probleme (wie die Cut-Off Frequenz virtueller Moden in verschiedenen Effekten).

William Louisell formuliert folgendes Bild [38]. Man nehme einen elektrischen Verschiebungsvektor mit der j -ten Komponente

$$D_j(r, t) = D_j^+(r, t) + D_j^-(r, t)$$

mit $D_j^+(r, t) = i \sum_{l, \sigma} \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \hbar \omega}{2\tau}} (\hat{e}_{l, \sigma})_j a_{l, \sigma}(t) e^{ikr}$ und $D_j^-(r, t) = [D_j^+(r, t)]^\dagger$.

$D_j^-(r, t)$ enthält ausschließlich Erzeugungsoperatoren und $D_j^+(r, t)$ ausschließlich Vernichtungsoperatoren. Wenn $|\psi(0)\rangle$ der Feldzustand bei $t = 0$ ist, ergibt sich der Erwartungswert

$$\langle D_j \rangle = \langle \psi(0) | D_j(r, t) | \psi(0) \rangle$$

mit $|\psi(0)\rangle = |n_1, n_2, n_3 \dots, n_{l,\sigma}, \dots n_\infty\rangle$. Wenn das Feld in einem Energie-Eigenzustand ist, wird die mittlere Verschiebung $\langle D_j \rangle = 0$. Wenn wir jedoch die Varianz D_j^2 betrachten, verschwindet diese nicht einfach. Es gilt

$$D_j^2 = (D_j^+)^2 + (D_j^-)^2 + D_j^+ D_j^- + D_j^- D_j^+,$$

sodass

$$\langle D_j^2 \rangle = \sum_{l,\sigma} \frac{\varepsilon_0 \hbar \omega}{\tau} (\hat{e}_{l,\sigma})_j^2 \left(n_{l,\sigma} + \frac{1}{2} \right) \Rightarrow \langle \overrightarrow{D}_j^2 \rangle = \frac{\varepsilon_0}{\tau} \sum_{l,\sigma} \hbar \omega \left(n_{l,\sigma} + \frac{1}{2} \right).$$

Im Vakuumzustand gilt dann $n_{l,\sigma} = 0$, sodass

$$\langle \overrightarrow{D}_j^2 \rangle = \frac{\varepsilon_0}{\tau} \sum_{l,\sigma} \frac{\hbar \omega}{2}.$$

Louisell argumentiert, dass die Unendlichkeit, die aus diesem Fluktuationsterm über alle Frequenzen entsteht, nicht fundamental sei, da noch nicht spezifiziert sei, wie die Messung des Feldes durchgeführt werden könnte. Er stellt sich daraufhin eine elektrische Ladung vor, die mit dem Vakuumfeld wechselwirkt. Die Ladung nimmt ein kleines Volumen ΔV ein und wechselwirkt zur Messung des Vakuumfeldes eine kurze Zeit Δt lang mit dem Feld. Um also ein physikalisch sinnvolles Resultat zu erhalten, muss über einen Raumzeit-Mittelwert

$$\overline{D}_j(\Delta V, \Delta t) = \frac{1}{\Delta V \Delta t} \int_{\Delta V} d\tau \int_{\Delta t} dt D_j^H(\vec{r}, t)$$

integriert werden. Der Erwartungswert $\langle \overline{D}_j^2 \rangle$ im Vakuumzustand ist dann

$$\langle 0 | \overline{D}_j^2(\Delta V, \Delta t) | 0 \rangle = \frac{1}{(\Delta V \Delta t)^2} \int_{\Delta V, \Delta t} d\tau d\tau' dt dt' \langle 0 | D_j(\vec{r}, t), D_j(\vec{r}', t') | 0 \rangle,$$

worin wir die Definitionen für $D_j^+(r, t)$ und $D_j^-(r, t)$ einsetzen können, um

$$\langle 0 | D_j(\vec{r}, t), D_j(\vec{r}', t') | 0 \rangle = \sum_{l,\sigma} \frac{\varepsilon_0 \hbar \omega}{2\tau} (\hat{e}_{l,\sigma})_j^2 e^{i(\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')-\omega(t-t'))}$$

zu erhalten. Es ist zu beachten, dass hier die j -te Komponente der elektrischen Verschiebung betrachtet wurde, die in 3D über alle Raumrichtungen summiert werden muss, wobei $\sum_{j=1}^3 (\hat{e}_{l,\sigma})_j^2 = 1$. Es ergibt sich

$$\langle 0 | \bar{D}_j^2(\Delta V, \Delta t) | 0 \rangle = \frac{\epsilon_0 \hbar}{2(\Delta V \Delta t)^2} \int_{\Delta V, \Delta t} d\tau d\tau' dt dt' \sum_{l,\sigma} \frac{\omega}{\tau} e^{i(\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}') - \omega(t-t'))}.$$

Es ist bekannt, dass sich in solch einem Fall wie hier für große Längen $L \rightarrow \infty$ Summen durch Integrale ersetzen lassen und insbesondere in der Festkörperphysik

$$\frac{1}{L^3} \sum_k (\dots) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y dk_z (\dots)$$

gilt. Wir erhalten

$$\langle 0 | \bar{D}_j^2(\Delta V, \Delta t) | 0 \rangle = \frac{\epsilon_0 \hbar}{16\pi^3 c (\Delta V)^2 (\Delta t)^2} \int_{\Delta V, \Delta t} \frac{d\vec{k} d\tau d\tau'}{k} 4 \sin^2\left(\frac{ck\Delta t}{2}\right) e^{i(\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}'))},$$

wobei $\omega = ck$ im freien Raum. Solange ΔV und Δt endlich und nicht Null sind, wird das erhaltene Integral ebenfalls endlich sein. Hiermit wird das Problem der Vakuumenergie zu einem Messungsproblem. Es wird nötig, zu definieren, was genau eine Messung ausmacht, wie lange sie dauert und in welchem Volumen sie stattfindet, um herauszufinden, wie groß der Erwartungswert der Fluktuationsenergie wird.

Fluktuations-Dissipations-Theorem

Wir haben bereits Johnson Rauschen kennengelernt und uns ist bereits ein Spezialfall des Fluktuations-Dissipations-Theorems beim Nachweis der Notwendigkeit des Vakuumfeldes begegnet, der auf einen oszillierenden Dipol zutraf. Die Theorie des Wärmerauschens oder auch Einsteins Theorie von Brown'scher Molekularbewegung waren Vorgänger des Fluktuations-Dissipations-Theorems [39], das durch die Fluktuationen in einem System

detaillierten Gleichgewichts dessen Widerstandseigenschaften vorhersagt. Nun wollen wir die allgemeine Form dieser wichtigen Erkenntnis der Quantenphysik eruieren.

Um in dieses Thema wirklich vertieft einzusteigen, möchte ich wieder einiges an Vorarbeit leisten, und die lineare Antworttheorie (Linear Response Theory) einführen, aus der wir die Kubo Gleichung herleiten können, die ein integraler Bestandteil zur Herleitung des Fluktuations-Dissipations-Theorems ist. Wer nur an den praktischen Konsequenzen des Fluktuations-Dissipations-Theorems interessiert ist, kann diesen mathematischen Teil überspringen, den ich größtenteils nur deshalb behandle, um nachzuweisen, dass es sich hierbei um ein echtes vorhersagbares Phänomen handelt, das womöglich ausgenutzt werden kann, um den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik zu umgehen. Ich möchte betonen, dass wir ab jetzt annehmen, dass der erste Hauptsatz der Thermodynamik nicht umgangen werden kann. Wieso ich das annehme, haben wir im vorigen Abschnitt denke ich ausführlich genug diskutiert. Es bleibt jedoch die Möglichkeit, den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik zu umgehen und ich denke, dass dieser in der Tat kein so solides Fundament hat wie der erste und bereits in einigen durchgeföhrten Experimenten umgangen werden konnte. Daher steht der Praktikabilität der präsentierten Casimir Engine von Moddel et al. prinzipiell nichts im Weg, so lange es sich nur um eine Art Maxwell'schen Dämon handelt.

Lineare Antworttheorie:

[40]

Streumatrix:

Kubo Gleichung:

Quantenfluktuations-Dissipations-Theorem:

Der Beweis des Fluktuations-Dissipations-Theorems und dessen experimentelle Bestätigung [41] bedeuten, dass jede Fluktuation auch tatsächlich mit der Dissipation von Energie einhergehen. Dissipation ist jedoch ein Prozess hoher Entropie, weshalb man vermuten kann, dass kaum nützliche Energie dabei herauskommen kann. Dennoch lässt das Theorem die Schlussfolgerung zu, dass Vakuumfluktuationen, selbst unter der Annahme, dass wir Vakuumenergie nicht nutzen können, trotzdem mit einem Wärmereservoir in Verbindung stehen müssen, das dissipativ Wärme abgeben muss. Wie kann das sein, ohne die Hauptsätze der Thermodynamik zu verletzen? Zu diesem Thema lassen sich verschiedene Hypothesen aufstellen. Eine Hypothese ist, dass es sich bei der dissipativen Kraft stets um eine konservative Kraft handelt. Das werden wir analog bei der Casimir Kraft feststellen, die man behandeln kann, als würde zuerst Energie in der Wechselwirkung der Platten gespeichert werden, indem man sie auseinanderzieht, wonach die Energie durch das Kontrahieren freigesetzt wird. In diesem Sinne wird bei der Casimir Kraft keine neue Energie frei. Es handelt sich um ein konservatives System. Gilt dies für das Vakuum im Allgemeinen, wird durch Vakuumfluktuationen lediglich Energie frei, die zuvor bereits im System gespeichert wurde, sodass keine thermodynamischen Gesetze verletzt werden.

Reggiani und Alfinito [42] weisen beispielsweise darauf hin, dass unter thermischen Gleichgewichtsbedingungen keine experimentelle Bestätigung des Fluktuations-Dissipations-Theorems erbracht werden kann, und erklären

dies anhand des Casimir Effekts, für den im thermischen Equilibrium eine makroskopische Verzerrungsenergie der Casimir-Energie entgegenwirken muss, sodass die Gesamtenergie

$$E_g = E_{Planck} + E_C + E_V,$$

wobei $E_{Planck} = \frac{hf}{e^{hf/kT} - 1}$, E_C die Casimir-Energie und $E_V = -E_C$ die Verzerrungsenergie durch die Casimir-Kraft ist. Somit kürzt sich im thermischen Gleichgewicht die Casimir-Komponente und es wird allgemein argumentiert, dass dies für das Fluktuations-Dissipations-Theorem gilt, weshalb Vakuumfluktuationen keinen Einfluss auf Messungen im thermischen Gleichgewicht haben. Sie argumentieren, dass im allgemeinen Strahlungsgesetz nach Planck

$$E_P = \frac{hf}{e^{hf/kT} - 1} + \frac{hf}{2}$$

der erste Term das Equilibrium von Absorption und Emission zwischen dem Wärmereservoir und dem physikalischen System im thermischen Gleichgewicht beschreibt, während der zweite Term natürlich normalerweise divergiert, weshalb Renormalisierung und eine Spezifikation von Randbedingungen nötig ist, um endliche Werte zu erhalten. Sie nehmen an, dass die Casimir Energie den zweiten Term im Fall der Anwesenheit zweier Metallplatten repräsentiert, womit sie das oben angegebene Ergebnis erhalten. Ob diese Vorgehensweise legitim ist, ist infrage zu stellen, aber sie ist ein Versuch, die experimentellen Daten zu erklären.

Eine andere ähnliche Annahme, die meiner Meinung nach weniger ad hoc ist, beinhaltet, dass Quantenfluktuationen keine echte Leistung erbringen können, aber durchaus durch Rauscheffekte Teilchenbewegungen beeinflussen können, sodass im Endeffekt durch Fluktuationen keine Wärme aus dem Nichts dissipiert wird, sondern Energie eines Teilsystems durch Rauschbewegung in ein anderes Teilsystem übertragen wird, was potenziell als eine Art Dämon (im Sinne des Maxwell'schen Dämons) behandelt werden könnte. Dafür müssen Quantenfluktuationen nicht einmal das zweite Gesetz der

Thermodynamik verletzen, da die Gesamtentropie durchaus dabei zunehmen kann. In den nächsten Abschnitten werden wir diese Hypothese weiter verfolgen.

Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik

[43]

Energieextraktion aus einem Quanten-Wärmereservoir

Carnot-Prozess:

Photonengas-Carnot Wärmekraftmaschine:

[44]

Überschreitung des Carnot-Limits:

[45]

[46]

[47]

[48]

[49]

Energieextraktion aus Vakuumfluktuationen

Moddel und Dmitriyeva kategorisieren drei Hauptgruppen von Extraktionsmethoden [50], die wir hier ebenfalls separat behandeln werden, indem wir ihren Überlegungen folgen:

1. Nicht-lineare Extraktion:

2. Mechanische Extraktion:

[51]

3. Gasfluss durch Casimir-Spalten:

[52]

[50]

[53]

[54]

[55]

Evaneszenz und Tunneleffekt

Bevor wir uns die Physik hinter dem Effekt angucken, die nicht gerade einfach ist, wollen wir vorerst etwas Simpleres unter die Lupe nehmen. Um beispielsweise zu verstehen, warum Lichtwellen nicht einfach wie Teilchen von Oberflächen abprallen, sondern selbst in reflektierende Oberflächen eindringen, müssen wir nicht einmal die Quantentheorie des Lichts verstehen, sondern nur die Grundlagen der geometrischen Optik und der Maxwell Gleichungen kennen. Eigentlich brauchen wir nur zwei Ansätze aus den Maxwell Gleichungen: Ebene Wellen können über die Funktion $e^{i(kr - \omega t)}$ gelöst werden, wo meistens noch eine Amplitude mit angegeben wird, die im Endeffekt über das Betragsquadrat bestimmt, wie die Intensität einer elektromagnetischen Wellen ist. Man schreibt häufig in der Elektrodynamik nur den elektrischen Teil der Lichtwelle auf, weil eine Lichtwelle einfach eine Überlagerung von magnetischen und elektrischen Schwingungen im Raum ist, die im freien Raum in der Beziehung $B = \frac{E}{c}$ stehen, sodass von der elektrischen Feldstärke direkt auch auf die magnetische Flussdichte geschlossen werden kann. Es wäre redundant, dann auch noch die um 90° verschobenen

bene magnetische Welle anzugeben. Wir schreiben also $E(r, t) = E_0 e^{i(kr - \omega t)}$, was ziemlich einfach aus den Maxwell Gleichungen hervorgeht. Nur der Vollständigkeit halber soll hier nochmal gezeigt werden, wie sich eine Wellengleichung aus den Maxwell Gleichungen ergibt.

Vorausgesetzt werden die Maxwell Gleichungen im Vakuum

$$(1) \nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$(2) \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$(3) \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(4) \nabla \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$(5) c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

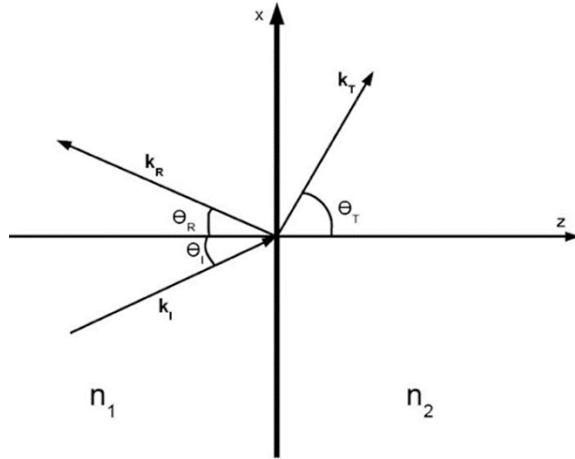
Das Ziel ist es, zu zeigen, dass wir auf eine Wellenfunktion der Form $\frac{n^2}{c^2} \frac{d^2(u)}{dt^2} - \frac{d^2(u)}{dr^2} = 0$ mit $k = \frac{\omega}{c}$ für das elektrische Feld kommen. Dazu nutzt man $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$ aus und muss die Graßmann Identität $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$ kennen, wobei nach (1) $\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) = 0$, sodass $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\nabla^2 \vec{E}$. Beide nun gefundenen Gleichungen zusammengefügt, ergeben $-\nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \Leftrightarrow \nabla^2 \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$ und nach Gleichung (5)

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

womit die Wellengleichung bestimmt wäre, deren einfachste Lösung dann zur ebenen Welle $E(r, t) = E_0 e^{i(kr - \omega t)}$ führt. Weitere Voraussetzungen sind Kenntnisse der Grundlagen geometrischer Optik, speziell des Brechungs- und Reflexionsgesetzes und des Spezialfalls des Totalreflexion.

Totalreflexion:

In der Optik ist seit langem der Effekt der Totalreflexion bekannt. Aber was nicht so bekannt ist, ist die Tatsache, dass es sich bei der sogenannten frustrierten Totalreflexion um einen optischen Tunneleffekt handelt und demnach evaneszente Wellen tatsächlich virtuelle Photonen sind. Dabei wird ein klassisches Modell von Lichtwellen verwendet, das wir uns ansehen wollen, bevor wir den Tunneleffekt quantenphysikalisch beschreiben. Der einfachste



Fall ist die herkömmliche Totalreflexion. Dabei handelt es sich um einen Effekt, bei dem unter kleinem Winkel Licht auf eine Oberfläche strahlt und vollkommen reflektiert wird, statt wie normal, teilweise transmittiert und teilweise reflektiert zu werden. Das Snelliuss'sche Brechungsgesetz besagt bei einem Strahl, der vom optisch dichteren in ein optisch dünneres

Medium trifft $n_1 \sin(\theta_I) = n_2 \sin(\theta_T)$ bzw. $\sin(\theta_I) = \frac{n_2}{n_1} \sin(\theta_T)$.

Wenn θ_T den Winkel des gebrochenen Lichts angibt, muss man feststellen, dass dieser maximal 90° im Bezug zur optischen Achse annehmen kann und somit $\sin(\theta_T) \leq 1$ gilt, weshalb auch $\sin(\theta_I) \leq \frac{n_2}{n_1}$, wenn die Welle in das optisch dünnere Medium eindringen soll. Was passiert aber, wenn der Fall $\sin(\theta_I) > \frac{n_2}{n_1}$ eintritt, sodass θ_T theoretisch größer als 90° werden müsste und daher $\sin(\theta_T) > 1$ wäre? In diesem Fall überschreitet man den sogenannten Grenzwinkel $\sin(\theta_{I,g}) = \frac{n_2}{n_1}$, sodass Totalreflexion auftritt. Nun verhält sich die Oberfläche, die beleuchtet wird, wie ein perfekter Spiegel. Unter Betrachtung der Elektrodynamik muss beachtet werden, dass für elektrische und magnetische Felder die Stetigkeitsbedingung an Grenzflächen gilt. Betrachtet man das elektrische Feld einer Lichtwelle als Randbedingung beim Auftreffen auf die Oberfläche, so muss die Welle stetig-differenzierbar sein. Ganz allgemein wird der Ansatz einer ebenen zweidimensionalen transmittierten Welle

$$E_T = E_{0T} e^{i(k_T r - \omega t)} = E_{0T} e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)}$$

verwendet, wobei nun die geometrischen Beziehungen von k_x und k_z zu k_T (siehe Abbildung) ausgenutzt werden. Hierbei ist $k_T = \frac{2\pi n_2}{\lambda} = \frac{\omega n_2}{c} = n_2 k_0$.

Es gilt $k_x = k_T \sin(\theta_T)$ und $k_z = k_T \cos(\theta_T)$, sodass

$$E_T = E_{0T} e^{i(k_T \sin(\theta_T)x + k_T \cos(\theta_T)z - \omega t)}$$

Um Totalreflexion zu garantieren, wurde die Bedingung $\sin(\theta_T) > 1$ angegeben, wegen der nach trigonometrischer Identität $\cos(\theta_T) = \pm\sqrt{1 - \sin^2(\theta_T)}$ gelten muss, sodass $\cos(\theta_T)$ imaginär ist, weil der Term unter der Wurzel negativ wird. Wir substituieren $k_T \cos(\theta_T) = i\kappa$ und erhalten eine evaneszente Welle

$$E_T = E_{0T} e^{i(k_T \sin(\theta_T)x + i\kappa z - \omega t)} = E_{0T} e^{i(k_T \sin(\theta_T)x - \omega t)} e^{-\kappa z}.$$

Evaneszente Wellen sind virtuell:

Evaneszente heißt hier einfach, dass die Welle in z-Richtung nur sehr dicht an der Grenzfläche existiert und rapide abnimmt. Es zeigt sich ein exponentiell abnehmendes elektrisches Feld hinter der Oberfläche. Die Phasengeschwindigkeit der Welle wird mit $c_z = \frac{\omega}{k_z}$ und die Eindringtiefe wird üblicherweise mit $d_p = \frac{1}{\kappa} = \frac{\lambda}{2\pi n_1 \sqrt{\sin^2(\theta_I) - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}} = \frac{\lambda}{A_N}$ angegeben. Aus den Betrachtungen weiter oben kann man schließen, dass $\cos(\theta_T) = \sqrt{1 - \sin^2(\theta_T)} = \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2(\theta_I)} = \pm i \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2(\theta_I) - 1} = \pm i \frac{1}{n_2} \sqrt{n_1^2 \sin^2(\theta_I) - n_2^2}$

und da $k_z = k_T \cos(\theta_T) = i\kappa$ muss gelten $\kappa = \frac{k_T}{n_2} \sqrt{n_1^2 \sin^2(\theta_I) - n_2^2} = k_T \frac{n_1}{n_2} \sqrt{\sin^2(\theta_I) - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} = k_0 \frac{n_2 n_1}{n_2} \sqrt{\sin^2(\theta_I) - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} = \frac{2\pi n_1 \sqrt{\sin^2(\theta_I) - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\lambda}$,

womit die Eindringtiefe hergeleitet ist. Oftmals schreibt man diese auch als $d_p = \frac{1}{\kappa} = \frac{\lambda}{2\pi \sqrt{n_1^2 \sin^2(\theta_I) - n_2^2}}$. Man fasst die Wellenlängen auch oftmals zusammen, indem man $\lambda_1 = \frac{\lambda}{n_1}$ und $\lambda_2 = \frac{\lambda}{n_2}$ definiert, sodass $d_p =$

$$\frac{\lambda}{2\pi n_1 \sqrt{\sin^2(\theta_I) - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}} = \frac{\lambda_1}{2\pi \sqrt{\sin^2(\theta_I) - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}} \quad \text{oder} \quad d_p = \frac{\lambda}{2\pi n_2 \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2(\theta_I) - 1}} =$$

$$\frac{\lambda_2}{2\pi \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2(\theta_I) - 1}}. [56]$$

Es wird über die evaneszente Welle erstmal keine Energie übertragen, denn der Poynting Vektor ist $S_z = 0$. Man kann zeigen [57], dass $S_x = E_y^2 \sqrt{(1 + \beta)}$ und $S_z = i\beta E_y^2$, was aufzeigt, dass die gesamte reale Energie parallel zur Oberfläche transportiert wird und nur eine imaginäre Energie senkrecht zur Oberfläche existiert. Dies ist jedoch nur für den Mittelwert über ein bestimmtes Zeitintervall der Fall. Für s-polarisierte elektromagnetische Wellen, für welche die evaneszente Welle nur transversal zur Ausbreitungsrichtung schwingt, wird beispielsweise der Poynting Vektor

$$\vec{P}_s = \vec{E}_s \times \vec{H}_s$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_0 c} \frac{n_1}{c} E_s^{T^2} \sin(\theta_I) \cos^2 \left(\omega t - x \frac{n_1 \omega}{c} \sin(\theta_I) + \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{\sin^2(\theta_I) - n_2^2}}{\cos(\theta_I)} \right) \right) \\ 0 \\ \frac{1}{\mu_0 c} \frac{n_1}{c} E_s^{T^2} \sqrt{\sin^2(\theta_I) - n_2^2} \cos^2 \left(\omega t - x \frac{n_1 \omega}{c} \sin(\theta_I) + \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{\sin^2(\theta_I) - n_2^2}}{\cos(\theta_I)} \right) \right) \end{pmatrix}.$$

[58]

Über eine voller Periode wird der Poynting Vektor in z-Richtung zwar Null, aber über eine Viertelperiode existiert eine endliche Flussdichte

$$\frac{1}{4} \int_0^{t/4} \vec{P}_{s,z} = - \frac{1}{\mu_0 c} \frac{n_1}{c} E_s^{T^2} \sqrt{\sin^2(\theta_I) - n_2^2} \cos^2 \left(\omega t - x \frac{n_1 \omega}{c} \sin(\theta_I) + \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{\sin^2(\theta_I) - n_2^2}}{\cos(\theta_I)} \right) \right).$$

Platziert man ein weiteres optisch dichteres Medium $n_3 > n_2$ hinter dem optisch dünneren Medium in einem so kleinen Abstand d , dass die evaneszente Welle noch nicht zu stark abgefallen ist (im Bereich $d \sim \lambda/2$), erzeugt man eine optische Tunnelung und die Welle breitet sich mit verminderter Intensität $I = I_0 e^{-x/d}$ im neuen Medium aus. Auffallend ist natürlich, dass die

Wellenzahl evaneszenter Wellen rein imaginär ist. Nach der mathematischen Entwicklung der Quantenelektrodynamik wurde in verschiedener Literatur der optische Tunneleffekt der evaneszenten Wellen als virtuelle Photonen identifiziert. Virtuelle Teilchen sind auch in anderen Bereichen bekannt, wo sie zum Beispiel als virtuelle Phononen zwischen Elektronen in Leitern zu Supraleitung führen. Für virtuelle Photonen gelten aber spezielle nachweisbare Eigenschaften, wie Nicht-Lokalität und somit die Verletzung der relativistischen Kausalität. Man kann zum Beispiel messen, dass Licht zum Überschreiten der kleinen Barriere zwischen Medium 1 und Medium 3 keine Zeit benötigt. Der optische Tunneleffekt findet ohne Zeitverzögerung statt und erst an der Barriere zu Medium 3 tritt eine Zeitverzögerung auf. Es ist so, als würde das Licht Medium 2 überspringen. Die Ursache dafür werden wir besprechen, nachdem das herkömmliche Quantentunnel Modell besprochen wurde. Es gibt aber noch einige andere Eigenschaften, die virtuelle Photonen haben und durch die darauf geschlossen werden kann, dass es sich bei evaneszenten Wellen tatsächlich um virtuelle Photonen handelt. Zum einen muss auch für evaneszente Wellen normalerweise Einsteins Relation $E^2 = p^2c^2 = (\hbar k)^2c^2$ gelten, aber da $k_z = i\kappa$, erhalten wir eine negative Energie, sodass Einsteins Energie-Impuls Relation verletzt wird. Das ist ein Verhalten, das wir oben für virtuelle Teilchen kennengelernt haben. Aber vielleicht ist dieser Umstand noch nicht überzeugend genug.

Eine andere Besonderheit von evaneszenten Feldern zeigt sich unter Betrachtung der Fresnel'schen Formeln. Im Spezialfall, dass Licht senkrecht auf eine Oberfläche mit neuem Brechungsindex trifft, gilt im Falle frustrierter Totalreflexion

$$R = \frac{|n_2 - n_1|^2}{|n_2 + n_1|^2} = 1,$$

was nur möglich ist, wenn das gesamte Licht reflektiert wird und keine reale Feld existiert, das mit anderen realen Feldern wechselwirken könnte, um den Reflexionskoeffizienten zu verändern. Dies ist ein Hinweis darauf, dass das evaneszente Feld kein reales Feld ist, sondern nur virtuell vorliegt. Dies

erfüllt die Nicht-Beobachtbarkeitsbedingung für virtuelle Teilchen. Aber vielleicht kann auch die quantenmechanische Betrachtung zum Verständnis beitragen, denn der optische Tunneleffekt ist nur ein Sonderfall des allgemeinen Tunneleffekts, für den wir sehen werden, dass die Tunnelzeit ein großes theoretisches Problem darstellt, das durch virtuelle Teilchen womöglich gelöst werden kann. [59]

Eindimensionales Stufenpotenzial:

In der Quantenmechanik werden ebenfalls Randbedingungen verwendet, um Bereiche zu gliedern, in denen bestimmte Wellenfunktionen existieren können. Ein berühmtes sehr einfaches Modell beschreibt auf diese Weise den Tunneleffekt, also sehen wir uns das Modell genauer an. Wir bewegen uns in einem eindimensionalen System auf der x-Achse. Dazu wird angenommen, dass zwei Bereiche existieren, die durch ein endlich hohes Potential voneinander getrennt sind. Für dieses gilt

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

und es wird die eindimensionale zeitunabhängige Schrödingergleichung als Lösungsansatz verwendet. Ein solches Potenzialstufenmodell ist beispielsweise geeignet für die Betrachtung einer Lichtwelle, die auf eine Grenzfläche wie Glas trifft. In der einfachsten Form ist hier der Ansatz

$$E\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + V(x)\psi(x)$$

wobei im Bereich 1, in welchem $V(x) = 0$ ist, $\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) = -k^2\psi(x)$ eine Differentialgleichung zweiter Ordnung ergibt. Ein mögliches Lösungsverfahren hierfür ist der Ansatz einer Exponentialfunktion, da deren Ableitungen wieder die Ausgangsfunktion samt eines Vorfaktors ergeben. Man kann daher die Ausgangsgleichung $x = e^{rt}$ ansetzen, sodass $\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + k^2\psi(x) = r^2e^{rt} + k^2e^{rt} = 0 = (r^2 + k^2)e^{rt}$. Einer der Faktoren in der letzten Gleichung muss verschwinden, um die Gleichung zu erfüllen

und $e^{rt} \neq 0$, kann also ausgeschlossen werden. Wir wählen $r^2 + k^2 = 0 \Leftrightarrow r^2 = -k^2 \Leftrightarrow r = \pm\sqrt{-k^2} = \pm ik$ und setzen dieses Ergebnis in die Ausgangsgleichung ein, wobei wir direkt beachten, beide Ergebnisse, die wir herausbekommen haben, als Linearkombination mit Vorfaktoren anzugeben, wodurch

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Re^{-ikx}.$$

Der erster Term Ae^{ikx} ist hier die einfallende Welle mit positivem Impuls $p = \hbar k$, der zweite Term Re^{-ikx} die an der Potentialbarriere reflektierte Welle mit entgegengerichtetem Impuls $p = -\hbar k$. Wir vernachlässigen hier die Zeitabhängigkeit der Lösungen, aber es sei erwähnt, dass die vollständige Lösung $\psi(x) = Ae^{i(kx-\omega t)} + Re^{-i(kx+\omega t)}$ wäre.

Für den zweiten Bereich, in dem $V(x) = V_0$ verwenden wir den gleichen Ansatz und kommen durch Umstellen der Schrödinger-Gleichung zu $\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = -\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}\psi(x) = -q^2\psi(x)$. Man unterscheidet zwei Fälle für Teilchen, deren Gesamtenergie höher ist als die Barriere und für Teilchen, deren Gesamtenergie normalerweise zu niedrig für die Barriere ist. Klassisch würden letztere stets reflektiert werden. Normalerweise würden wir hier außerdem auch eine Linearkombination von zwei Wellen

$$\psi(x) = Te^{iqx} + Be^{-iqx}$$

erhalten, aber wir haben eine Welle betrachtet, die sich von Bereich 1 in den Bereich 2 ausbreitet, sodass Be^{-iqx} physikalisch unsinnig ist, weil dies eine Welle beschreiben würde, die aus dem Bereich 2 in den Bereich 1 kommt und diese nun mal nicht existiert. Das Ergebnis vereinfacht sich zu $\psi(x) = Te^{iqx}$.

Im Falle, dass $E < V_0$ geschieht nun genau das, was man auch schon beim optischen Tunneleffekt in den Gleichungen sehen konnte.

$$\psi(x) = Te^{iqx} = Te^{i\sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}x} = Te^{i\sqrt{-\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}x} = Te^{-\sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}x} = Te^{-\tilde{q}x}.$$

Die Wellenfunktion wird zu einer exponentiell abnehmenden Funktion, weil die Wellenzahl $q = i\tilde{q}$ aufgrund der Heisenbergschen Unschärferelation imaginär werden darf. Hier sieht man auch noch einmal, wieso die Lösung $\psi(x) = Te^{iqx} + Be^{-iqx} = Te^{iqx}$ gelten muss. Wenn wir $q = i\tilde{q}$ in Be^{-iqx} einsetzen, würde $Be^{-iqx} = Be^{\tilde{q}x}$ für $x \rightarrow \infty$ unendlich werden, was sich nicht normieren lässt. Deshalb muss $B = 0$ sein, um die Normierbarkeitsbedingung zu erfüllen. Als nächstes wollen wir noch den Vorfaktor T herausfinden, damit wir etwa abschätzen können, wie breit die tatsächliche Aufenthaltswahrscheinlichkeit hinter der Potentialbarriere ist. Dazu nutzt man als erstes die Randbedingungen von Wellen, überall und somit auch an Potenzialrändern, stetig und differenzierbar zu sein.

$$\begin{aligned}\psi_1(x=0) = \psi_2(x=0) &\Leftrightarrow R + A = T \\ \psi'_1(x=0) = \psi'_2(x=0) &\Leftrightarrow ik[Ae^{ik(x=0)} - Re^{-ik(x=0)}] = ik(A - R) \\ &= k[Te^{iq(x=0)}] = iqT\end{aligned}$$

Daraus folgen $\frac{A+R}{A-R} = \frac{T}{qT/k} = \frac{k}{q}$ sodass $Aq + Rq = kA - kR \Leftrightarrow R = A\frac{k-q}{k+q}$ und $T = A + R = A + A\frac{k-q}{k+q} = A \cdot \left(1 + \frac{k-q}{k+q}\right) = A \cdot \left(\frac{(k-q)+(k+q)}{k+q}\right) = A\frac{2k}{k+q}$, sodass nun für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit

$$|\psi(x)|^2 = A^2 \frac{4k^2}{(k + i\tilde{q})^2} e^{-2\tilde{q}x} = A^2 \frac{4k^2}{k^2 + \tilde{q}^2} e^{-2\tilde{q}x}$$

ermittelt werden kann.

Wir setzen $A^2 = 1$ und wissen von oben, $\tilde{q}^2 = \frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}$ und $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$, wodurch

$$|\psi(x)|^2 = \frac{4E}{E + (V_0 - E)} e^{-2\sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}x} = \frac{4E}{V_0} e^{-2\sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}x}.$$

Damit kann eine Aussage darüber getroffen werden, wie die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Teilchens der Masse m hinter der Potentialbarriere in Abhängigkeit vom Ort x ist. Obwohl wir ein Teilchen betrachtet haben, dessen Gesamtenergie geringer war als die potenzielle Energie der Potenzialstufe, hat das Teilchen eine geringe in x-Richtung exponentiell abklingende

Aufenthaltswahrscheinlichkeit hinter der Barriere. Auf masselose Teilchen, wie Licht, lässt sich dieses Modell nicht anwenden, was auch der Grund ist, aus dem wir oben den optischen Tunneleffekt von dem hier besprochenen Tunneleffekt unterscheiden. Beide Fälle sind jedoch für unsere Betrachtung der Casimir Engine relevant, da natürlich eine Tunneldiode verwendet wird, durch die Elektronen tunneln sollen, als auch ein optischer Resonator, in welchem allerdings nicht die realen Photonen, sondern die virtuellen Photonen und andere virtuelle Teilchen von Interesse sind. Der optische Resonator ist auch eine Potentialbarriere, aber dort wird natürlich nicht das Tunnelphänomen genutzt, sondern die Senkung der Vakuumenergie. Das Phänomen eines Stufenpotenzials, wie es hier besprochen wurde, lässt natürlich noch keine Tunnelung zu. Das geht auch aus unserer Erkenntnis hervor, dass

$$R = A \frac{k - q}{k + q}$$

und

$$T = A + R = A \frac{2k}{k + q}$$

die Reflexions- und Transmissionsamplituden sind. Die Reflexionswahrscheinlichkeit ist dann nämlich $|R|^2 = \left| \frac{k-q}{k+q} \right|^2 = \left| \frac{k-i\tilde{q}}{k+i\tilde{q}} \right|^2 = 1$. Dies sei kurz bewiesen.

$$\begin{aligned} \frac{k - i\tilde{q}}{k + i\tilde{q}} &= \frac{(k - i\tilde{q})(k - i\tilde{q})}{(k + i\tilde{q})(k - i\tilde{q})} = \frac{k^2 - 2i\tilde{q}k^2 - \tilde{q}^2}{k^2 + \tilde{q}^2} \Rightarrow \left| \frac{k - i\tilde{q}}{k + i\tilde{q}} \right|^2 \\ &= \left| \frac{k^2 - 2i\tilde{q}k^2 - \tilde{q}^2}{k^2 + \tilde{q}^2} \right|^2 = \left| \frac{k^2 - \tilde{q}^2}{k^2 + \tilde{q}^2} \right|^2 - i^2 \left| \frac{2\tilde{q}k^2}{k^2 + \tilde{q}^2} \right|^2 \\ &= \frac{k^4 - 2\tilde{q}^2k^2 + \tilde{q}^4}{|k^2 + \tilde{q}^2|^2} + \frac{4\tilde{q}^2k^2}{|k^2 + \tilde{q}^2|^2} = \frac{k^4 + 2\tilde{q}^2k^2 + \tilde{q}^4}{|k^2 + \tilde{q}^2|^2} \\ &= \frac{|k^2 + \tilde{q}^2|^2}{|k^2 + \tilde{q}^2|^2} = 1. \end{aligned}$$

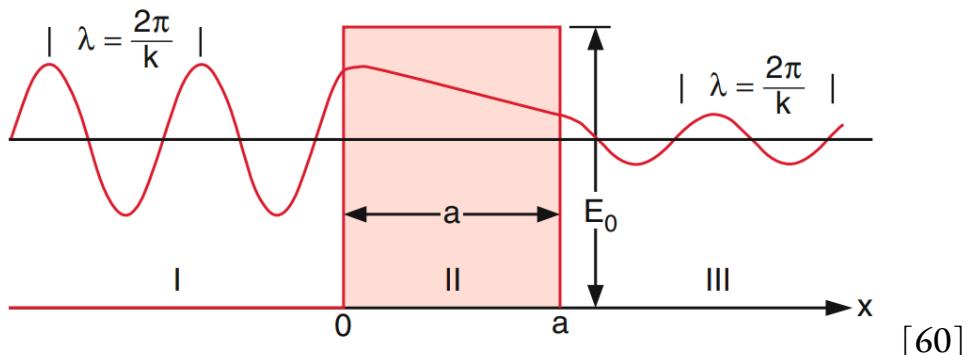
Es werden also alle Teilchen im Endeffekt reflektiert, wenn ihr Energie unterhalb des Stufenpotenzials liegt. Wenn die Energie des Teilchens größer als die Potenzialbarriere ist, ergibt sich natürlich ein anderes Ergebnis. Bevor

wir dieses ansehen, wollen wir die Stromdichte in der Quantenmechanik definieren und betrachten.

Stromdichte:

Rechteckpotenzial und Tunneleffekt:

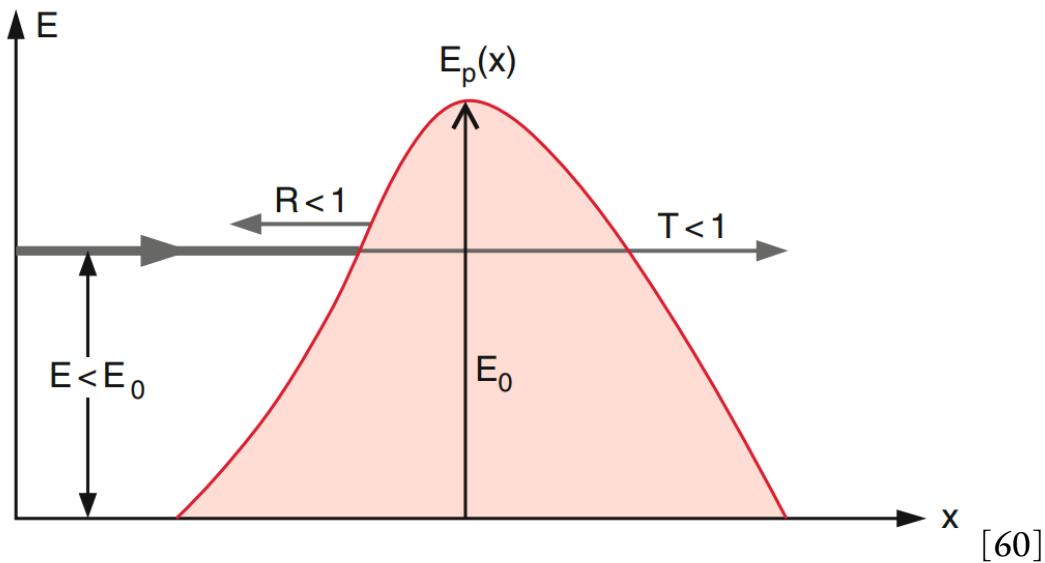
Rechteckbarriere:



[60]

Potenzialgraben:

Andere Potenziale:



Tunnelungszeit:

Das Problem der Tunnelungszeit entsteht dadurch, dass die kinetische Energie eines Teilchens in einer Tunnelbarriere negativ ist, sodass die Geschwindigkeit imaginär wird. Man kann also nicht einfach die Zeit und die Breite der Barriere messen, um die Geschwindigkeit zu ermitteln.

[61]

[62]

[63]

[64]

[65]

[66]

Gruppen- und Signalgeschwindigkeit:

[67]

Reflektionszeit-Operator und minimale Tunnelzeit:

Tunnelungszeit evaneszenter Photonen:

Quantenuhren:

Realistischere Tunnelmodelle:

Quanten-Münchhausen Effekt:

[68]

[69]

[70]

[71]

Tunneleffekt mit Medium-Anregungskopplung

[72]

Quantendiffusion mit Phonon-Kopplung

[72]

Quantendiffusion mit Elektron-Kopplung

[72]

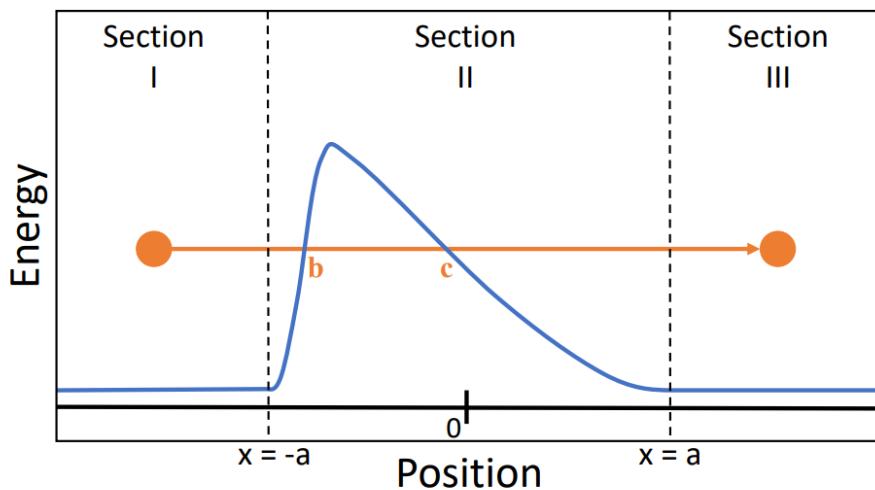
Asymmetrischer Tunneleffekt:

Lew Landau stellte in seinem Buch „Quantum Mechanics – Nonrelativistic Theory“ die Hypothese auf, dass der Tunneleffekt in einer Dimension stets eine symmetrische Tunnelwahrscheinlichkeit erzeugt, egal welche Form die Potentialbarriere hat. [73]

2021 wurde dieses Theorem von einer Gruppe von Forschern um Naceur Gaaloul (Leibniz Universität Hannover) bewiesen [74]. Aber es wurde gleichermaßen gezeigt, dass die Symmetrie für Bose-Einstein Kondensate in 1D gebrochen wird.

Beweis von Landaus Hypothese:

Zuerst folgen wir ihrem Beweis von Landaus Vermutung. Dafür nehmen wir an, dass ein beliebiges Potenzial in einem Bereich $-a \leq x \leq a$ vorliegt:



Wir nutzen die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung mit Wellenfunktion $\psi(x)$. Die Lösungen der Schrödinger-Gleichung ergeben sich wie oben für die verschiedenen Bereiche durch den Exponentialansatz, wobei wir zuerst den Fall betrachten, in welchem das Teilchen von links nach rechts tunnelnt:

$$\Psi_L(x) = \begin{cases} e^{ikx} + B_L e^{-ikx} & \text{für } -\infty < x \leq -a \\ C_1 \psi_1(x) + C_2 \psi_2(x) & \text{für } -a \leq x \leq a \\ D_L e^{ikx} & \text{für } a \leq x < \infty \end{cases}$$

Die Lösung im Bereich II ist völlig allgemeingültig, da sie eine allgemeine Lösung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung ist, die sich stets in eine Linearkombination aus zwei linear unabhängigen Lösungen ψ_1 und ψ_2 zerlegen lässt. Für die Welle von rechts nach links erhalten wir

$$\Psi_R(x) = \begin{cases} D_R e^{-ikx} & \text{für } -\infty < x \leq -a \\ C_1 \psi_1(x) + C_2 \psi_2(x) & \text{für } -a \leq x \leq a \\ e^{-ikx} + B_R e^{ikx} & \text{für } a \leq x < \infty \end{cases}$$

Hier haben wir beachtet, dass die Welle nun in negative x-Richtung zeigt, so dass sich die Vorzeichen in den Exponenten umkehren. Aus dem ersten Fall $\Psi_L(x)$ ergeben sich mit den Randbedingungen an den Grenzen der definierten Regionen

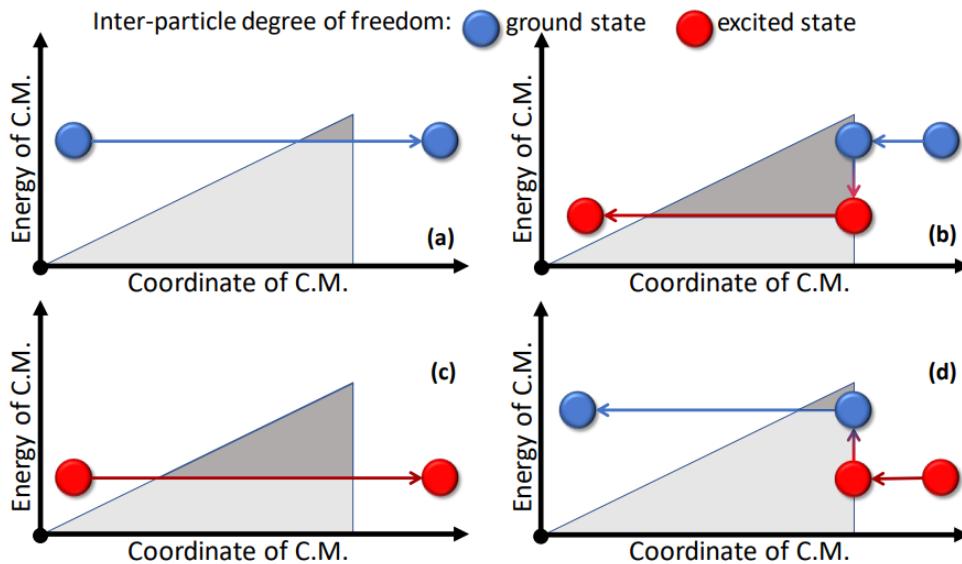
$$\begin{aligned} e^{-ika} + B_L e^{ika} &= C_1 \psi_1(-a) + C_2 \psi_2(-a) \\ ik(e^{-ika} - B_L e^{ika}) &= C_1 \psi'_1(-a) + C_2 \psi'_2(-a) \\ D_L e^{ika} &= C_1 \psi_1(a) + C_2 \psi_2(a) \\ ikD_L e^{ika} &= C_1 \psi'_1(a) + C_2 \psi'_2(a) \end{aligned}$$

als Gleichungssystem mit vier Unbekannten.

Wir bringen das Gleichungssystem in eine Matrixform:

$$\begin{pmatrix} \psi_1(-a) & \psi_2(-a) & -e^{ika} & 0 \\ \psi'_1(-a) & \psi'_2(-a) & ik e^{ika} & 0 \\ \psi_1(a) & \psi_2(a) & 0 & -e^{ika} \\ \psi'_1(a) & \psi'_2(a) & 0 & -ik e^{ika} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ B_L \\ D_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-ika} \\ ike^{-ika} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sobald man allerdings mehr als ein Teilchen betrachtet, kann Tunnelung asymmetrisch werden. Man könnte beispielsweise folgende Barriere betrachten.



[74]

Ein zusammengesetztes Teilchen kann im Grundzustand oder im angeregten Zustand vorliegen. Im Fall (a) ist das Teilchen im niedrigsten Energiezustand und die Barriere steigt graduell. Das Adiabatentheorem besagt, dass es hier nicht zur Anregung kommt. In (b) allerdings trifft das Teilchen auf eine steile Barriere und kann daher seinen Zustand ändern. Der Wechselwirkungsanteil der Energie steigt, während die kinetische Energie des Schwerpunkts fällt. Der dunkelgraue Flächenteil ist also in (a) kleiner als in (b), sodass die Wahrscheinlichkeit in (a) zu tunneln höher ist als in (b).

Die Autoren schreiben:

Ein Maxwell-Dämon kann auch über asymmetrisches Tunneln realisiert werden, da Letzteres empfindlich auf den Zustand der zwischenpartikulären Freiheitsgrade reagiert. Wie [...] diskutiert, ist die Wahrscheinlichkeit des Tunnelns von links nach rechts [...] kleiner als die Wahrscheinlichkeit von rechts nach links [...], wenn die zwischenpartikulären Freiheitsgrade anfangs im Grundzustand sind. Diese Asymmetrie kehrt sich um, wenn das System anfangs im angeregten Zustand ist. [Es] baut sich die schräge Seite der dreieckigen Barriere adiabatisch auf, wobei der zwischenpartikuläre Zustand unverändert bleibt, und daher verhält sich das Zweiteilchensystem effektiv wie ein 1D-System. Wenn die angeregten zwischenpartikulären Freiheitsgrade

auf die vertikale Seite der Barriere treffen [...], führt die resultierende Erschütterung zu einem Zustandsübergang. Eine Möglichkeit besteht darin, dass sich die zwischenpartikulären Freiheitsgrade auf den Grundzustand reduzieren. Die Energiedifferenz wird auf die kinetische Energie des Massenschwerpunkts übertragen, um die Gesamtenergie zu erhalten, und daher wird das System in der Lage sein, über die Barriere zu fliegen [...]. Durch den Vergleich der Abbildungen 2(a) und 2(c) schließen wir, dass die Transportraten über die Barriere unempfindlich gegenüber dem Anfangszustand der zwischenpartikulären Freiheitsgrade sind, wenn das Wellenpaket anfangs auf der linken Seite der Barriere platziert wird. Umgekehrt sind die Transportraten, wie in den Abbildungen 2(b) und 2(d) gezeigt, sehr empfindlich gegenüber dem Zustand der zwischenpartikulären Freiheitsgrade. In diesem Fall ist es viel wahrscheinlicher, dass das System, das anfangs im angeregten Zustand ist, die Barriere überquert, als das System im Grundzustand. Daher sollte die dreieckige Barriere mit der vertikalen Seite, die dem Wellenpaket zugewandt ist, als Maxwell-Dämon wirken. [74]

Die Frage ist nun, wie dieses Modell für unseren Fall relevant sein könnte, um Energie zu gewinnen. In unserem Fall tunneln schließlich nur einzelne Elektronen durch einen dünnen Isolator. Einzelne Elektronen können nicht als zusammengesetzte Teilchensysteme betrachtet werden, deren Massenschwerpunkt an kinetischer Energie verlieren könnte, während ihre potenzielle Energie ansteigt. Aber uns ist bereits das Phänomen der Vakuumpolarisation begegnet. Elektronen sind ständig von einer Wolke aus virtuellen Teilchen umgeben. Virtuelle Teilchen können durch ihre Off-Shell Eigenschaften ebenfalls Massen haben, sodass für kurze Zeitbereiche womöglich einzelne Elektronen als zusammengesetzte Teilchen mit einem Massenschwerpunkt außerhalb des Elektrons beschrieben werden können.

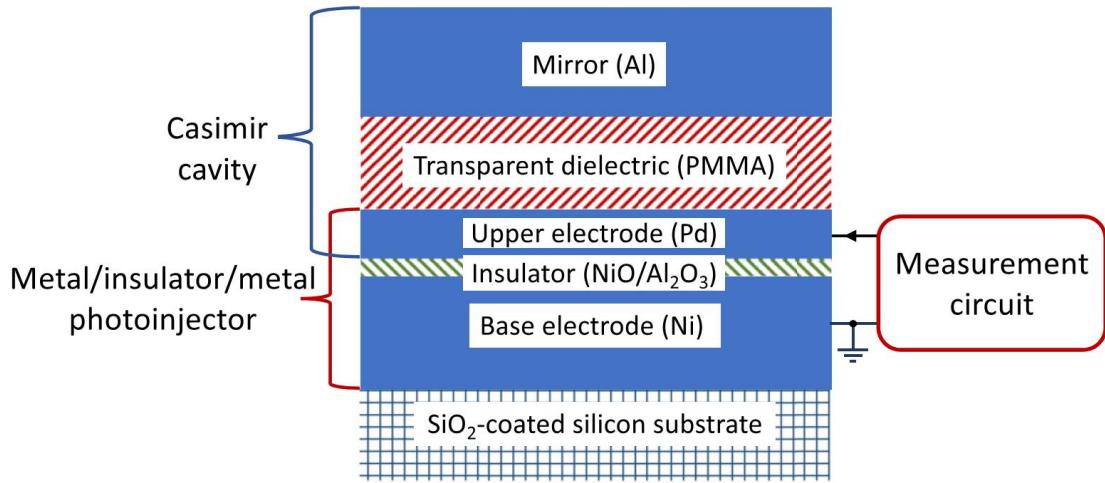
Massenschwerpunkt:

Schwache Asymmetrie:

[75]

Ausnutzung von Asymmetrie

Die Funktionsweise der nun von Moddel et al. entwickelten Technologie [76], [77] röhrt besonders vom Zusammenspiel zweier Effekte her, die wir bereits besprochen haben, deren Wichtigkeit aber noch einmal betont werden muss. Der generische Aufbau der Casimir Engine sind zwei Metallelektroden, die durch einen sehr dünnen Isolator getrennt sind und einem Casimir Spalt, der hinter einer Elektrode platziert wird. Es bleibt offen, um welche Art Perpetuum mobile es sich bei dieser Maschine handelt. Moddel argumentiert, dass der zweite Hauptsatz der Thermodynamik nur verletzt würde, wenn man versuchte Energie durch Oszillation von Casimir Spalten zu erhalten [59], aber da das von ihm beschriebene Gerät nicht oszilliert, ändert sich die interne Entropie nicht, womit der zweite Hauptsatz nicht verletzt würde. Aber das Gerät scheint in der herkömmlichen Theorie der Quantenmechanik den ersten Hauptsatz zu verletzen, da dort ein geschlossenes System im Grundzustand keinen tieferen Zustand annehmen kann. Würde man Energie aus diesem System entnehmen, müsste zwangsläufig die Nullpunktenergie unverändert bleiben, womit Energie aus Nichts erzeugt wurde. Es gibt zwar stochastische elektrodynamische Modelle, die die Nutzung von Nullpunktenergie erlauben würden, aber dieser Umstand ist der wichtigste Faktor, dem Experiment gegenüber sehr skeptisch zu bleiben.



[76]

Die mittlere Elektrode, die nun zwischen Casimir Spalt und Isolator liegt, muss sehr dünn sein, da für Elektronen genug Zeit vorhanden sein muss, um bei Anregung den Isolator zu überwinden, bevor sie ihre aus der Unschärferelation geborgte Energie wieder verlieren. Normalerweise würde man annehmen, dass der Leckstrom durch einen Isolator von beiden Elektroden ausgeht und sich über längere Zeiträume ausgleicht, sodass kein Nettostrom extrahiert werden kann. Die Asymmetrie, die durch den auf einer Seite platzierten Casimir Spalt entsteht, verändert diese Annahme. Nun werden die Schwingungsmoden möglicher virtueller Teilchen auf einer Seite stark eingeschränkt, sodass eine Energiedifferenz entsteht. Das führt womöglich dazu, dass weniger Elektronen angeregt werden, um den Isolator zu überwinden. Von der Metallelektrode aus kommt jedoch ein Tunnelstrom von Elektronen, sodass tatsächlich ein Nettostrom gemessen werden kann. Man könnte sich zuerst fragen, warum ein Isolator überhaupt eingesetzt werden muss. Wenn auf der einen Seite eine Metallelektrode existiert und auf der anderen ein Casimir Spalt, kann jedoch keine Asymmetrie hergestellt werden. In einer solchen Elektrode würde kein Strom induziert werden, weil es keine Potenzialwände gibt, in denen Hot Carrier eingeschlossen werden. Führt man jedoch einen Isolator ein, erhält man eine Tunneldiode, sodass die mittlere Elektrode durch Potenziale von den anderen Bauelementen abgeschottet wird. In der großen Metallelektrode können Hot Carrier überall entstehen und haben zufällige Richtungen. In der dünnen Metallelektrode entstehen

stattdessen weniger Hot Carrier. Sie müssen aus der Umgebung kommen. Wenn die Umgebung jedoch ein Casimir Spalt ist, werden nicht so viele Hot Carrier induziert und es kommt zur angesprochenen Asymmetrie. Die mathematischen Modelle und bisherigen Hypothesen werden wir uns später ganz genau ansehen. In diesem Abschnitt wollen wir den Aufbau und die Stromerzeugung der Casimir Engine unter die Lupe nehmen und behandeln die Funktionsweise optischer Resonatoren, von denen Casimir Hohlräume einen Spezialfall darstellen.

Das Gerät, das von Moddel et al. hergestellt wurde, ist eine MIM (Metal-Isolator-Metal) Diode mit optischem Resonator und wurde nicht nur im Kurzschlusszustand $U = 0$ betrieben, sondern auch mit von außen angelegter Spannung.

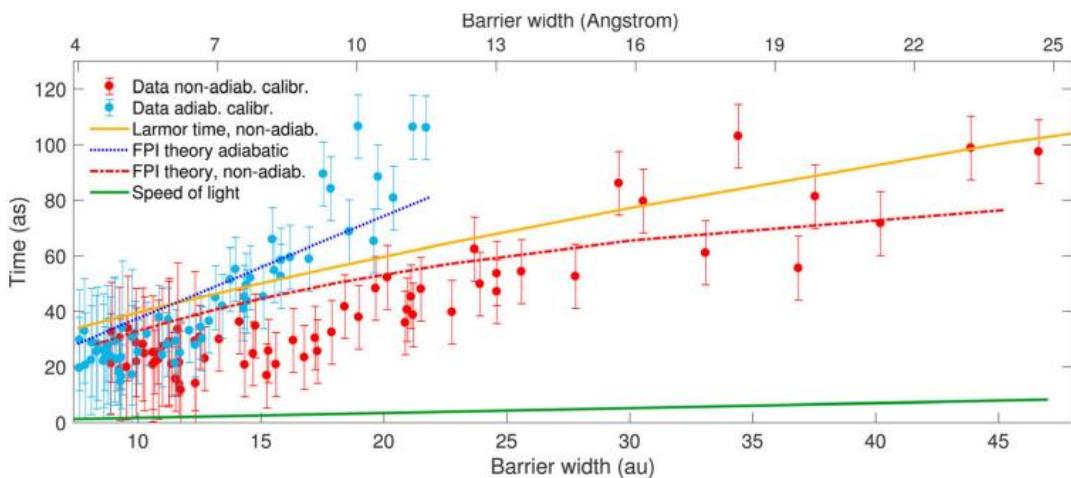
Es wurde also scheinbar gezeigt, dass selbst ohne angelegte Spannung ein Strom zwischen den Metallelektroden floss. In der Elektrotechnik gilt die Kirchhoff'sche Knotengleichung, der zufolge in jedem passiven Bereich eines Stromkreises der Eingangsstrom gleich dem Ausgangsstrom sein muss. Diese Regel wird eindeutig verletzt, weshalb es sich nicht um ein passiven Bauelement handeln kann. Aber könnte es nicht sein, dass wir hier einfach nur irgendeinen komischen Effekt aufnehmen, der nicht wirklich durch die Theorie beschrieben wird, die bisher vorgestellt wurde? Es wäre schließlich eine große Reform der Physik nötig, wenn der erste Hauptsatz der Thermodynamik keine Allgemeingültigkeit hätte. Deshalb muss ohne jeden Zweifel belegt werden können, dass dies hier der Fall ist und nicht in Wirklichkeit andere Effekte für den gemessenen Strom verantwortlich sind. In den betrachteten Publikationen wurden einige Fehlerquellen ausgeschlossen, die wir uns ansehen werden, aber womöglich können noch weitere gefunden werden, die es zu überprüfen gilt.

Zuerst können ein paar Eigenschaften getestet werden, die man von diesen Maschinen erwarten würden. Eine Erwartungshaltung galt der dünnen oberen Palladiumelektrode, eine weitere der Isolatordicke. Der Rand des Casimir Hohlraums wurde bereits als nicht-stetiger Übergang beschrieben. Es

werden optische Felder des Casimir Hohlraums angenommen, durch die Hot Carrier in die Palladiumelektrode injiziert werden können. Es muss allerdings beachtet werden, dass Hot Carrier angeregte Elektronen sind, die in einem dichten Material nur eine sehr kurze freie Weglänge besitzen. Hot Carrier entstehen, wenn die Strahlung, die auf ein Elektron trifft, an das Elektron genug Energie abgibt, um vom Valenzband in das Leitungsband des Leiters zu springen. Palladium ist allerdings ein Leiter, also überlappen Valenz- und Leitungsband, sodass keine Energie überwunden werden muss. Stattdessen muss nur genug Energie geliefert werden, damit ein Elektron das Coulomb Potenzial, in dem es sich befindet, verlassen kann. Je nach Elektron, das von einem Photon getroffen wird, ist dies unterschiedlich. Können wir also eine Aussage über die Energie treffen? Nur in einem anderem Zusammenhang, wird tatsächlich eine Mindestenergie vorgegeben, die benötigt wird. Schließlich gehen wir in unserem Modell nicht einfach von Photonen aus, die Energie an Elektronen weitergeben, sondern von Quantenfluktuationen, die sich Energie aus dem Nichts gemäß der Heisenbergschen Unschärferelation für Energie und Zeit beziehen. Es gilt zwar im allgemeinen für nicht kommutierende Operatoren in der Quantenmechanik die Beziehung $\sigma_A\sigma_B \geq \frac{\hbar}{2}$, aber um wirklich sicher zu gehen, dass diese Beziehung auch für Energie und Zeit gilt, wollen wir den Umweg gehen und die Beziehung aus der Wellenmechanik herleiten.

Nachdem das Ergebnis $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ gilt, kann man ganz einfach sehen, wie sich auch Energie und Zeit beeinflussen. Einerseits ist einem Mathematiker womöglich die Beziehung $\Delta\omega \Delta t \sim 1$ aus Fouriertransformationen bekannt, wobei in der Quantenmechanik bekanntermaßen $\Delta E = \hbar \cdot \Delta\omega$, sodass $\Delta E \Delta t \sim \hbar$ gelten sollte. Andererseits ist auch bekannt, dass $E = \frac{p^2}{2m}$, weshalb $\frac{dE}{dp} = \frac{p}{m} \Leftrightarrow dE = \frac{p}{m} dp$. Für Unsicherheiten schreiben wir daher $\Delta E = \frac{p}{m} \Delta p$. Außerdem kann man die Heisenbergsche Unschärferelation erweitern, womit $\Delta x \Delta p = \frac{\Delta x \cdot m}{p} \frac{p}{m} \Delta p = \frac{\Delta x}{v} \Delta E = \frac{\Delta x}{\Delta x / \Delta t} \Delta E = \Delta t \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}$.

Aus dieser Relation kann man erkennen, dass die nötige Energie, die ein Elektron aufnehmen könnte, um die Tunnelbarriere zu tunneln, zeitlich begrenzt ist. Die Unschärfe der Energie kann beliebig groß sein, mit anderen Worten, man kann sich beliebig viel Energie aus dem Vakuum borgen, so lange dafür die Zeitunschärfe einbüßt und man die Energie damit nur für sehr kurze Zeit besitzt. Die Frage, die man sich also zu stellen hat, ist wie viel Zeit ein Elektron benötigt, um aus der Palladiumelektrode durch die Tunnelbarriere zur unteren Elektrode zu gelangen, denn diese Zeit müssen wir mindestens haben und können deshalb nicht beliebig hohe Energien wählen. Wir hatten bereits gesehen, dass Tunnelung selbst keine Zeit beansprucht, sondern lediglich die Barrieren-Grenzflächen-Interaktion eine Verzögerung erzeugt, die sich bei geringer Barrierenbreite auf wenige Attosekunden (as) beläuft.

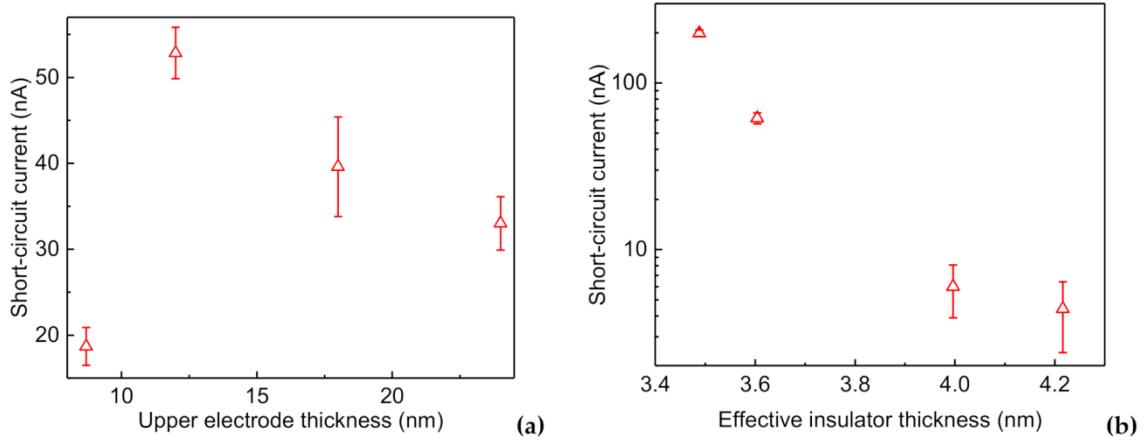


[62]

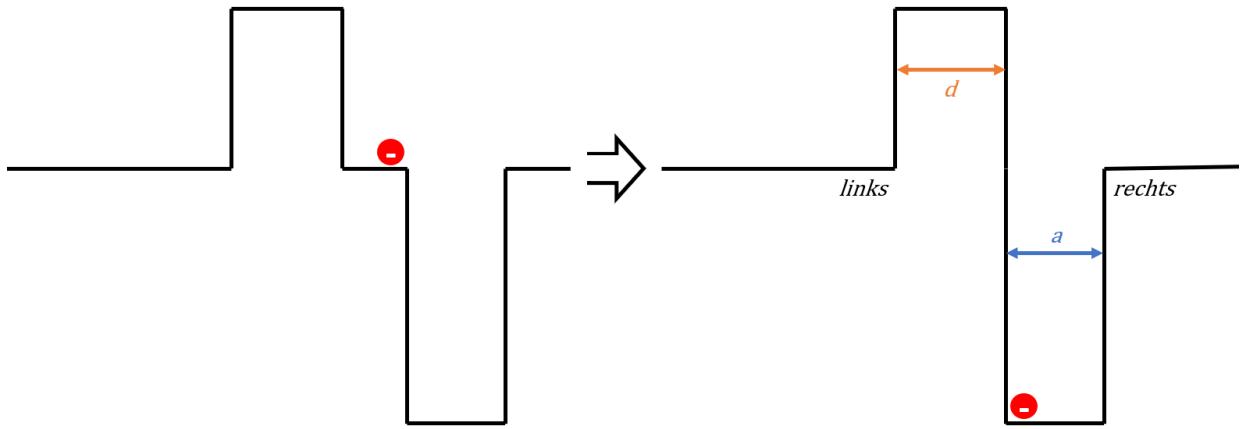
Wenn wir großzügig 100 Attosekunden als zeitliche Unschärfe wählen, um die Tunnelbarriere durchqueren zu können, erhalten wir mit $\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$ etwa ein ΔE von etwa 3,3 eV. Das entspräche nach $E = hf = h\frac{c}{\lambda}$ einer Wellenlänge von 377 nm, bzw. Schwarzlichtstrahlung, die aus dem Casimir Spalt heraus Hot Carrier erzeugen würde. Solche Hot Carrier Elektronen könnten lange genug existieren, um die Tunnelbarriere zu tunneln, jedoch gibt es darvorr natürlich auch noch die Distanz der Ruheposition im Palladiumgitter zum Isolator, die zurückgelegt werden muss. In den Berechnungen von

Moddel et al. wurde eine etwas größere Zeitspanne von 0,16 Femtosekunden verwendet, sodass man noch auf Elektronen mit einer Energie von 2 eV kommt und rückgerechnet Photonen roten Lichts aushalten würden, um die Anforderungen zu erfüllen. Aber ein Hot Carrier, der auch die Palladiumelektrode durchqueren muss, benötigt ihnen zufolge etwa 10 Femtosekunden, wobei die Hot-Carrier Geschwindigkeit durch die Fermi Geschwindigkeit $\sim 10^6 \text{ m/s}$ approximiert wurde [78], [79], weshalb nur deutlich geringere Energieunsicherheiten in Frage kommen. Es ergäbe sich hier ein $\Delta E \approx 0,2 \text{ eV}$.

Ein Elektron im Leitungsband kann sich dann relativ frei Bewegen und mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit den Isolator tunneln, bevor es am Gitter gestreut wird und dadurch Energie verliert. Es wäre auf diese Weise eine kleine Ladungsasymmetrie entstanden. Da im Allgemeinen diese Wahrscheinlichkeit durch $P(x) = e^{-x/d}$ beschrieben wird, wobei d die Eindringtiefe des Elektrons ist, sollte ein Tunnelstrom durch den Isolator mit größerer Dicke der Palladiumelektrode abnehmen, weil die Wahrscheinlichkeit größer wird, dass das Elektron gestreut wird, bevor es den Isolator durchquert. Auf der anderen Seite darf die Palladiumelektrode auch nicht zu dünn sein, weil in diesem Fall die Absorptionslänge zu groß wird. Die Absorptionslänge gibt die Distanz an, bei der die Intensität einer Strahlung auf $1/e \approx 0,37$ gefallen ist, oder bei der mit anderen Worten 63% aller Photonen vom Material absorbiert wurden. Ist ein Material zu dünn, absorbiert es nicht mehr so viel Licht und es entstehen dementsprechend weniger Hot Carrier Elektronen. Moddel et al. fanden einen optimalen Durchmesser der Palladiumelektrode bei etwa 12 nm. Machte man sie kleiner, brach der Strom rapide zusammen, machte man sie größer, stellte sich eine exponentielle Abklingkurve ein, die man hier in Bild (a) sehen kann.



In Bild (b) hingegen sieht man die Dicke des Isolators gegen den Kurzschlussstrom aufgetragen. Wie erwartet, sorgt eine größere Tunnelbarriere für einen kleineren Tunnelstrom. Andererseits könnte man auch den klassischen Fall betrachten, bei dem ein Elektron tatsächlich genug Energie hat, um die Tunnelbarriere zu überwinden und die freie Weglänge zurückzulegen. Aber auch in dem Fall sollte die Anzahl an Elektronen, die es durch den Isolator schaffen, mit zunehmender Isolatordicke abnehmen. Im theoretischen Teil hatten wir eine Methode zur Abschätzung des Tunnelstromes gefunden. Dazu wird ein einzelnes Elektron betrachtet, das eine Energie von 0.1 eV von virtuellen Teilchen erhalten hat. Da jedoch ausschließlich davon ausgegangen wird, dass dieses Elektron seine Energie nur aus der Vakuumenergie beziehen kann – alle anderen Kontributionen werden vernachlässigt, weil für sie keine Asymmetrie existiert – kann man so tun, als ob sich das Elektron nicht im Potenzial des Palladiumgitters befindet, sondern im Potenzial des Casimir Hohlraums. Verbildlicht kann man es sich etwa so vorstellen:

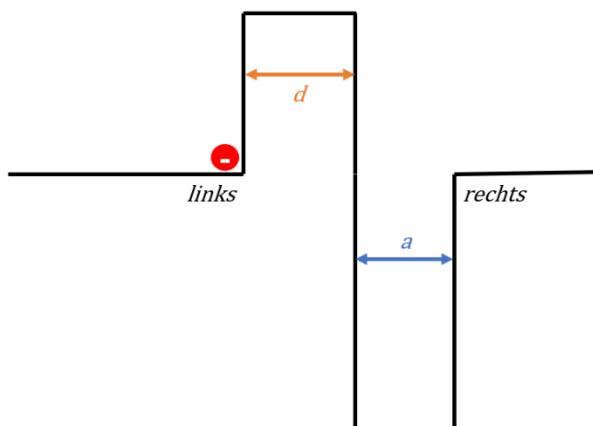


Meine einfache Überlegung war daher, zuerst einmal zur groben Betrachtung des Problems den Tunneleffekt für ein solches Bild zu untersuchen.

Es gilt die Beziehung

$$|\psi(x)|^2 = \frac{4E}{V_0} e^{-2\sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}x}$$

wobei jedoch auf einer Seite der Tunnelbarriere ein um die Casimir Energie höheres Potenzial vorliegt als auf der anderen Seite. Mit anderen Worten, ein Teilchen links der Tunnelbarriere sieht ein Potenzial der Höhe der Tunnelbarriere vor sich, ein Teilchen rechts der Tunnelbarriere sieht jedoch ein Potenzial in Höhe der Tunnelbarriere plus der Casimir-Barriere vor sich. Es gilt daher auf der linken Seite der Tunnelbarriere für die Tunnelwahrscheinlichkeit



$$|\psi(x)|_{links}^2 = \frac{4 \cdot 1,6 \cdot 10^{-20} J}{V_0} e^{-2\sqrt{\frac{2m(V_0 - 1,6 \cdot 10^{-20} J)}{\hbar^2}}d}$$

wobei $0,1eV = 1,6 \cdot 10^{-20} J$ die aus dem Vakuum gewonnene Energie ist und

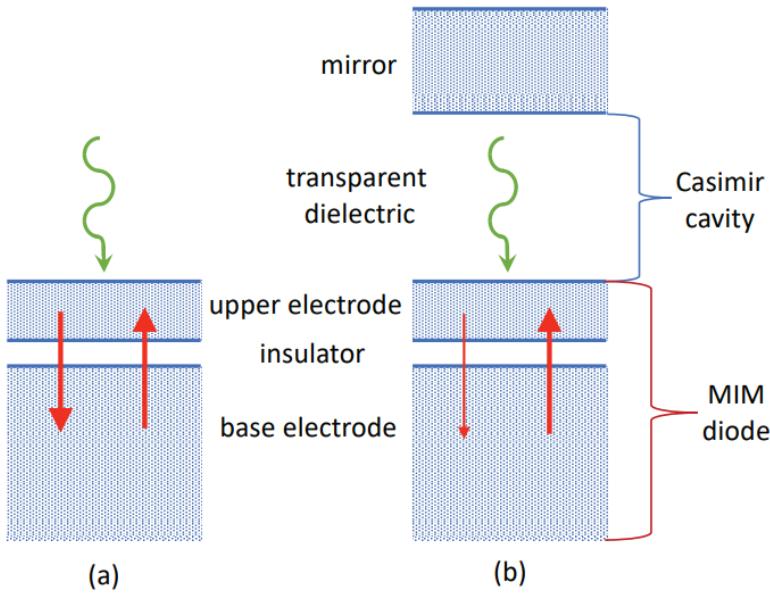
$$\text{auf der rechten Seite } |\psi(x)|_{rechts}^2 = \frac{4 \cdot 3,2 \cdot 10^{-19} J}{V_0 + \frac{\pi^2 \hbar c}{720 a^3}} e^{-2\sqrt{\frac{2m(V_0 + \frac{\pi^2 \hbar c}{720 a^3} - 3,2 \cdot 10^{-19} J)}{\hbar^2}}d}. \text{ Da}$$

man sieht, dass die Tunnelwahrscheinlichkeit umgekehrt proportional zur Potenzialhöhe ist, wird $|\psi(x)|_{rechts}^2 < |\psi(x)|_{links}^2$ sein, was gleichbedeutend damit ist, dass Elektronen eher von links nach rechts tunneln werden als von rechts nach links.

Darüber ergibt sich eine Differenz in den Aufenthaltswahrscheinlichkeiten gleichartiger Hot Carrier Elektronen, der die Asymmetrie der Casimir Engine verdeutlicht. Das Modell ist jedoch deutlich zu einfach, da es beispielsweise nicht erklären kann, wieso der Strom mit abnehmender Dicke des Casimir Spalts zunimmt, da es für den 1D Fall konzipiert ist und es beteiligte Festkörper außer Acht lässt. Für Al_2O_3 und NiO_x , die als Isolatoren verwendet wurden, wurde eine Potentialbarriere von $V_0 = 0,2eV$ und $0,3eV$ für Elektronen gemessen. Für Löcher liegt die Potentialbarriere deutlich höher bei respektiv $3,2eV$ und $5,9eV$, sodass der Tunnelprozess von Elektronen und nicht von Löchern dominiert wird. Für eine Tunnelbarriere der Dicke $d = 7,2 nm$ und einen Casimir Spalt mit Durchmesser $a = 33nm$, wie in Experimenten benutzt, liegt die Tunnelwahrscheinlichkeit für ein Elektron auf der linken Seite bei 10%. Elektronen auf der rechten Seite haben praktisch keine Chance zu tunneln, da die Energiebarriere deutlich zu hoch ist. Dabei ist es sogar egal, ob wir mit der Teilchenenergie noch etwas hochgehen können.

Der Mechanismus, der also bei dieser Art Casimir Engine ausgenutzt wird, ist etwas, das Garrett Moddel „Einfangen“ nennt. Er stellt sich vor, dass ein Elektron aus dem Vakuum Energie borgen kann und normalerweise die Energie wieder abgibt. Aber die Tunnelbarriere mit der Casimir-Barriere sorgen dafür, dass Elektronen zwar Energie borgen können, dann jedoch von

der Casimir Spalte „eingefangen“ werden und die Energie nicht mehr verlieren.



In Fall (a) sind Elektronen, die von Basis und oberer Elektrode fließen und Elektronen, die andersherum von oberer Elektrode zur Basis fließen, ausgeglichen. Anders jedoch, wenn die Casimir Spalte eingesetzt wird.

„Die Nullpunkt-Elektromagnetische Moden-Dichte in einer Casimir-Kavität ist im Vergleich zur Moden-Dichte im freien Raum reduziert. Daher wird der Photoinjektionsstrom teilweise unterdrückt, und der abwärts gerichtete Ladungsfluss wird verringert. Da der aufwärts gerichtete Fluss durch die Zugabe der Casimir-Kavität nicht verändert wird, gibt es nun einen Nettoladungsfluss in aufwärtsgerichteter Richtung. Dies ist eine vereinfachte konzeptionelle Erklärung für den beobachteten Strom. Die tatsächlichen Mechanismen sind komplexer und beinhalten die Emission von elektromagnetischen Modi in die Kavität sowie die Absorption aus der Kavität und werden durch die transiente Natur der Nullpunktanregungen, wie sie durch das Unschärfeprinzip gefordert wird, eingeschränkt und können Beiträge zum Strom sowohl von Elektronen als auch von Löchern enthalten.“

Ich spekuliere über die Kette von Ereignissen, die die Erfassung der Nullpunktenergie erleichtern. Virtuelle Photonen treffen auf die obere

Elektrode und erzeugen einen virtuellen Strom von Ladungsträgern, die die dünne Metallschicht und den Isolator durchqueren und in der Basiselektrode eingefangen werden. Genau wie virtuelle Photonen, die eine evaneszente Welle bilden, in Gegenwart von evaneszenter Kopplung in reale, sich ausbreitende Photonen umgewandelt werden, so werden auch die virtuellen Photonen und der anschließende virtuelle Ladungsfluss durch Tunneln durch den Isolator und Erfassung in der Basiselektrode unserer Geräte in einen realen Ladungsfluss umgewandelt. Als Alternative zur Heranziehung des Begriffs virtueller Teilchen begrenzt die $\Delta E \Delta t$ -Unschärferelation die Zeit, die für den Prozess zur Verfügung steht. Wenn der Transit und die Erfassung innerhalb von ungefähr 1 fs abgeschlossen sind, kann die Energie erfasst werden; wenn nicht, wird die Energie zurückgegeben. Selbst wenn der Prozess nicht innerhalb der 0,16 fs abgeschlossen ist, wie im Abschnitt über kurzlebige Fluktuationen beschrieben, kann ein Teil des verfügbaren Stroms gesammelt werden, einschließlich von niedrigerer Energie und daher langlebigerer Anregungen. Die Anwesenheit der benachbarten Casimir-Kavität stört das Gleichgewicht im virtuellen Ladungsfluss, das mit ihr existieren würde, so dass der Nettoladungsfluss nach oben gerichtet ist.“ [59]

Verstärkung der Tunnelrate durch Spiegelplatten

Eine genauere Analyse dieser Vermutung besprechen wir später, wenn wir versuchen, ein theoretisches Modell aufzustellen. Als nächstes wollen wir zuerst ein theoretisches Modell besprechen, das bereits von L.H. Ford aufgestellt wurde, um eine Spannungsverstärkung durch die beschriebene Casimir Engine von Moddel et al. zu erklären [80]. Man nimmt dafür an, dass bereits ein externes elektrisches Feld anliegt und mit dem Vakuumfeld wechselwirkt bzw. zu Kohärenzeffekten führen kann. Um diese Kohärenz zu untersuchen, wird eine Vakuum Korrelationsfunktion $\langle E^i(x, t)E^j(x', t') \rangle$ definiert und unterschieden zwischen dem Fall, wenn wir lediglich eine Metall-Isolator-

Metall Barriere haben und dem Fall, wenn wir zusätzlich einen optischen Resonator in Form eines Casimir Spalts hinzufügen. Die Differenz der Korrelationsfunktionen

$$\langle E^i(x, t)E^j(x', t')\rangle_R = \langle E^i(x, t)E^j(x', t')\rangle - \langle E^i(x, t)E^j(x', t')\rangle_0$$

zeigt dann den Einfluss des Casimir Spalts auf das Vakuumfeld und ob es wahrscheinlicher wird, dass es zu kohärenten Fluktuationen kommt, die die Wahrscheinlichkeit einer Tunnelung erhöhen. Die Korrelationsfunktion wird durch

$$\begin{aligned} \langle E^i(x, t)E^j(x', t')\rangle_R &= \frac{1}{\pi^2[(t-t')^2 - (z+z')^2]^2} \\ &+ \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{[(t-t')^2 - (z-z' - 2an)^2]^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{[(t-t')^2 - (z+z' - 2an)^2]^2} \right\} \end{aligned}$$

angegeben [81], wobei a die Dicke des Casimir Spalts ist und $n \neq 0$ eine ganze Zahl ist. Da $\langle E^i(x, t)E^j(x', t')\rangle_R > 0$ kann man schon einmal festhalten, dass die Platten einen Einfluss auf die Quantenfluktuationen des elektrischen Felds haben. Wir betrachten nun eine Ladung q die orthogonal zu den Plattenoberflächen in z -Richtung bewegt wird. Die Arbeit des elektrischen Feldes ist dann

$$\Delta W = q \int_{z_0}^{z_0+b} E^z(t(z), z) dz$$

und die Spannung $\Delta U = \frac{\Delta W}{q}$. Im Vakuumzustand ist der Erwartungswert des elektrischen Feldes in z -Richtung natürlich $\langle E^z \rangle = 0$, sodass auch $\langle \Delta U \rangle = 0$, aber die Varianz des Erwartungswerts ist nicht Null, da es stets Vakuumfluktuationen gibt, die um den Erwartungswert herum pendeln:

$$\langle (\Delta W)^2 \rangle = q^2 \int_{z_0}^{z_0+b} dz \int_{z_0}^{z_0+b} dz' \langle E^z(x, t)E^z(x', t')\rangle_R.$$

z_0 ist die Entfernung des betrachteten Teilchens von den Casimir Platten und b ist eine kleine Positionsänderung des Teilchen absolut orthogonal zu den Casimir Platten.

Wir betrachten hier also nun den Unterschied in der Varianz, wenn keine Casimir Platten eingefügt werden gegenüber dem Fall, wenn sie eingefügt werden. Um den Fall für zwei Platten, die einen Casimir Spalt bilden, berechnen zu können, ist es zuerst nötig, den Fall einer einzelnen Platte zu betrachten. Diese Fall kann dadurch mathematisch erzeugt werden, dass der Abstand der Casimir-Platten $a \rightarrow \infty$ geht, sodass

$$\begin{aligned} \langle E^i(x, t) E^j(x', t') \rangle_R &= \frac{1}{\pi^2 [(t - t')^2 - (z + z')^2]^2} \\ &+ \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{[(t - t')^2 - (z - z' - 2an)^2]^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{[(t - t')^2 - (z + z' - 2an)^2]^2} \right\} = \frac{1}{\pi^2 [(t - t')^2 - (z + z')^2]^2}. \end{aligned}$$

Wir nutzen als Hilfsintegral

$$\begin{aligned} I(z_0, b, v) &= \int_{z_0}^{z_0+b} dz \int_{z_0}^{z_0+b} dz' \frac{1}{[v^2(t - t')^2 - v^2(z + z')^2]^2} \\ &= \int_{z_0}^{z_0+b} dz \int_{z_0}^{z_0+b} dz' \frac{1}{[(z - z')^2 - v^2(z + z')^2]^2} \end{aligned}$$

sodass eingesetzt

$$\langle (\Delta W)^2 \rangle = \frac{q^2 v^4}{\pi^2} I(z_0, b, v).$$

v ist die konstante Geschwindigkeit des geladenen Teilchens und wir haben die Beziehung $t = \frac{z}{v}$ bzw. $t' = \frac{z'}{v}$ verwendet, um unser Hilfsintegral zu erhalten. Dieses hat einen Pol zweiter Ordnung für $(z - z')^2 = v^2(z + z')^2$. Man kann die Integralform auch in eine Differentialform bringen und schreibt

$$\frac{1}{[(z - z')^2 - v^2(z + z')^2]^2} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z'} F(z, z').$$

Eine explizite Form ist dann

$$F(z, z') = \frac{1}{128v^3(zz')^2} \left[8vzz' + (1 - v^2)(z^2 - z'^2) \left(\log \left\{ \frac{(1+v)z' + (v-1)z}{l^2} \right\} - \log \left\{ \frac{(1+v)z + (v-1)z'}{l^2} \right\} \right) \right].$$

Das Hilfsintegral kann dann geschrieben werden als

$$I(z_0, b, v) = (F(z_0 + b, z_0 + b) - F(z_0 + b, z_0)) - (F(z_0, z_0 + b) - F(z_0, z_0)).$$

Für kleine Geschwindigkeiten kann approximiert werden, dass

$$I(z_0, b, v) \approx \frac{1}{4z_0^2 v^2}.$$

Dieses Ergebnis in die Arbeitsvarianz des elektrischen Feldes eingesetzt, ergibt

$$\langle (\Delta W)^2 \rangle = \frac{q^2 v^4}{\pi^2} I(z_0, b, v) = \frac{q^2 v^2}{4z_0^2 \pi^2}.$$

Der Standardfehler durch Energiefluktuation liegt daher im Bereich

$$\Delta W_{rms} = \sqrt{\langle (\Delta W)^2 \rangle} = \frac{qv}{2\pi z_0},$$

woraus eine Spannungsfluktuation $\Delta U_{rms} = \frac{v}{2\pi z_0}$ resultiert. Für kleine Geschwindigkeiten sind die Spannungsfluktuationen, die durch eine Spiegelplatte in der Entfernung z_0 von der Spiegelplatte entstehen, approximiert linear von der Geschwindigkeit der Ladungen in einer Raumregion abhängig.

Für ein nicht-relativistische klassisch beschreibbare Teilchen mit der kinetischen Energie $T = \frac{1}{2}mv^2 \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{2T}{m}}$ folgt aus den Gleichungen

$$\Delta W_{rms} = \frac{q}{2\pi z_0} \sqrt{\frac{2T}{m}} = \frac{q}{\pi z_0} \sqrt{\frac{T}{2m}} \approx 1,9 \cdot 10^{-4} [eV] \sqrt{\frac{T}{[eV]}} \left[\frac{100nm}{z_0} \right],$$

womit die Energiefluktuationen des Teilchens proportional zur Wurzel der kinetischen Energie sind. Die Fluktuationen liegen im Mikro- bis Milli-Elektronenvolt Bereich.

Aber uns interessiert eher der Fall mit zwei Spiegelplatten, die einen Casimir Spalt bilden. Hierfür gilt

$$\begin{aligned}\langle(\Delta W)^2\rangle &= q^2 \int_{z_0}^{z_0+b} dz \int_{z_0}^{z_0+b} dz' \frac{1}{\pi^2[(t-t')^2 - (z+z')^2]^2} \\ &\quad + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{[(t-t')^2 - (z-z'-2an)^2]^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{[(t-t')^2 - (z+z'-2an)^2]^2} \right\},\end{aligned}$$

und es werden entsprechende Hilfsintegrale definiert, sodass man vereinfachen kann zu

$$\langle(\Delta W)^2\rangle = \langle(\Delta W)^2\rangle_1 + \frac{q^2 v^4}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [I_{2A}(n) + I_{2B}(n)].$$

$\langle(\Delta W)^2\rangle_1 = \frac{q^2 v^2}{4z_0^2 \pi^2}$ ist unser Fall mit nur einer Spiegelplatte, und die neuen Hilfsintegrale sind entsprechend dem schon besprochenen Fall

$$\begin{aligned}I_{2A}(n) &= \int_{z_0}^{z_0+b} dz \int_{z_0}^{z_0+b} dz' \frac{1}{[(z-z')^2 - v^2(z+z'-2an)^2]^2}, \\ I_{2B}(n) &= \int_{z_0}^{z_0+b} dz \int_{z_0}^{z_0+b} dz' \frac{1}{[(z-z')^2 - v^2(z-z'-2an)^2]^2}.\end{aligned}$$

Der Lösungsweg sei hier ausgespart, folgt aber ähnlichen Gedankengängen wie im Fall einer Platte. Man erhält am Ende eine Energievarianz des Teilchen von

$$\begin{aligned}\langle(\Delta W)^2\rangle &= \langle(\Delta W)^2\rangle_1 + \frac{q^2 v^2}{4\pi^2 a^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{\left(n + \frac{z_0}{a}\right)^2} \right] \\ &= \frac{q^2 v^2}{4z_0^2 \pi^2} + \frac{q^2 v^2}{4\pi^2 a^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{\left(n + \frac{z_0}{a}\right)^2} \right].\end{aligned}$$

Die Summe kann einerseits durch die bekannte Summe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2\zeta(2) = \frac{\pi^3}{3}$$

und durch die bekannte Summe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\left(n + \frac{z_0}{a}\right)^2} + \frac{1}{\left(n - \frac{z_0}{a}\right)^2} \right] = -\left(\frac{a}{z_0}\right)^2 + \pi^2 \csc^2\left(\pi \frac{z_0}{a}\right)$$

berechnet werden. Man erhält

$$\begin{aligned}\langle(\Delta W)^2\rangle &= \frac{q^2 v^2}{12a^2} \cdot \left[1 + 3\csc^2\left(\pi \frac{z_0}{a}\right) \right] \Rightarrow \Delta W_{rms} = \sqrt{\langle(\Delta W)^2\rangle} \\ &= \frac{qv}{\sqrt{12}a} \sqrt{1 + 3\csc^2\left(\pi \frac{z_0}{a}\right)} \Rightarrow \Delta U_{rms} = \frac{v}{\sqrt{12}a} \sqrt{1 + 3\csc^2\left(\pi \frac{z_0}{a}\right)}.\end{aligned}$$

Die Spannungsfluktuationen sind nun umgekehrt proportional zur Dicke des Casimir-Spalts. Wie auch in Moddel et al.'s Versuch gemessen, sollten weit entferntere Platten kleinere Spannungsabweichungen hervorrufen. Wir sehen aber auch, dass die Quadratkosekans-Funktion eine gerade Funktion ist, sodass die Energiefluktuation symmetrisch um z_0 ist. Das bedeutet, wir erhalten durch die Casimir Platten zwar eine Verstärkung der Quantenfluktuationen um die Potenzialbarriere, die wir bei z_0 ansiedeln, aber diese Verstärkung geht in beide Richtungen, sodass es aus dieser Sichtweise nicht zu einem Nettostrom kommen sollte, wenn kein äußeres elektrisches Feld angelegt wird.

Da das Ergebnis für zwei Spiegelplatten in einigen Fällen wieder zum Ergebnis einer Platte führt, wählt Ford dieses Ergebnis, um es mit dem Standardfehler eines Elektrons zu vergleichen, dass eine Barriere tunneln soll.

Dies gibt er mit $\Delta W_{MV} \approx \frac{e^2 T}{m^2 a^2}$ an, wobei a die Breite der Barriere ist. Vergleicht man nun

$\Delta W_{rms} = \frac{q}{\pi z_0} \sqrt{\frac{T}{2m}}$ und ΔW_{MV} ergibt sich $\frac{\Delta W_{rms}}{\Delta W_{MV}} \approx \frac{a^2 m^{\frac{3}{2}}}{\pi e z_0 \sqrt{T}} \approx 2 \cdot 10^4$, was in der Tat dafür spricht, dass durch die Spiegelplatten die Quantenfluktuationen um einen erheblichen Faktor verstärken. Ford merkt an, dass die tatsächliche Zunahme der Tunnelrate von der relativen Höhe der Quantenfluktuationen und der Potentialbarriere abhängt als auch von der kinetischen Energie der Teilchen, da bei höheren kinetischen Energien auch öfter klassische Barriere-Überwindung stattfindet. Aber auch wenn die Tunnelrate durch die Spiegelplatten zunimmt, sollte sie eigentlich keine Asymmetrie erzeugen und es sollte kein Nettostrom auftreten, wenn keine äußere Spannung angelegt ist. Erst die von außen angelegte Spannung erzeugt eine Asymmetrie, die durch den von Ford beschriebenen Effekt zu einer erhöhten Tunnelrate führt. Dennoch erklärt dieser Effekt die Abnahme des Widerstands in der Diode durch den Casimir Spalt und wieso ein so großer Nettostrom überhaupt verzeichnet werden könnte.

Verschiebung des Grundzustands in Casimir-Spalten

[82]

Materialüberlegungen

Wir haben den Prozess für ein einzelnes Elektron betrachtet, das eine Vakuumenergie von $0,1\text{eV}$ aufgenommen hat. Während aber auf der rechten Seite

gar keine Elektronen aufgrund von Vakuumfluktuationen durch die Tunnelbarriere tunneln, können auf der linken Seite durch Vakuumfluktuationen befähigte Elektronen sehr wohl mit bestimmter Wahrscheinlichkeit tunneln, sofern sie genügend Energie bekommen. Diese Analyse würde im Umkehrschluss jedoch auch bedeuten, dass Materialien, bei denen mehr Elektronen direkt unter dem Leitungsband liegen und daher in ihrer Leitfähigkeit stärker von Vakuumfluktuationen beeinflusst werden, höhere Ströme generieren könnten. Diese Eigenschaft ist bei Metallen vor allem auf die Gitterstruktur zurückzuführen, die maßgeblich den spezifischen elektrischen Widerstand beeinflusst. Es kann angenommen werden, dass eine Basiselektrode aus Materialien mit sehr niedrigem spezifischen Widerstand die Asymmetrie zwischen den Metallelektroden in der Casimir Engine verstärken würden und ein höherer Strom zu beobachten wäre. Moddel et al. verwendeten eine Nickelbasis, die einen spezifischen Widerstand im Bulkmaterial von $\rho = 0,069 \frac{\Omega \cdot mm^2}{m}$ besitzt. Ob es noch bessere Materialien gibt, sehen wir gleich.

Der zweite Vorteil, der durch Nanofertigung entsteht, ist die Möglichkeit sehr dünne Tunnelbarrieren herzustellen. Hier betrachten wir tatsächlich Isolatoren, die dünner als 4 Nanometer sind, damit der Tunnelstrom gegenüber dem ballistischen Elektronentransport dominiert. Der ballistische Elektronentransport wird durch die mittlere freie Weglänge beschränkt, die bei diesen niedrigen Elektronenenergien wenige Nanometer im Feststoffgitter beträgt [83]. Die mittlere freie Weglänge von Elektronen ist direkt an den spezifischen Widerstand gekoppelt, da dieser genau die Kollisionen repräsentiert, die Elektronen in einem Leiter davon abhalten, sich fortzubewegen. Aus der Elektrotechnik ist bekannterweise die Stromdichte $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, wobei σ die elektrische Leitfähigkeit darstellt. Gleichermassen ist die elektrische Stromdichte aber auch intuitiv durch $\vec{j} = v_D \rho_D$ gegeben, wobei v_D die Driftgeschwindigkeit eines Elektrons und ρ_D die Driftladungsdichte in einem Volumen darstellt. Da wir aber wissen, dass es sich bei einer Ladungsdichte eigentlich um eine Konzentration von Elektronen pro Volumen handelt, kön-

nen wir auch $\rho_D = e \cdot n$, wo n die Konzentration von negativen Ladungsträgern bzw. die freie Elektronendichte ist und $e = 1.602176634 \cdot 10^{-19} C$ die Elementarladung eines Elektrons darstellt. Die elektrische Feldstärke \vec{E} definieren wir nun über $\vec{E} = \frac{\vec{v}_D}{\mu}$ und haben hier einen Proportionalitätsfaktor eingeführt, der Mobilität genannt wird. In Kupfer ist μ beispielsweise $32 \text{ cm}^2/\text{Vs}$. Unter Betrachtung der anderen Gleichungen muss $\mu = \frac{\sigma}{e \cdot n}$ gelten. Für den makroskopischen Ladungstransport gilt außerdem

$$\mu = \frac{q l}{m^* v_F},$$

wobei q die Ladung, l die mittlere freie Weglänge, v_F die Fermi-Geschwindigkeit, die eine präzisere Driftgeschwindigkeit darstellt, und m^* die effektive Masse ist, weshalb die elektrische Leitfähigkeit direkt proportional zur mittleren freien Weglänge eines Elektrons ist oder umgekehrt der spezifische Widerstand proportional zu $1/l$ ist, was bedeutet, dass ein höherer spezifischer Widerstand zu einer kleineren freien Weglänge führen wird. Genau dies beobachtet man beispielsweise bei Kupfer im Nanobereich. Kupferdrähte mit 10nm Durchmesser scheinen einen zehnfach höheren spezifischen Widerstand zu besitzen und Elektronen sehr viel besser zu streuen. In der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts hatte man noch angenommen, es würde sich dabei um isotropes Elektronenstreuen und Oberflächenstreuung handeln, aber später erkannte man auch eine signifikante Beisteuerung durch Korngrenzenstreuung [84]. In jedem realen Kristall existieren auch Gitterfehler, zu denen Korngrenzen gehören. So ergeben sich einzelne Bereiche in einem Kristall, die ziemlich homogen sind, aber zu anderen kornförmigen Bereichen durch einen Orientierungswinkel verschoben sind. Um die Streuung von Elektronen an all diesen Flächen zu beschreiben, wird häufig das Mayadas Shatzkes (MS) Modell verwendet [83]. Dieses Modell prognostiziert, dass für kleine Drähte, der spezifische Widerstand proportional zu $\rho_0 \cdot l$ wird, wenn ρ_0 den spezifischen Widerstand des Bulkmaterials repräsentiert. Dieser Ansatz ist nicht sehr genau, aber kann eine erste Methode sein, um vielversprechende Mikro- oder Nanodrähte mit hoher Leitfähigkeit zu fin-

den. Schaut man sich verschiedene elementare Metalle an, könnte man hoffen sogar bessere Elektrodenmaterialien als Nickel finden:

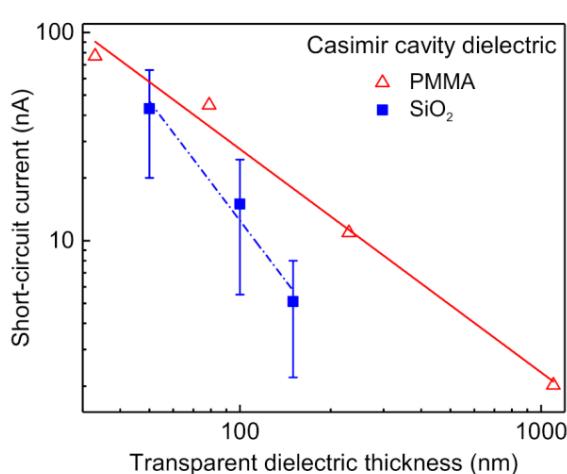
Element		Crystal structures	$\rho_{o,rt}$ ($\mu\Omega$ cm)	v_f (10^5 m/s)	$\tau \times \rho_o$ (10^{-22} Ω m s)	$\lambda \times \rho_o$ (10^{-16} Ω m 2)	τ_{rt} (fs)	λ_{rt} (nm)
Silver	Ag	fcc	1.587	14.48	5.84	8.46	36.8	53.3
Copper	Cu	fcc	1.678	11.09	6.04	6.70	36.0	39.9
Gold	Au	fcc	2.214	13.82	6.04	8.35	27.3	37.7
Aluminum	Al	fcc	2.650	15.99	3.13	5.01	11.8	18.9
Calcium	Ca	fcc	3.36	4.80	24.7	11.9	73.6	35.4
Beryllium	Be	hep	3.56	12.62	13.2/21.0	17.1/24.3	37.0/59.1	48.0/68.2
Magnesium	Mg	hep	4.39	11.63	8.60/7.30	9.81/8.80	19.6/16.6	22.3/20.0
Rhodium	Rh	fcc	4.7	6.67	4.85	3.23	10.3	6.88
Sodium	Na	bcc	4.77	10.21	14.4	14.7	30.2	30.9
Iridium	Ir	fcc	5.2	8.54	4.32	3.69	8.30	7.09
Tungsten	W	bcc	5.28	9.71	8.44	8.20	16.0	15.5
Molybdenum	Mo	bcc	5.34	9.18	6.53	5.99	12.2	11.2
Zinc	Zn	hep	5.90	15.66	6.80/4.90	10.3/8.1	11.5/8.31	17.4/13.7
Cobalt	Co	hep	6.2	2.55	13.1/10.9	7.31/4.82	21.2/17.6	11.8/7.77
Nickel	Ni	fcc	6.93	2.34	10.0	4.07	14.5	5.87
Potassium	K	bcc	7.20	7.94	28.6	22.7	39.7	31.5
Cadmium	Cd	hep	7.5	15.55	8.35/6.89	12.6/11.3	11.1/9.18	16.8/15.1
Ruthenium	Ru	hep	7.8	7.24	6.88/5.51	5.14/3.81	8.82/7.07	6.59/4.88
Indium	In	bct	8.8	16.32	4.64/4.45	7.62/7.18	5.27/5.05	8.65/8.16
Osmium	Os	hep	8.9	8.19	7.60/5.51	6.41/4.33	8.54/6.19	7.20/4.87

[83]

Man sieht in der Übersicht ganz rechts die mittlere freie Weglänge λ_{rt} , die für Nickel besonders niedrig ist. Nickel ist womöglich gerade deswegen ein gutes Vorzeigematerial für die Casimir Engine, da ballistischer Elektronentransport durch die Tunnelbarriere gerade wegen der kleinen freien Weglänge schwieriger ist und deshalb der Tunnelstrom, der durch virtuelle Teilchen vermittelt wird, dominant werden kann. Dennoch würde auch bei anderen Materialien ein vergleichbarer Tunnelstrom entstehen. Wie oben gesagt, ist das Produkt aus mittlerer freier Weglänge und spezifischem Widerstand indikativ für eine hohe Leitfähigkeit bei kleinen Strukturen. Auch in diesem Punkt ist Nickel jedoch hervorragend aufgestellt und wird in der angegebenen Tabelle nur von Rhodium übertroffen. Rhodium ist jedoch um ein Vielfaches teurer als Nickel, was Nickel tatsächlich zum perfekten Material für eine auch kommerziell rentable Basiselektrode macht.

Das verwendete Modell ist natürlich stark vereinfacht (da beispielsweise das Casimir-Potential in der verwendeten Form nur unter ganz speziellen idealen Bedingungen im Vakuum gilt, hier jedoch Dielektrika zwischen den Casimir Platten existieren) und kann in seiner Form keine konkreten Vor-

hersagen über die Stromstärke oder den Energietransport machen, aber dazu ist es auch nicht gedacht. Es soll stattdessen nur eine Vorstellung davon vermitteln, womit wir es hier zu tun haben. Es gibt ballistischen Elektronentransport und einen Transport durch den Tunneleffekt. Beide können durch Vakuumfluktuationen ausgelöst werden, aber der Tunneleffekt wird ausschließlich durch Vakuumfluktuationen ausgelöst. Dieser ist in der Casimir Engine dominant. Es geht speziell um die Asymmetrie der Potentialbarrieren, die für reale Teilchen gar keine Rolle spielt, aber einen großen Unterschied für virtuelle Teilchen macht. Es sei noch einmal betont, dass dieses Modell nur Elektronen beachtet, die durch Vakuumfluktuationen Energie erhalten haben. Für jede andere Art der Energie existiert in dem betrachteten System keine Asymmetrie. In der Palladiumelektrode werden genauso viele Elektronen zufällig von irgendwelchen realen Photonen getroffen, wie die Elektronen auf der Seite der Nickelelektrode. Diese Ströme würden sich langfristig ausgleichen und es gäbe keinen Nettostrom in eine Richtung. Es kommt ausschließlich auf den Casimir Hohlraum an, der Vakuumfluktuationen unterdrückt und es somit für Elektronen in der Palladiumelektrode schwerer macht, einen höheren Energiezustand anzunehmen. Nur für Vakuumfluktuationen gilt, dass rechts ein höheres Potential existiert als links vom Isolator.



In der Gleichung $E_c = \frac{\pi^2 \hbar c}{720 a^3}$, die oben verwendet wurde, bemerkt man natürlich auch eine Abhängigkeit der Tunnelwahrscheinlichkeit von der Breite des Casimir Hohlraums. Je näher die Metallplatten beieinanderliegen, desto mehr Moden von Vakuumfluktuationen werden vom Casimir Effekt

unterdrückt, sodass die Energiesenke immer größer wird. Auch diese Vermutung wurde experimentell bestätigt, indem der Casimir-Plattenabstand variiert wurde, wie im Bild nebenan zu sehen. Vergrößert man den Abstand der Platten, sinkt der gemessene Kurzschlussstrom.

Die hier besprochenen Effekte (abgesehen von der Änderung der Basiselektrode, was in der Arbeit von Moddel et al. nicht ausprobiert wurde), sind so zu beobachten gewesen, wie die Grafiken (a) und (b) oben zeigen und auch die Reduktion des gemessenen Stromes bei größerem Plattenabstand wurde vom Modell vorhergesagt. Auf den ersten Blick scheint unser Modell robust zu sein. Aber dies schließt in keinem Fall andere Effekte aus, die den gemessenen Strom ebenfalls verursacht haben könnten. Wenn man behauptet, dass der erste Satz der Thermodynamik keine Allgemeingültigkeit hat, dann gilt nach Carl Sagan: "Extraordinary claims require extraordinary evidence." („Außergewöhnliche Aussagen benötigen einen außergewöhnlichen Beweis.“) und was wir bisher gezeigt haben, wird keinen zurecht kritischen Wissenschaftler zufriedenstellen.

Falsifizierung der Hypothese

Wenn wir auf Karl Poppers kritischen Rationalismus vertrauen, ist es uns niemals möglich, eine Hypothese zu bestätigen. Sie ist nur solange als nützliche wissenschaftliche Wahrheit anzusehen, bis sie widerlegt wurde. Nun muss also bestimmt werden, wie sich die Hypothese, dass hier Energie aus dem Vakuum nutzbar gemacht wird, widerlegen lässt.

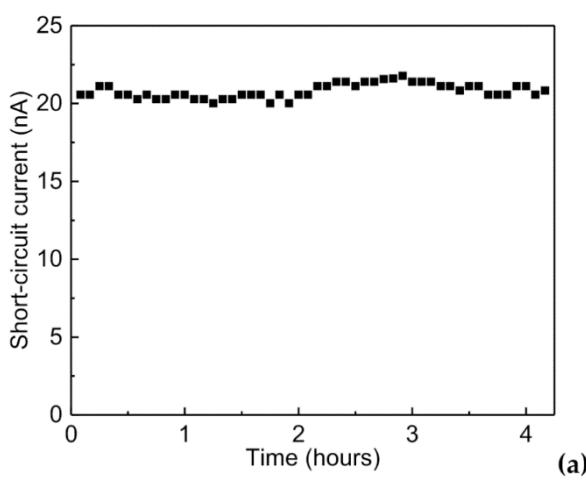
Was könnten also mögliche äußere Faktoren sein, die einen ähnlichen Effekt hätten? Moddel et al. schlugen acht mögliche Faktoren vor, die sie untersuchten. Wir wollen ihr Vorgehen nachvollziehen und vielleicht begegnen uns auch ein paar weitere Ideen für Faktoren, die noch nicht untersucht worden sind.

Zuerst muss natürlich sichergestellt werden, dass die Messungen präzise genug sind. Die Autoren geben an, dass sie besondere Vorkehrungen getroffen haben, um das zu garantieren. Es wurden Four-Point Probes verwendet, die Standard bei der Messung von Halbleitern und Dünnfilmen sind. Es wurde ein Quecksilber Schalter eingebaut, um die vier Kontaktauflagen kurzschließen, wenn die Probe bearbeitet oder leicht beschädigt wurde, sodass elektrostatische Entladung verhindert wurde. Moddel et al. beschreiben in ihrem Zusatzmaterial genauer, welche Geräte verwendet wurden und warum. Um es kurz zu machen, liegen die Messgenauigkeiten unterhalb der hier relevanten Bereiche, sodass die Messgeräte selber nicht zur Erklärung des Stroms herangezogen werden können. Die Energie muss aus dem System kommen. Und wenn das der Fall ist, muss man nur herausfinden, welche energetischen Prozesse im System ablaufen könnten.

1. Stabilität über große Zeitintervalle

Eine Möglichkeit, die ausgeschlossen werden muss, sind chemische Reaktionen, die innerhalb des Systems stattfinden und Energie zur Verfügung stellen bzw. Elektronen freisetzen könnten. Auf der einen Seite wird von Mod-

del et al. angegeben, dass Oxidation der eingesetzten Materialien durch eine Schutzschicht aus PMMA verhindert wird, was eine chemische Reaktion als Auslöser des gemessenen Stroms schon einmal unwahrscheinlich macht. Aber auch wenn es keine chemische Reaktion ist, könnte der Effekt ein Artefakt zuvor auf irgendeinem Weg zugeführter Energie und Ladung sein. Es könnte sich um eine Transiente, das heißt, einen elektrischen Einschwingvorgang handeln, der mit der Zeit ausschwingt oder es könnte ein Hystereseeffekt, wie er bei ferromagnetischen Materialien vorkommt, sein. Die einfachste Methode, dies zu widerlegen, ist die Stabilität des Stromes über große Zeitbereiche zu messen, denn egal welcher der genannten Effekte es auch sein könnte, sie alle beziehen ihre Energie nicht aus einer unerschöpflichen Quelle, sondern würden mit der Zeit abnehmen, bis kein Strom mehr fließen würde. Vor allem für so kleine Geräte, wie die hier verwendeten, können die gespeicherten Ladungsmengen nicht sehr groß sein. Beispielsweise könnte Al_2O_3 mit einer Gitterkonstanten von 0,5 nm in einem 2,5 nm dicken Isolator einen Strom von 20 nA für 3,2 μs erzeugen, sofern pro Molekül ein Elektron abgegeben werden könnte. Wie man sieht, sprechen wir hier von sehr kleinen Zeitbereichen.



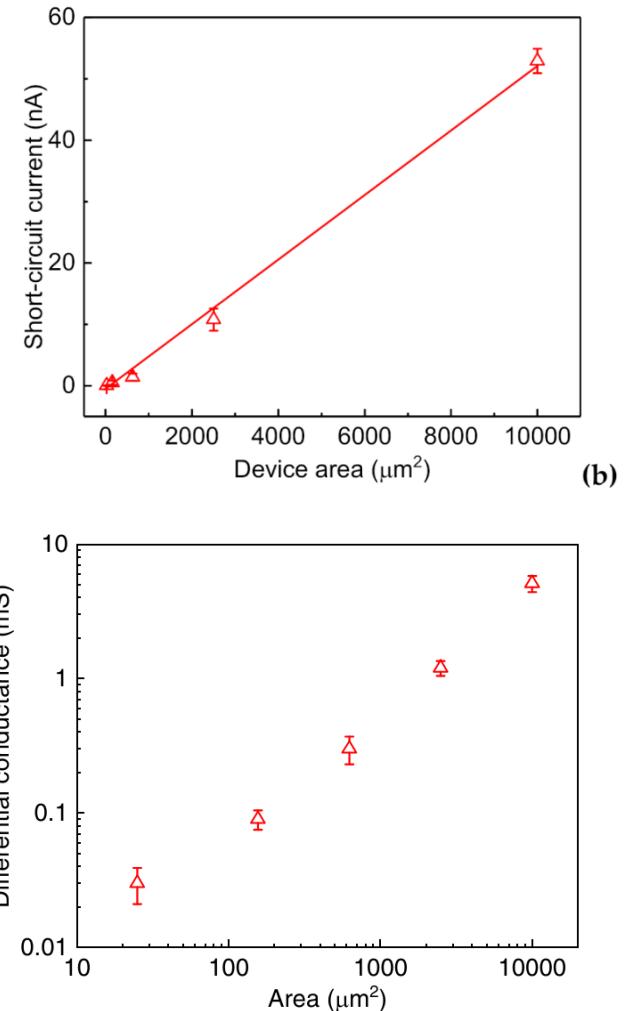
ein Artefakt ist hiermit widerlegt.

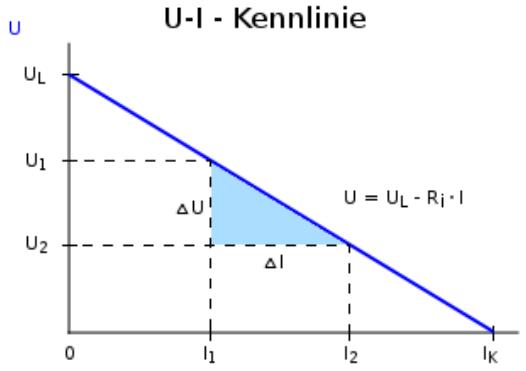
Die Casimir Engine wurde deshalb für deutlich längere Zeitintervalle getestet. Auch über viele Stunden hinweg, scheint der Kurzschlussstrom relativ konstant zu bleiben (siehe Abbildung (a) nebenan). Es wäre natürlich noch besser die Geräte über Monate zu testen, aber ein Erklärungsversuch des Stroms durch

2. Flächenabhängigkeit

Wenn das oben verwendete Modell Gültigkeit hat, dann müsste der gemessene Strom auch mit der Größe des Geräts skalieren. Man müsste eine größere Fläche an Casimir Hohlräumen nutzen können, um darin deutlich mehr Hot Carrier zu erzeugen. Für kreisförmige Casimir Platten würde der Strom demnach quadratisch mit dem Radius wachsen.

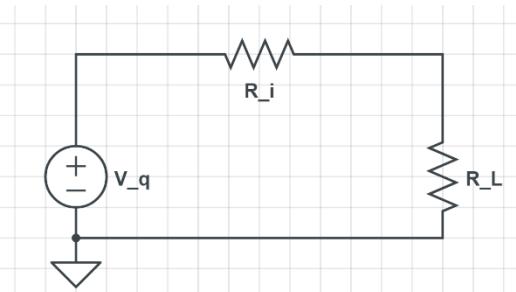
Größere und allgemein variable Flächen müssen mit herkömmlichen Fotolithografie Verfahren hergestellt werden, die den Nachteil haben, dass ihre Produktion länger dauert. In Experimenten konnte dann der sich überlappende Bereich der Nickel- und Palladiumelektrode verändert werden und es entstand tatsächlich der erhoffte lineare Anstieg des Stroms mit der Überlappungsfläche. Der interessantere Parameter ist aber natürlich die Energie, die mit dem Strom erzeugt werden kann. Zur Vollständigkeit werden wir hier einmal die elektrotechnischen Zusammenhänge herleiten, um zu verstehen, wie sich die maximale Leistung ergibt. In der Elektrotechnik ist das wohl einfachste System ein Zweipol mit Spannungsquelle und ohmschen Widerstand. Der Maschensatz dafür lautet $U_q - U_R = U$, wenn U die Gesamtspannung ist, die am Zweipol abfällt, U_R den Spannungsabfall am Widerstand und U_q die Spannung der Spannungsquelle darstellt. Für einen Widerstand gilt nach Ohm'schen Gesetz $U_R = R_i I$, sodass sich eine U-I Kennlinie $U_q - R_i I = U$ ergibt, die wie folgt aussieht:





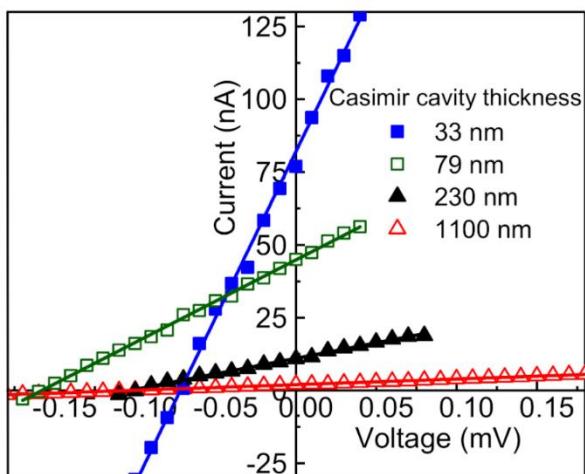
Dabei sind die Achsenabschnitte von besonderer Bedeutung, da $U_L = U_q$ die Leerlaufspannung ist, wenn kein Strom fließt, da der Strokreis unterbrochen ist und $I_K = U_q/R_i$ der Kurzschlussstrom ist, bei dem keine Spannung abfällt, weil der Widerstand Null wird. Allein daran erkennt man schon, dass es sich hier um ideale Schaltungen handelt, aber sehen wir mal darüber hinweg, denn die Gleichungen benötigen wir gleich noch, obwohl wir uns jetzt realen Schaltungen widmen. In dieser Schaltung bauen wir wieder eine Spannungsquelle ein, berechnen einen Innenwiderstand R_i der Leitungen hinzu und haben ein passives Bauelement, das als Lastwiderstand R_L betrachtet wird, über den Energie entnommen wird.

Spannung abfällt, weil der Widerstand Null wird. Allein daran erkennt man schon, dass es sich hier um ideale Schaltungen handelt, aber sehen wir mal darüber hinweg, denn die Gleichungen benötigen wir gleich noch, obwohl wir uns jetzt realen Schaltungen widmen. In dieser Schaltung bauen wir wieder eine Spannungsquelle ein, berechnen einen Innenwiderstand R_i der Leitungen hinzu und haben ein passives Bauelement, das als Lastwiderstand R_L betrachtet wird, über den Energie entnommen wird.



Es gilt $P_L = U_L I = R_L I^2$. Die verwendeten Widerstände sind Reihe geschaltet, weshalb $I = \frac{U_q}{R_i + R_L}$ und somit $P_L = \frac{U_q^2}{(R_i + R_L)^2} R_L$. Um nun die maximale Leistung zu erhalten, die man aus mit dem

Verbraucher nutzen kann, berechnet man



$$\begin{aligned}\frac{dP_L}{dR_L} &= 0 = U_q^2 \left(\frac{1}{(R_i + R_L)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2R_L}{(R_i + R_L)^3} \right) \\ &= U_q^2 \left(\frac{R_i - R_L}{(R_i + R_L)^3} \right)\end{aligned}$$

Diese Gleichung ist für nicht-triviale Fälle dann erfüllt, wenn $R_i = R_L$. Setzt man die Lösung ein, erhält man $P_L = \frac{U_q^2}{(R_i + R_L)^2} R_L = \frac{U_q^2}{4R_i^2} R_i = \frac{U_q^2}{4R_i}$

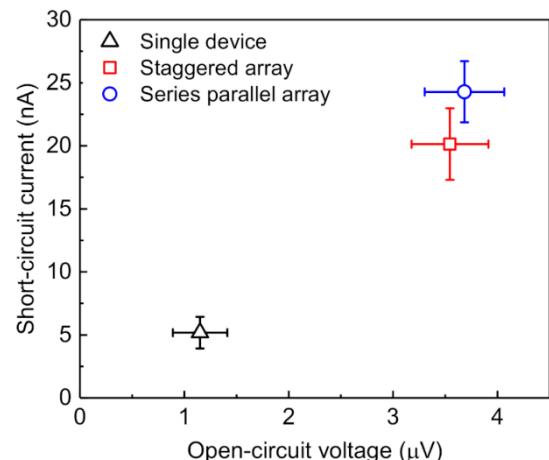
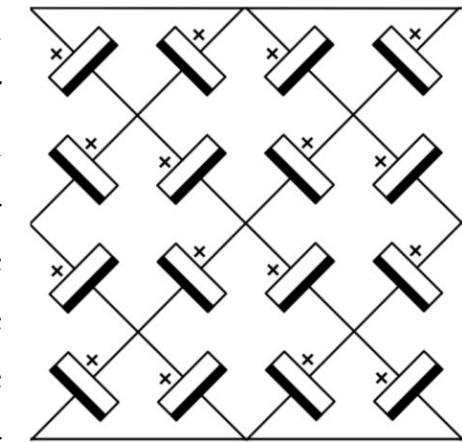
und vom Zweipol wissen wir, dass der Kurzschlussstrom $I_K = U_q/R_i$, weshalb $P_L = \frac{U_q}{4I_K}$. Wenn wir die maximale Leistung aus der Casimir Engine gewinnen wollen, muss demnach $P_L = \frac{U_q}{4I_K}$, wobei U_q die Leerlaufspannung ist.

Im Bild, das Moddel et al. angeben, zeigt sich für einen 33nm dicken Casimir Hohlraum eine Leerlaufspannung $U_L \approx -0,07mV$ und ein Kurzschlussstrom von $I_K \approx 80nA$, sodass sich eine Leistung von $P_L = -1,4pW$ ergibt. Das negative Vorzeichen gibt an, dass Energie produziert wird, wobei ein positives Vorzeichen Energieverbrauch suggerieren würde. Deshalb sind besonders der obere linke und der untere rechte Quadrant im Bild für Energiequellen interessant. Solarzellen arbeiten beispielsweise im unteren rechten Quadranten. Die Casimir Engine arbeitet, wie sich zeigt, im oberen linken Quadranten. Mit der Flächenskalierung, skaliert die Energie genau wie der Strom, da die Steigung der U-I-Kennlinie gleichbleibt, solange nichts an dem Casimir Plattenabstand verändert wird. Die Energiedichte bleibt für alle Größen gleich. Die Fläche, die hier benutzt wurde, waren $0,02 \mu\text{m}^2$, was mit den gemessenen $1,4pW$ einer Leistungsdichte von 70 W/m^2 entspricht. Skaliert man die Casimir Engine auf makroskopische Größen, erhält man unvorstellbare kubische Energiedichten, die jede andere heute verfügbare Energiequelle in den Schatten stellen. Eine Solarzelle erreicht möglicherweise eine Nennleistung von 200 W/m^2 , es können jedoch keine Solarzellen gestapelt werden. Die Casimir Engine wird auf Wafer aufgetragen, die eine Dicke $d \sim 0,5mm$ haben, sodass in einem Kubikmeter möglicherweise 2000 Platten übereinander gestapelt werden können, womit 140.000 Watt erzeugt werden können. Zum Vergleich könnte man damit etwa 3,5 Liter Wasser pro Sekunde um 10°C erhöhen, sodass man nach 10 Sekunden eiskaltes Wasser in kochendes Wasser verwandelt hätte oder beispielsweise nach einer Minute 200 Liter Wasser um 10°C erwärmt hätte. Das unglaubliche daran ist, dass die Energiequelle der Casimir Engine unerschöpflich ist und auch dann Energie produzieren würde, wenn man sie gar nicht braucht. Es gibt keine Dunkelflauten, wie sie bei Solar- und Windenergie auftreten. Wie wir unter dem Abschnitt „Anwendung“ jedoch sehen werden, kann das auch ein

Nachteil sein, denn in ihrer aktuell vorgeschlagenen Form produzieren die Geräte durchgehend Energie und können gar nicht abgeschaltet werden. Findet man keinen Abnehmer, wird trotzdem Energie produziert, ergo Wärme erzeugt. Aber dazu später mehr. Sehen wir uns erstmal weitere Alternativfaktoren an, um die Energieerzeugung zu erklären.

3. Leiteranordnungsabhängigkeit

Wie auch bei Batterien, sollte der Strom und die Spannung über die Anordnung mehrerer Casimir Engines wie folgt verändert werden können: Eine Reihenschaltung mehrerer Geräte addiert die Leerlaufspannungen und eine Parallelschaltung mehrerer Geräte addiert die Kurzschlussstromstärken. Wenn andere Effekte den gemessenen Strom verursacht haben sollten, wäre es unwahrscheinlich, dass sie über die Leiteranordnung beeinflusst werden könnten. Beispielsweise würden sich thermoelektrische Effekte an den Messkontakte so nicht skalieren lassen. Es muss sich tatsächlich um eine Energiequelle handeln, wenn die Leiteranordnung Strom und Spannung beeinflussen kann.

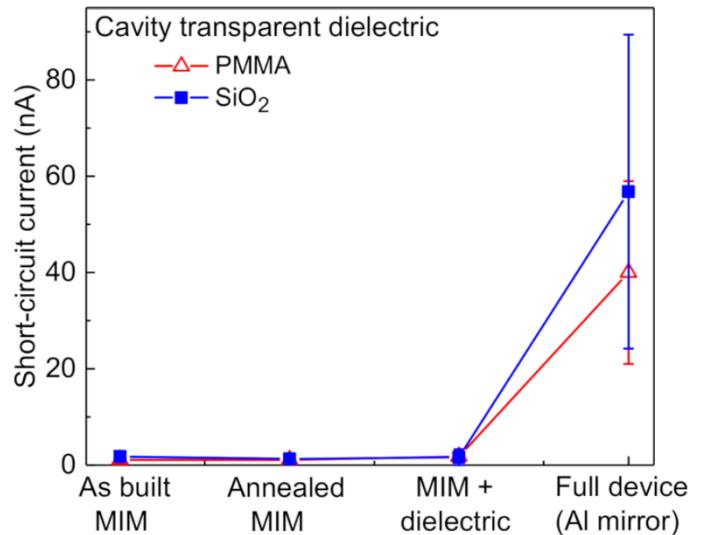


Es wurden zwei verschiedene Anordnungen von je 4×4 Matrixelementen überprüft. Die im Bild gezeigte Anordnung war eine Kombination aus Reihen- und Parallelschaltungen, die dazu verwendet wurde, den Einfluss von defekten Geräten zu minimieren. Zusätzlich wurde eine Anordnung von 4 in Reihe geschalteten Systemen von je 3 parallelgeschalteten Casimir Engines getestet. Und tatsächlich ergaben sich, wie in der Grafik gezeigt, etwa vier-

fach höhere Ströme und vierfach höhere Spannungen in den 4 x 4 Elementen als in einzelnen Casimir Engines.

4. Fertigungsschritte

Entgegen den Vermutungen könnte man auch annehmen, dass es nicht der Casimir Hohlraum ist, der die optischen Moden einschränkt und so eine Asymmetrie zwischen unterer und oberer Elektrode verursacht, sondern irgendein anderes Element, das in den Geräten verbaut wurde. Um das zu testen, wurden nach allen Fertigungsschritten die Kurzschlussstromstärken gemessen, um zu sehen, ob sich bereits ein Strom ergab, bevor die Casimir Platten hergestellt wurden. Die Autoren hatten in anderen Experimenten bereits tausende MIM (Metall-Isolator-Metall) Geräte hergestellt und innerhalb dieses Prozesses nie einen Strom feststellen können. Das MIM Gerät wurde nochmal auf einen Strom überprüft, aber es wurde nur ein insignifikanter Strom produziert, der im Fehlerbereich der Messgeräte lag. Beim Tempern bei 180°C für 15 Minuten wurde ebenfalls kein signifikanter Strom gemessen und selbst nach Auftragen des PMMA bzw. Silica Dielektrikums, das zwischen den Casimir Platten liegt, wurde keine Erhöhung des Stromes festgestellt. Erst als der Aluminium-Spiegel, also die hintere Casimir Platte, hinzugefügt wurde, ergab sich der in der Grafik gezeigte Stromstärkensprung. Es muss davon ausgegangen werden, dass es tatsächlich der Casimir-Spalt ist, der für eine Veränderung im System sorgt, durch die ein Strom möglich wird. Die erzeugten Ströme wurden in dieser Versuchsreihe über mehrere Monate gemessen. Auch nach einem halben Jahr hatte sich die Stromstärke für Casimir Engines mit PMMA Dielekt-

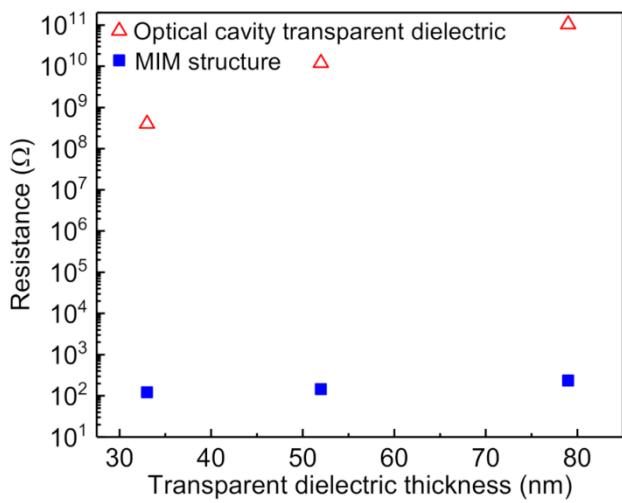


hergestellt und innerhalb dieses Prozesses nie einen Strom feststellen können. Das MIM Gerät wurde nochmal auf einen Strom überprüft, aber es wurde nur ein insignifikanter Strom produziert, der im Fehlerbereich der Messgeräte lag. Beim Tempern bei 180°C für 15 Minuten wurde ebenfalls kein signifikanter Strom gemessen und selbst nach Auftragen des PMMA bzw. Silica Dielektrikums, das zwischen den Casimir Platten liegt, wurde keine Erhöhung des Stromes festgestellt. Erst als der Aluminium-Spiegel, also die hintere Casimir Platte, hinzugefügt wurde, ergab sich der in der Grafik gezeigte Stromstärkensprung. Es muss davon ausgegangen werden, dass es tatsächlich der Casimir-Spalt ist, der für eine Veränderung im System sorgt, durch die ein Strom möglich wird. Die erzeugten Ströme wurden in dieser Versuchsreihe über mehrere Monate gemessen. Auch nach einem halben Jahr hatte sich die Stromstärke für Casimir Engines mit PMMA Dielekt-

rikum lediglich um 10% und für Engines mit SiO_2 Dielektrikum um 20% reduziert. Die Reduktion scheint vom Dielektrikum zwischen den Casimir Platten abzuhängen, was darauf hinweisen könnte, dass es sich nicht um einen Elektronenmangel handelt, sondern um das Dielektrikum, das verunreinigt wird und sich darin verschlechtert, optische Moden zu unterdrücken, sodass die Potentialasymmetrie links und rechts von der Tunnelbarriere abnimmt und weniger Nettostrom fließt. Es sollte daher empfohlen werden, Verunreinigungen als auch die Zersetzung des Casimir Dielektrikums zu verhindern. Dafür können einerseits die Umgebungsbedingungen angepasst werden oder sehr resistente transparente Dielektrika verwendet werden.

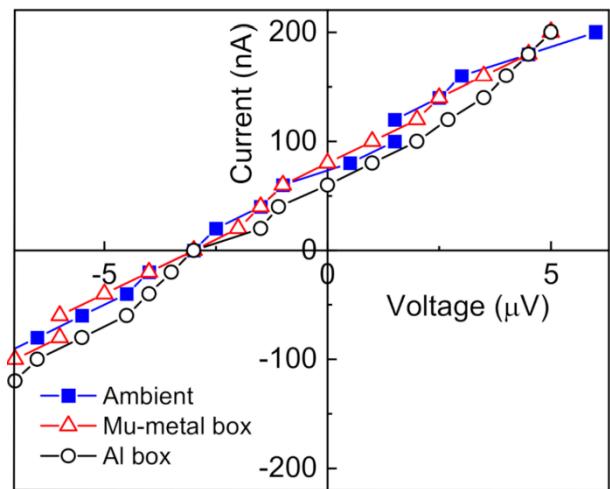
5. Leckströme

In Transistoren früherer Generationen wurde Silica als Isolator verwendet, während heute zu High-K-Materialien tendiert wird. Die noch sicheren Schichten für Transistoren, bei denen keine Leckströme auftraten, lagen im Bereich von 10 Nanometern, weshalb ein Casimir-Spalt von 33nm dick genug sein sollte, um Leckströme zu verhindern. Moddel et al. führten dazu eine Messreihe durch, bei der sie zu unterschiedlichen Dicken des transparenten Dielektrikums die Widerstände bestimmten. Die Widerstände lagen über sechs Größenordnungen höher als die der MIM Struktur. Damit kann ausgeschlossen werden, dass Leckströme vom Aluminiumspiegel durch den Casimir Spalt zur Palladiumelektrode gelangen.



6. Umgebungsstrahlung

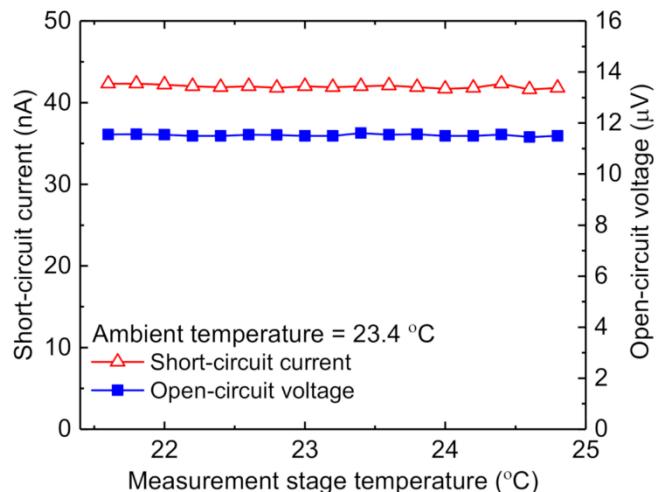
Es wäre vorstellbar, dass von außen irgendeine Strahlung aus der Umgebung in das Gerät eindringt und dort Elektronen anregt, um den gewünschten Strom zu erzeugen. An den linearen Verläufen, die man in den gezeigten Grafiken erkennt, die durch eine niedrige Potentialbarriere erreicht werden, kann man ablesen, dass keine Nicht-linearen Effekte in die Messungen eingewirkt haben. Es wurden außerdem herkömmliche Abschirmungsmethoden benutzt, um zu zeigen, dass es keine Umgebungsstrahlung gibt, die auf das System gewirkt hat. Zuerst wurde der Strom unter normalen Bedingungen und Aussetzung normaler Umweltbedingungen gemessen. Um hochfrequente elektromagnetische Frequenzen abzuschirmen, wurde schließlich noch eine Aluminiumbox verwendet, die als Faraday'scher Käfig fungiert. In Faraday Käfigen kommt es zur Influenz, Ladungen stoßen sich ab und es bildet sich eine gleichmäßige Elektronenverteilung an der Leiteroberfläche. Wenn eine gleichmäßige Elektronenverteilung im Gleichgewicht existiert, kann angenommen werden, dass das elektrische Potential φ an jedem Punkt innerhalb des Käfigs konstant ist. Daher gilt $E = -\nabla\varphi = 0$, wonach keine elektrischen Felder im Käfig existieren können. Um niedrige elektromagnetische Frequenzen abzuschirmen, wurde eine Mu-Metall Box verwendet, die ebenfalls einen Faraday Käfig darstellt. Mu Metall ist eine Nickel-Eisen Legierung und besitzt eine sehr hohe magnetische Permeabilität $\mu_r > 50.000 \frac{H}{m}$, wodurch es leicht magnetisiert werden kann und statische magnetische Störfelder sowie niederfrequente Strahlung sehr gut abschirmt. Wie im Bild nebenan zu sehen, sind die Kurven für alle drei Fälle beinahe identisch. Es gibt keinen Grund anzunehmen, dass es sich um einen Effekt durch Umgebungsstrahlung han-



delt. Ansonsten müsste mindestens eine Kurve drastisch von den anderen abweichen. Nicht-elektromagnetische Strahlung wird hiermit noch nicht ausgeschlossen, aber diese hätte in aktuellen physikalischen Modellen keine Auswirkungen auf eine elektrische Stromstärke.

7. Thermoelektrische Effekte in den Elektroden

Die Temperaturdifferenz zwischen der Palladium- und der Nickelelektrode könnte theoretisch zu thermoelektrischen Effekten führen, da dies typisch für Schaltkreise ist, in denen unterschiedliche Materialien verbaut sind. Man sollte möglichst Bedingungen schaffen, in denen die Geräte im thermodynamischen Equilibrium vorliegen und Abschirmungen vor Hitzequellen nutzen. Es wird auch die Nutzung eines Kühlkörpers empfohlen, um den Temperaturgradienten zu minimieren. Aber im Fall der Casimir Engine ist der Isolator zwischen den Metallelektroden sehr dünn, sodass sich Wärme zwischen den Elektroden leicht ausbreitet und darüber die Einstellung eines

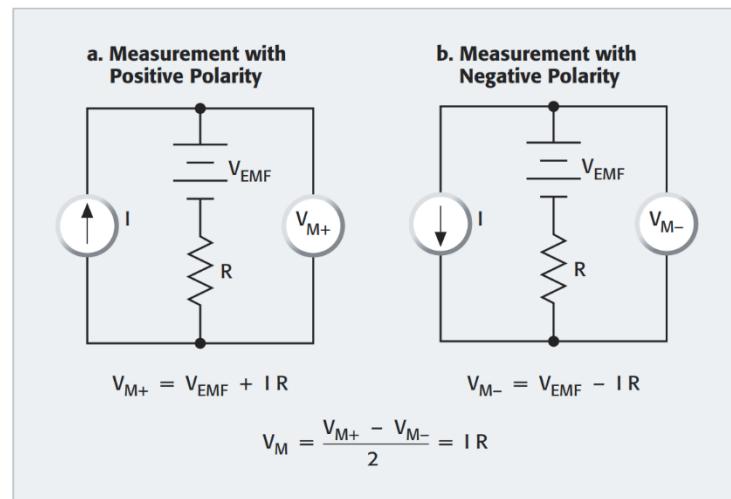


automatischen thermodynamischen Equilibriums sehr leicht ist. Um dies trotzdem zu überprüfen, wurde eine Messstation verwendet, deren Temperatur verändert werden konnte. Der Wafer Chip mit den Casimir Engines wurde mit einer Vakuum-Spannvorrichtung fest an die Messstation gedrückt, um optimale thermische Kopplung zu garantieren. Es wurde bei verschiedenen Temperaturen jeweils die Leerlaufspannung und die Kurz-

schlussstromstärke gemessen. Beide hätten sich mit der Temperaturzunahme geändert oder es wäre zu einer Umpolarisierung gekommen, wenn thermoelektrische Effekte für die Energieabgabe verantwortlich wären, aber nichts davon ist passiert. Der Strom scheint nicht temperaturabhängig und damit nicht durch einen thermoelektrischen Effekt hervorgerufen.

8. Thermoelektrische Effekte in den Messgeräten

Ein weiterer thermoelektrischer Fehler könnte sich einschleichen, wenn die Messgeräte eine unterschiedliche Temperatur wie die MIM Strukturen besitzen. Eine Möglichkeit auch solche Effekte auszuschließen, besteht in einer Messreihe von in



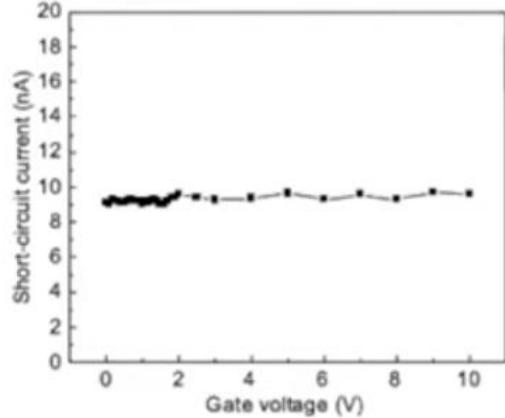
Reihe und/oder parallel geschalteten Geräten, da diese

[125]

auf einem Substrat liegen und deshalb auch für mehrere verbundene Geräte die Temperaturdifferenz zwischen den Messgeräten und den Casimir Enginges gleich bleiben würde. Der Strom dürfte deshalb nicht mit der Anzahl an Geräten skalieren. Aber es wurde bereits gezeigt, dass er mit der Anzahl an Geräten skaliert, sodass auch diese Art thermoelektrischer Effekt ausgeschlossen werden können.

9. Feldeffekte

Ein weiterer Test, der durchgeführt wurde, aber noch nicht veröffentlicht wurde, betrifft einen von Jeremy Munday vorgeschlagenen Erklärungsversuch des Effekts, dass sich am Aluminiumspiegel ein elektrisches Potenzial ausbilden könnte, das eine Spannung in der MIM Diode erzeugen könnte. L.H. Ford hatte in seinem Modell herausgefunden, dass gemäß der herkömmlichen Quantenfeldtheorie nur eine Verstärkung des Tunnelstroms messbar sein sollte, wenn ein äußeres elektrisches Feld angelegt wird. Munday vermutete, dass der Aluminiumspiegel dieses elektrische Feld erzeugen könnte. Weerakkody et al. führten daraufhin eine Versuchsreihe durch, in der die Spannung am Aluminiumspiegel variiert wurde und der Kurzschlussstrom an der Palladiumelektrode gemessen wurde. Die Spannung hatte keinen Einfluss auf den Strom.



Fehlerminimierung

Zudem wird von den Autoren angegeben, dass zur Fehlerminimierung stets die Stromumkehrmethode verwendet wurde [85], [86]. Dazu wurde jeweils einmal die Nickelelektrode und einmal die Palladiumelektrode geerdet, so dass der von außen angelegte Strom einmal in die eine und einmal in die andere Richtung floss. Es gilt $U_M = IR = \frac{U_{M+} + U_{M-}}{2}$, wobei U_M die mit einem Voltmeter gemessene Spannung ist und + und – die Richtungen des Stromes in den zwei Messungen der Stromumkehrmethode repräsentieren. Diese Methode schließt thermoelektrische Potenziale aus, die womöglich durch eine Temperaturdifferenz zwischen Source Measure Unit und Probe existieren könnten. Es wurde außerdem eine Vierleitermessung vorgenommen, um Effekte durch Leitungswiderstände auszuschließen. Es wurden Hochpräzisions-

Messgeräte verwendet. Als Strom- und Spannungsquelle wurde ein Keithley 2612 Source Meter verwendet und ein HP 3478A Multimeter wurde zur Spannungsmessung verwendet. Deren Unsicherheit liegt für Gleichstrom im Mikrovolt-Bereich, was durchaus zu akkurate Messungen führt, wenn die Spannungen im Experiment, wie angegeben im 100 Mikrovolt-Bereich liegen. [87]

Gibt es weitere mögliche Faktoren, die noch nicht beleuchtet wurden? Einige Kandidaten kann man sehr leicht ausschließen.

Stichprobenmanipulation

Wir könnten vermuten, dass es sich um Effekte einzelne Stichproben von Elementen handelt, die womöglich herausgepickt worden sind, um zu suggerieren, es handle sich um einen replizierbaren Effekt, aber das ist nicht der Fall. Moddel et al. untersuchten in 21 Fertigungschargen über 1000 Geräte, die dieselben Kennlinien lieferten, solange keine defekten kurzgeschlossenen Leitungen existierten.

Spektroskopische Ellispometrie Analyse

[88]

Kosmische Strahlung

Garret Moddel sprach beispielsweise auch sekundäre kosmische Strahlung und Neutrinos an. Auf der Erdoberfläche existiert ein Fluss kosmischer Strahlung von etwa 10.000 Teilchen pro Quadratmeter pro Sekunde. Auf die verwendete Fläche der Casimir Engine angewandt, ergäbe das im Schnitt einen Treffer alle 160 Jahre und kann offensichtlich den kontinuierlichen Strom nicht erklären. Neutrinos haben hingegen eine deutlich größere Konzentration von 10^{14} Teilchen pro Quadratmeter pro Sekunde, aber das liegt

nur daran, dass sie für alle praktischen Annahmen, nicht mit Materie interagieren und deshalb einfach durch die Erdatmosphäre und sogar durch die Erdkugel hindurchfliegen. Wenn sie selbst auf diesem Weg nicht mit Atomen in der Erde wechselwirken, werden sie es auch nicht in der Casimir Engine. Neutrinos können den Effekt demnach nicht erklären.

Magnetfelder

Wir hatten zwar elektromagnetische Strahlung besprochen, aber wie sieht es mit reinen Magnetfeldern aus? Tatsächlich können Magnetfelder, wie das Erdmagnetfeld, Spannungen, wegen $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ induzieren. Dabei gilt $U_B = \vec{B} \frac{dA}{dt} + A \frac{d\vec{B}}{dt}$. Es entsteht nur eine Spannung, sofern sich entweder das Magnetfeld oder die Fläche einer Leitermasche oder beide Größen ändern. Einerseits ist das für die besprochenen Experimente nicht der Fall, andererseits wurde zur Untersuchung elektromagnetischer Strahlung auf die Casimir Engine eine Mu-Metall Box zur Abschirmung verwendet, die auch zur Abschirmung magnetischer Felder genutzt wird. Unter Abschirmung statischer Magnetfelder gab es keine Abweichung von den gemessenen U-I-Kennlinien. Folglich kann auch dieser Einfluss ausgeschlossen werden.

Piezoelektrizität

Wie sieht es mit einem piezoelektrischen Effekt aus? Könnte es möglich sein, dass der Casimir-Spalt womöglich akustische oder sonstige Schwingungen aufnimmt und so auf die Palladiumelektrode eingewirkt wird, wo ein piezoelektrischer Effekt zustande kommt? Zuerst muss verstanden werden, dass der piezoelektrische Effekt nur in bestimmten Materialien, wie Quarz, auftritt, deren Gitterbausteine Dipole bilden, die sich im unbelasteten Zustand so positionieren, dass sich die elektrischen Polarisationen zwischen einzelnen Gitterzellen aufheben. Wird das Material gedehnt oder gestaucht, gleichen sich die Polarisationen nicht mehr aus und es entstehen elektrische Felder im

Gitter, die zu einer Spannung führen. Das Dielektrikum, das zwischen den Casimir Platten verwendet wurde, war in einigen Fällen Quarz, sodass es möglich scheint, den Effekt durch Piezoelektrizität zu beschreiben. In dem Fall wäre durch Gitterschwingungen eine elektrische Spannung zwischen den Casimir Platten entstanden und es wäre je nach Gitterschwingung Strom zwischen Palladium und Aluminium geflossen. Tatsächlich würden sich die Ströme von piezomechanischen Wendlern ebenfalls in Reihe addieren, wie es gemessen wurde. Und auch die Skalierung des Stroms mit der überlappenden Elektroden-Fläche wäre erklärbar. Hierbei gibt es dennoch mehrere Probleme. Erstens wurde ein relativ konstanter Strom gemessen, was durch den piezoelektrischen Effekt nur unter relativ konstanter Belastung passieren könnte. Es gab jedoch keine Belastung für das Dielektrikum. Für akustische Ursachen ist der Strom zu stabil. Zudem wurden bereits Leckströme zwischen Palladium und Aluminium untersucht. Der Widerstand, den das Dielektrikum darstellt, ist, wie erläutert, gegenüber dem Widerstand der MIM Schicht zu hoch. Es muss sich um Ströme handeln, die zwischen Nickel und Palladium fließen. Hier könnte man aber annehmen, dass die Spannung, die im Quarz anliegen könnte, das Tunneln von Elektronen aus Nickel in Palladium wahrscheinlicher macht, da Elektronen eine elektromotorische Kraft in Richtung der Quarzsicht spüren könnten, aber das elektrische Feld, das durch die Elektronenverschiebung im Quarz entsteht, existiert natürlich auch nur im Quarz, weshalb solche Auswirkungen sehr unwahrscheinlich sind. Das größte Problem ist jedoch, dass die Größenordnungen nicht hinkommen. Schall hat beispielsweise eine Wellenlänge im Zentimeterbereich und Ultraschall nicht mehr ganz im Millimeterbereich. Diese Wellenlängen könnten die Quarzsicht, die gerade einmal in der Größenordnung von 10 Nanometern im Durchmesser liegt, nicht beeinflussen. Gleichermassen könnte ein so kleiner Quarzkristall nicht den gemessenen Strom zu erklären. Selbst ein durch Gehbewegungen mit 0,5 Hz angetriebener aus vier Lagen $70 \times 40 \text{ mm}^2$ PVDF Film bestehender piezoelektrischer Energieumwandler erzeugt nur einen Kurzschlussstrom von $20\mu\text{A}$ [89]. Eine Zigzag Siliziumelektrode auf einer Metallschicht mit 2mm^2 Größe er-

zeugte unter 41 kHz Schwingungen nur wenige Nanoampere [90]. Beachtet man auch, dass keine Last auf die Quarzschicht einwirkte und in einem stationären Gerät Vibrationen sehr wenig Einfluss haben, so passt die berechnete Leistung nicht zum Verhalten von Piezoelektrizität. Auch Piezoelektrizität, wenngleich sie die wahrscheinlichste Alternativerklärung ist, scheidet erstmal aus.

Radioaktivität

Eine andere Alternativhypothese könnte radioaktive Strahlung darstellen. Womöglich gab es eine radioaktive Quelle bzw. eine Verunreinigung im verwendeten Material. Es lässt sich allerdings schnell feststellen, dass radioaktive Strahlung in den Größenordnungen von wenigen Nanometern nicht genug Energie pro Fläche liefert, um den gemessenen Strom zu erklären. Und es kann nicht davon ausgegangen werden, dass die Skalierungsgesetze, die gemessen wurden, gelten würden, wenn radioaktiver Zerfall verantwortlich wäre.

Johnson Rauschen

Andere Effekte, die vielleicht noch infrage kommen würden, sind Rauscheffekte, die womöglich unterschätzt wurden, wie Johnson Rauschen, bei dem ein metallischer Widerstand eine Rauschspannung $U = \sqrt{k_B B T R}$ erzeugt, wobei R der Quellenwiderstand, B die Bandbreite des Rauschen, T die Temperatur und $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ die Boltzmann-Konstante ist. Für das verwendete Gerät liegt der Widerstand, der aus $R = \frac{U_L}{I_K}$ folgt, bei etwa $1\text{k}\Omega$.

Geht man von einer Rauschbandbreite von 5kHz aus, erhält man bei Raumtemperatur etwa 140 Nanovolt. Diese Untergrenze an Rauschen gilt auch noch, wenn alle anderen Rauschfaktoren eliminiert wurden und entsteht einfach durch Temperaturschwankungen. Aber dieses Rauschen ist für unsere Messungen irrelevant, denn jene bewegen sich im Millivoltbereich, vier

Größenordnungen über der genannten Rauschgrenze. Und wie schon gesagt, wurde von den Autoren gründliche Vorarbeit geleistet, um Messfehler und Rauscheffekte auszuschließen.

Wärmetransfer durch Quantenfluktuationen

Eine interessante Sichtweise, der ich zufällig begegnet bin, erforscht auch den Wärmetransfer durch Quantenfluktuationen. Es wäre möglich, dass solch ein Effekt Ähnlichkeiten zum hier beobachteten Effekt hat:

[91]

Aus meiner persönlichen Sicht halten die gemachten Experimente vorerst jeder Widerlegung stand und sollten daher ernst genommen werden. Es könnte sich tatsächlich um Nullpunktenergie handeln, die hier nutzbar gemacht wird.

Theoretisches Modell

...

Nano-Resonator:

Hohlraum QED:

[92]

[93]

[94]

Hot Carrier Generierung durch Quantenfluktuationen:

Ich werde argumentieren, dass Plasmonenzerfall zu heißen Ladungsträgern führen kann. Plasmonen spielen eine große Rolle im Casimir Effekt. Moddel argumentiert, dass eine Asymmetrie der Generierung heißer Ladungsträger zu dem beobachteten Effekt in seiner Casimir Engine führt. Das bedeutet, dass es vermutlich eine Asymmetrie in der Anzahl von Plasmonen geben sollte. Da Plasmonen quantisierte Ladungsschwingungen sind, werden sie zumindest teilweise durch Vakuumfluktuationen beeinflusst. Das werden wir auch etwas konkreten zeigen können, wenn wir uns die Oberflächenplasmonresonanzspektroskopie ansehen. Es ist daher vorstellbar, dass ein erfolgreiches theoretisches Modell zur Beschreibung des beobachteten Effekts Plasmonen und Hot Carrier beschreiben muss. Wir haben außerdem gesehen, dass eine Asymmetrie in der Tunnelwahrscheinlichkeit für zusammengesetzte Teilchen erreicht werden kann. Dieser Effekt ist kritisch, um den gemessenen Strom erklären zu können. Es ist durchaus vorstellbar, dass der Casimir Spalt eine Asymmetrie darstellt, die einen Maxwellschen Dämon erzeugt, ohne explizit die Energieerhaltung zu verletzen. Um all das zu untersuchen, werden wir zuerst die entsprechenden Themengebiete kennenlernen und dann modellieren.

Plasmonen:

Plasmonen sind quantisierte Ladungsschwankungen. Man unterscheidet Volumenplasmonen und Oberflächenplasmonen. Es handelt sich, wie bei Phononen, um virtuelle Quasiteilchen. Wir betrachten einen metallischen Festkörper, für den ein freies Elektronengas approximiert werden kann. [95] Die Bewegung der Elektronen im Leitungsband ist gegeben durch eine Schwingung ohne Rückstellkraft, da wir für freie Elektronengase annehmen, dass keine Wechselwirkung mit den Atomrümpfen stattfindet:

$$m^* \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{m^*}{\tau} \frac{dx}{dt} = -eE_0 e^{-i\omega t}.$$

m^* ist die effektive Masse des Elektrons und τ die mittlere Stoßzeit. Die Lösung dieser Bewegungsgleichung ist

$$x(t) = \frac{e}{m^*} \frac{1}{\omega(\omega + \frac{i}{\tau})} E_0 e^{-i\omega t} = \frac{e}{m^*} \frac{1}{(\omega^2 + \frac{i}{\tau}\omega)} E_0 e^{-i\omega t}.$$

Wenn $x(t)$ die Verschiebung des Elektrons relativ zu den positiven Atomrumpfen des Kristallgitters ist, ergibt sich die Polarisierung $P(t) = -qnd = -enx(t) = \frac{-ne^2}{m^*} \frac{1}{\omega(\omega + \frac{i}{\tau})} E_0 e^{-i\omega t}$. n ist die Leitungselektronendichte und $-ex(t)$ ist das Dipolmoment des Elektrons. Die elektrische Suszeptibilität ist definiert durch

$$\chi(\omega) = \frac{P}{\epsilon_0 E} = -\frac{ne^2}{\epsilon_0 m^*} \frac{1}{\omega(\omega + \frac{i}{\tau})}.$$

Die dielektrische Funktion ergibt sich aus $\epsilon(\omega) = \epsilon_{el}(\omega) + \chi(\omega) = \epsilon_{el}(\omega) \left[1 - \frac{-ne^2}{\epsilon_{el}(\omega)\epsilon_0 m^*} \frac{1}{\omega(\omega + \frac{i}{\tau})} \right] = \epsilon_{el}(\omega) \left[1 - \omega_p^2 \tau^2 \frac{1 - \frac{i}{\omega\tau}}{1 + \omega^2 \tau^2} \right]$,

wobei $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_{el}(\omega)\epsilon_0 m^*}}$ die Plasmafrequenz ist. Es gilt nach Maxwell $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, weshalb wir unser Ergebnis $P(t)$ einsetzen können und

$\vec{D} = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 + \frac{i}{\tau}\omega)} \right) \vec{E}$ erhalten, wo wir einfach nur $\omega_p^2 = \frac{ne^2}{\epsilon_0 m^*}$ eingesetzt haben. Dies ist ein weiterer Ausdruck der komplexen dielektrischen Funktion

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 + \frac{i}{\tau}\omega)}.$$

Im Fall schwacher Dämpfung ist dies gerade die Eigenfrequenz longitudinaler Plasmaschwingungen. Im Elektronengas existieren natürlich keine transversalen Plasmaschwingungen, weil keine Rückstellkräfte existieren. Man erhält einen Bereich mit negativer Dielektrizitätskonstante für $0 < \omega < \omega_p$. Der einfachste Fall einer elektrischen Feldschwankung ist, wenn alle Elekt-

ronen gleichförmig um s ausgelenkt werden. Dadurch sammeln sich an einem Rand des Festkörpers Elektronen und am anderen entsteht ein Mangel. Diese Ungleichgewicht wird durch eine Schwingung ausgeglichen. Es entsteht ein elektrisches Feld $E = \frac{ne \cdot s}{\epsilon \epsilon_0}$, sodass die rücktreibende Kraft durch $F = -Ee = -\frac{ne^2 \cdot s}{\epsilon \epsilon_0}$ gegeben ist. Die Bewegungsgleichung ist dann $F_m = F \Leftrightarrow m^* \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{ne^2 \cdot s}{\epsilon \epsilon_0} = 0$. Das Ergebnis ist $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_{el}(\omega) \epsilon_0 m^*}}$ als Eigenfrequenz dieses harmonischen Oszillators, sodass die Plasmafrequenz die Eigenfrequenz der Elektronen ist. Quantisiert nennt man diese Plasmaschwingungen Plasmonen. Da Plasmonen longitudinal schwingen, können sie nicht mit transversal schwingendem Licht angeregt werden. Stattdessen muss man entweder evaneszente Lichtwellen oder schnelle elektrische geladene Teilchen benutzen, um Plasmonen anzuregen. Volumenplasmonen haben eine höhere Energie als Oberflächenplasmonen, weshalb Volumenplasmonen eigentlich nur durch geladene Teilchen mit genügend kinetischer Energie angeregt werden können. Oberflächenplasmonen können jedoch durch elektromagnetische Wellen angeregt werden.

Oberflächenplasmonresonanzspektroskopie:

Oberflächenplasmonen sind selbst evaneszente Wellen, die entlang der Oberfläche einer Grenzfläche schwingen und in die Oberfläche hinein exponentiell abklingen. Eine Bedingung für Oberflächenplasmonen, die wir hier als erstes herleiten wollen ist die Bedingung, dass die Permittivitäten des Mediums 1 und des Mediums 2 unterschiedliche Vorzeichen haben müssen, damit Licht Oberflächenplasmonen erzeugen kann. Zuerst wählen wir vereinfachend ein zweidimensionales System, das bei $z = 0$ eine Grenzfläche in der x-Ebene hat, wobei für $z > 0$ Medium 1 existiert, in welchem wir später unsere Lichtquelle platzieren und für $z < 0$ Medium 2 vorliegt, das beispielsweise ein zu untersuchender Festkörper ist, den wir mit Oberflächenplasmonresonanzspektroskopie untersuchen wollen. Es gelten

$$\begin{aligned}\overrightarrow{E_1} &= (E_{x1}\hat{x} + E_{z1}\hat{z})e^{i(k_{x1}x+k_{z1}z-\omega t)} \\ \overrightarrow{H_1} &= (H_{y1}\hat{y})e^{i(k_{x1}x+k_{z1}z-\omega t)}\end{aligned}$$

jeweils für das elektrische und das magnetische Feld. Aus den Maxwellgleichungen folgt

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \overrightarrow{D_1} &= \nabla \cdot (\varepsilon_1 \overrightarrow{E_1}) = 0 \\ &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} (E_{x1}\hat{x} + E_{z1}\hat{z})e^{i(k_{x1}x+k_{z1}z-\omega t)} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} (E_{x1}\hat{x} + E_{z1}\hat{z})e^{i(k_{x1}x+k_{z1}z-\omega t)} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} (E_{x1}\hat{x} + E_{z1}\hat{z})e^{i(k_{x1}x+k_{z1}z-\omega t)} \\ &= ik_{x1}E_{x1}e^{i(k_{x1}x+k_{z1}z-\omega t)} + ik_{z1}E_{z1}e^{i(k_{x1}x+k_{z1}z-\omega t)} = 0 \\ &\Leftrightarrow k_{x1}E_{x1} + k_{z1}E_{z1} = 0\end{aligned}$$

und, sofern die Stromdichte vernachlässigbar ist

$$\begin{aligned}\nabla \times \overrightarrow{H_1} &= \frac{\partial \overrightarrow{D_1}}{\partial t} \Rightarrow \\ \left(\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right) \times \begin{pmatrix} 0 \\ H_{y1}e^{i(k_{x1}x+k_{z1}z-\omega t)} \\ 0 \end{pmatrix} &= \varepsilon_1 \frac{\partial \overrightarrow{E_1}}{\partial t} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial z} [H_{y1}e^{i(k_{x1}x+k_{z1}z-\omega t)}] \\ &= \varepsilon_1 \frac{\partial \overrightarrow{E_1}}{\partial t} \Rightarrow H_{y1} = \frac{\varepsilon_1 \omega}{k_{z1}} E_{x1}.\end{aligned}$$

Nun wenden wir die Grenzflächenbedingungen an, dass $E_{x1} = E_{x2}$ und $D_{z1} = D_{z2}$. Wir verwenden hier unser Ergebnis $k_{x1}E_{x1} + k_{z1}E_{z1} = 0 \Leftrightarrow E_{z1} = -\frac{k_{x1}E_{x1}}{k_{z1}}$, sodass $-\varepsilon_1 \frac{k_{x1}E_{x1}}{k_{z1}} = -\varepsilon_2 \frac{k_{x2}E_{x2}}{k_{z2}}$. Die letzte Randbedingung ist, dass $k_{x1} = k_{x2}$, damit Impulserhaltung nach $p = \hbar k$ erfüllt ist, denn in z-Richtung kann kein Impuls auf Oberflächenplasmonen übertragen werden. Eine Anregung ist nur möglich, wenn man evanescente Lichtwellen benutzt, die ebenfalls senkrecht zur Oberfläche schwingen. Aus unseren Randbedingungen erhalten wir ineinander eingesetzt $\varepsilon_1 \frac{k_{x1}E_{x1}}{k_{z1}} = \varepsilon_2 \frac{k_{x2}E_{x2}}{k_{z2}} = \varepsilon_2 \frac{k_{x1}E_{x1}}{k_{z2}} \Leftrightarrow$

$\frac{\varepsilon_1}{k_{z1}} = \frac{\varepsilon_2}{k_{z2}}$. [96] Wenn wir die Wellenvektoren in z-Richtung betrachten, sehen wir die Evaneszenz der Plasmonen dadurch, dass die Wellenzahl imaginäre Werte annehmen. Für k_{z1} ist verläuft der exponentielle Abfall der Welle in positive z-Richtung, sodass in $e^{-a_1 z}$ die Konstante $a_1 > 0$, während für k_{z2} der exponentielle Abfall in negative z-Richtung verläuft, sodass $a_2 < 0$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} k_{z1} &= ia_1 > 0 \\ k_{z2} &= ia_2 < 0 \\ \Rightarrow \frac{\varepsilon_1}{k_{z1}} = \frac{\varepsilon_2}{k_{z2}} &\Rightarrow \varepsilon_1 < 0, \varepsilon_2 > 0 \text{ oder } \varepsilon_2 < 0, \varepsilon_1 > 0. \end{aligned}$$

Da die Wellenzahlen unterschiedliche Vorzeichen haben, müssen auch die Permittivitäten unterschiedliche Vorzeichen haben, damit die Äquivalenz erfüllt bleibt. $\varepsilon_2 < 0$ ist für Metalle erfüllt, weshalb in Metallen Oberflächenplasmonen erzeugt werden können.

Wir haben bereits gesehen, dass evanescente Wellen durch Totalreflexion erzeugt werden können.

Um präzise zu sein, reicht aber eine evanescente Welle nicht einfach so aus. Stattdessen müssen die Kopplungsbedingungen für Oberflächenplasmonen erfüllt werden. Es muss gelten

$$k_{x,Plasmon} = k_{x,Photon}$$

wobei $p = \hbar k$, womit es sich hier um die Impulserhaltung handelt. Und es muss

$$\omega_{Plasmon} = \omega_{Photon}$$

gelten, wobei $E = \hbar\omega$, womit es sich um die Energieerhaltung handelt. Um zu sehen, wann diese Bedingungen erfüllt werden, betrachten wir die Dispersionsrelationen von Oberflächenplasmonen. Diese sind durch die Fresnelschen Gleichungen berechenbar. Der Reflexionsgrad für p-polarisiertes Licht ist gegeben durch

$$R_p = \left(\frac{\tan(\delta - \gamma)}{\tan(\delta + \gamma)} \right)^2.$$

Man sieht, dass kein p-polarisiertes Licht reflektiert wird, wenn $\delta + \gamma = 90^\circ$, weil dann der Nenner von R_p unendlich groß wird, bzw. $R_p = 0$ wird. Das Gegenteil ist der Fall, wenn $\delta - \gamma = 90^\circ$, weil dort R_p divergiert. Es kommt zu Resonanz. Nach Snellius gilt für das Brechungsgesetz

$$\frac{\sin(\delta)}{\sin(\gamma)} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}},$$

wo wir die Resonanzbedingung nutzen, aus der hervorgeht, dass $-\gamma = -\delta + 90^\circ \Leftrightarrow \sin(-\gamma) = \sin(-\delta + 90^\circ) = \cos(-\delta) = \cos(\delta)$ und da der Sinus eine ungerade Funktion ist, gilt $\sin(-\gamma) = -\sin(\gamma) \Rightarrow \sin(\gamma) = -\cos(\delta)$. Das Resultat lässt sich ins Brechungsgesetz einsetzen

$$\frac{\sin(\delta)}{\sin(\gamma)} = -\frac{\sin(\delta)}{\cos(\delta)} = -\tan(\delta) \Rightarrow \tan(\delta) = -\frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}} = \frac{k_{||}}{k_{\perp}}$$

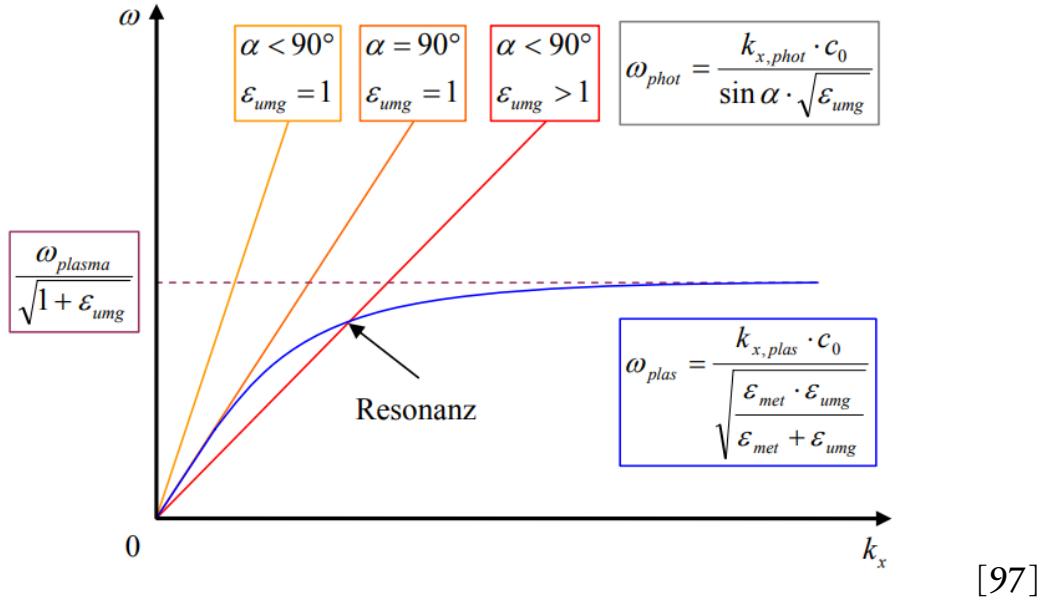
wobei $k^2 = k_{||}^2 + k_{\perp}^2 = \varepsilon_2 \frac{\omega^2}{c^2}$. Wir stellen folgendermaßen zu den parallelen und senkrechten Wellenvektoren um:

$$\begin{aligned} k_{\perp} &= -\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}} k_{||} \Rightarrow k^2 = k_{||}^2 + k_{\perp}^2 = k_{||}^2 + k_{\perp}^2 = k_{||}^2 + \left(-\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}} k_{||} \right)^2 \\ &= k_{||}^2 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} k_{||}^2 = k_{||}^2 \left(1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) = \varepsilon_2 \frac{\omega^2}{c^2} \Leftrightarrow k_{||}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(\frac{\varepsilon_1}{1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \right) \\ &= \frac{\omega^2}{c^2} \left(\frac{\varepsilon_2}{1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \right) \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1} = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \Rightarrow \\ k_{||,Plasmon} &= \frac{\omega_{Plasmon}}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}. \end{aligned}$$

Da zur Erfüllung der Dispersionsbedingungen $\omega_{Plasmon} = \omega_{Photon}$ gelten muss, folgt aus unserem Ergebnis

$$\frac{k_{||,Plasmon} \cdot c}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}} = \frac{k_{||,Photon} \cdot c}{\sin(\delta) \sqrt{\varepsilon_1}}.$$

Unter dieser Bedingung kommt es zu Resonanz.



[97]

Dabei ist der Definition des Wellenvektors zu entnehmen, dass $k_{||,Photon} = \frac{k_{||,Plasmon}}{\sin(\delta)} = \sqrt{\varepsilon_1} \frac{\omega_{Photon}}{c} \Leftrightarrow \omega_{Photon} = \frac{k_{||,Photon} \cdot c}{\sin(\delta) \sqrt{\varepsilon_1}}$ gelten muss. Wir können auch schreiben

$$\begin{aligned} k_{||,Plasmon} &= \frac{\omega_{Plasmon}}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} = \frac{\omega_{Plasmon} \sqrt{\varepsilon_1}}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} \\ &= \frac{\omega_{Plasmon} \sqrt{\varepsilon_1}}{c} \sqrt{\frac{1}{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + 1}}. \end{aligned}$$

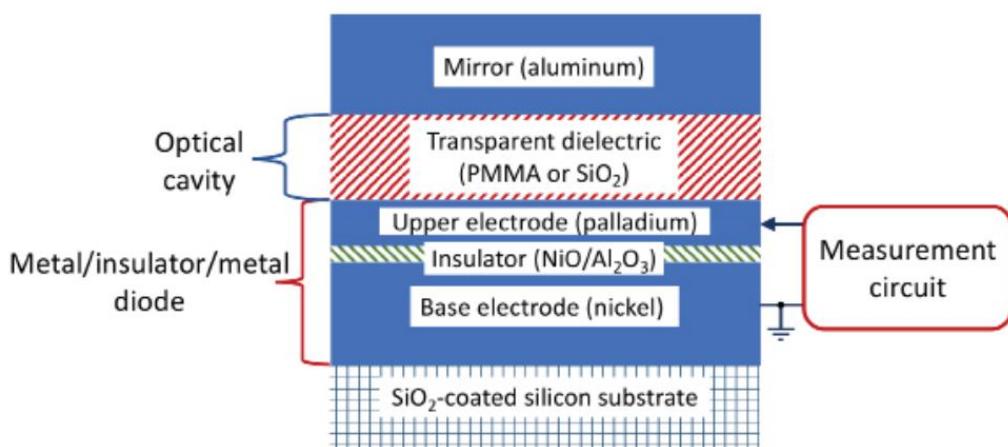
Wenn $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} < 0$, weil $\varepsilon_2 < 0$ ist, folgt $k_{||,Plasmon} \cdot \sin(\delta) = \frac{\omega_{Plasmon} \sqrt{\varepsilon_1}}{c} \sin(\delta) > \frac{\omega_{Plasmon} \sqrt{\varepsilon_1}}{c}$. Gleichermaßen können wir für die Plasmonfrequenz argumentieren, dass wegen $k_{||,Plasmon} = k_{||,Photon}$ auch

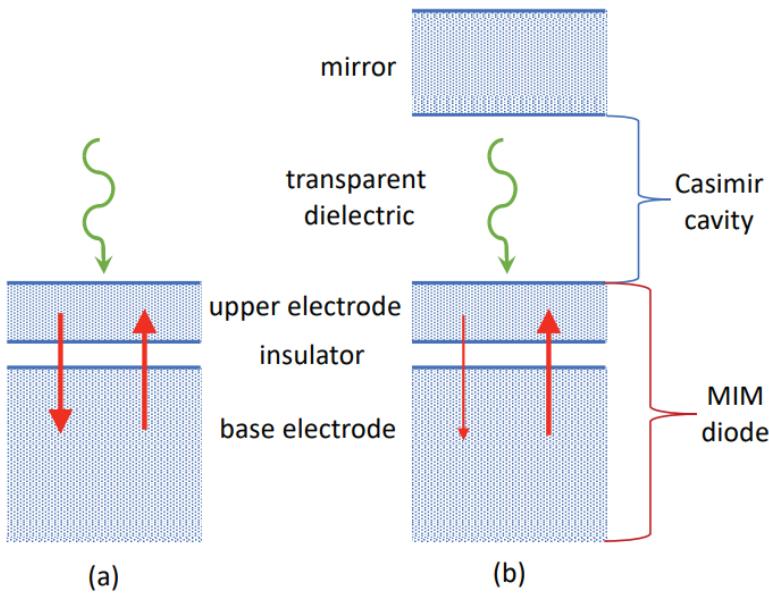
$\sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} = \sin(\delta) \sqrt{\varepsilon_1} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + 1}} = \sin(\delta)$ folgen muss. Und da $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} < 0$ ist, weil wir die besprochene Bedingung einhalten müssen, dass ε_1 und ε_2 unter-

schiedliche Vorzeichen haben, ist $\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_1+1}} > 1$, sodass $\delta > 90^\circ$ sein muss. Das ist aber für keinen Winkel δ erfüllt, weil wir maximal 90° Einfallsinkel wählen können, sodass normales Licht Plasmonen nicht anregen kann. Aber wenn $|\varepsilon_1| > |\varepsilon_2|$, dann wird $\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_1+1}}$ imaginär, sodass $k_{||,Plasmon}$ imaginär wird und folglich auch $k_{||,photon}$ imaginär werden muss. Ist das der Fall, lassen sich evaneszente Wellen zur Anregung nutzen, weil diese imaginäre Wellenvektoren haben.

Aber allgemein tritt bei $\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_1+1}} = \sin(\delta)$ Resonanz auf. Dies ist der Schnittpunkt, der im oberen Bild dargestellt ist.

Uns wurde bereits bei der Behandlung des optischen Tunneleffekts bzw. der frustrierten Totalreflexion klar, dass evaneszente Wellen äquivalent zu virtuellen Photonen sind. Unter dieser Annahme müssen wir zwangsläufig folgern, dass virtuelle Photonen Oberflächenplasmonen anregen können. Vergegenwärtigen wir uns noch einmal das tatsächliche Gerät, das wir untersuchen wollen:



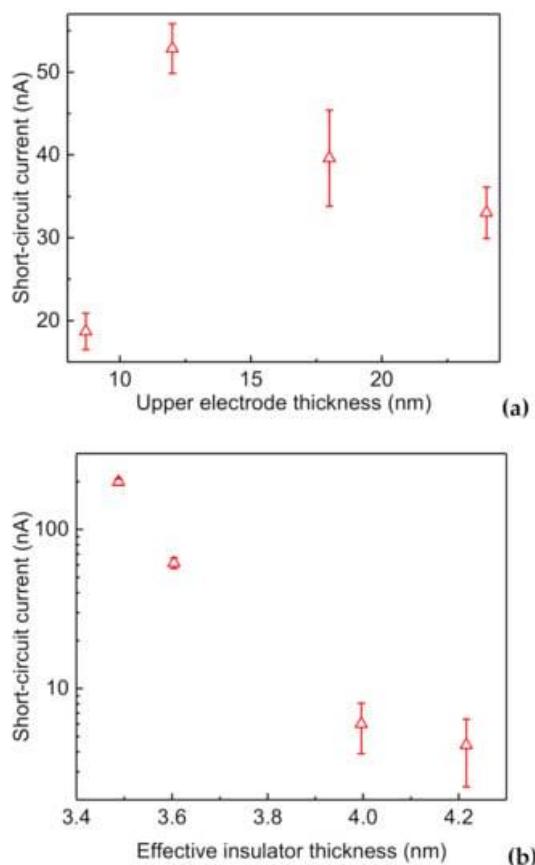


In Fall (a) können wir nun annehmen, dass virtuelle Photonen auf die Oberfläche der Palladiumelektrode treffen und Plasmonen anregen. Die angeregten Plasmonen erzeugen daraufhin Hot Carrier, die durch den Isolator tunneln können. In der Palladiumelektrode können sich keine Volumenplasmonen bilden, weil die Elektrode dafür zu dünn ist. In der unteren Nickel-elektrode hingegen bilden sich Volumenplasmonen, die ebenfalls durch virtuelle Teilchen angeregt werden können. Aber hier ist der Mechanismus nicht so wichtig. Die wichtige Erkenntnis ist, dass die Hot Carrier Erzeugung in der Basiselektrode und in der Palladiumelektrode im Gleichgewicht stehen müssen, damit kein Nettostrom verzeichnet wird. Die Hypothese ist nun, dass die Hot Carrier Erzeugung in der Palladiumelektrode auf Oberflächenplasmonen zurückzuführen ist, die wiederum teilweise auf Anregungen durch virtuelle Photonen zurückzuführen sind. Wenn man also einige Modeln von virtuellen Photonen unterdrücken könnte, wäre es möglich, dass weniger Oberflächenplasmonen Hot Carrier erzeugen könnten, sodass es zu einem Ungleichgewicht zwischen Nickel- und Palladiumelektrode kommt. Eine Plausibilitätsüberprüfung dieser Hypothese hat bereits stattgefunden. Moddel et al. haben dafür die Dicke der Palladiumelektrode verändert. Wenn der beschriebene Mechanismus zutrifft, sollte mit zunehmender Dicke der Palladiumelektrode der gemessene Strom erst zunehmen und dann abnehmen, da die Oberflächenplasmonen, die am Rand des Casimir Spalts

gebildet werden, mit zunehmender Dicke immer weiter vom Isolator entfernt sind, sodass Hot Carrier eine längere Strecke zurücklegen müssten, um die Tunnelbarriere zu durchqueren. Das sollte dazu führen, dass mehr Hot Carrier von der Basis zur oberen Elektrode fließen als umgekehrt. Da die Hot Carrier durch die Energie-Zeit-Unschärferelation nur eine sehr begrenzte Lebensdauer haben, wird es immer unwahrscheinlicher, dass Oberflächenplasmonen zur Tunnelrate beitragen. Wir erwarten, dass für eine sehr dünne obere Elektrode die Evaneszenz bis durch den Isolator hindurch zur Nickel-elektrode dringt, sodass wieder ein Gleichgewicht zwischen Oberflächenplasmonen von der einen und Volumenplasmonen von der anderen Seite hergestellt wird, da praktisch alle Hot Carrier tunneln können. Man kann sich dazu vorstellen, dass die Palladiumelektrode infinitesimal dünn wird. In diesem Fall liegt gar kein echter Casimir Spalt mehr vor, sodass auch die Modenunterdrückung für Quantenfluktuationen ausbleibt.

In diesem Fall sollte sich also wieder ein Gleichgewicht mit symmetrischer

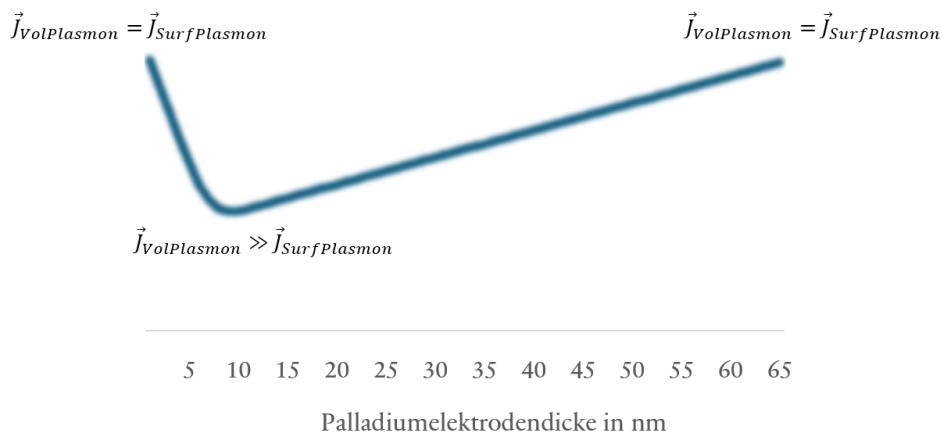
Tunnelrate ausbilden. Steigt die Dicke der Palladiumelektrode, können nicht mehr alle Hot Carrier, die durch Oberflächenplasmonen entstehen, tunneln, sodass ein Ungleichgewicht entsteht, das mit zunehmender Dicke größer wird. Ab einer bestimmten Dicke können allerdings andere Mechanismen wieder dafür sorgen, dass das Gleichgewicht rekreiert wird. Dazu gehören Volumenplasmonen und Polaritonen oder Phononen.



Und genau dieses Resultat wurde gemessen: Erhöht man die Dicke der Palladiumelektrode, steigt der Strom zuerst an, bis man etwas eine Dicke von 10 Nanometern erreicht. Für noch dickere obere

Elektroden nimmt der Strom danach in einer scheinbar exponentiellen Abklingkurve ab. Es scheint also ein Optimum im Bereich von 10 nm zu geben, bei welchem die Hot Carrier Erzeugung in der oberen Elektrode minimal wird. In diesem Bereich sollte laut unserem Modell auch ein Minimum entstehender Volumenplasmonen oder anderer Quasiteilchen vorliegen, sodass Oberflächenplasmonen die Hot Carrier Erzeugung dominieren.

Hot Carrier Erzeugung in der Palladiumelektrode



Allerdings ist das bisherige Modell noch sehr abstrakt und kaum präzise genug, um irgendwelche Vorhersagen zu treffen. Um das Modell zu verbessern, müssen wir zuerst wirklich verstehen, welche Rolle Plasmonen im Casimir Effekt spielen und die Bedingungen untersuchen, unter denen es zu symmetrischer Hot Carrier Erzeugung kommt und ob es tatsächlich zu asymmetrischer Hot Carrier Erzeugung kommen kann.

Oberflächen-Plasmonen im Casimir Effekt:

Wir können die Casimir-Energie nach van Kampens Ansatz für Oberflächenplasmonen-Moden in einen Energiebeitrag von evaneszenten Moden (plasmonische Moden) und transversalelektrromagnetischen Moden (photonierte Moden) unterteilen:

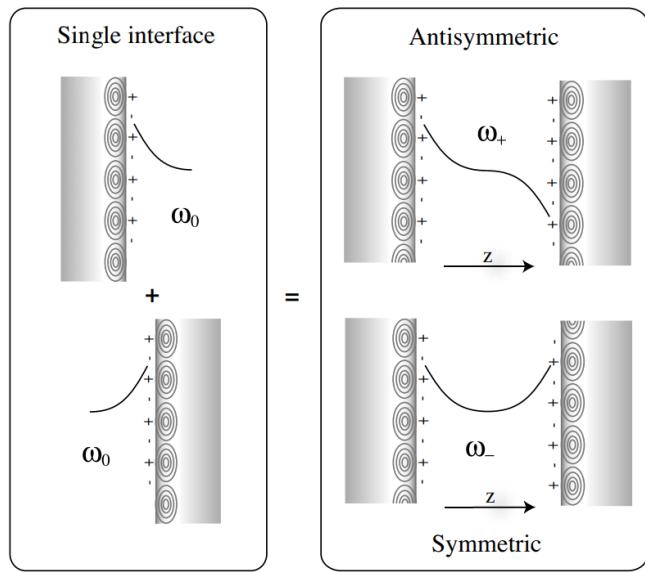
$$E = \sum_k \left[\frac{\hbar\omega_+}{2} + \frac{\hbar\omega_-}{2} \right]_{L \rightarrow \infty}^L$$

Plasmonische Moden

$$+ \sum_{\mu, k} \left[\sum_{\omega < \omega_B} \frac{\hbar\omega_n^\mu}{2} \right]_{L \rightarrow \infty}^L + \lim_{d \rightarrow \infty} \sum_{\mu, k} \left[\sum_{\omega \geq \omega_B} \frac{\hbar\omega_n^\mu}{2} \right]_{L \rightarrow \infty, d}^{L, d}$$

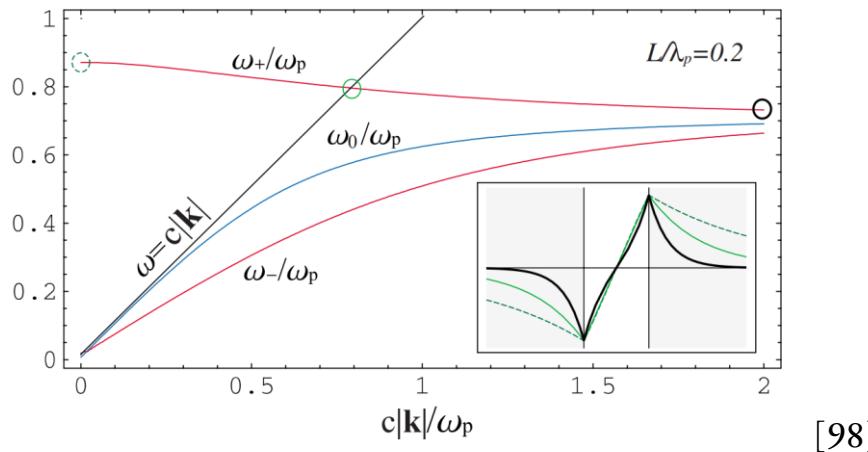
Photonische Moden

Hierbei ist L der Abstand der Casimir Platten und d die Dicke der Casimir Platten, sodass im letzten Term nur die sogenannten Bulk Moden wirken, die für makroskopische Plattenabstände beisteuern. ω_+ sind antisymmetrische und ω_- symmetrische Moden:



[98]

Man kann zeigen, dass die symmetrische und antisymmetrische Mode für $L \rightarrow \infty$ gegen ω_0 tendieren:



[98]

Damit erhält man im plasmonischen Term der Energie zwei einfache Nullpunktenergien, die zwei isolierte Oberflächenplasmonen beschreiben. Schram hat gezeigt, dass sich

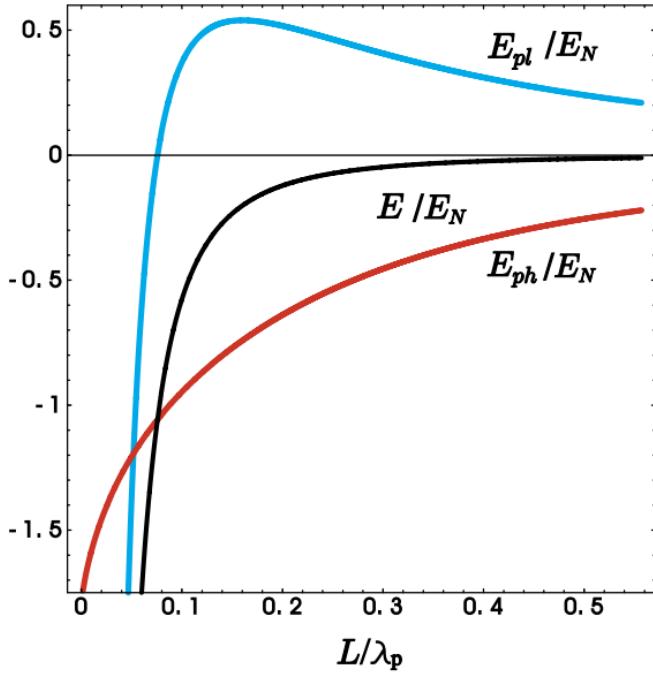
$$\sum_{\mu,k} \left[\sum_{\omega < \omega_B} \frac{\hbar\omega_n^\mu}{2} \right]_{L \rightarrow \infty}^L = \frac{i}{2\pi} \sum_{\mu,k} \int_0^\infty d\omega \hbar \ln (1 - r_k^\mu(\omega)^2 e^{2ik_z L}),$$

wobei ersteres der photonische Beitrag zur Casimir Energie und der rechte Ausdruck eine zur Lifshitz Formel äquivalente Darstellung der Casimir Energie ist. Dabei ist r_k^μ die Reflexionsamplitude, für die gelte

$$r_k^{TE} = \frac{\kappa - \kappa_m}{\kappa + \kappa_m}, \quad r_k^{TM} = \frac{\kappa_m - \varepsilon(\omega)\kappa}{\kappa_m - \varepsilon(\omega)\kappa}$$

[99]

Für kurze Distanzen sind die plasmonischen Energiebeiträge zur Casimir Energie $E_N = (2\pi)^3 \frac{\hbar c \pi^2 A}{720 \lambda_p^3}$ negativ also anziehend, während sie für große Abstände abstoßend werden:



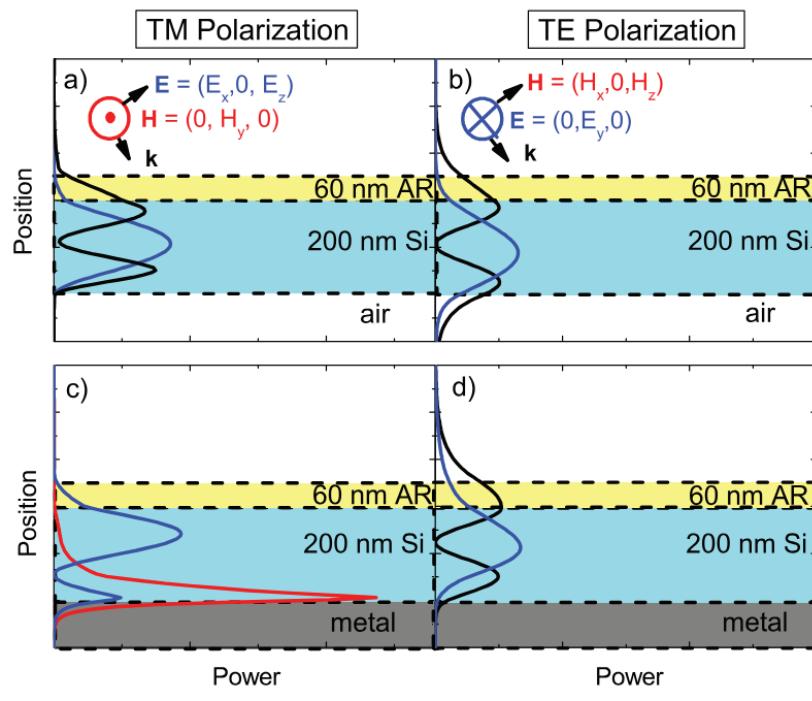
[98]

In der Grafik ist abzulesen, dass der plasmonische Einfluss auf die Casimir-Energie ab $0,8\lambda_p/L$ negativ wird. Für größere Plattenabstände wird der plasmonische Einfluss aber positiv und somit abstoßend. Was uns jedoch hier viel mehr interessiert, ist der Einfluss der Plasmonenenergie auf die Hot Carrier Erzeugung. Da hier der Energiebeitrag der Plasmonen zum Casimir-Effekt besprochen wurde, lässt sich keine direkte Aussage darüber treffen, wie sie dies zur Tunnelrate in der MIM Diode beisteuern sollte. Aber wir können einen semi-klassischen Vermutung anstellen, dass wegen $p = \hbar k \Rightarrow F = \hbar \frac{dk}{dt}$. Nehmen wir $\frac{dk}{dt} = 0$ für Plasmonen an, liegt ein Kräftegleichgewicht vor, was auch dadurch gerechtfertigt ist, dass Oberflächenplasmonen an den Oberflächen der Casimir Platten verharren. Gilt ein solches Kräftegleichgewicht, folgt aus der abstoßenden Kraftwirkung der Oberflächenplasmonen auf die Casimir-Platten eine anziehende Wirkung Kraftwirkung außerhalb der Casimir Platten in gleicher Höhe. Wir sehen bei $1,6\lambda_p/L$ ein Maximum der Plasmonenenergie, was dazu korrespondieren sollte, eine maximale Anziehungskraft zu generieren. Für Palladium ist $\lambda_p(Pd) = 22\text{nm}$ und für Aluminium ist $\lambda_p(Pd) = 14\text{nm}$ [80], sodass die maximale Anziehungskraft im Bereich von 22 bis 35nm Casimir-Spaltdicke erfolgen sollte.

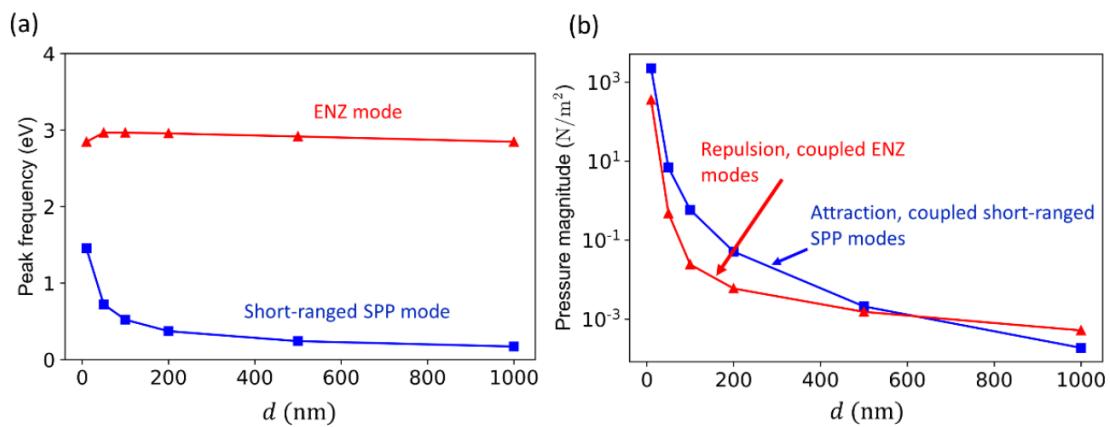
Leider wurden in diesem Bereich noch keine Versuche gemacht. Darunter sollte die Anziehungskraft abnehmen und der Strom somit ebenfalls.

[100]

[101]



[102]



[103]

Plasmonenzerfall und Hot Carrier Entstehung:

[104]

Der Unterschied dieses theoretischen Modells zum Modell der asymmetrischen Tunnelbarriere ist, dass hier keine asymmetrische Tunnelwahrscheinlichkeit angenommen wird. Stattdessen nehmen wir an, dass auf der einen Seite mehr Hot Carrier als auf der anderen Seite entstehen, weil Vakuumfluktuationen scheinbar Plasmonen erzeugen können. Eine Unterdrückung des Frequenzbereichs elektromagnetischer Vakuumfluktuationen könnte daher zu einem Disequilibrium von Hot Carriern führen. Allein dieses Ungleichgewicht würde nun ausreichen, um einen Strom zu generieren. Hierbei würde es nicht offensichtlich zu einer Verletzung des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik kommen, aber es würde effektiv ein Maxwell'scher Dämon entstehen.

[105]

[106]

Modellierung:

[107]

[108]

[109]

[28]

[110]

[21]

Herstellung

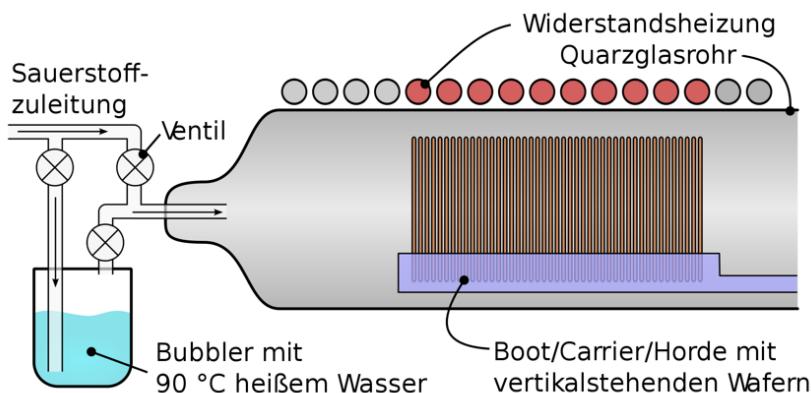
Um die Casimir Engine herzustellen, die Modell et al. spezifiziert haben, wurden bislang zwei Methoden erprobt. Die MIM Dioden mittels Germanium Schattenmasken herzustellen, ermöglicht kleine Strukturen, während die größeren Geräte durch Standardlithografie hergestellt wurden. Ich werde beide Methoden beleuchten, aber mich auf den Fotolithografie Prozess fokussieren, da dieser einfacher zu reproduzieren ist. Bevor wir die Herstellung betrachten, soll eine kurze Einführung in die verschiedenen Prozessschritte der Nanofertigung gegeben werden.

Methoden der Mikrofertigung

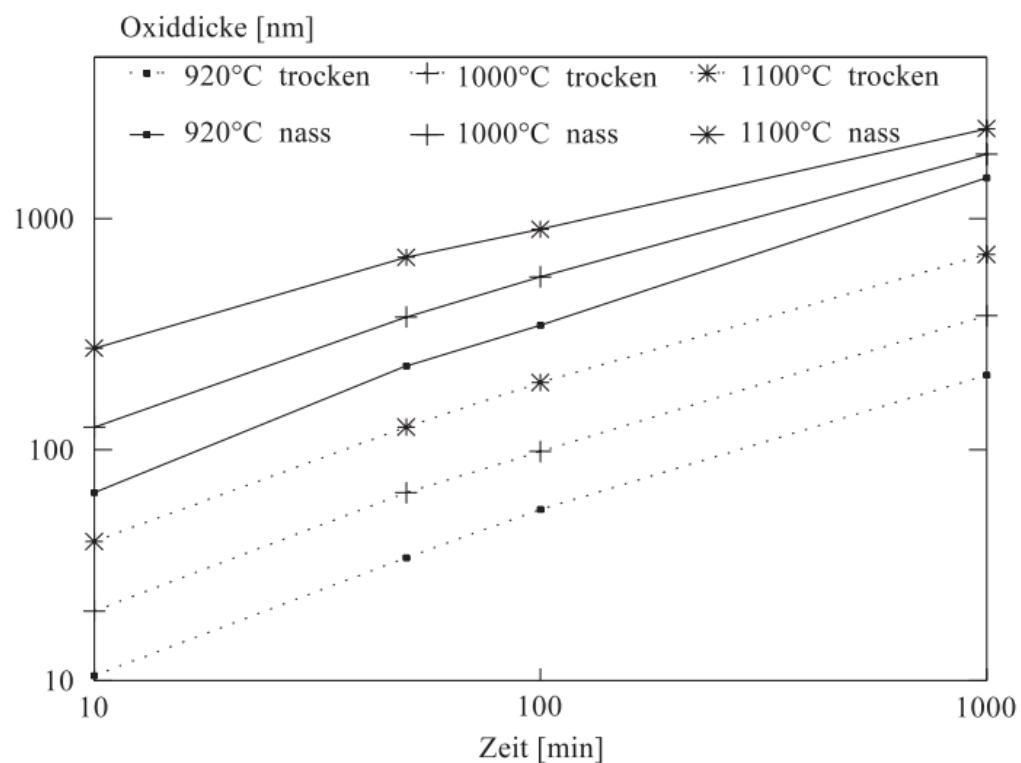
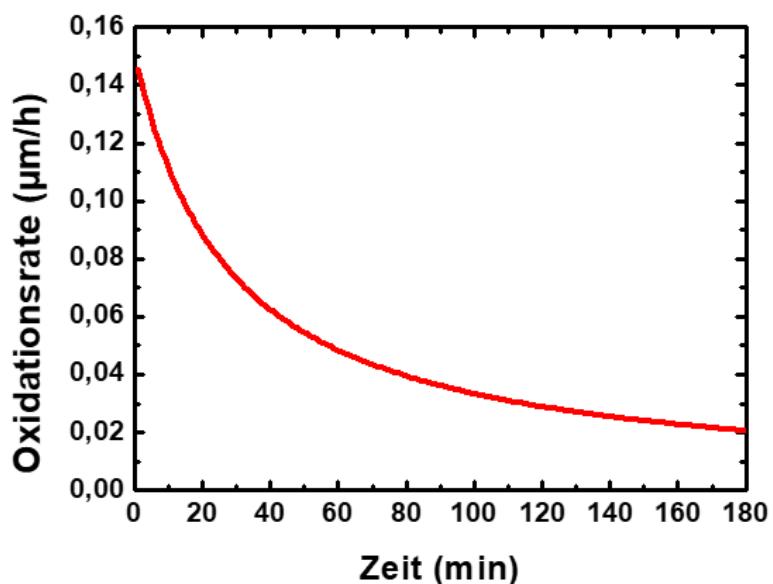
Oxidation von Silizium:

[111]

Trockene Oxidation:



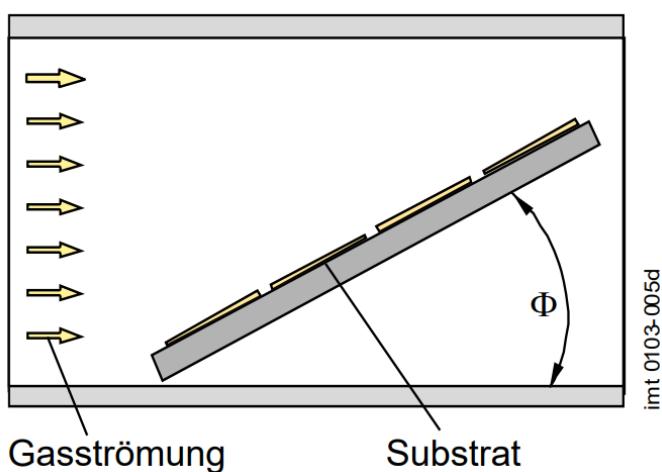
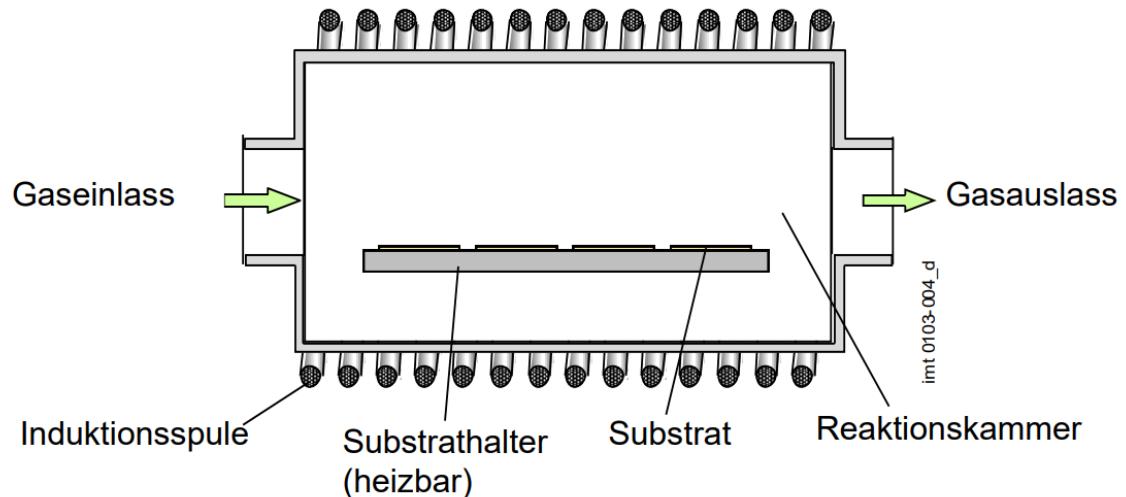
Modellierung und Wachstum:



Beschichtungstechnik:

Chemical Vapor Deposition:

[112] (Kapitel 22, 23)



Atomic Layer Deposition:

Ionenquellen:

[113]

Aufdampfen:

[112](Kapitel 6, 7)

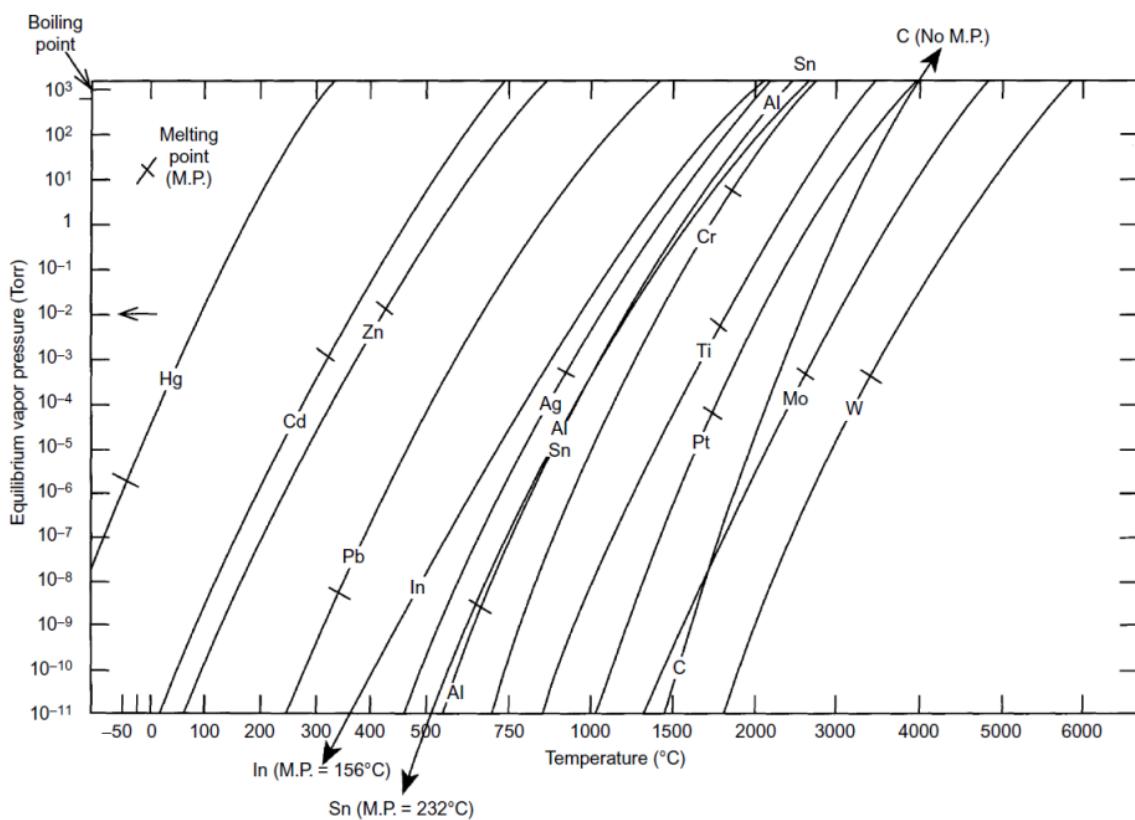
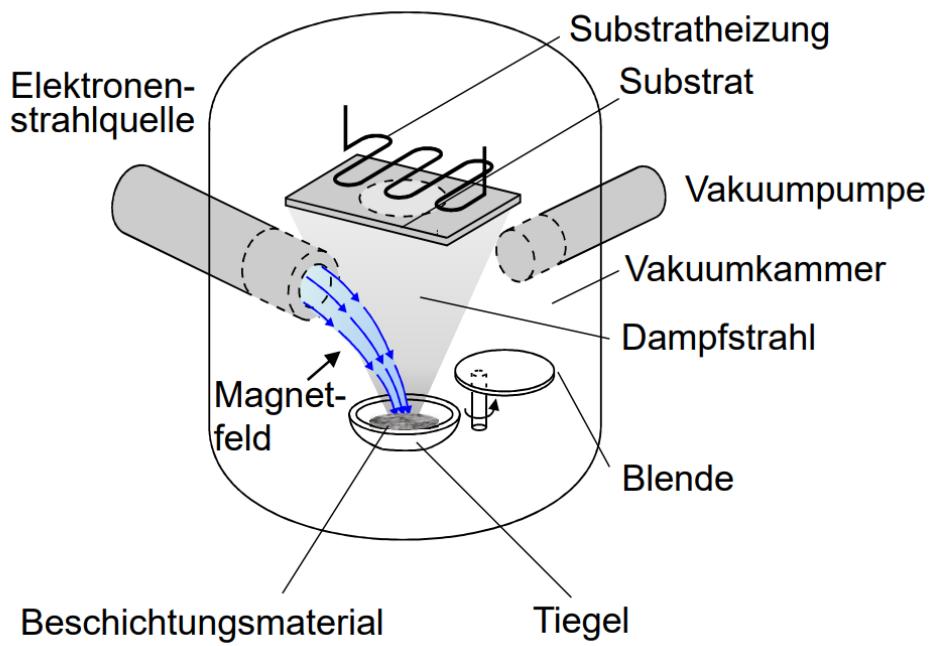


Figure 6.1: Equilibrium Vapor Pressures of Selected Materials. The Slashes Indicate the Melting Points (MPs)

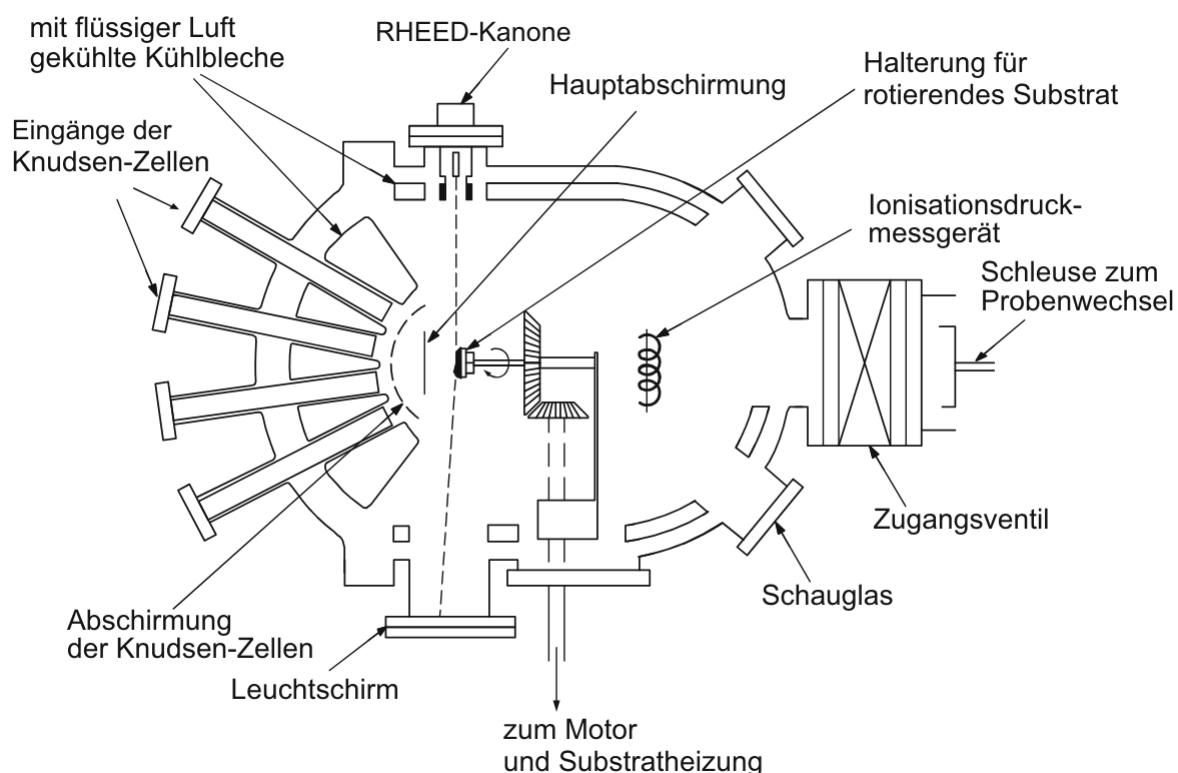
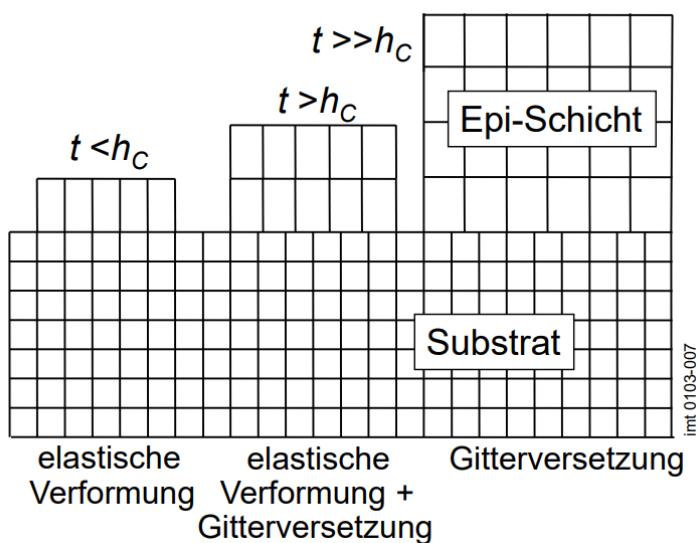


Reaktives Aufdampfen:

Epitaxie:

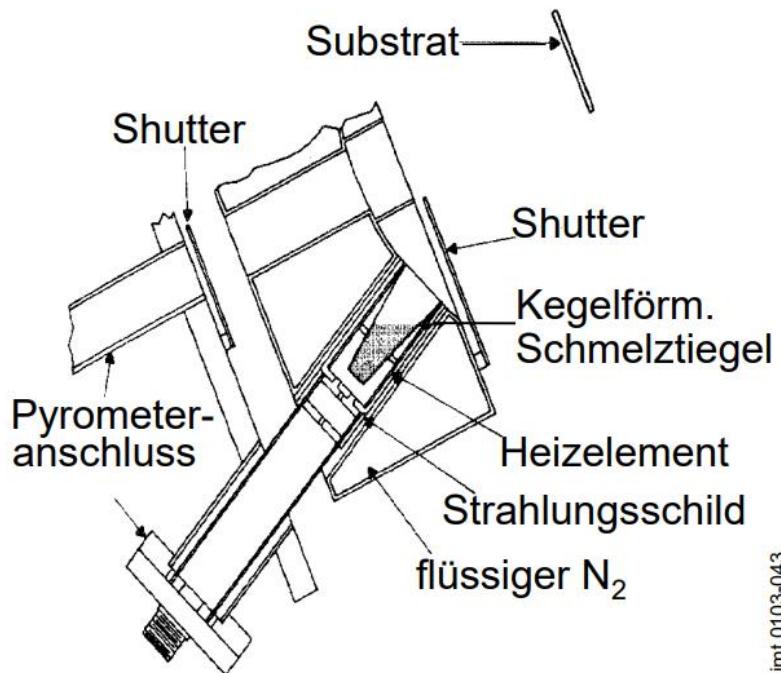
[114]

Molekularstrahlepitaxie:

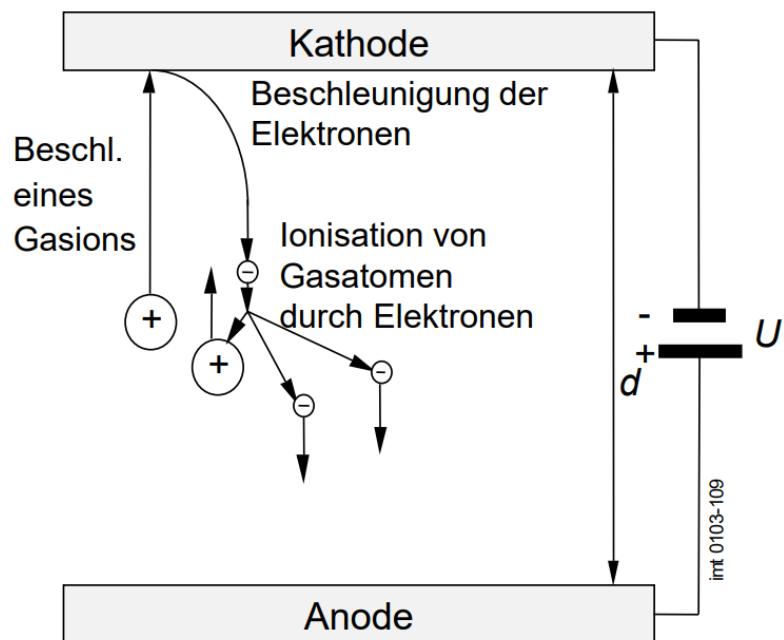


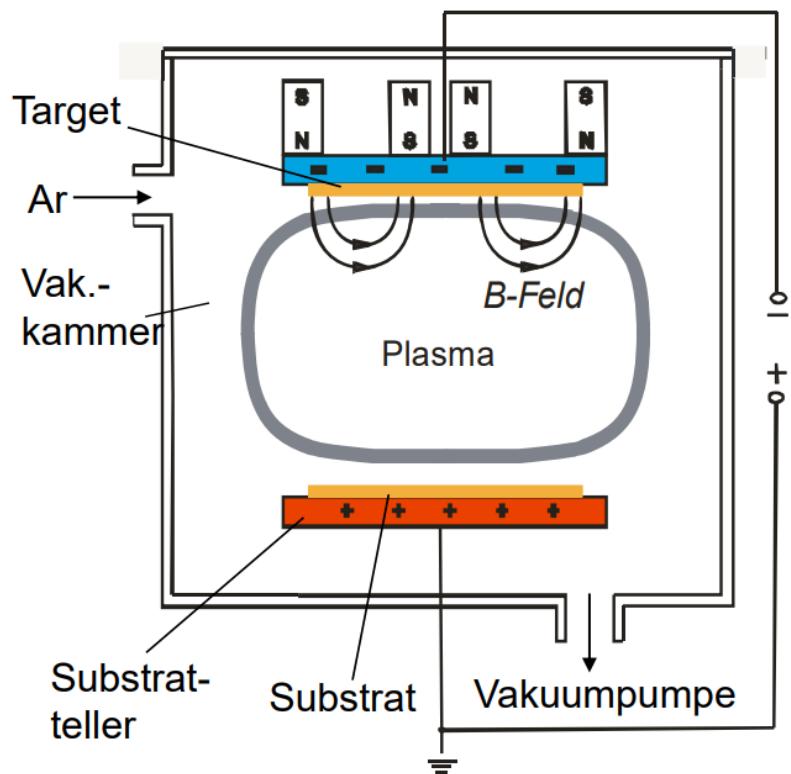
[115]

Effusionszelle:

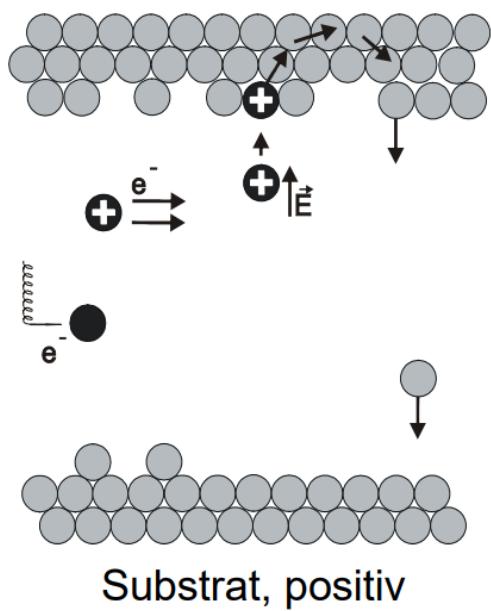


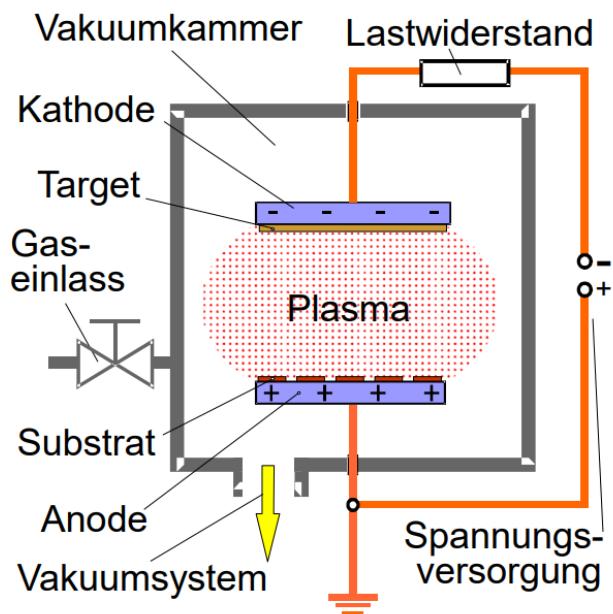
Kathodenerstäubung:





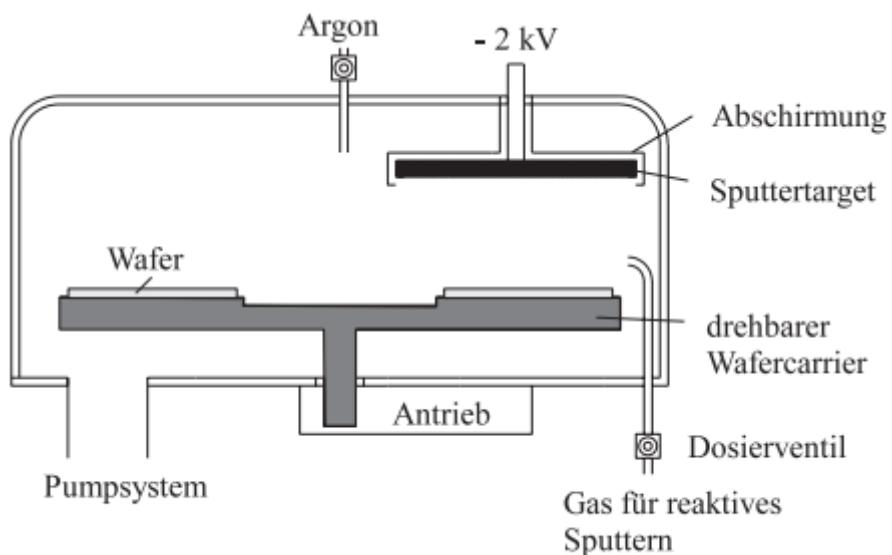
Target, negativ



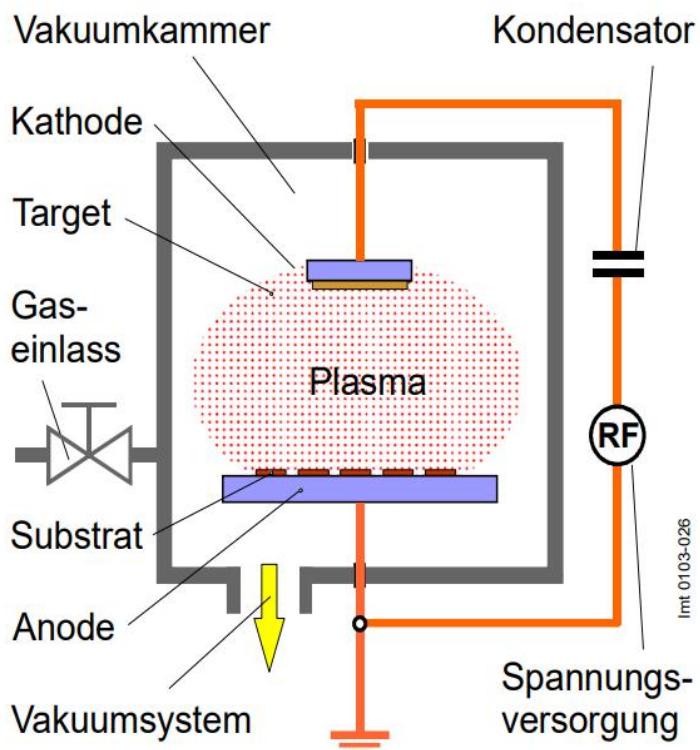
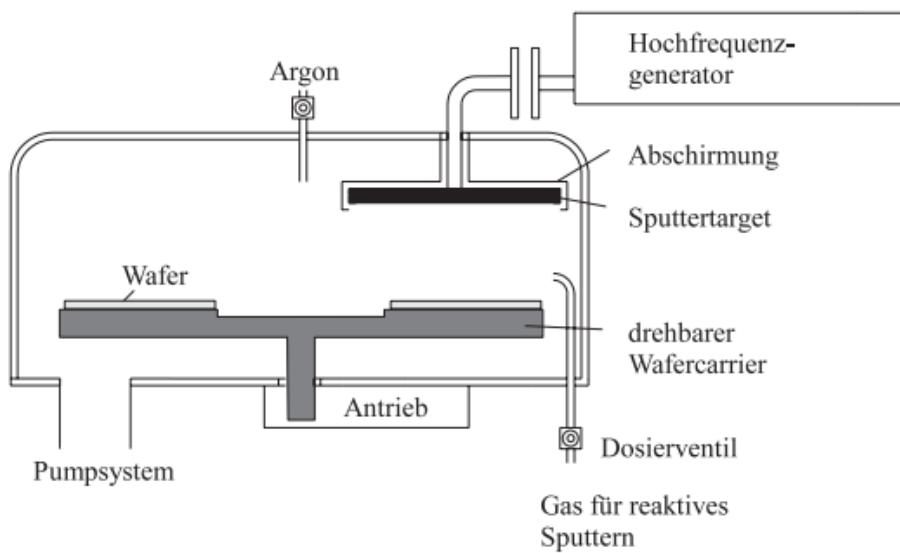


DC Sputtern:

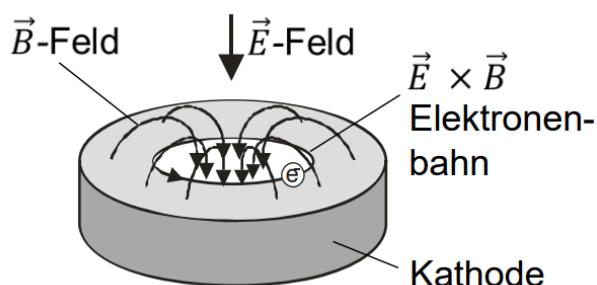
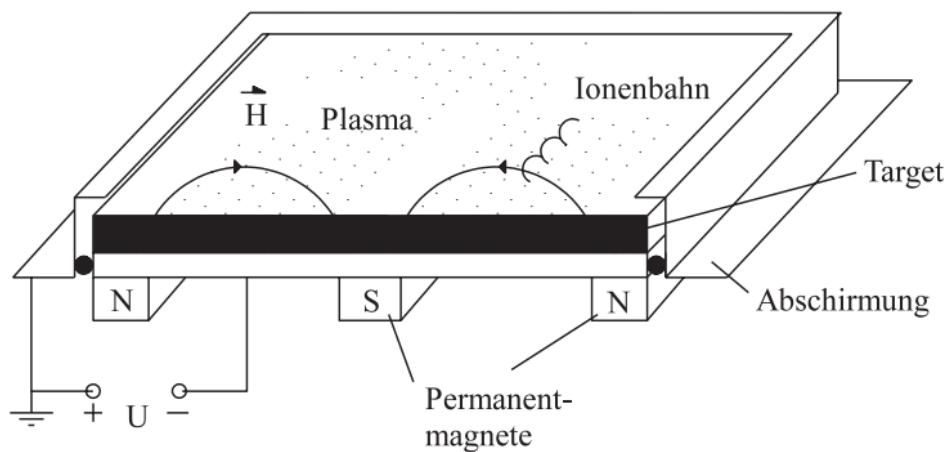
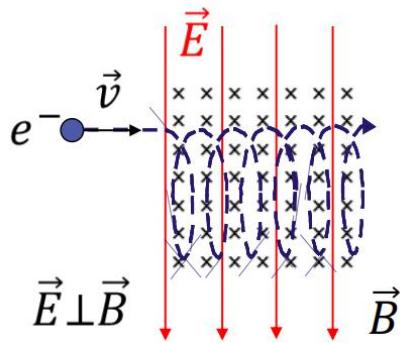
[112](Kapitel 25)



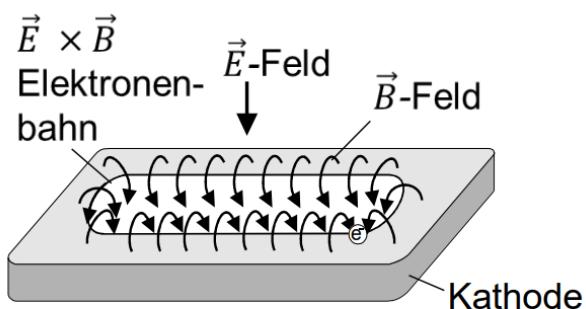
RF Sputtern:



Magnetron:

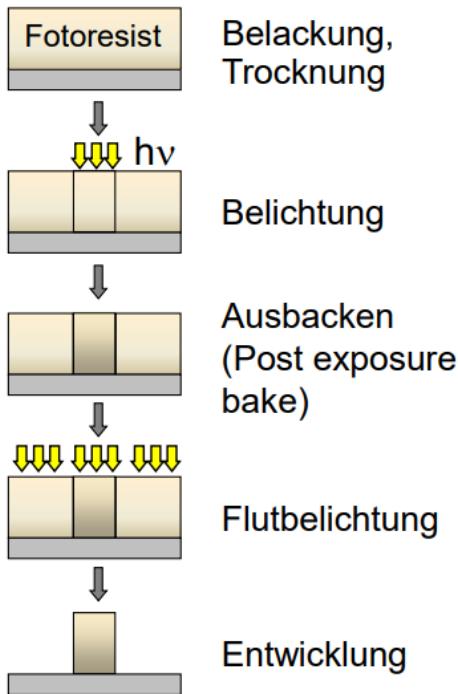


Scheibenförmige Bauform



Rechteckige Bauform

Lithografie:



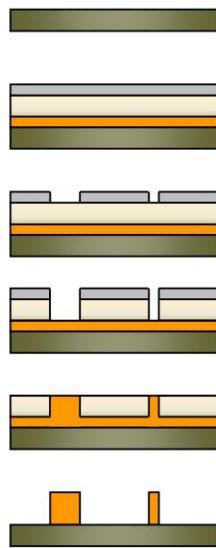
Strukturierung:

Um dreidimensionale Strukturen in Schichten aufbauen zu können, werden Prozesse durchgeführt, die als Strukturierung bezeichnet werden. Herkömmlicherweise kann dies auf zwei Arten und Weisen erfolgen.

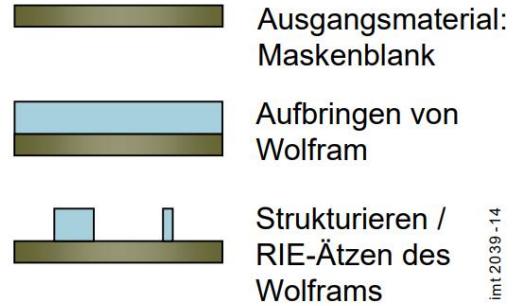
1. **Subtraktiver Prozess:** Man beschichtet den Wafer mit einem Film und einem Resist und verwendet dann Lithografie, um das gewünschte Muster zu formen. Dabei wird ein Teil des Positiv-Resists aufgelöst, so dass Löcher zurückbleiben, in denen der darunterliegende Film freigelegt wird. Nun wird ein Ätzprozess verwendet, um den Film genau dort, wo sich die Löcher im Resist befinden, zu entfernen. Im letzten Schritt wird der Resist entfernt.
2. **Additiver Prozess:** Man beschichtet den Wafer mit einem Film und einen Positiv-Resist. Man bestrahlt den Resist, um das gewünschte Muster zu formen und es bleiben Löcher zurück, in denen der darunter

liegende Film freigelegt wird. Nun wird jedoch ein weiteres Material abgeschieden, das sich in die Löcher absetzt.

Additives Verfahren (Absorbermaterial Gold)

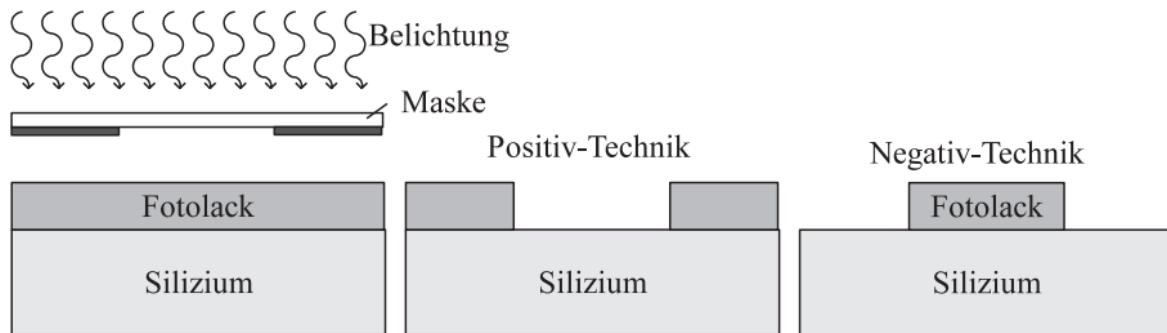


Subtraktives Verfahren (Absorbermaterial Wolfram)



int 2038-14

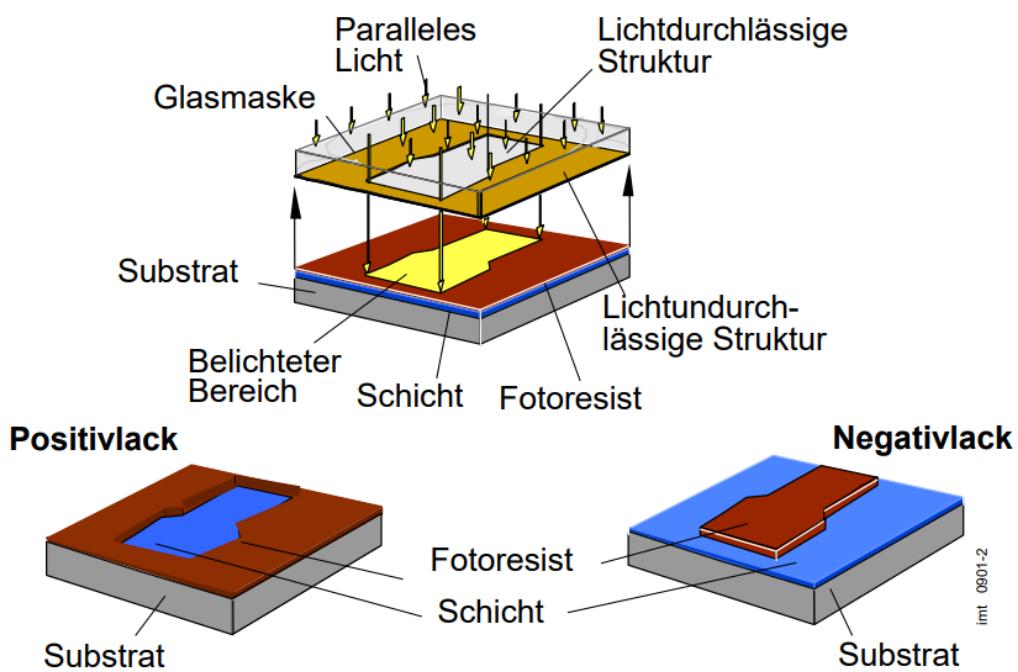
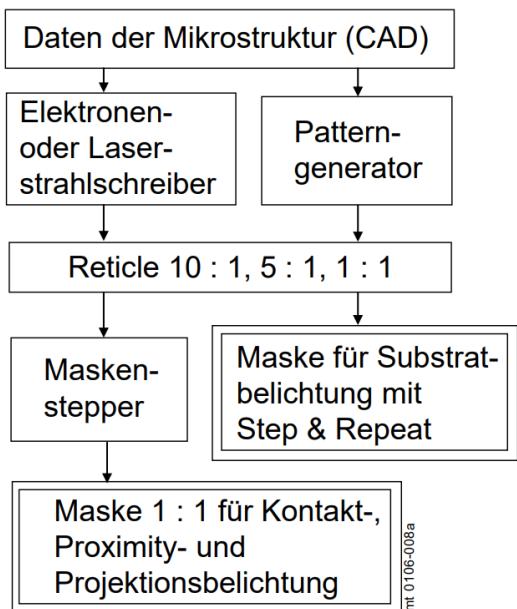
Es gibt außerdem die Möglichkeit, Beschichtung und Maskierung in der Reihenfolge zu vertauschen und anstatt eines Positiv-Resists einen Negativ-Resist zu verwenden, der bei Belichtung nicht verschwindet, sondern erhärtet. Darauf kommen wir unten noch zurück.



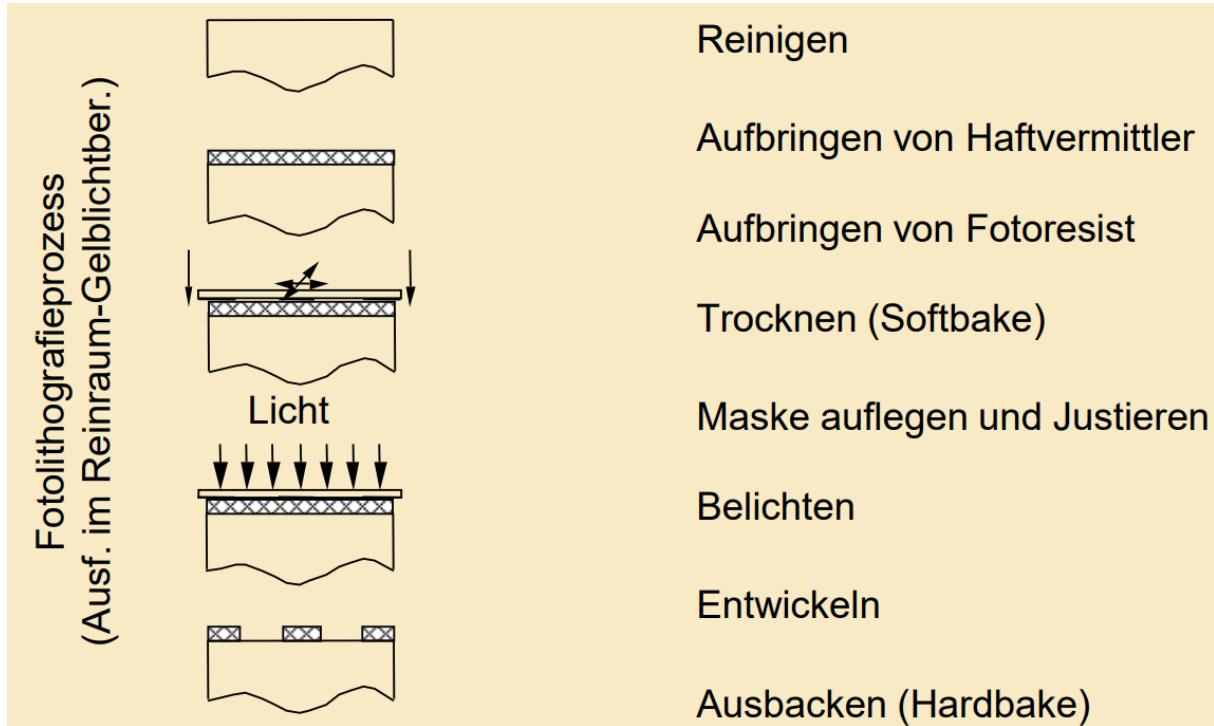
[111]

[116]

Maskentechnik:



Mehrfachstrukturierung:



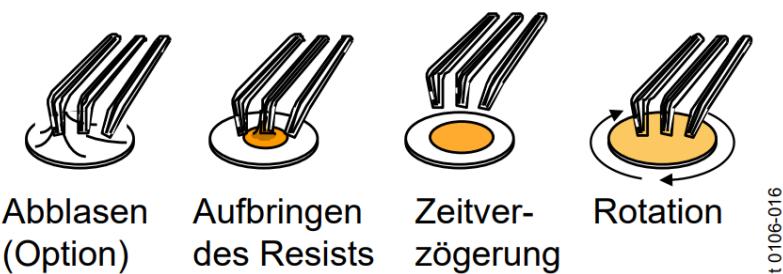
Positiver Fotolack:

[117]

Negativer Fotolack:

Rotationsbeschichtung/Lackschleuder:

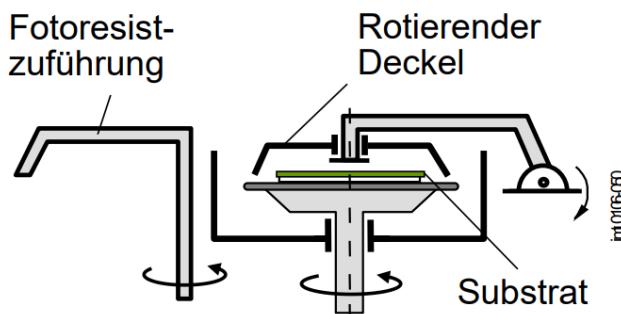
[file:///C:/Users/lukas/Downloads/\(Microdevices\)%20Ivor%20Brodie,%20Julius%20J.%20Muray%20\(auth.\),%20Ivor%20Brodie,%20Julius%20J.%20Muray%20\(eds.\)%20-%20The%20Physics%20of%20Micro_Nano-Fabrication-Springer%20US%20\(1992\).pdf](file:///C:/Users/lukas/Downloads/(Microdevices)%20Ivor%20Brodie,%20Julius%20J.%20Muray%20(auth.),%20Ivor%20Brodie,%20Julius%20J.%20Muray%20(eds.)%20-%20The%20Physics%20of%20Micro_Nano-Fabrication-Springer%20US%20(1992).pdf) (Kapitel 4.8)



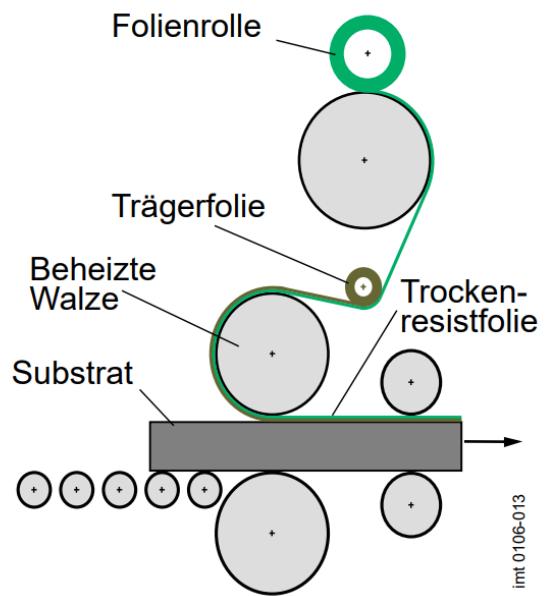
imt 0106-016

Prozessfolge:

1. Aufbringen des Substrats auf Drehteller
 2. Ansaugen mit Vakuum
 3. Aufbringen einer genau dosierten Menge flüssigen Fotoresists
 4. Gleichmäßige Schichtdicke durch Substratrotation (typ.: 3.000 min^{-1}).
- Entstehende Filmdicke: 0,5 bis 3 μm (abh. von Resist-viskosität und Drehgeschw.)
 - Überschüssiger Fotoresist wird abgeschleudert.

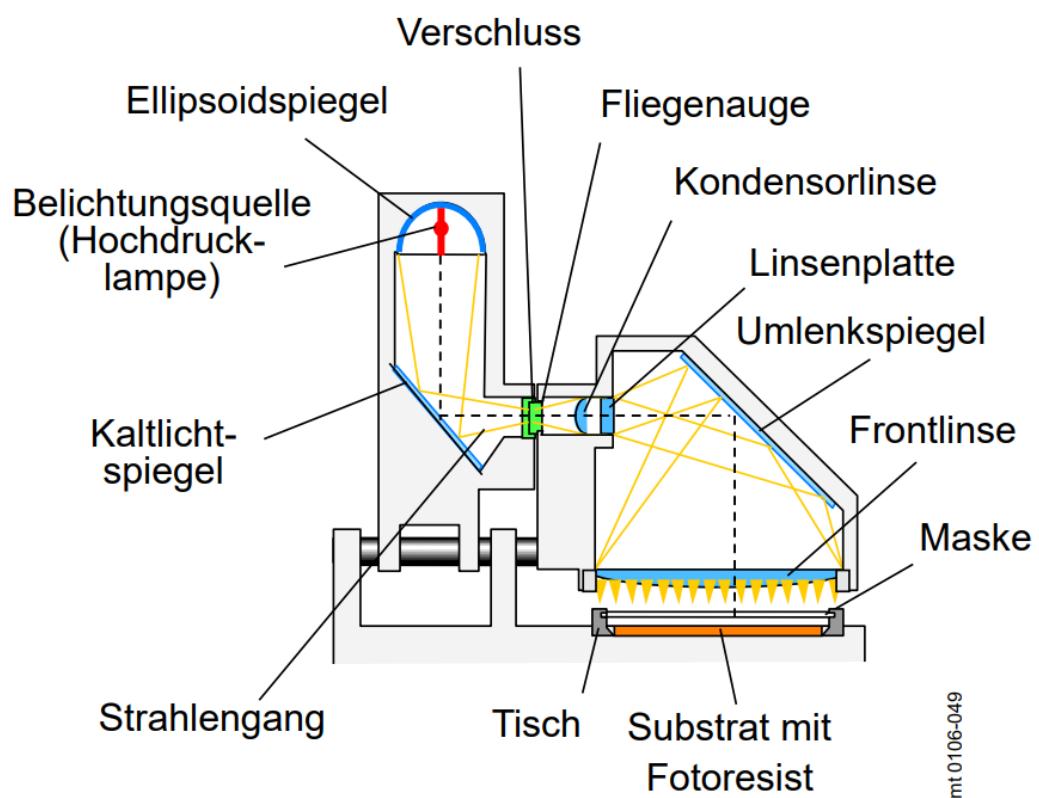


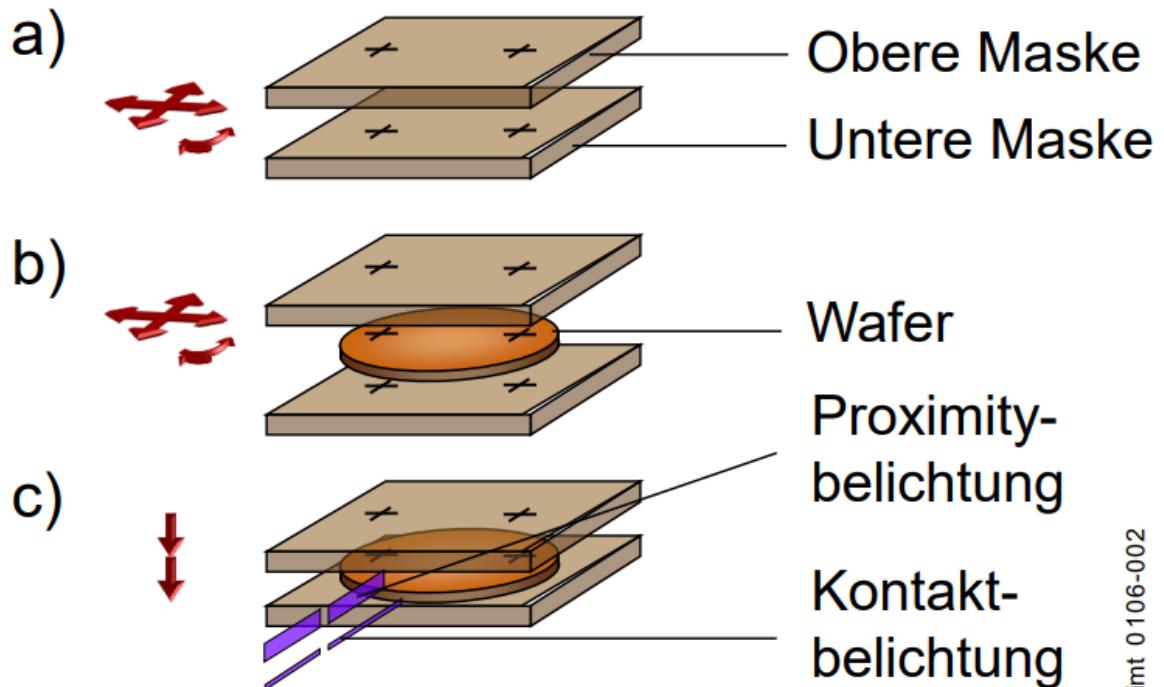
Lackschleuder mit rotierender Abdeckung (Süss Gyret)
(schematischer Aufbau)
Quelle: Süss Microtec



Soft Bake:

Justierer:



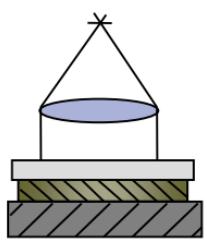


imt 0106-002

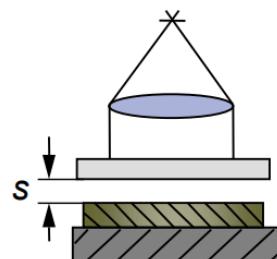
Belichtung:

[111](Kapitel 4.3)

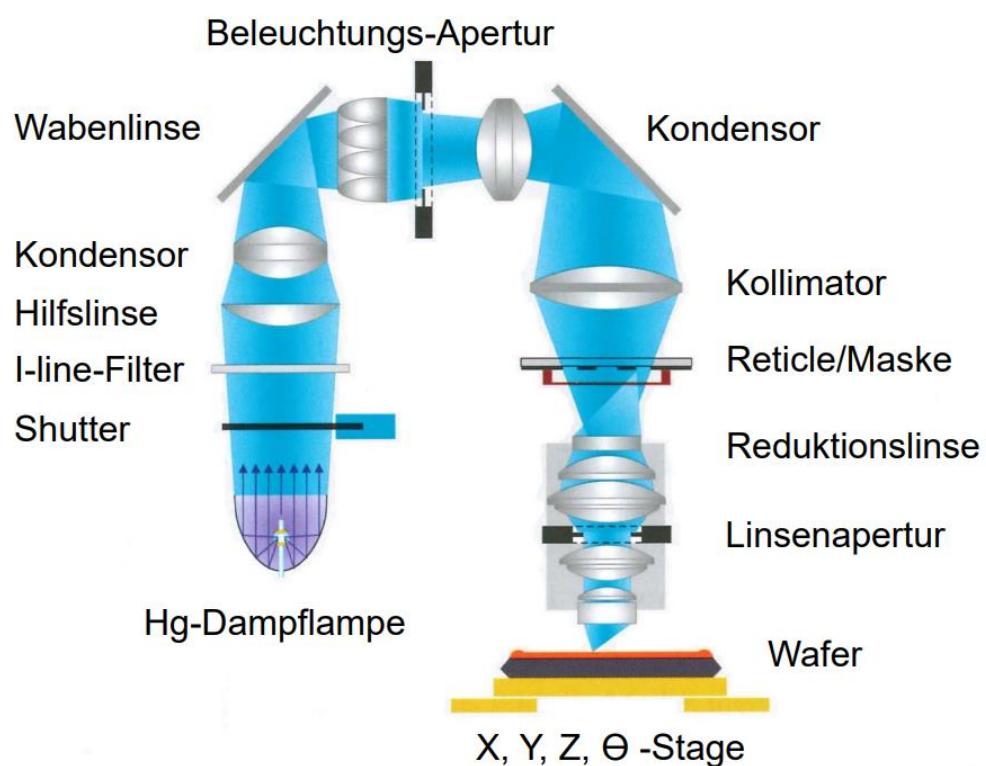
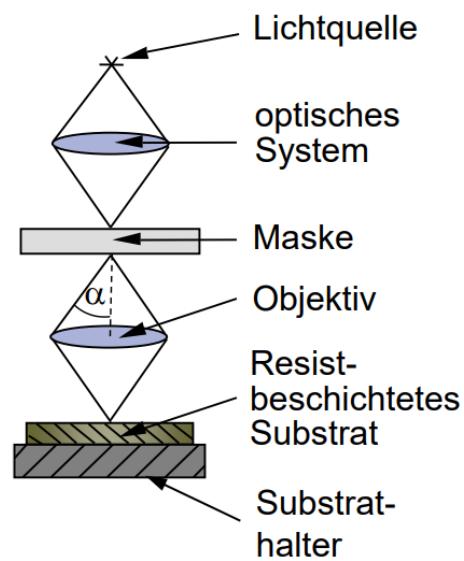
Kontaktbelichtung



Proximitybelichtung



Projektionsbelichtung



Entwicklung:

[118]

Ausbacken (Hard Bake):

Ablösen der Lackmaske:

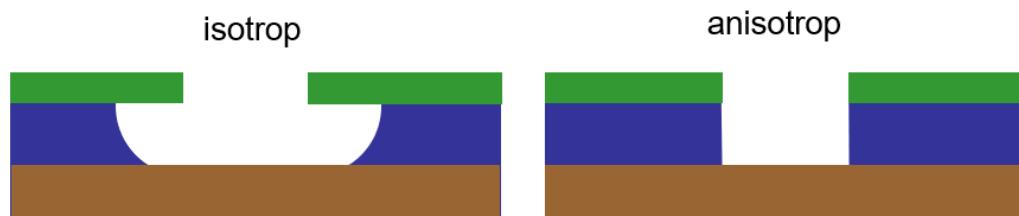
[111]

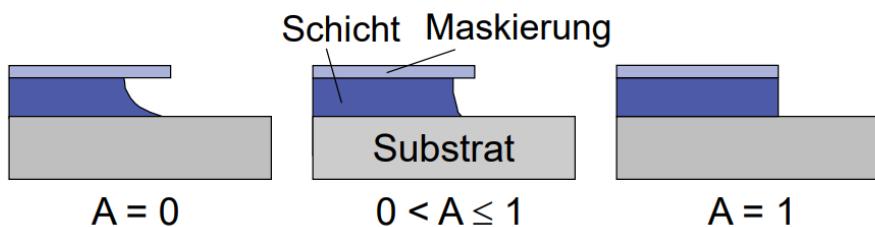
Musterdefekte:

[112]

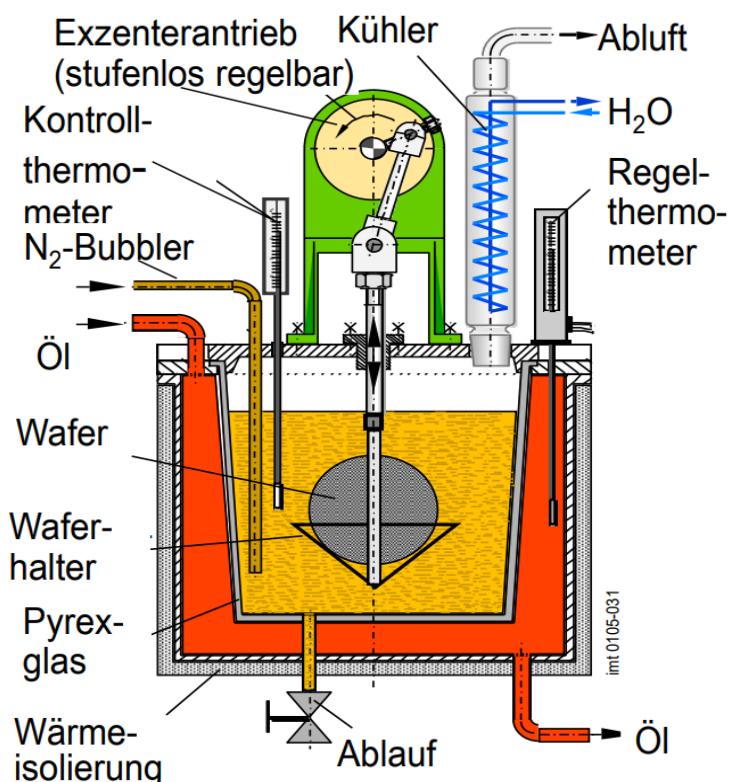
Ätztechnik:

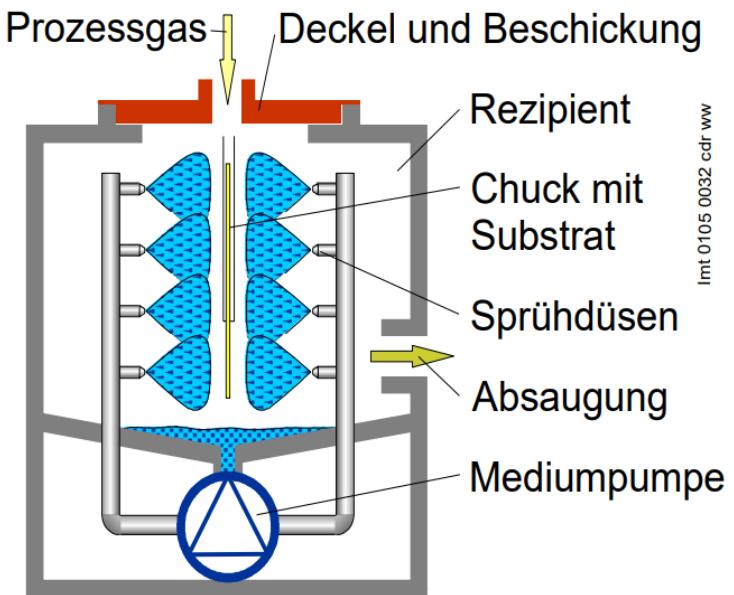
Nasschemisches Ätzen:





Selektivität:





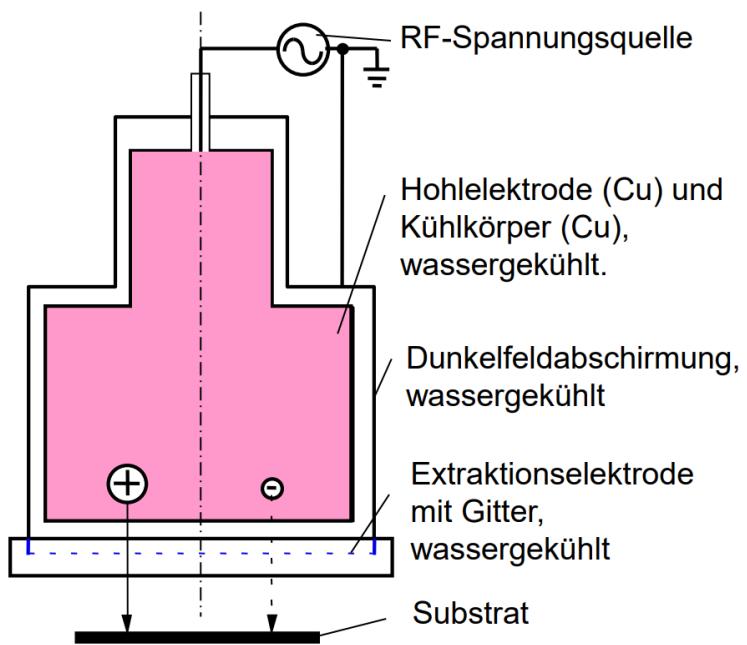
[Quelle: Fa.W.Lemmen]

Trockenätzen:

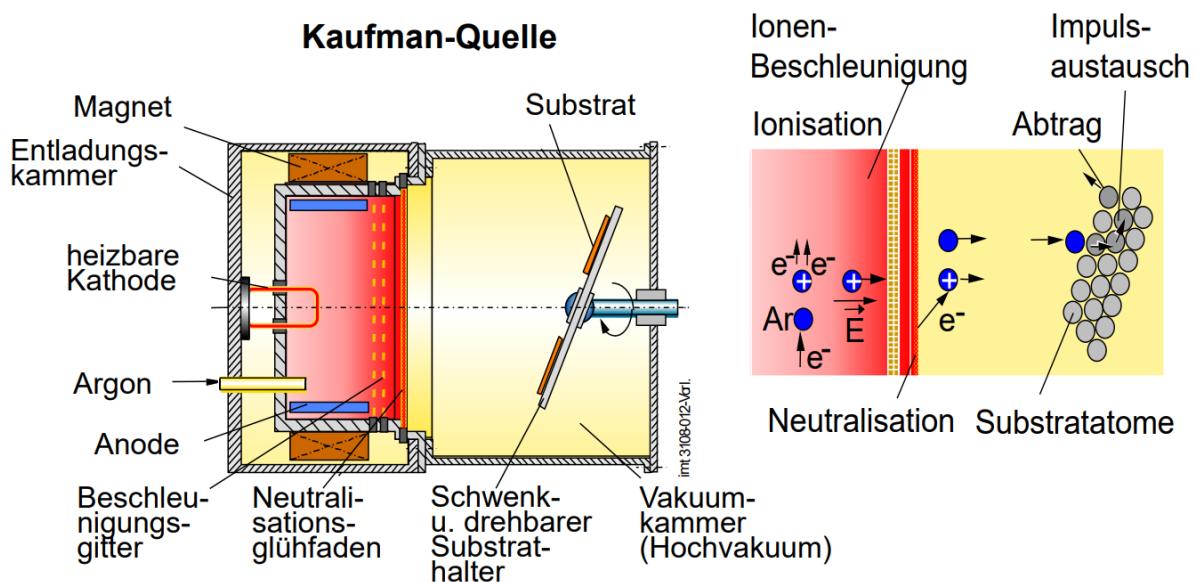
[119](Kapitel 26,27)

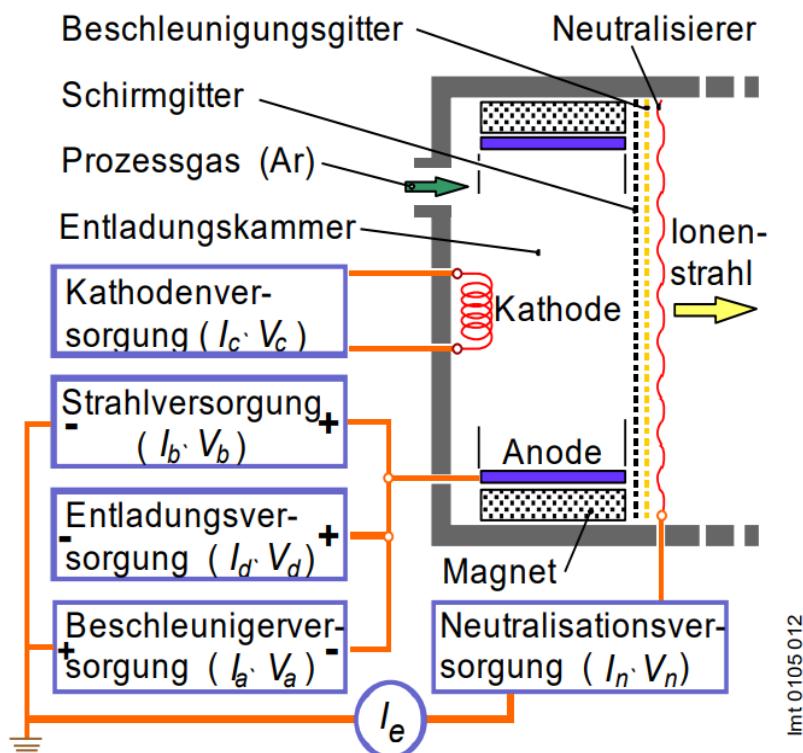
Plasmaätzen:

Sputter-Ätzen:

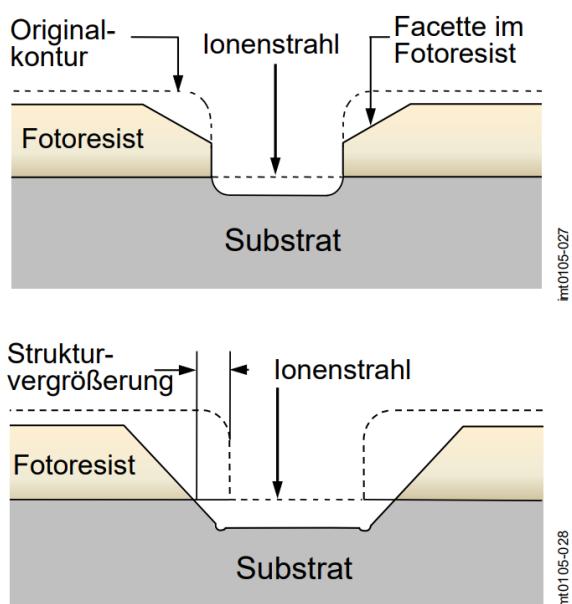


Ionenstrahlätzen:



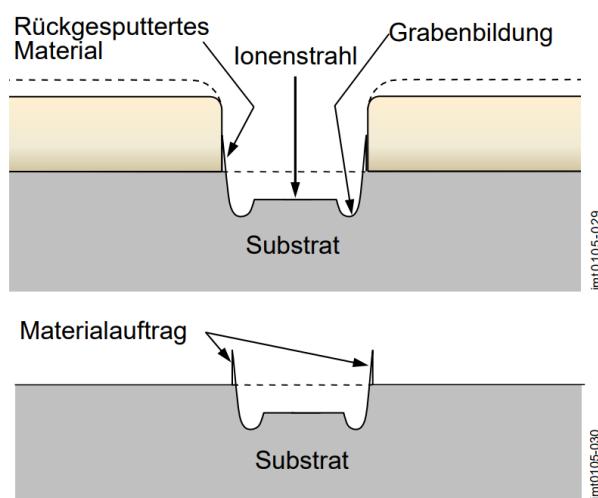


Imt0105-012



Imt0105-027

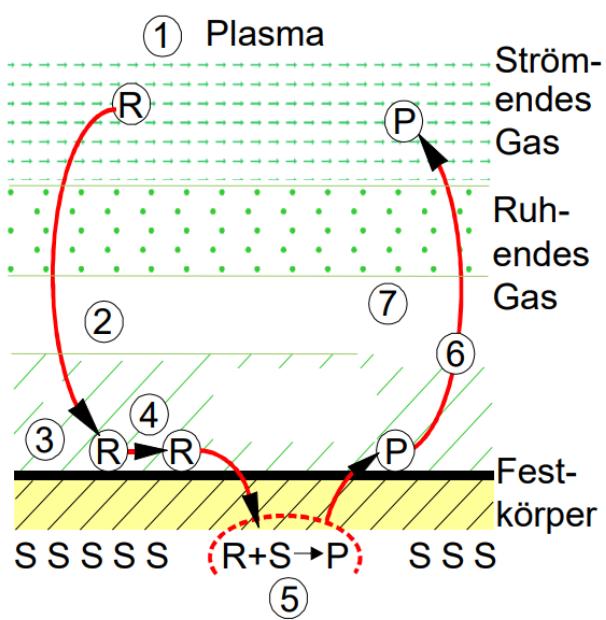
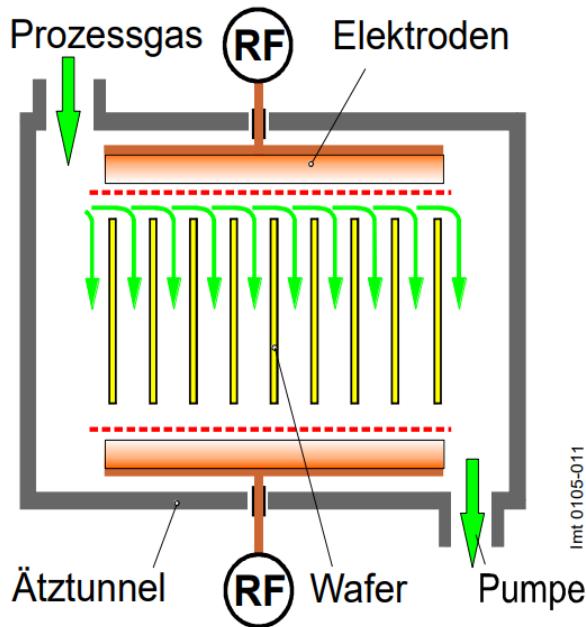
Imt0105-028



Imt0105-029

Imt0105-030

Chemisches Trockenätzen:



Wafer-Spülung:

[112](Kapitel 10, 32, 33, 34, 35)

[111](Kapitel 9.2)

Wafer Trocknung:

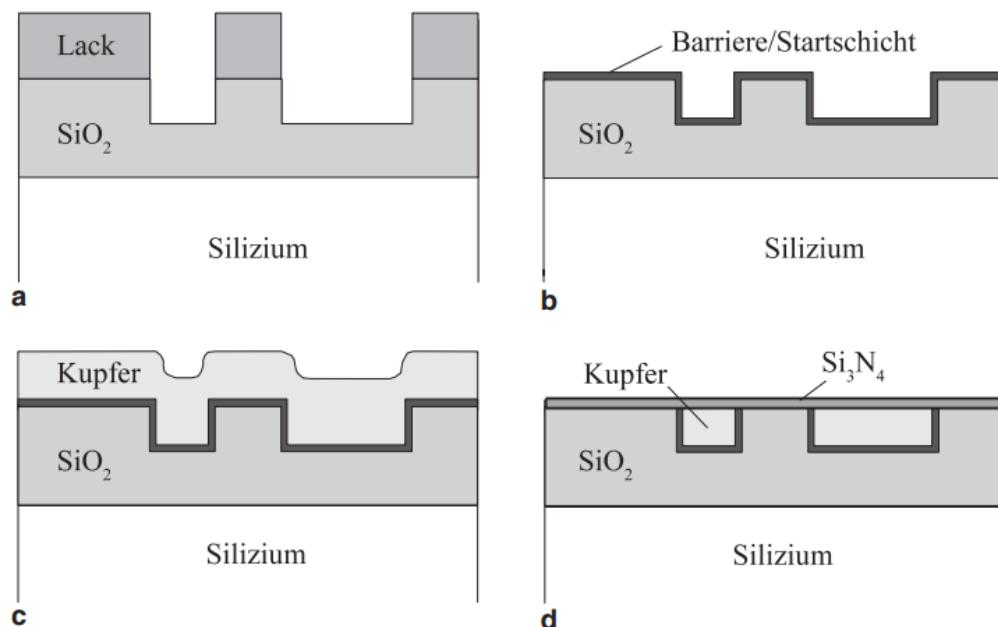
[112] (Kapitel 37, 38)

Trockensäuberung:

[112] (Kapitel 40)

Metallisierung und Kontakte:

[111] (Kapitel 8)



Schaltungsmontage und Kontaktierverfahren:

[111] (Kapitel 13)

Herstellung mit Germanium Maske

Vorbereitung:

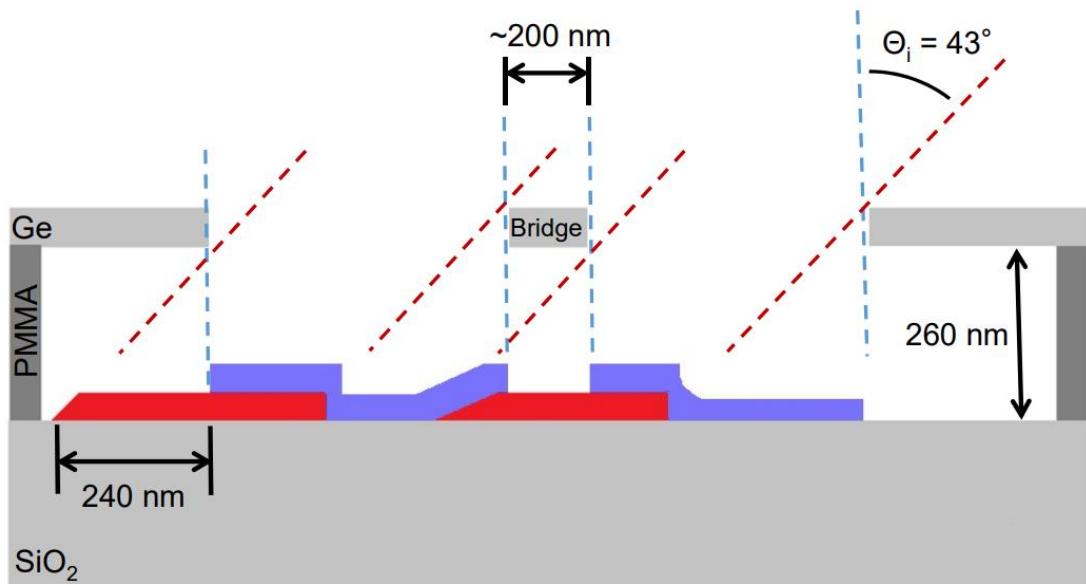
Die Herstellung mit Germanium Maske ist eine Methode, die speziell von Moddel et al. für Hochgeschwindigkeits-Metall-Isolator-Metall Dioden seit längerem angewandt wurde, wobei dieser Prozess große Ähnlichkeit zu früheren Verfahren mit Germaniummasken, wie das von Jackel et al. [120] von 1981 oder von Hobbs et al. 2005 [121] hat. Die genannten Quellen nutzten einen PMMA Bottom Layer, einen dünnen (50nm) Germanium Mittel-Layer und einen PMMA Top Layer.





[122]

Die jeweiligen Schichten werden durch Rotationsbeschichtung von PMMA in Anisol-Lösung aufgetragen. Um das Lösungsmittel zu entfernen, werden nach jeweiliger Beschichtung die Wafer bei 180°C für etwa 15 Minuten gebacken. Das Germanium wird durch Dampfabscheidung aufgebracht, bis eine Höhe von etwa 60nm erreicht wird. Das gewünschte Muster wird mittels Elektronenstrahl-Lithografie in den Top Layer eingraviert. Reaktives Ionen-Ätzen wird genutzt, um das erhaltene Muster im PMMA auf die Germanium Schicht zu übertragen und Sauerstoffplasma-Veraschung entfernt den Top Layer, während es auch den Bottom Layer zersetzt, sodass eine Germanium-Brücke zurückbleibt. Anstelle von Elektronenstrahl-Lithografie verwendeten Moddel et al. DUV-Lithografie. [88], [122]



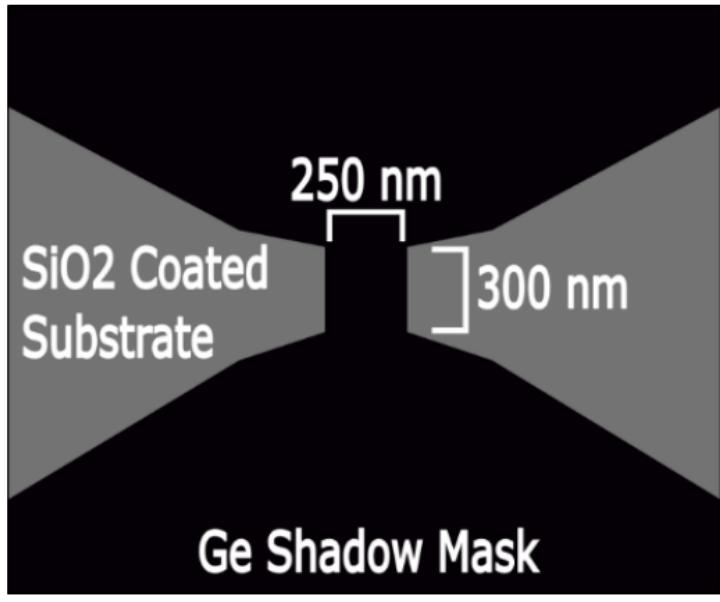
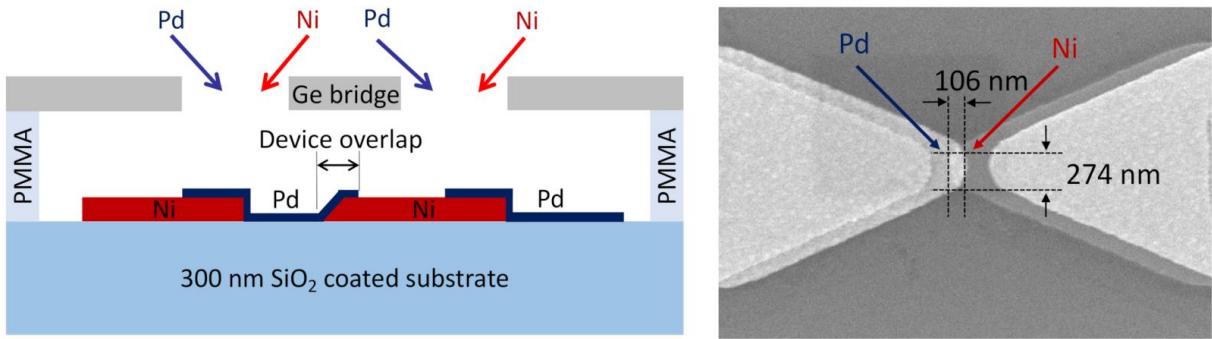
[123]

Moddel hat in früheren Publikationen diesen Prozess bereits ausführlich erklärt und argumentierte, dass die Methode hervorragend geeignet sei, um mit verschiedenen Parametervariationen zu experimentieren, weil die Germanium Maske den MIM Herstellungsprozess auf *einen* lithografischen Prozessschritt reduziert, sodass die Herstellung weniger fehleranfällig ist als andere Verfahren. Außerdem ermöglicht Germanium durch Schattierungseffekte unter bestimmten Bestrahlungswinkeln eine höhere Strukturauflösung als die Lithografie normalerweise zulässt.

Nach Vorbereitung der 250nm breiten Germanium Brücke folgt die eigentliche Herstellung der MIM Diode und des Casimir Spalts. Die MIM Diode wird hierbei auf die Siliziumoxidoberfläche aufgetragen. Nachdem sie aufgetragen wurde, wird lediglich ein Aceton-Bad für den Lift-Off benötigt.

Dioden Herstellung:

Zuerst wird Nickel in einem 43° Winkel abgeschieden. Dies bildet die Ni-ckeletelektrode, die bei Raumtemperatur zu NiO_x oxidiert. Diese Schicht wuchs laut Moddel et al. auf 2,3nm an. Durch Sputtern mit Aluminium wird eine isolierende Aluminiumoxid Schicht abgeschieden. Danach wird mit -43° Winkel von der anderen Seite der Germaniumbrücke Palladium aufgedampft. Nun muss die Germaniumbrücke entfernt werden, um an ihrer Stelle entweder PMMA oder SiO_2 als transparentes Dielektrikum aufzutragen. Dies soll am Ende den Casimir Spalt bilden. Normalerweise wird für einen Casimir Spalt ein Vakuum verwendet, aber die Herstellung eines Vakuums mit Beschichtungsprozessen erweist sich als unmöglich. Die Beschichtung mit einem Dielektrikum erweist sich aber auch deshalb als nützlich, weil es die weitere Oxidation der MIM Diode verhindert. Das Dielektrikum wird am Ende mit einem 150nm dicken Aluminiumspiegel beschichtet.



Fotolithografie

Die großflächigeren Bauelemente wurden unter Verwendung standardmäßiger fotolithographischer Techniken auf einem thermisch oxidierten Siliziumwafer mit 300 nm SiO₂ hergestellt. Hier wird zuerst NR9-Resist für das untere Metall aufgetragen und dann werden 50 nm Ni mit einer thermischen Verdampfungsrate von 2,7 Å/s aufgetragen und mit erwärmtem (60 °C) RR5 abgehoben. Wie bei den GSM-Bauelementen ist das natürliche Oxidwachstum auf freiliegendem Ni unvermeidbar, sodass eine natürliche NiO_x-Dicke von 2,3 nm mittels winkelauflöster spektroskopischer Ellipsometrie (VASE) gemessen wurde. Diese ist dicker als bei GSM-Strukturen, da die Übergänge in GSM-Strukturen teilweise durch die Germanium-

Brücke geschützt sind. Eine deckende Schicht von 1,3 nm nicht-stöchiometrischem Al₂O₃ wird mit 75 W RF-Aufdampfung bei 30 sccm O₂ und 20 sccm Ar unter Verwendung eines Al₂O₃-Ziels aufgebracht. NR9 wird für die obere Elektrode strukturiert, Pd, das mit Dicken von 8,7 nm bis 24 nm (1,5 Å/s) aufgedampft wird. Leider ist oxidierendes Plasmaätzen keine Option, da es zu zusätzlichem Oxidwachstum führen würde, und daher wird vor der Pd-Ablagerung nicht mehr der NR9-Resist entfernt. Die obere Elektrode Pd wird so strukturiert, dass ein quadratischer Bereich über dem Ni-Pad überlappt, der in Größe von 6,25 µm² bis 10000 µm² variiert. Palladium wird noch einmal mit RR5 bei 60°C abgehoben. Sobald das MIM-Bauelement fertig ist, wird NR9 für die Definition der Casimir-Kavität strukturiert. Dieses Muster ist über der MIM-Übergang zentriert und dimensioniert, um das MIM-Bauelement zu überragen. Dann werden die Kavitätsoxidschicht und der Spiegel aufgetragen, wobei die Kavitätsoxidschicht (typischerweise 12 nm SiO₂) mittels RF-Sputtern von SiO₂-Ziel bei 50 W mit 30 sccm O₂ und 20 sccm Ar-Gasen aufgebracht wird. Das Kavitätsmuster wird durch Abheben in RR5 bei 60 °C gebildet, was zum Bauelement führt. [88]

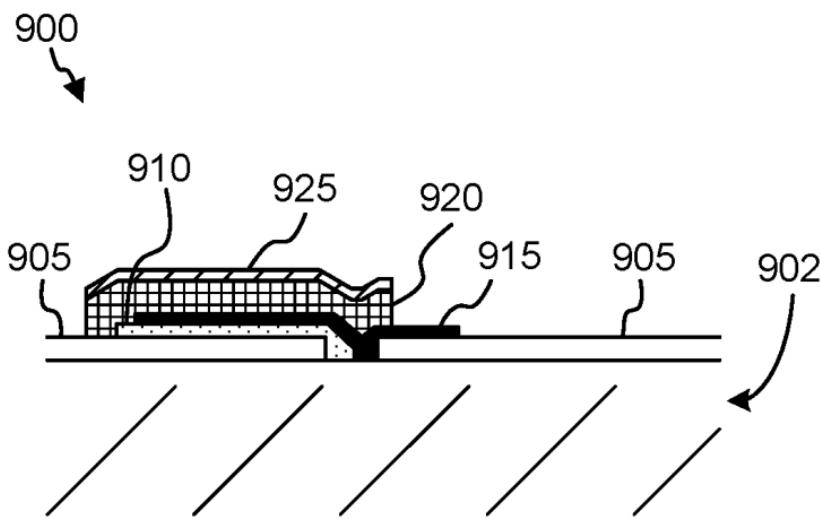
Ein Problem bei der Herstellung, das von der Forscher erwähnt wird, ist der Fotoresist Rückstand, der dadurch zustande kommt, dass nach dem Auftragen des Aluminiumoxidisolators keine Sauerstoffplasma Behandlung erfolgen darf, weil dies natürlich zu weiterer Oxidation führen würde. Weitere Oxidation würde den Widerstand zu sehr erhöhen, um die gemessenen Effekte zu rekreieren. Man maß daher einen geringen Rest an Fotoresist mit einer Dicke von 0,4nm. [76]

Aus Garrett Moddels Patent [124] lässt sich die klare Anleitung zur Herstellung entnehmen:

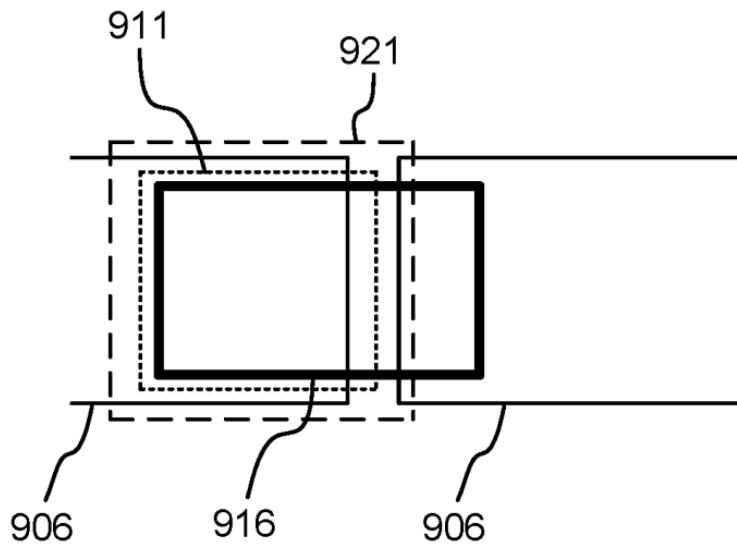
1. Die erste Metallschicht:
 - 1.1. Negativer Fotolack wird durch Rotationsbeschichtung auf das SiO₂ Substrat aufgetragen.

- 1.2. Soft Bake
 - 1.3. Mit einem Justierer wird das Metallschichtmuster freigelegt.
 - 1.4. Post-Exposure Bake
 - 1.5. Entwicklung
 - 1.6. Spülung
 - 1.7. 50 nm Nickel werden auf das Substrat aufgedampft.
 - 1.8. Lift-Off mit Aceton
 - 1.9. Spülung mit Isopropanol und Wasser
2. Die Transportschicht:
 - 2.1. Al_2O_3 wird aus einem Al_2O_3 Target in einer Argon-Sauerstoff Atmosphäre in einem Sputter-Prozess 3nm hoch auf die gesamte Gerätoberfläche aufgetragen.
 - 2.2. Positiver Fotolack wird durch Rotationsbeschichtung aufgetragen.
 - 2.3. Soft Bake
 - 2.4. Die Transportschicht wird freigelegt.
 - 2.5. Post-Exposure Bake
 - 2.6. Entwicklung
 - 2.7. Spülung
 - 2.8. Das Al_2O_3 wird mit $\text{CF}_4\text{-Ar}$ Plasma geätzt, um die Transportschicht zu formen.
 - 2.9. Restlicher Fotolack wird durch Sauerstoff-Plasma entfernt.
 3. Zweite Metallschicht:
 - 3.1. 15 nm Palladium werden auf das Substrat aufgedampft.
 - 3.2. Positiver Fotolack wird durch Rotationsbeschichtung aufgetragen.
 - 3.3. Soft Bake
 - 3.4. Die zweite Metallschich wird freigelegt.
 - 3.5. Post-Exposure Bake
 - 3.6. Entwicklung
 - 3.7. Spülung

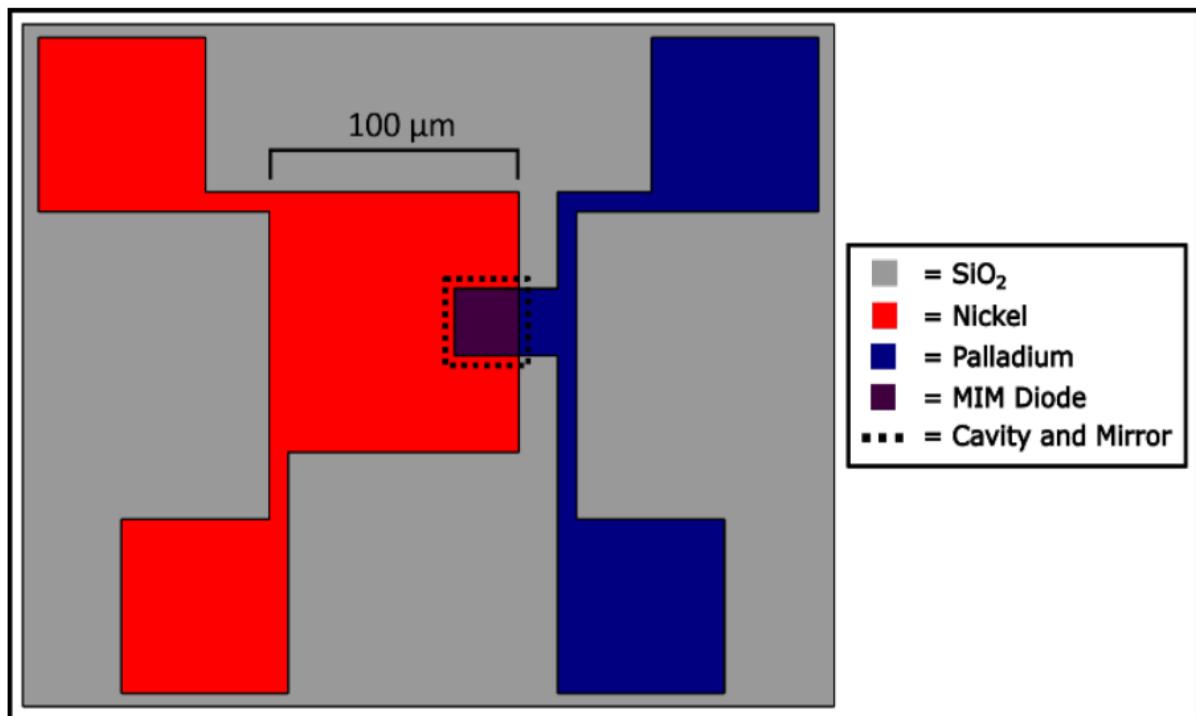
- 3.8. Das freigelegte Palladium wird zur Strukturierung mit CF₄-Ar Plasma geätzt.
- 3.9. Restlicher Fotolack wird durch Sauerstoff-Plasma entfernt.
4. Transparentes Dielektrikum und Spiegel:
 - 4.1. 30 nm SiO₂ werden durch Sputtern auf das Substrat abgeschieden.
 - 4.2. 150 nm Aluminium werden als reflektive Schicht abgeschieden.
 - 4.3. Positiver Fotolack wird durch Rotationsbeschichtung aufgetragen.
 - 4.4. Soft Bake
 - 4.5. Durch einen Justierer wird das Casimir Spalt Muster freigelegt.
 - 4.6. Post-Exposure Bake
 - 4.7. Entwicklung
 - 4.8. Spülung
 - 4.9. Aluminium und SiO₂ werden mit 6:1 Buffered Oxide Etch geätzt.
 - 4.10. Spülung mit Wasser
 - 4.11. Restlicher Fotolack wird durch Sauerstoff-Plasma entfernt.



902: Siliziumoxidsubstrat, 905: erste Metallschicht, 910: Transportschicht, 915: zweite Metallschicht, 920: dielektrische Casimir-Kavität, 925: Spiegelschicht.



906: erstes Metallschichtmuster, 911: Transportschichtmuster, 916: zweites Metallschichtmuster, 921: Casimir-Spalt-Muster.



Übersichtlich zusammengefasst, ergaben sich für die Geräte folgende Spezifikationen:

Figure	Area (μm^2)	NiO _x	Al ₂ O ₃	Pd Upper Electrode (nm)	Transparent Dielectric	
		(nm)	(nm)	Values (nm)	Material	
4 (a)	0.02		1.3	8.3	33–1100	PMMA
4 (b)	0.02	1	0.9	8.3	33–1100	PMMA or SiO ₂
5 (a) ¹	10,000	2.3 + 0.4 resist	2.3	8.7–24	11	SiO ₂
5 (b) ¹	625	2.3 + 0.4 resist	0.7–1.5	15	11	SiO ₂
6 (a)	0.02	1	0.7	8.3	35	PMMA
6 (b)	25–10,000	2.3 + 0.4 resist	2.3	12	11	SiO ₂
7 (b)	0.02 × 16	1	0.9	15.6	107	PMMA
8	0.02	1	0.9 0.7	8.3	36 50	PMMA SiO ₂
9	0.02	1	0.7	8.7	–	PMMA
10	0.02	1	0.5	8.7	33	PMMA
11	0.02	1	0.7	8.7	35	PMMA

¹ Photolithographic devices; all other devices used the GSM fabrication process.

Ausblick

Skalierung:

Die theoretische Obergrenze für die Energiegewinnung pro Kubikmeter liegt wahrscheinlich bei einer Stapelungszahl im Größenbereich von einer Million. Daraus erhält man mit der berechneten Leistung von 70 W/m² 70 Megawatt pro Kubikmeter. Es scheint fast absurd, dass zwanzig solcher 1 Kubikmeter Anlagen die Leistung eines Atomkraftwerks hätten. Es wäre unter dieser Energiedichte jedoch schwer, die gesamte erzeugte Leistung auch aus solchen Blöcken nutzbar zu machen und die Herstellung würde nicht nur kompliziert, sondern auch kostspielig und lang. Realistisch scheint diese Obergrenze deshalb nicht zu sein. Realistischer ist die oben angegebene Nennleistung von 140 Kilowatt pro Kubikmeter. Eine deutsche Person verbraucht im Durchschnitt 750 Watt, was bedeuten würde, dass eine ein Kubikmeter Casimir Engine im Durchschnitt 186 deutsche Personen versorgen könnte. Der weltweite Energiebedarf betrug 2019 161.530 TWh oder $1,84 \cdot 10^{13}$ W. Mit der genutzten Abschätzung entspräche das 132 Millionen Ku-

bikmetern an Casimir Engines. Das hört sich erstmal nach einer ziemlich großen Zahl an und wenn jede Casimir Engine einen Kubikmeter groß wäre, entspräche dies 132 Millionen Casimir Engines. Aber wenn man sich das nochmal überlegt, dann würde es ausreichen, wenn etwa jeder fünfzigste Mensch auf der Welt eine solche Casimir Engine besäße, um den gesamten Energiebedarf der Menschheit zu decken. Es würde ein $510m \cdot 510m \cdot 510m$ Würfel aus Casimir Engines ausreichen, um die gesamte Welt mit Strom zu versorgen.

Globale Erwärmung:

Zum Glück benötigen wir diese Engine nicht, um den Klimawandel zu bekämpfen, da die Solarrevolution mehr als ausreichend ist. Aber es gibt verschiedene sinnvolle Anwendungen für Casimir Engines, die den Energiemarkt erweitern können und nicht von Solarenergie abgedeckt werden können. Beispielsweise können erneuerbare Energie nur draußen eingesetzt werden, da sie von außen Energie aufnehmen müssen. Casimir Engines könnten dagegen auch innerhalb von Fahrzeugen, Gebäuden und so weiter verbaut werden.

Nanotechnologie:

Außerdem können sie auch auf mikroskopischer Ebene als Energiequelle für Mikrosysteme dienen. Es wäre möglich, Nanomaschinen herzustellen, die durch einzelne MIM-Casimir Engines mit Energie versorgt werden, um beispielsweise interne Computer und Speicher-Elemente zu betreiben oder Nantomotoren und Antennen zu betreiben. Insbesondere in der Medizintechnik, in der es oftmals schwierig ist, über längere Zeit Maschinen innerhalb des menschlichen Körpers zu betreiben, ohne dass ein Ausfallrisiko eingegangen wird, könnte diese Technik von Nutzen sein. Herzschrittmacher oder medizinische Mikroroboter sind erste vielversprechende Einsatzgebiete.

Forschungsausblick:

Das theoretische Modell zur Untersuchung der beschriebenen Geräte beinhaltet in irgendeiner Form eine Asymmetrie, die durch den Casimir Spalt erzeugt wird. Der offenkundige natürliche nächste Schritt wäre deshalb, ein Gerät zu bauen, das diese Asymmetrie nicht aufweist. Die Beschichtungsverfahren würden sich ändern und der Herstellungsprozess sehr kompliziert werden, aber man könnte sehen, ob sich weiterhin ein Strom ausbildet. Der Theorie zufolge sollte der Strom ausbleiben, weil wir wieder Symmetrie hergestellt haben. Es sollten andere Materialien ausprobiert werden, wie weiter oben besprochen, um zu testen, ob diese signifikanten Einfluss auf den zu messenden Strom haben.

Fazit

Man mag am Ende dieses Überblicks zur Arbeit an Vakuumenergie Erschließungsversuchen zu der Überzeugung gelangt sein, dass ich von der Echtheit der berichteten Erkenntnisse überzeugt bin. Aber muss gestehen, dass dies nicht der Fall ist. Das liegt vor allem an zwei intuitiven Argumenten. Erstens scheint es mir höchst unwahrscheinlich, dass es möglich ist, den ersten oder zweiten Hauptsatz der Thermodynamik zu umgehen, ohne dass dies jemals in anderen Systemen festgestellt wurde. Es gibt zwar Beispiele, in denen der zweite Hauptsatz lokal umgangen werden kann, aber dennoch wird bei den bisher vorgestellten Systemen stets die Gesamtentropie erhöht. Wenn es tatsächlich die Möglichkeit des schnellen Einfangs von Elektronen gäbe, müsste das nicht auch in anderen Technologien oder vielleicht auch in der Natur beobachtet werden können? Und die zweite Intuition bezieht sich auf die Simplizität des präsentierten Geräts von Moddel. Es scheint fast unmöglich,

dass dieser Effekt nicht bereits in irgendwelchen Geräten festgestellt hätte werden müssen. Aber diese Intuitionen sind nichts weiter als Intuition. Daher werde ich meine Abschätzung der Wahrscheinlichkeit, dass die Vakuumenergie tatsächlich genutzt werden kann, bei 1 bis 10% platzieren. Aber diese subjektiven Wahrscheinlichkeiten reichen für mich aus, um zu rechtferdigen, die Experimente zu wiederholen und unabhängig bestätigen zu lassen. Es wurden auch bereits unabhängige Nachweisversuche unternommen, die positive Resultate erzielten, jedoch bislang nicht publiziert worden sind. Beispielsweise merkte Moddel an, dass Hathaway Research International derzeit dabei ist, die Effekte zu bestätigen. Es ist anzumerken, dass auch Moddels Forschungsgruppe mehrere Jahre brauchte, um die Geräte in größeren Zahlen herzustellen. Besonders die Interfaces der MIM Dioden seien eine Hürde im Herstellungsprozess, weshalb auch noch keine größeren Geräte entwickelt wurden.

Literaturverzeichnis

- [1] „Tracking down quantum fluctuations of the vacuum to explore the limits of physics,“ Helmholtz Association of German Research Centres, 2023. [Online]. Available: <https://phys.org/news/2023-11-tracking-quantum-fluctuations-vacuum-explore.html>. [Zugriff am 30 März 2024].
- [2] N. Ahmadiniaz, „Detection schemes for quantum vacuum diffraction and birefringence,“ *Physical Review D*, 2023.
- [3] E. Siegel, „Ask Ethan: Do Virtual Particles Really Exist?,“ 2021. [Online]. Available: <https://www.forbes.com/sites/startswithabang/2021/05/07/ask-ethan-do-virtual-particles-really-exist/>. [Zugriff am 30 März 2024].
- [4] Wikipedia, „Zero-point energy,“ 2024. [Online]. Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Zero-point_energy#Speculated_involvement_in_other_phenomena. [Zugriff am 30 März 2024].
- [5] G. T. Jones, „The uncertainty principle, virtual particles and real forces,“ 2002.
- [6] J. Gaßner, Können wir die Welt verstehen? Meilensteine der Physik von Aristoteles zur Stringtheorie, Frankfurt am Main: S. Fischer Verlag, 2019.
- [7] J. Gaßner, Kosmologie - Die größte Geschichte aller Zeiten, Frankfurt am Main: S. Fischer Verlag, 2023.
- [8] G. Jeager, „Are Virtual Particles Less Real?,“ *PubMed Central*, 2019.
- [9] K. Kang, „Aharonov-Bohm effect mediated by massive photons,“ Chonnam National University, 2024. [Online]. Available: <https://arxiv.org/html/2403.03495v1>. [Zugriff am 30 März 2024].
- [10] C. Wilson, „Observation of the dynamical Casimir effect in a superconducting circuit,“ *Nature* 479, pp. 376-379, 2011.
- [11] M. R. Good, „Moving mirror model for quasithermal radiation fields,“ *Physical Review D* 101, 2020.
- [12] A. Stahlhofen, „Evanescent modes are virtual photons,“ *Europhysics Letters*, Bd. 76, pp. 189-195, 2006.

- [13] G. Nimtz, „On Virtual Phonons, Photons, and Electrons,“ *Found Phys*, Bd. 39, pp. 1346-1355, 2009.
- [14] G. Nimtz, „Evanescent Modes and Tunnelling Instantaneously Act at a Distance,“ 2008.
- [15] V. D. Lorenci, „Classical enhancement of quantum vacuum fluctuations,“ *Physical Review D*, Bd. 95, Nr. 1, 2017.
- [16] M. Cirio, „Amplified Optomechanical Transduction of Virtual Radiation Pressure,“ *Physical Review Letters*, Bd. 119, Nr. 5, 2017.
- [17] W. Schmitz, „Propagators and Virtual Particles,“ in *Particles, Fields and Forces - A Conceptual Guide to Quantum Field Theory and the Standard Model*, 2 Hrsg., Springer Verlag, 2022, pp. 119-151.
- [18] U. o. Warwick, „Larmor's Formula“.
- [19] E. Wollman, „Quantum squeezing of motion in a mechanical resonator,“ *Science Magazine*, Bd. 349, pp. 952-955, 2015.
- [20] P. Milonni, *The Quantum Vacuum - An Introduction to Quantum Electrodynamics*, Los Alamos: Academic Press Inc., 1994.
- [21] R. Gross, *Festkörperphysik*, 3 Hrsg., Leipzig: Walter de Gruyter, 2018.
- [22] R. Gross, „Modell des freien Elektronengases,“ in *Festkörperphysik*, Leipzig, Walter de Gruyter, 2018, pp. 263-265.
- [23] T. Boyer, „Connecting Blackbody Radiation and Zero-Point Radiation within Classical Physics: A New Minimum Principle and a Status Review,“ arxiv.org, New York, 2002.
- [24] zetamath, „The Basel Problem Part 1: Euler-Maclaurin Approximation,“ YouTube, 2020. [Online]. Available: https://youtu.be/nxJI4Uk4i00?si=unIwZGq6twz_STag. [Zugriff am 30 März 2024].
- [25] K. Kingsbury, „The Casimir Effect,“ 2009.
- [26] S. Lamoreaux, „Demonstration of the Casimir Force in the 0.6 to,“ *Physical Review Letters*, Bd. 78, Nr. 1, 1997.
- [27] R. Jaffe, „The Casimir Effect and the Quantum Vacuum,“ *Physical Review D*, Bd. 72, 2005.

- [28] V. Sopova, „The Energy Density in the Casimir Effect,“ *Physical Review D*, Bd. 66, 2002.
- [29] W. M. R. Simpson, Surprises in Theoretical Casimir Physics - Quantum Forces in Inhomogeneous Media, St. Andrews: Springer Verlag, 2015.
- [30] P. Milonni, Casimir Physics, Heidelberg: Springer Verlag, 2011.
- [31] L. Susskind, Quantum Mechanics - The Theoretical Minimum, Penguin Books, 2014.
- [32] H. Wanare, „Johnson Noise or Nyquist Noise,“ YouTube, 2020. [Online]. Available: <https://youtu.be/IwIwBTWN6q0?si=7I1M22uk46YIfqEs>. [Zugriff am 30 März 2024].
- [33] H. Nyquist, „Thermal Agitation of Electric Charge in Conductors,“ *Physical Review*, Bd. 32, pp. 110-113, 1928.
- [34] H. Callen, „Irreversibility and Generalized Noise,“ *Physical Review*, Bd. 83, pp. 34-40, 1951.
- [35] D. Abbott, „Quantum Vacuum Fluctuations, Zero Point Energy and The Question of Observable Noise,“ *World Scientific - Unsolved Problems Of Noise In Physics, Biology, Electronic Technology And Information Technology*, pp. 131-138, 1997.
- [36] D. Abbott, „Simple derivation of the thermal noise formula using window-limited Fourier transforms and other conundrums,“ *IEEE Transactions on Education*, Bd. 39, Nr. 1, pp. 1-13, 2015.
- [37] D. Abbott, „Overview: Unsolved problems of noise and fluctuations,“ *Chaos*, Bd. 11, Nr. 3, pp. 526-538, 2001.
- [38] W. H. Louisell, „Zero-Point Field Fluctuations,“ in *Quantum Statistical Properties of Radiation*, Wiley, 1973, pp. 256-259.
- [39] R. Kubo, *Reports on Progress in Physics*, Bd. 29, pp. 255-284, 1966.
- [40] J. Benisaac, „Linear Response Theory: The Formalism,“ YouTube, 2022. [Online]. Available: https://youtube.com/playlist?list=PLvm2HF8WyIz3WY5_iKyzHJlxWf6TZ5q3m&si=JZbHFWGIDwQTCRHx. [Zugriff am 30 März 2024].
- [41] R. H. Koch, „Observation of Zero Point Fluctuations in a Pervasively Shunted Josephson Tunnel Junction,“ Lawrence Berkeley National Laboratory, 1981. [Online]. Available: <https://escholarship.org/uc/item/7cb912p9>.

- [42] L. Reggiani, „Why zero-point quantum noise cannot be detected at thermal equilibrium: Casimir,“ arxiv.org, 2016.
- [43] F. Brandao, „The second laws of quantum thermodynamics,“ *PNAS*, Bd. 112, 2015.
- [44] M. H. Lee, „Carnot cycle for photon gas?,“ *American Journal of Physics*, Bd. 69, Nr. 8, pp. 874-878, 2001.
- [45] A. Allahverdyan, „Extraction of work from a single thermal bath in the quantum regime,“ *Physical Review Letters*, Bd. 85, pp. 1799-1802, 2000.
- [46] M. Scully, „Extracting work from a single heat bath via vanishing quantum coherence,“ *Science Magazine*, Bd. 299, pp. 862-864, 2003.
- [47] E. Boukobza, „Breaking the Carnot limit without violating the second law: A thermodynamic analysis of off-resonant quantum light generation,“ *Physical Review A*, Bd. 87, Nr. 6, 2013.
- [48] J. Roßnagel, „Nanoscale Heat Engine Beyond the Carnot Limit,“ *Physical Review Letters*, Bd. 112, Nr. 3, 2014.
- [49] O. Abah, „Efficiency of heat engines coupled to nonequilibrium reservoirs,“ *Europhysics Letters*, Bd. 106, 2014.
- [50] G. Moddel, „Extraction of Zero-Point Energy from the Vacuum: Assessment of Stochastic Electrodynamics-Based Approach as Compared to Other Methods,“ *Atoms*, Bd. 7, Nr. 2, 2019.
- [51] R. L. Forward, „Extracting electrical energy from the vacuum by cohesion of charged foliated conductors,“ *Physical Review B*, Bd. 30, Nr. 4, pp. 1700-1702, 1984.
- [52] O. Dmitriyeva, „Test of zero-point energy emission from gases flowing through Casimir cavities,“ *Physics Procedia*, Bd. 38, pp. 8-17, 2012.
- [53] D. Cole, „Extracting energy and heat from the vacuum,“ *Physical Review E*, Bd. 48, Nr. 2, pp. 1562-1565, 1993.
- [54] F. Pinto, „Engine cycle of an optically controlled vacuum energy transducer,“ *Physical Review B*, Bd. 60, Nr. 21, pp. 14740-14755, 1999.
- [55] P. Milonni, „The Casimir Effect: Physical Manifestations of Zero-Point Energy,“ *Physics*

Today, Bd. 56, Nr. 1, pp. 49-50, 2003.

- [56] W. Demtröder, Experimentalphysik 2 - Elektrizität und Optik, 7 Hrsg., Heidelberg: Springer Spektrum, 2017.
- [57] A. Lipson, Optical Physics, 4 Hrsg., Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- [58] F. d. Fornel, Evanescent Waves - From Newtonian Optics to Atomic Optics, Heidelberg: Springer Verlag, 2001.
- [59] G. Moddel, „Zero-Point Energy: Capturing Evanescence,“ *Journal of Scientific Exploration*, Bd. 36, Nr. 3, pp. 493-503, 2022.
- [60] W. Demtröder, Experimentalphysik 3 - Atome, Moleküle und Festkörper, 5 Hrsg., Heidelberg: Springer Spektrum, 2016.
- [61] G. Nimtz, „All waves have a zero tunneling time,“ *Zeitschrift für Naturforschung*, Bd. 76, Nr. 4, pp. 295-297, 2021.
- [62] C. Hofmann, „Attoclock revisited on electron tunnelling time,“ *Journal of Modern Optics*, Bd. 66, Nr. 10, pp. 1052-1070, 2019.
- [63] S. Collins, „The quantum mechanical tunnelling time problem-revisited,“ *Journal of Physics C: Solid State Physics*, Bd. 20, Nr. 36, pp. 6213-6232, 1987.
- [64] M. Razavy, „Time-Delay, Reflection Time Operator and Minimum Tunneling Time,“ in *Quantum Theory of Tunneling*, 2 Hrsg., W. Scientific, Hrsg., Singapur, 2014.
- [65] R. Martin-Palma, „The role of virtual photons in quantum tunneling,“ arxiv.org, 2018.
- [66] R. Martin-Palma, „Quantum tunneling in low-dimensional semiconductors mediated by virtual photons,“ *AIP Advances*, Bd. 10, Nr. 1, 2020.
- [67] M. Razavy, „Group and Signal Velocities,“ in *Quantum Theory of Tunneling*, 2 Hrsg., Singapur, World Scientific, 2014, pp. 453-467.
- [68] V. Flambaum, „Quantum Münchhausen effect in tunneling,“ arxiv.org, 1998.
- [69] D. L. Andrews, „Virtual photons, dipole fields and energy transfer: a quantum electrodynamical approach,“ *European Journal of Physics*, Bd. 25, 2004.
- [70] L. Ford, „Quantum Fluctuations of Fields and Stress Tensors,“ *International Journal of*

- [71] V. Flambaum, „Radiation Corrections Increase Tunneling Probability,“ *Physical Review Letters*, Bd. 83, 1999.
- [72] V. Agranovich, Modern Problems in Condensed Matter Sciences - Quantum Tunnelling in Condensed Media, Bd. 34, Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V., 1992.
- [73] L. Landau, Quantum Mechanics - Nano-relativistic Theory, 2 Hrsg., Bd. 3, Pergamon Press, 1965, pp. 73-80.
- [74] D. Lindberg, „Asymmetric Tunneling of Bose-Einstein Condensates,“ *Journal of Physics B Atomic Molecular and Optical Physics*, Bd. 56, Nr. 2, 2023.
- [75] I. Amirkhanov, „Violation of barrier penetration symmetry for composite particles,“ *Soviet Physics JETP*, Bd. 22, Nr. 4, pp. 764-768, 1966.
- [76] G. Moddel, „Casimir-cavity-induced conductance changes,“ *Physical Review Research*, Bd. 3, Nr. L022007, 2021.
- [77] G. Moddel, „Optical-Cavity-Induced Current,“ *Symmetry*, Bd. 13, Nr. 3, 2021.
- [78] E. Knoesel, „Ultrafast dynamics of hot electrons and holes in copper: Excitation, energy relaxation, and transport effects,“ *Physical Review B*, Bd. 57, Nr. 20, 1998.
- [79] R. Williams, „Injection by Internal Photoemission,“ in *Semiconductors and Semimetals*, Amsterdam, Academic Press, 1970, pp. 97-139.
- [80] L. Ford, „Electric field and voltage fluctuations in the Casimir effect,“ *Physical Review D*, Bd. 105, 2022.
- [81] L. S. Brown, „Vacuum Stress between Conducting Plates: An Image Solution,“ *Physical Review*, Bd. 184, Nr. 5, pp. 1272-1279, 1969.
- [82] C. d. O. Henriques, Study of atomic energy shifts induced by Casimir cavities, University of Coimbra, 2014.
- [83] D. Gall, „Electron mean free path in elemental metals,“ *Journal of Applied Physics*, Bd. 119, Nr. 8, 2016.
- [84] C. Teller, „Approximate expression for the electrical resistivity of thin polycrystalline

metallic films,“ *Thin Solid Films*, Bd. 33, Nr. 2, pp. L19-L26, 1976.

- [85] J. Bridge, „Checking the Validity of a Four Point Probe Measurement by Reversing the Input Current,“ *Bridge Technology*, 2020. [Online]. Available: <https://four-point-probes.com/checking-the-validity-of-a-four-point-probe-measurement-by-reversing-the-input-current/>. [Zugriff am 30 März 2024].
- [86] F. Smits, „Measurements of Sheet Resistivity with the Four-Point Probe,“ *Bell Labs Technology Journal*, Bd. 37, Nr. 3, pp. 711-718, 1957.
- [87] A. Technologies, „Digital Multimeters HP 3478A, 3468A/B Data Sheet“.
- [88] G. Moddel, „Supplementary Material: Casimir-cavity-induced conductance changes,“ *Physical Review Research*, Bd. 3, 2021.
- [89] Z. Yang, „High-Performance Piezoelectric Energy Harvesters and Their Applications,“ *Joule*, Bd. 2, Nr. 4, pp. 642-697, 2018.
- [90] I. Dakua, „Piezoelectric Energy Generation and Harvesting at the Nano-Scale: Materials and Devices,“ *Sage Journals: Nanomaterials and Nanotechnology*, Bd. 3, 2013.
- [91] K. Y. Fong, „Phonon heat transfer across a vacuum through quantum fluctuations,“ *Nature*, Bd. 576, pp. 243-247, 2019.
- [92] P. Milonni, „Cavity QED,“ in *The Quantum Vacuum - An Introduction to Quantum Electrodynamics*, Singapur, Academic Press Inc., 1994, pp. 186-189.
- [93] M. Aspelmeyer, Cavity Optomechanics - Nano- and Micromechanical Resonators Interacting with Light, Heidelberg: Springer Verlag, 2014.
- [94] S. Y. Buhmann, „Casimir–Polder Forces in Cavity Quantum Electrodynamics,“ in *Dispersion Forces II - Many-Body Effects, Excited Atoms, Finite Temperature and Quantum Friction*, Springer Verlag, 2013, pp. 183-211.
- [95] R. Gross, „Dielektrische Eigenschaften von Metallen und Halbleitern,“ in *Festkörperphysik*, 3 Hrsg., De Guyter, 2018, pp. 610-618.
- [96] S. Jain, „Evanescence Waves and Surface Plasmons,“ YouTube, 2017. [Online]. Available: https://youtu.be/5fUCJ6MGM2k?si=FS-kxz8HN0HulB_g. [Zugriff am 30 März 2024].
- [97] A. E. Timm, In-situ Oberflächenplasmonenresonanzmessungen elektrochemischer

Prozesse, Darmstadt: Karlsruher Institut für Technologie, 2014.

- [98] F. Intravaia, „Role of surface plasmons in the Casimir effect,“ *Physical Review A*, Bd. 76, Nr. 3, 2007.
- [99] C. Genet, „Casimir force and the quantum theory of lossy optical cavities,“ *Physical Review A*, Bd. 67, Nr. 4, 2003.
- [100] M. Bordag, „The Casimir effect for thin plasma sheets and the role of the surface plasmons,“ *Journal of Physics A: Mathematical and General*, Bd. 39, pp. 6173-6185, 2006.
- [101] G. Tagliabue, „Quantifying the role of surface plasmon excitation and hot carrier transport in plasmonic devices,“ *Nature Communications*, Bd. 9, 2018.
- [102] J. Munday, „Design Considerations for Plasmonic Photovoltaics,“ *Advanced Materials*, Bd. 22, pp. 4794-4808, 2010.
- [103] T. Gong, „Effect of Epsilon-Near-Zero Modes on the Casimir Interaction between Ultrathin Films,“ *Physical Review Letters*, Bd. 130, 2023.
- [104] R. Sundararaman, „Theoretical predictions for hot-carrier generation from surface plasmon decay,“ *Nature Communications*, Bd. 5, 2014.
- [105] J. Shah, Hot Carriers in Semiconductor Nanostructures, 1 Hrsg., E. Inc., Hrsg., Academic Press, 1992.
- [106] M. Ducloy, Quantum Optics of Confined Systems, Springer Dordrecht, 1996.
- [107] J. G. Simmons, „Potential Barriers and Emission-Limited Current Flow Between Closely Spaced Parallel Metal Electrodes,“ *Journal of Applied Physics*, Bd. 35, Nr. 8, pp. 2472-2481, 1964.
- [108] J. G. Simmons, „Generalized Formula for the Electric Tunnel Effect between Similar Electrodes Separated by a Thin Insulating Film,“ *Journal of Applied Physics*, Bd. 34, Nr. 6, pp. 1793-1803, 1963.
- [109] I. Brevik, „Thermal corrections to the Casimir effect,“ *New Journal of Physics*, Bd. 8, 2006.
- [110] T. Espinosa-Ortega, „Semiconductor cavity QED: Band gap induced by vacuum fluctuations,“ *Physical Review A*, Bd. 89, Nr. 6, 2014.

- [111] U. Hilleringmann, Silizium-Halbleitertechnologie - Grundlagen mikroelektronischer Integrationstechnik, 6 Hrsg., S. Vieweg, Hrsg., Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, 2014.
- [112] T. Hattori, „Lihtography,“ in *Ultraclean Surface Processing of Silicon Wafers*, Heidelberg, Springer Verlag, 1998, pp. 398-412.
- [113] I. Brodie, „Particle Beams: Sources, Optics, and Interactions,“ in *The Physics of Micro /Nano-Fabrication*, Springer, Hrsg., New York, Plenum Press, 1992, pp. 55-258.
- [114] M. Herman, Epitaxy - Physical Principles and Technical Implementation, S. S. i. M. Science, Hrsg., Heidelberg: Springer Verlag, 2004.
- [115] W. Fahrner, Nanotechnologie und Nanoprozesse, 2 Hrsg., S. Vieweg, Hrsg., Heidelberg: Springer Verlag, 2017.
- [116] I. Brodie, „Pattern Generation,“ in *The Physics of Micro/Nano-Fabrication*, New York, Plenum Press, 1992, pp. 453-548.
- [117] C. Mack, „Conventional Resist: Exposure and Bake Chemistry,“ in *Fundamental Principles of Optical Lithography: The Science of Microfabrication*, 1 Hrsg., Wiley, 2008, pp. 191-222.
- [118] C. Mack, „Photoresist Development,“ in *Fundamental Principles of Optical Lithography: The Science of Microfabrication*, Wiley, 2008, pp. 257-296.
- [119] T. Hattori, Ultraclean Surface Processing of Silicon Wafers, Heidelberg: Springer Verlag, 1998.
- [120] L. Jackel, „50-nm silicon structures fabricated with trilevel electron beam resist and reactiveion etching,“ *Applied Physics Letters*, Bd. 39, Nr. 3, pp. 268-270, 1981.
- [121] P. Hobbs, *Applied Optics*, Bd. 44, Nr. 32, pp. 6813-6822, 2005.
- [122] B. Pelz, „Demonstration of distributed capacitance compensation in a metal-insulator-metal infrared rectenna incorporating a traveling-wave diode,“ *Journal of Applied Physics*, Bd. 125, Nr. 23, 2019.
- [123] B. Pelz, Traveling-Wave Metal-Insulator-Metal Diodes for Infrared Optical Rectennas, University of Colorado, 2018.
- [124] G. Moddel, „Quantum Vacuum Fluctuation Devices“. United States Patent US 11,133,758

B2, 28 September 2021.

- [125] T. Expert, „Low Resistance Measurement with a SourceMeter: Do I use Current Reversal, Offset Compensation or Delta Mode measurement methods?“, Tektronix, 2016. [Online]. Available: <https://www.tek.com/de/blog/low-resistance-measurement-sourcemeter-do-i-use-current-reversal-offset-compensation-or-delta-m>. [Zugriff am 30 März 2024].